Minimizzazione degli Stati in una Rete Sequenziale Sincrona

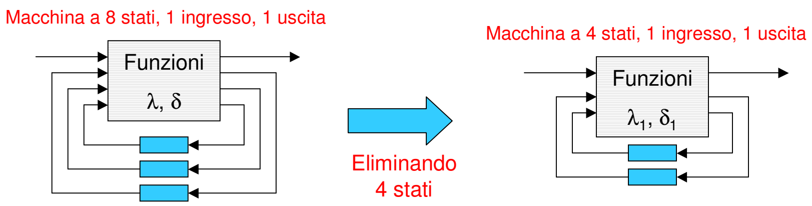
Maurizio Palesi

Sintesi di Reti Sequenziali Sincrone

- Il procedimento generale di sintesi si svolge nei seguenti passi:
  1. Realizzazione del diagramma degli stati a partire dalle specifiche del problema
  2. Costruzione della tabella degli stati
  3. **Minimizzazione del numero degli stati**
  4. Codifica degli stati interni
  5. Costruzione della tabella delle transizioni
  6. Scelta degli elementi di memoria
  7. Costruzione della tabella delle eccitazioni
  8. Sintesi sia della rete combinatoria che realizza la funzione stato prossimo sia di quella che realizza la funzione d'uscita

Motivazioni

- Il numero minimo di elementi di memoria necessari a memorizzare gli stati dell'insieme S è $N_{min} = \lceil \log_2 |S| \rceil$
- Nel modello di una macchina a stati possono esistere degli stati ridondanti
- L'identificazione ed eliminazione degli stati ridondanti comporta
  - ➔ Reti combinatorie meno costose
  - ➔ Minori elementi di memoria

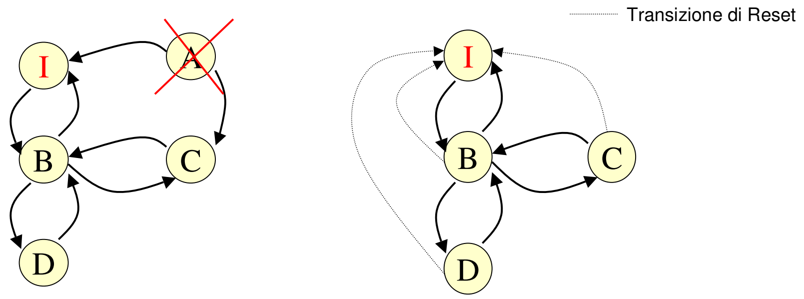


Obiettivi

- Obiettivo della riduzione del numero degli stati è l'individuazione di una macchina minima equivalente, ovvero funzionalmente equivalente e con il minimo numero di stati
- La riduzione viene realizzata in due fasi
  - ➔ Eliminazione degli stati non raggiungibili dallo stato iniziale
  - ➔ Identificazione degli stati
    - ✓ Equivalenti, per le macchine completamente specificate
    - ✓ Compatibili, per le macchine non completamente specificate

Stati Irraggiungibili

- Uno stato è irraggiungibile se non esiste alcuna sequenza di transizione di stato che porti dallo stato iniziale in tale stato

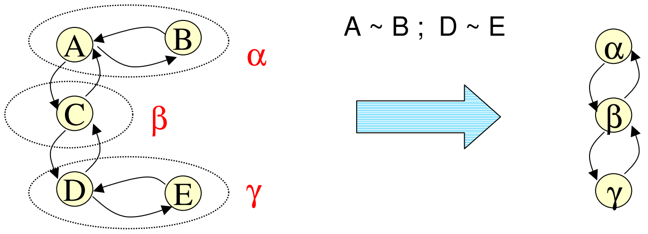


Minimizzazione di Macchine Completamente Specificate
Definizioni

- Siano:
  - I_α una sequenza d' ingresso $\{i_j, \ldots, i_k\}$
  - U_α, sequenza d'uscita ad essa associata ottenuta attraverso λ
  - s_i, s_j due generici stati
- Due stati s_i e s_j appartenenti ad S sono *indistinguibili* se
  $$U_{\alpha,i}=L(s_i, I_\alpha) = L(s_j, I_\alpha) = U_{\alpha,j} \qquad \forall\, I_\alpha$$
  Cioè se per qualsiasi sequenza di ingresso le uscite generate partendo da s_i o da s_j sono le stesse
- L'indistinguibilità tra s_i e s_j si indica con $s_i \sim s_j$
- La relazione di indistinguibilità gode di tre proprietà
  - Riflessiva: $s_i \sim s_i$
  - Simmetrica: $s_i \sim s_j \leftrightarrow s_j \sim s_i$
  - Transitiva: $s_i \sim s_j \wedge s_j \sim s_k \rightarrow s_i \sim s_k$

