

---

# Sintesi di Reti Sequenziali Sincrone

Maurizio Palesi

## Macchina Sequenziale

---

- Una **macchina sequenziale** è definita dalla quintupla  $(I, U, S, \delta, \lambda)$  dove:
  - **I** è l'insieme finito dei simboli d'ingresso
  - **U** è l'insieme finito dei simboli d'uscita
  - **S** è l'insieme finito e non vuoto degli stati
  - **$\delta$**  è la funzione stato prossimo
  - **$\lambda$**  è la funzione d'uscita
- La funzione stato prossimo  $\delta: S \times I \rightarrow S$  associa ad ogni stato presente per per ogni simbolo di ingresso uno stato futuro
- La funzione d'uscita  $\lambda$  genera un simbolo d'uscita
  - **Macchina di Mealy**: L'uscita dipende sia dallo stato sia dall'ingresso ( $\lambda: S \times I \rightarrow U$ )
  - **Macchina di Moore**: L'uscita dipende solamente dallo stato ( $\lambda: S \rightarrow U$ )



## Tabella degli Stati

- Una **Macchina a Stati Finiti** (FSM) può essere descritta mediante la **Tabella degli stati** in cui
  - Gli indici di colonna sono i simboli di ingresso  $i_\alpha \in I$
  - Gli indici di riga sono i simboli dello stato presente  $s_j \in S$
- Gli elementi della tabella sono
  - La coppia  $\{u_\beta, s_k\}$  con  $u_\beta = \lambda(i_\alpha, s_j)$  e  $s_k = \delta(i_\alpha, s_j)$  (**Macchine di Mealy**)
  - Il simbolo stato prossimo  $s_k = \delta(i_\alpha, s_j)$  (**Macchine di Moore**)
    - ✓ Nelle macchine di Moore i simboli d'uscita sono associati allo stato presente

## Tabella degli stati

### ■ Macchina di Mealy

		Ingresso		
		$i_1$	$i_2$	...
Stato attuale	$s_1^t$	$s_j^{t+1}/u_j$	$s_k^{t+1}/u_k$	...
	$s_2^t$	$s_m^{t+1}/u_m$	$s_n^{t+1}/u_n$	...
	...	...	...	...

### ■ Macchina di Moore

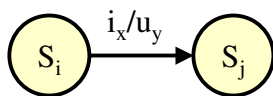
		Ingresso			Uscita
		$i_1$	$i_2$	...	
Stato attuale	$s_1^t$	$s_j^{t+1}$	$s_k^{t+1}$	...	$u_1$
	$s_2^t$	$s_m^{t+1}$	$s_n^{t+1}$	...	$u_2$
	...	...	...	...	...

# Diagramma degli Stati

- Spesso la stesura della tabella degli stati è preceduta dalla costruzione di una rappresentazione grafica equivalente denominata *Diagramma degli stati*
- Il diagramma degli stati è un grafo orientato  $G(V,E,L)$ 
  - **V**: Insieme dei nodi
    - ✓ Ogni nodo rappresenta uno stato
    - ✓ Ad ogni nodo è associato un simbolo d'uscita (macchine di Moore)
  - **E**: Insieme degli archi
    - ✓ Ogni arco rappresenta una transizione di stato
  - **L**: Insieme degli:
    - ✓ Ingressi e Uscite (macchine di Mealy)
    - ✓ Ingressi (macchine di Moore)

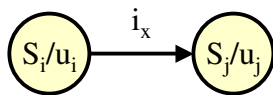
# Da Diagramma a Tabella degli Stati

## Macchine di Mealy



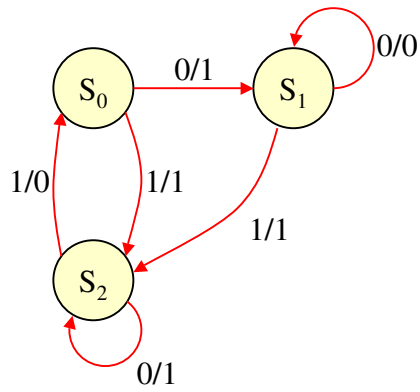
		Ingresso		
		...	$i_x$	...
Stato attuale	...	...	...	...
	$s_i$	...	$s_j/u_y$	...
	...	...	...	...

## Macchine di Moore



		Ingresso			Uscita
		...	$i_x$	...	
Stato attuale	...	...	...	...	...
	$s_i$	...	$s_j$	...	$u_j$
	...	...	...	...	...

