
Metodo di Quine-McCluskey

Maurizio Palesi

Definizioni

- Date due funzioni $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ si dice che f copre g (oppure g implica f) e si scrive $f \supset g$ se $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ quando $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$

x	y	f(x,y)	g(x,y)
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	1

- Se P è il prodotto di letterali e f copre P , si dice che P è un **implicante** di f
 - $P = xy$ è un implicante di f

Implicanti Primi e Mappe di Karnaugh

- Si chiama *Implicante Primo* di una funzione f un implicante non coperto da altri implicanti di f con un numero minore di letterali

Mappa di Karnaugh

		ab			
		00	01	11	10
cd	00	1			
	01	1	1		
	11	1	1	1	1
	10	1			1

$\underline{a}d$ e $a\underline{b}$ sono implicanti primi perché non sono coperti da nessun altro implicante con un numero minore di letterali

$\underline{a}bd$ non è un implicante primo perché è coperto dall'implicante $\underline{a}d$ formato da un numero minore di letterali

Implicanti Essenziali e Mappe di Karnaugh

- Si chiama *Implicante Primo Essenziale* di una funzione f è un implicante primo che copre almeno un mintermine non coperto da altri implicanti di f

Mappa di Karnaugh

		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	1		
	01	1	1		1
	11	0	1	1	1
	10	0	1	1	

$\underline{a}b$ è un implicante primo essenziale perché copre il mintermine $\underline{a}bcd$ non coperto da nessun altro implicante

bc è un implicante primo essenziale perché copre il mintermine $abc\underline{d}$ non coperto da nessun altro implicante

Introduzione al Metodo di Quine-McCluskey

- Metodo di minimizzazione tabellare
- Facile da tradurre in un algoritmo (metodo sistematico)
- Il numero di variabili trattate è teoricamente illimitato
- Facile da estendere al caso di funzioni a più di una uscita
- Consiste di **due fasi**
 - Ricerca degli implicant primari
 - Ricerca della copertura ottima
- Poiché queste due fasi hanno complessità esponenziale è praticamente impossibile trovare la soluzione ottima per un numero di variabili che supera l'ordine di una decina

Metodo di Quine-McCluskey

- L'insieme di implicant primari di una funzione f è ottenuta applicando ripetutamente, in tutti i modi possibili, la semplificazione $x_i P + \bar{x}_i P = P$
 - dove P è un prodotto di letterali scelti tra $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ in forma diretta o negata
- L'insieme di implicant è ottenuto partendo dai mintermini della funzione
- Le semplificazioni vengono applicate ai termini che differiscono in una sola posizione

Metodo di Quine-McCluskey (I fase)

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



x	y	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



x	y	z
-	1	1
1	-	1

- Si confrontano esaustivamente tutti i termini prodotto (ricavati dal passo precedente)
- Si semplificano i termini che differiscono in una sola posizione
- Si marcano (✓) i termini semplificati per indicare che gli implicanti non sono primi
- Si crea un nuovo insieme di termini prodotto da confrontare e si ripete il procedimento
- Il processo ha termine quando non ci sono elementi da semplificare

Maurizio Palesi

7

Metodo di Quine-McCluskey (I fase)

Formalizzazione

- Per ridurre il numero di confronti, i termini vengono divisi in **gruppi con elementi aventi lo stesso numero di 1**
- I confronti vengono svolti solo tra termini relativi a **gruppi che differiscono per un solo 1**
- Ad ogni termine **associamo un etichetta** che rappresenta l'insieme di mintermini che esso ricopre

Gruppo	a	b	c	d	Etichetta
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	2
	0	1	0	0	4
2	0	0	1	1	3
	0	1	1	0	6
3	1	1	0	0	12
	0	1	1	1	7
	1	1	1	0	14

Vengono confrontati i gruppi:

- 0 e 1
- 1 e 2
- 2 e 3

Maurizio Palesi

8

Metodo di Quine-McCluskey (I fase)

Formalizzazione

1. Si suddividono i mintermini in gruppi G_i^0 contenenti termini con i 1
 - Ciascun mintermine è etichettato con l'intero equivalente
2. Partendo dal gruppo di indice i minimo, fino all'indice massimo -1 , vengono confrontati i termini dei gruppo G_i^k con quelli del gruppo G_{i+1}^k
 - Se due termini differiscono solo nella posizione j , essi vengono combinati in un unico termine che viene inserito in un nuovo gruppo G_i^{k+1}
 - In posizione j viene inserito un trattino "-"
 - I due termini vengono spuntati per indicare che non sono implicanti primi
 - L'etichetta di questo nuovo termine è ottenuto concatenando le etichette dei termini di partenza
3. Se sono possibili altre combinazioni, k è incrementato e si ritorna al passo 2.