Minimizzazione di Macchine Completamente Specificate
Classi di Stati Equivalenti

- Due stati indistinguibili sono equivalenti e possono essere sostituiti da un solo stato
- Un gruppo di stati tra loro equivalenti può essere raggruppato in un'unica classe
- L'insieme di classi individuate determina l'insieme di stati della macchina minima equivalente



Minimizzazione di Macchine Completamente Specificate
Regola di Paull-Unger

- La definizione di indistinguibilità è di difficile applicabilità poiché richiederebbe di considerare tutte le sequenze di ingresso
- Regola di Paull-Unger
  - ➔ Due stati sono s_i e s_j sono indistinguibili se e solo se
    - ✓ $\lambda(s_i,i) = \lambda(s_j,i)\ \forall\ i \in I$ ovvero le uscite sono uguali per tutti i simboli d'ingresso
    - ✓ $\delta(s_i,i) = \delta(s_j,i)\ \forall\ i \in I$ ovvero gli stati prossimi sono indistinguibili per tutti i simboli d'ingresso
- La regola è iterativa

Minimizzazione di Macchine Completamente Specificate
Regola di Paull-Unger - Esempio

	0	1
a	d/0	b/1
b	e/0	b/1
c	a/1	c/1
d	b/1	c/0
e	a/1	c/0

a e **b** hanno la stessa uscita
se gli stati futuri **d** ed **e** sono indistinguibili, **a ~ b**

d ed **e** hanno la stessa uscita
se gli stati futuri **a** ed **b** sono indistinguibili, **d ~ e**

a non è indistinguibile da **c**,**d** ed **e** poiché ha una differente uscita

Poiché l'indistinguibilità tra **a** e **b** dipende da quella tra **d** ed **e** e viceversa, possiamo concludere che
a ~ b, d ~ e

Macchina minima equivalente

	0	1
α	γ/0	α/1
β	α/1	β/1
γ	α/1	β/0

Le classi di indistinguibilità sono:
α={a, b}, β={c}, γ={d, e}

Minimizzazione di Macchine Completamente Specificate
Regola di Paull-Unger

- Poiché gli insiemi I ed S hanno cardinalità finita, dopo un numero finito di passi si verifica una delle due condizioni:
  - $s_i \nsim s_j$ se i simboli d'uscita sono diversi o gli stati prossimi sono distinguibili
  - $s_i \sim s_j$ se i simboli d'uscita sono uguali e gli stati prossimi sono indistinguibili

Minimizzazione di Macchine Completamente Specificate
Regola di Paull-Unger - Tabella delle Implicazioni

- Le relazioni di indistinguibilità possono essere identificate mediante la **Tabella delle Implicazioni**
  - ➔ Mette in relazione ogni coppia di stati
  - ➔ È triangolare (proprietà simmetrica) e priva di diagonale principale
- Ogni elemento della tabella contiene
  - ➔ Il simbolo di non equivalenza (X) o di equivalenza (~)
  - ➔ La coppia di stati a cui si rimanda la verifica, se non è possibile pronunciarsi sulla equivalenza degli stati corrispondenti

S1	x		
S2	x	~	
S3	S1,S2	x	x
	S0	**S1**	**S2**

Minimizzazione di Macchine Completamente Specificate
Regola di Paull-Unger - Tabella delle Implicazioni

- Per ogni coppia di stati
  - ➔ Se è marcata come equivalente non è richiesta una ulteriore verifica
  - ➔ Se si rimanda ad un'altra coppia
    - ✓ Se questi stati sono equivalenti anche gli stati della coppia in esame sono equivalenti
    - ✓ Se questi sono non equivalenti anche gli stati della coppia in esame sono non equivalenti
    - ✓ Se gli stati della coppia cui si rimanda dipendono da una coppia ulteriore si ripete il procedimento in modo iterativo
- L'analisi termina quando non sono più possibili eliminazioni
- Le coppie rimaste sono equivalenti

Minimizzazione di Macchine Completamente Specificate

Regola di Paull-Unger - Tabella delle Implicazioni

	0	1
a	g/0	e/1
b	c/0	a/1
c	e/1	g/0
d	b/0	e/1
e	g/0	a/1
f	d/1	f/0
g	a/1	g/0

b	cg ae					
c	x	x				
d	bg	bc ae	x			
e	~	cg	x	bg ae		
f	x	x	de fg	x	x	
g	x	x	ae	x	x	ad
	a	b	c	d	e	f