## Macchina di Mealy - Esempio

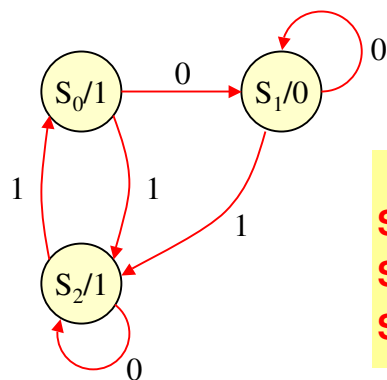


	0	1
S0	S <sub>1</sub> /1	S <sub>2</sub> /1
S1	S <sub>1</sub> /0	S <sub>2</sub> /1
S2	S <sub>2</sub> /1	S <sub>0</sub> /0

Maurizio Palesi

9

## Macchina di Moore - Esempio



	0	1	
S0	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	1
S1	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	0
S2	S <sub>2</sub>	S <sub>0</sub>	1

Maurizio Palesi

10

## Sintesi di Reti Sequenziali Sincrone

- Il procedimento generale di sintesi si svolge nei seguenti passi:
  1. Realizzazione del diagramma degli stati a partire dalle specifiche del problema
  2. Costruzione della tabella degli stati
  3. *Minimizzazione del numero degli stati*
  4. Codifica degli stati interni
  5. Costruzione della tabella delle transizioni
  6. Scelta degli elementi di memoria
  7. Costruzione della tabella delle eccitazioni
  8. Sintesi sia della rete combinatoria che realizza la funzione stato prossimo sia di quella che realizza la funzione d'uscita

## Codifica degli Stati Interni

- Il processo di codifica degli stati ha l'obiettivo di identificare per ogni rappresentazione simbolica dello stato una corrispondente rappresentazione binaria
- In seguito alla codifica la *Tabella degli stati* viene trasformata in *Tabella delle Transizioni*
- In questa fase è necessario affrontare i seguenti problemi
  - Scelta del **codice**
    - ✓ A minimo numero di bit
    - ✓ One-Hot
    - ✓ Distanza Minima
  - Identificazione della codifica di ogni stato

## Codifica degli Stati Interni

- Una volta scelto il codice, la codifica degli stati influisce sia sull'**area** sia sulle **prestazioni** del dispositivo
- Il problema della identificazione della codifica ottima è un problema NP-completo
- Il numero di possibili codifiche per il codice a minimo numero di bit è:

$$\frac{(2^{\lceil \log |S| \rceil} - 1)!}{(2^{\lceil \log |S| \rceil} - |S|)! * \lceil \log |S| \rceil!}$$

- **Es.:** Per  $|S|=8$  si hanno 840 possibili codifiche
- Spesso, scelto il codice si preferisce non ricorrere ad alcuna strategia di codifica

## Codifica degli Stati Interni

- **Binario Naturale**
  - Il numero di bit è minimo
  - Al primo stato corrisponde la configurazione di bit associata a 0, al secondo stato corrisponde la configurazione di bit associata a 1, ...
  - L'ordinamento degli stati è quello determinato in fase di realizzazione della tabella degli stati
- **One-Hot**
  - Il numero di bit è pari al numero degli stati
  - In ogni codifica un solo bit assume il valore 1, tutti gli altri assumono valore 0

	Binario naturale Hot-One	
S0	00	0001
S1	01	0010
S2	10	0100
S3	11	1000

# Esempio

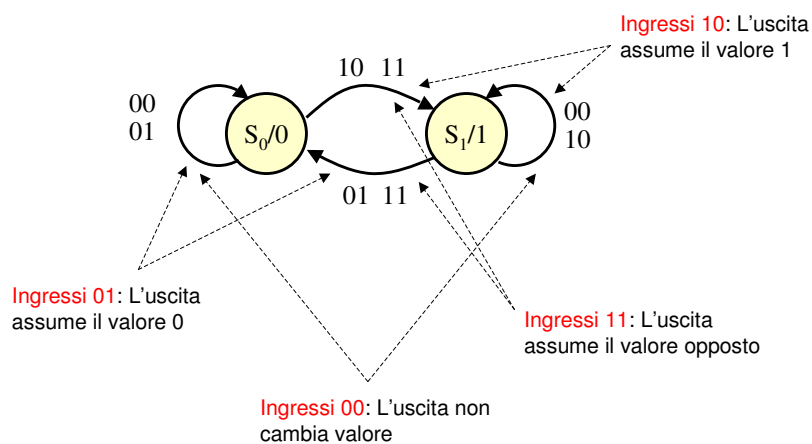
## ■ Specifica

Realizzare la sintesi di un sistema con **due ingressi** ed **una uscita** che abbia il seguente comportamento:

- Ingressi 00: l'uscita non cambia valore
- Ingressi 01: l'uscita assume il valore 0
- Ingressi 10: l'uscita assume il valore 1
- Ingressi 11: l'uscita assume il valore opposto

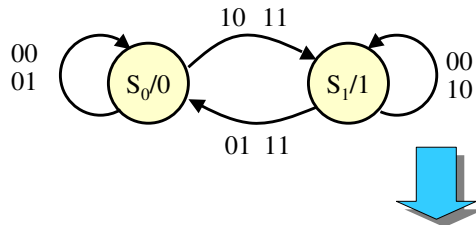
# Esempio

## ■ Passo 1 (Diagramma degli stati)



# Esempio

## Passo 2 (Tabella degli stati)



		Ingresso				Uscita
		00	01	11	10	
Stato	S <sub>0</sub>	S <sub>0</sub>	S <sub>0</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>1</sub>	0
	S <sub>1</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>0</sub>	S <sub>0</sub>	S <sub>1</sub>	1

Maurizio Palesi

17

# Esempio

		Ingresso				Uscita
		00	01	11	10	
Stato	S <sub>0</sub>	S <sub>0</sub>	S <sub>0</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>1</sub>	0
	S <sub>1</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>0</sub>	S <sub>0</sub>	S <sub>1</sub>	1

## Passo 4 (Codifica degli stati interni)

→ Es. Codifica Naturale

✓ S<sub>0</sub> = 0 S<sub>1</sub> = 1

S<sub>0</sub> = 1 S<sub>1</sub> = 0

## Passo 5 (Tabella delle transizioni)

		Ingresso				Uscita
		00	01	11	10	
Stato	0	0	0	1	1	0
	1	1	0	0	1	1

		Ingresso				Uscita
		00	01	11	10	
Stato	1	1	1	0	0	0
	0	0	1	1	0	1

Maurizio Palesi

18

## Esempio

		Ingresso				Uscita
		00	01	11	10	
Stato	S <sub>0</sub>	S <sub>0</sub>	S <sub>0</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>1</sub>	0
	S <sub>1</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>0</sub>	S <sub>0</sub>	S <sub>1</sub>	1

### ■ Passo 4 (Codifica degli stati interni)

→ Es. One-Hot

✓ S<sub>0</sub> = 01      S<sub>1</sub> = 10

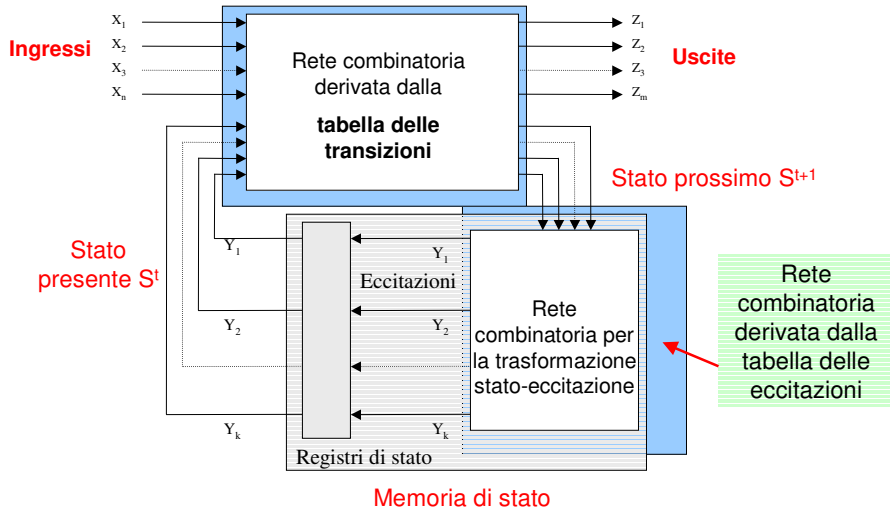
### ■ Passo 5 (Tabella delle transizioni)