Maurizio Palesi

9

Metodo di Quine-McCluskey (I fase)

Esempio

$$f(a,b,c,d) = \Sigma(1,9,11,12,13,14,15)$$

Gr.	a	b	c	d	Etic.
G_1^0	0	0	0	1	1
G_2^0	1	0	0	1	9
	1	1	0	0	12
	1	0	1	1	11
G_3^0	1	1	0	1	13
	1	1	1	0	14
G_4^0	1	1	1	1	15

Gr.	a	b	c	d	Etic.
G_1^1	-	0	0	1	1,9
	1	0	-	1	9,11
G_2^1	1	-	0	1	9,13
	1	1	0	-	12,13
	1	1	-	0	12,14
	1	-	1	1	11,15
G_3^1	1	1	-	1	13,15
	1	1	1	-	14,15

Gr.	a	b	c	d	Etic.
G_1^2	1	-	-	1	9,11,13,15
G_2^2	1	1	-	-	12,13,14,15

Implicanti primi:

→ P0(1,9): bcd

→ P1(9,11,13,15): ad

→ P2(12,13,14,15): ab

Maurizio Palesi

10

Metodo di Quine-McCluskey (I fase)

Esempio (Comparatore A <= B, 2 bit)

a ₁	a ₀	b ₁	b ₀	o
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1



Gr.	a ₁	a ₀	b ₁	b ₀	Etic.
G ₀ ⁰	0	0	0	0	0
G ₁ ⁰	0	0	0	1	1
	0	0	1	0	2
	0	0	1	1	3
G ₂ ⁰	0	1	0	1	5
	0	1	1	0	6
	1	0	1	0	10
G ₃ ⁰	0	1	1	1	7
	1	0	1	1	11
G ₄ ⁰	1	1	1	1	15

Maurizio Palesi

11

Metodo di Quine-McCluskey (I fase)

Esempio (Comparatore A <= B, 2 bit)

Gr.	a ₁	a ₀	b ₁	b ₀	Etic.
G ₀ ⁰	0	0	0	0	0
G ₁ ⁰	0	0	0	1	1
	0	0	1	0	2
	0	0	1	1	3
G ₂ ⁰	0	1	0	1	5
	0	1	1	0	6
	1	0	1	0	10
G ₃ ⁰	0	1	1	1	7
	1	0	1	1	11
G ₄ ⁰	1	1	1	1	15



Gr.	a ₁	a ₀	b ₁	b ₀	Etic.
G ₀ ¹	0	0	0	-	0,1
	0	0	-	0	0,2
	0	0	-	1	1,3
	0	-	0	1	1,5
G ₁ ¹	0	0	1	-	2,3
	0	-	1	0	2,6
	-	0	1	0	2,10
	0	-	1	1	3,7
	-	0	1	1	3,11
G ₂ ¹	0	1	-	1	5,7
	0	1	1	-	6,7
	1	0	1	-	10,11
G ₃ ¹	-	1	1	1	7,15
	1	-	1	1	11,15

Maurizio Palesi

12

Metodo di Quine-McCluskey (I fase)

Esempio (Comparatore $A \leq B$, 2 bit)

Gr.	a_1	a_0	b_1	b_0	Etic.	
G_0^1	0	0	0	-	0,1	✓
	0	0	-	0	0,2	✓
G_1^1	0	0	-	1	1,3	✓
	0	-	0	1	1,5	✓
	0	0	1	-	2,3	✓
	0	-	1	0	2,6	✓
	-	0	1	0	2,10	✓
G_2^1	0	-	1	1	3,7	✓
	-	0	1	1	3,11	✓
	0	1	-	1	5,7	✓
G_3^1	0	1	1	-	6,7	✓
	1	0	1	-	10,11	✓
G_3^1	-	1	1	1	7,15	✓
	1	-	1	1	11,15	✓

Gr.	a_1	a_0	b_1	b_0	Etic.
G_0^2	0	0	-	-	0,1,2,3
G_1^2	0	-	-	1	1,3,5,7
	0	-	1	-	2,3,6,7
G_2^2	-	0	1	-	2,3,10,11
	-	-	1	1	3,7,11,15

Implicanti primi:

→ $P_0(0,1,2,3): \underline{a_1} \underline{a_0}$

→ $P_1(1,3,5,7): \underline{a_1} b_0$

→ $P_2(2,3,6,7): \underline{a_1} b_1$

→ $P_3(2,3,10,11): \underline{a_0} b_1$

→ $P_4(3,7,11,15): b_1 b_0$

Maurizio Palesi

13

Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

Ricerca della Copertura Minima

- Essa viene realizzata mediante la **tabella degli implicanti primi**
- La **tabella degli implicanti primi** è una matrice binaria dove:
 - Gli indici delle **righe** sono gli **implicanti primi** individuati
 - Gli indici delle **colonne** sono i **mintermini** della funzione
 - L'elemento a_{ij} della matrice assume il valore * se il mintermine della colonna j è coperto dall'implicante della riga i