Minimizzazione di Macchine Completamente Specificate

Regola di Paull-Unger - Tabella delle Implicazioni

b	cg ae					
c	x	x				
d	bg	bc ae	x			
e	~	cg	x	bg ae		
f	x	x	de fg	x	x	
g	x	x	ae	x	x	ad
	a	b	c	d	e	f

Analisi delle coppie degli stati

- **b-a**: c-g è indistinguibile se lo è a-e → b~a
- **d-a**: b-g è distinguibile → d~a
- **d-b**: b-c è distinguibile → d~b
- **e-b**: c-g è indistinguibile se lo è a-e → b~e
- **e-d**: b-g è distinguibile → e~d
- **f-c**: d-e è indistinguibile se lo è b-g → f~c
- **g-c**: a-e è indistinguibile → g~c
- **g-f**: a-d è indistinguibile se lo è b-g → g~f

Minimizzazione di Macchine Completamente Specificate

Regola di Paull-Unger - Tabella delle Implicazioni

b	~					
c	x	x				
d	x	x	x			
e	~	~	x	x		
f	x	x	x	x	x	
g	x	x	~	x	x	x
	a	b	c	d	e	f

Classi di indistinguibilità

α = {a,b,e}
β = {c,g}
γ = {d}
δ = {f}

Tabella degli stati minima equivalente

	0	1
α	β /0	α /1
β	α /1	β /0
γ	α /0	α /1
δ	γ /1	δ /0

Minimizzazione di Macchine Completamente Specificate

Regola di Paull-Unger - Osservazioni

- Per le FSM completamete specificate l’algoritmo di Paull-Unger
  - ➔ Consente di identificare in maniera esatta la FSM minima equivalente
    - ✓ La partizione di equivalenza è unica (ogni stato appartiene ad una ed una sola classe)
  - ➔ Ha una complessità esponenziale con il numero di stati

Macchine non completamente specificate
Definizioni

- Sono macchine in cui per alcune configurazioni degli ingressi e stati correnti non sono specificati gli stati futuri e/o le configurazioni d'uscita
- Due stati s_i e s_j si dicono compatibili ($s_i \approx s_j$)
  - ➔ Se, assunti come stati iniziali, per ogni possibile sequenza di ingresso (grande a piacere) danno luogo a sequenze di simboli d'uscita identici a meno di condizioni di indifferenza

Macchine non completamente specificate
Regola di Paull-Unger Estesa

- La compatibilità è una relazione meno forte di quella di indistinguibilità, non vale la proprietà transitiva

	0	1
A	C/1	A/-
B	C/-	A/1
C	C/0	A/-

A≈B; B≈C ma A $\not\approx$ C

- La regola di Paull-Unger è stata estesa per trattare il caso di macchine non completamente specificate
- Due stati s_i e s_j sono compatibili se e solo se
  - ➔ $\lambda(s_i,i) = \lambda(s_j,i)\ \forall\ i \in I$ ovunque sono entrambi specificati
  - ➔ $\delta(s_i,i) \approx \delta(s_j,i)\ \forall\ i \in I$ ovunque sono entrambi specificati
- La suddetta definizione è ricorsiva

Macchine non completamente specificate
Tabella delle Implicazioni

- Le relazioni di compatibilità possono essere identificate mediante la Tabella delle Implicazioni
- Ogni elemento della tabella contiene:
  - ➔ **X** se in almeno una colonna vi sono uscite diverse (stati incompatibili)
  - ➔ S_iS_j se le uscite sono tutte uguali ma i nomi degli stati futuri (S_i, S_j) sono diversi e non coincidono con quelli della coppia di stati in esame
  - ➔ $\approx$ Altrimenti (stati compatibili)

Macchine non completamente specificate
Tabella delle Implicazioni

	0	1
a	e/0	a/0
b	d/0	b/0
c	e/-	c/-
d	a/1	a/1
e	a/-	b/-

	a	b	c	d
b	de			
c	$\approx$	de		
d	x	x	ae ac	
e	ab	ad	ae bc	ab

Vincoli

$a \approx b$ se $d \approx e$

$a \approx e$ se $a \approx b$

$b \approx c$ se $d \approx e$

$b \approx e$ se $a \approx d$ $\rightarrow b \not\approx e$

$c \approx d$ se $a \approx e$, $a \approx c$

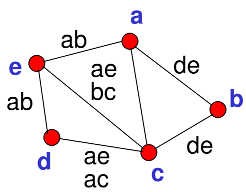
$c \approx e$ se $a \approx e$, $b \approx c$