		Ingresso				Uscita
		00	01	11	10	
Stato	01	01	01	10	10	0
	10	10	01	01	10	1

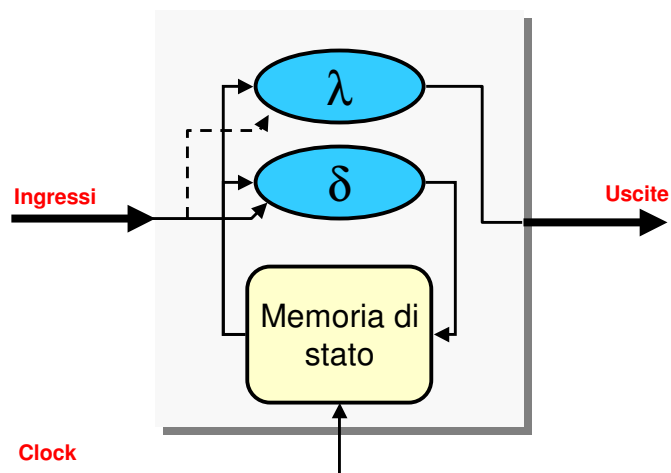
## Scelta degli Elementi di Memoria

- La **tabella delle transizioni** descrive la relazione tra i bit dello stato presente e quelli dello stato futuro
  - La configurazione in bit dello stato presente è in diretta corrispondenza con l'uscita degli elementi di memoria
  - La configurazione in bit dello stato futuro indica ciò che si vuole ottenere
- Cambiando il tipo dei bistabili variano i segnali che bisogna generare per realizzare la transizione stato presente-stato futuro
- I segnali di ingresso di un bistabile prendono il nome di **eccitazioni**
- La tabella delle eccitazione di un bistabile rappresenta lo strumento per passare dalla tabella delle transizioni alla tabella delle eccitazioni di una specifica macchina a stati

## Scelta degli Elementi di Memoria



## Scelta degli Elementi di Memoria



## Tabelle delle Transizioni ed Eccitazioni

### ■ Tabelle delle Transizioni

C	S	R	Q*
0	-	-	Q
1	0	0	Q
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	-

C	J	K	Q*
0	-	-	Q
1	0	0	Q
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	Q

C	D	Q*
0	-	Q
1	0	0
1	1	1

C	T	Q*
0	-	Q
1	0	Q
1	1	Q

### ■ Tabelle delle Eccitazioni

Q	Q*	C	S	R
0	0	0	-	-
1	1	0	-	-
0	0	1	0	-
0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
1	1	1	-	0

Q	Q*	C	J	K
0	0	0	-	-
1	1	0	-	-
0	0	1	0	-
0	1	1	1	-
1	0	1	-	1
1	1	1	-	0

Q	Q*	C	D
0	0	0	-
1	1	0	-
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Q	Q*	C	T
0	0	0	-
1	1	0	-
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

## Scelta Bistabile e Costruzione Tabella delle Eccitazioni

### ■ (Passo 3) Codifica Naturale

$$S_0=0, S_1=1$$

### ■ (Passo 5) Tabella delle Transizioni

		I <sub>H</sub> L				Uscita
		00	01	11	10	
Q	0	0	0	1	1	0
	1	1	0	0	1	1

### ■ (Passo 6) Scelta del Bistabile

Q	Q*	C	S	R
0	0	0	-	-
1	1	0	-	-
0	0	1	0	-
0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

### ■ (Passo 7) Costruzione Tabella delle eccitazioni

		I <sub>H</sub> L				Uscita
		00	01	11	10	
Q	0	0-	0-	10	10	0
	1	-0	01	01	-0	1

# Sintesi

		$I_H I_L$				Uscita
		00	01	11	10	
Stato	0	0-	0-	10	10	0
	1	-0	01	01	-0	1

$U = Q$   
Tabella delle eccitazioni

## ■ (Passo 8) Sintesi

Mappa di Karnaugh per S

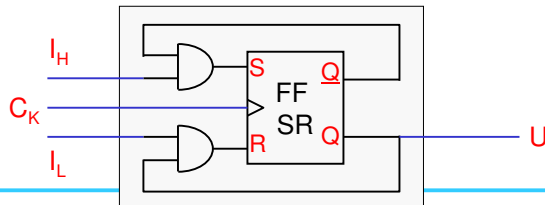
		$I_H I_L$			
		00	01	11	10
Q	0	0	0	1	1
	1	-	0	0	-