$d \approx e$ se $a \approx b$

Macchine non completamente specificate
Grafo di Compatibilità

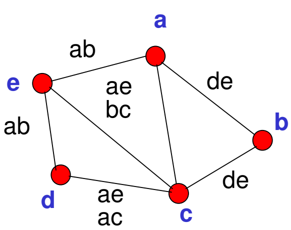
- Grafo di Compatibilità (GdC)
  - ➔ I nodi corrispondono agli stati
  - ➔ Due nodi n_i e n_j sono tra loro collegati se gli stati ad essi associati sono compatibili o la loro compatibilità dipende dalla compatibilità del loro stato prossimo
  - ➔ Per ogni arco devono essere riportati i vincoli sulla compatibilità degli stati prossimi

b	de			
c	≈	de		
d	x	x	ae ac	
e	ab	x	ae bc	ab
	a	b	c	d



Macchine non completamente specificate
Definizioni

- **Classe di compatibilità (CC)**
  - ➔ Un insieme di stati compatibili tra loro a coppie
  - ➔ Sul GdC è rappresentata da un poligono completo
  - ➔ Le classi di compatibilità tra stati non sono necessariamente disgiunte



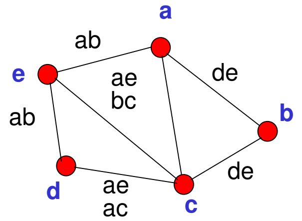
a,b,c
a,c,e
c,d,e
a,b
c,e
…

Sono tutti esempi di classi di compatibilità

Macchine non completamente specificate
Definizioni

■ Classe di massima compatibilità (CMC)

- ➔ Classe di compatibilità non contenuta in nessun altre classe
- ➔ Sul GdC è individuata da un poligono completo non contenuto in nessun altro

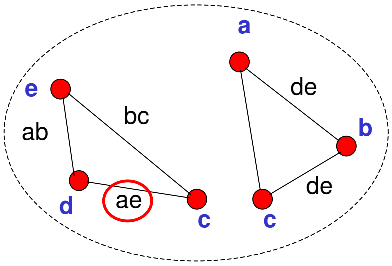


✓{a,b,c}: è una CMC
✓{a,c,e}: è una CMC
✓{c,d,e}: è una CMC

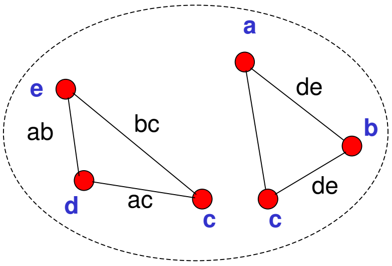
Macchine non completamente specificate
Definizioni

■ Insieme chiuso di classi di compatibilità

- ➔ Insieme di classi di compatibilità i cui vincoli siano contenuti in almeno una classe dell'insieme. Ciò garantisce che tutti i vincoli sono rispettati



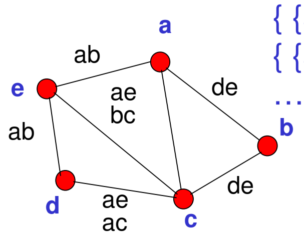
Non è un insieme chiuso di CC perché il vincolo ae non è contenuto in nessuna CC



E' un insieme chiuso di CC perché tutti i vincoli sono contenuti in almeno una CC

Macchine non completamente specificate
Definizioni

- **Copertura della tabella degli stati**
  - ➔Insieme di CC per cui ogni stato della tabella degli stati è contenuto in almeno una CC



{ {a,b,c},{a,c,e},{c,d,e} }
{ {a,b},{b,c},{a,c,e,},{c,d,e} }
…

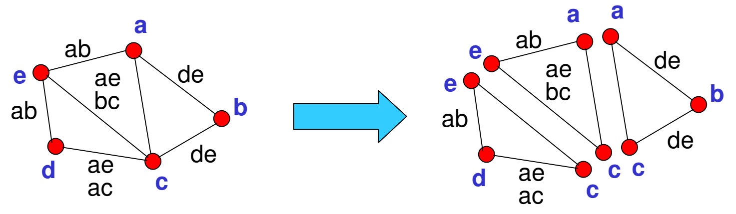
Sono tutti esempi di copertura

Macchine non completamente specificate
Minimizzazione del Numero di Stati

- Minimizzare il numero degli stati significa
  - ➔Trovare il più piccolo insieme chiuso di classi di compatibilità che copre l'insieme di stati su cui la macchina è definita
- L'insieme di tutte le classi di massima compatibilità è chiuso e copre l'insieme degli stati della macchina
- Se si associa uno stato ad ogni classe di massima compatibilità si ottiene una nuova macchina con un numero di stati
  - ➔Possibilmente minore di quello di partenza
  - ➔Non necessariamente minimo