$S = I_H Q$

Mappa di Karnaugh per R

		$I_H I_L$			
		00	01	11	10
Q	0	-	-	0	0
	1	0	1	1	0

$R = I_L Q$



Maurizio Palesi

25

# Scelta Bistabile e Costruzione Tabella delle Eccitazioni

## ■ (Passo 3) Codifica Naturale

$$S_0=0, S_1=1$$

## ■ (Passo 5) Tabella delle Transizioni

		$I_H I_L$				Uscita
		00	01	11	10	
Q	0	0	0	1	1	0
	1	1	0	0	1	1

## ■ (Passo 6) Scelta del Bistabile

Q	Q*	C	J	K
0	0	0	-	-
1	1	0	-	-
0	0	1	0	-
0	1	1	1	-
1	0	1	-	1
1	1	1	1	0

## ■ (Passo 7) Costruzione Tabella delle eccitazioni

		$I_H I_L$				Uscita
		00	01	11	10	
Q	0	0-	0-	1-	1-	0
	1	-0	-1	-1	-0	1

Maurizio Palesi

26

# Sintesi

Q		$I_H I_L$				Uscita
		00	01	11	10	
0	1	0-	0-	1-	1-	0
1	1	-0	-1	-1	-0	1

Tabella delle eccitazioni

$U = Q$

## ■ (Passo 8) Sintesi

Mappa di Karnaugh per J

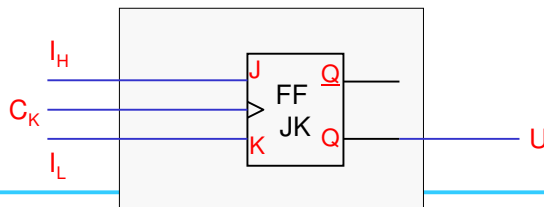
Q		$I_H I_L$			
		00	01	11	10
0	1	0	0	1	1
1	1	-	-	-	-

$J = I_H$

Mappa di Karnaugh per K

Q		$I_H I_L$			
		00	01	11	10
0	1	-	-	-	-
1	1	0	1	1	0

$R = I_L$



Maurizio Palesi

27

# Scelta Bistabile e Costruzione Tabella delle Eccitazioni

## ■ (Passo 3) Codifica Naturale

$$S_0=0, S_1=1$$

## ■ (Passo 5) Tabella delle Transizioni

Q		$I_H I_L$				Uscita
		00	01	11	10	
0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	1

## ■ (Passo 6) Scelta del Bistabile

Q	Q*	C	D
0	0	0	-
1	1	0	-
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	1

## ■ (Passo 7) Costruzione Tabella delle eccitazioni

Q		$I_H I_L$				Uscita
		00	01	11	10	
0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	1

Maurizio Palesi

28

# Sintesi

		I <sub>H</sub> L				Uscita
		00	01	11	10	
Q	0	0	0	1	1	0
	1	1	0	0	1	1

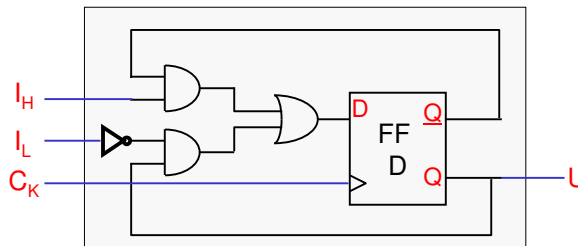
U = Q  
 Tabella delle eccitazioni

## (Passo 8) Sintesi

Mappa di Karnaugh per D

		I <sub>H</sub> L			
		00	01	11	10
Q	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	1

$$D = I_H Q + \bar{I}_L Q$$



Maurizio Palesi

29

# Scelta Bistabile e Costruzione Tabella delle Eccitazioni

## (Passo 3) Codifica Naturale

$$S_0=0, S_1=1$$

## (Passo 5) Tabella delle Transizioni

		I <sub>H</sub> L				Uscita
		00	01	11	10	
Q	0	0	0	1	1	0
	1	1	0	0	1	1

## (Passo 6) Scelta del Bistabile

Q	Q*	C	T
0	0	0	-
1	1	0	-
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

## (Passo 7) Costruzione Tabella delle eccitazioni

		I <sub>H</sub> L				Uscita
		00	01	11	10	
Q	0	0	0	1	1	0
	1	0	1	1	0	1

Maurizio Palesi

30

# Sintesi

		$I_H I_L$				Uscita
		00	01	11	10	
Q	0	0	0	1	1	0
	1	0	1	1	0	1

$\rightarrow U = Q$   
 Tabella delle eccitazioni

## ■ (Passo 8) Sintesi

Mappa di Karnaugh per T

		$I_H I_L$			
		00	01	11	10
Q	0	0	0	1	1
	1	0	1	1	0

$$T = I_H Q + I_L Q$$