Macchine non completamente specificate

Ricerca delle Classi di Massima Compatibilità



- Una copertura ammissibile è data dall'insieme delle classi di massima compatibilità:
  - ➔ α={a,b,c} β ={a,c,e} γ ={c,d,e}
- Tale copertura non è minima
- Le classi di questa copertura condividono diversi stati

Macchine non completamente specificate

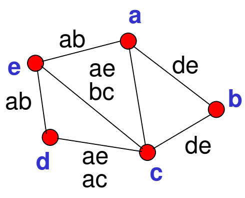
Un'euristica per la ricerca della copertura minima

- **1.** Inizializzare una lista L1 vuota
- **2.** Finchè il grafo non è vuoto:
  - ➔ **a.** Individuare e ordinare le classi di massima compatibilità presenti sul grafo per dimensione
  - ➔ **b.** Individuare la classe di compatibilità massima di dimensione massima presente sul grafo
  - ➔ **c.** Inserire nella lista L1 tutti i vincoli presenti nella classe di compatibilità considerata
  - ➔ **d.** Eliminare dalla lista L1 e dal grafo i vincoli soddisfatti dalla classe considerata
  - ➔ **e.** Eliminare dal grafo tutti i nodi (ed i relativi archi) appartenenti alla classe di compatibilità considerata che non appartengono a nessun vincolo presente nella lista L1 e/o nel grafo
- **3.** Le classi così individuate formano una partizione di compatibilità (insieme di classi di compatibilità chiuso)

Macchine non completamente specificate

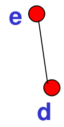
Un'euristica per la ricerca della copertura minima

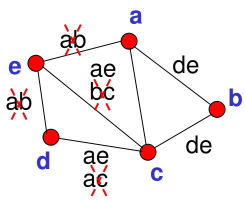
Grafo di partenza Passo 1



Passo 1

a) abc, ace, cde
b) abc
c) L1={de}
d) L1={de}
e)

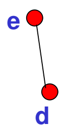




Macchine non completamente specificate

Un'euristica per la ricerca della copertura minima

Grafo di partenza Passo 2



Passo 2

a) de
b) de
c) L1={de}
d) L1={}
e) grafo vuoto

Copertura individuata: {abc, ed}

Tabella degli stati iniziale

	0	1
a	e/0	a/0
b	d/0	b/0
c	e/-	c/-
d	a/1	a/1
e	a/-	b/-

Classi compatibilità che coprono tutti gli stati e che formano un insieme chiuso

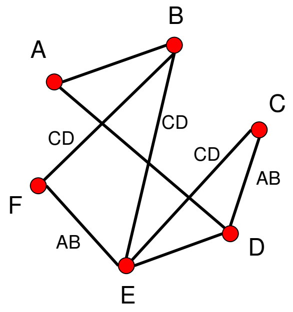
α = {a,b,c}
β = {d,e}

Tabella degli stati ridotta

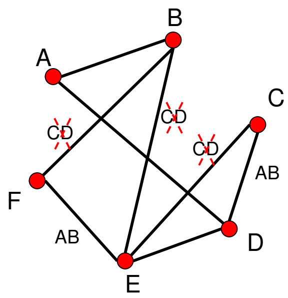
	0	1
α	β /0	α/0
β	α /1	α /1

Macchine non completamente specificate
Esempio

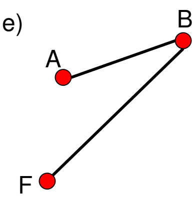
Grafo di partenza Passo 1



Passo 1
a) CDE, BEF, AB, AD
b) CDE
c) L1={AB, CD}
d) L1={AB}

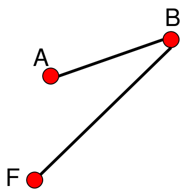


e)

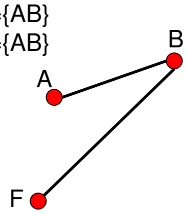


Macchine non completamente specificate
Esempio

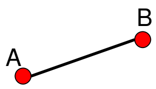
Grafo di partenza Passo 2



Passo 2
a) BF, AB
b) BF
c) L1={AB}
d) L1={AB}



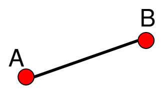
e)



Macchine non completamente specificate

Esempio

Grafo di partenza Passo 3



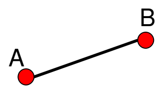
Passo 3

a) AB

b) AB

c) L1={AB}

d) L1={}



e) Grafo vuoto

Copertura individuata: {cde, bf, ab}