→ $P_0(1,9): \underline{bcd}$

→ $P_1(9,11,13,15): \underline{ad}$

→ $P_2(12,13,14,15): \underline{ab}$

		Mintermini						
		1	9	11	12	13	14	15
Implicanti primi	P_0	*	*					
	P_1		*	*		*		*
	P_2				*	*	*	*

Maurizio Palesi

14

Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

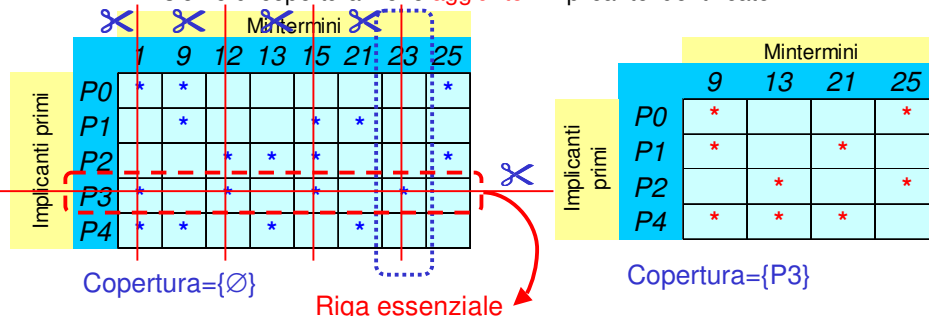
Ricerca della Copertura Minima

- Il problema della copertura è **intrattabile** (NP completo)
- Si utilizzano criteri di **essenzialità** e **dominanza** per ridurre la complessità del problema
- **Criterio di Essenzialità**
 - È un criterio di scelta (aumenta l'insieme di copertura) e, di conseguenza, di semplificazione poiché identifica ed estrae gli implicanti primi essenziali
- **Criterio di Dominanza**
 - È un criterio di sola semplificazione poiché riduce la dimensione dalla tabella di copertura eliminando righe (implicanti/mintermini) o colonne (mintermini) senza operare alcuna scelta

Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

Ricerca della Copertura Minima - Criterio di Essenzialità

- Se una colonna contiene un solo * vuol dire che il mintermine in questione è coperto soltanto da un implicante primo. Quell'implicante è quindi un implicante primo essenziale (**riga essenziale**).
- **Applicazione**
 - La riga essenziale e le colonne da essa coperte **vengono eliminate**
 - All'insieme di copertura viene **aggiunto** l'implicante identificato



Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

Ricerca della Copertura Minima - Criterio di Dominanza (tra righe)

- Un implicante P_i domina un implicante P_j quando P_i copre almeno tutti i mintermini coperti da P_j
- **Applicazione**
 → P_j è eliminato dalla tabella (eliminazione della riga)

		Mintermini			
		9	13	21	25
Implicanti primi	P0	*			*
	P1	*		*	
	P2		*		*
	P4	*	*	*	

Copertura={P3} P4 domina P1

		Mintermini			
		9	13	21	25
Implicanti primi	P0	*			*
	P2		*		*
	P4	*	*	*	

Copertura={P3}

Maurizio Palesi

17

Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

Ricerca della Copertura Minima - Criterio di Dominanza (tra righe)

- L'eliminazione di una riga può generare dei nuovi implicanti essenziali
- Le righe ad essi associate vengono chiamate **righe essenziali secondarie** (implicanti primi secondari)

		Mintermini			
		9	13	21	25
Implicanti primi	P0	*			*
	P2		*		*
	P4	*	*	*	

Copertura={P3}

Riga essenziale secondaria

		Mintermini
		25
Impl. primi	P0	*
	P2	*

Copertura={P3, P4}

Maurizio Palesi

18

Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

Ricerca della Copertura Minima - Dominanza (tra colonne)

- Un mintermine m_i domina un mintermine m_j quando ogni implicante che copre m_j copre anche m_i
 - m_j è eliminato dalla tabella

Implicanti primi	Mintermini			
	9	13	21	25
P0	*			*
P1			*	
P2		*		*
P4	*	*	*	

m_9 domina m_{21}

Implicanti primi	Mintermini		
	13	21	25
P0			*
P1		*	
P2	*		*
P4	*	*	

Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

Ricerca della Copertura Minima

- Quando tutte le righe essenziali e le colonne e righe dominate sono rimosse, la tabella ottenuta, se esiste, è ciclica (**tabella ciclica degli implicanti primi**)
- Per scegliere gli implicanti si può
 - Effettuare una **scelta arbitraria** ed esaminare le conseguenze derivanti da tale scelta e dalle sue alternative
 - Usare il **procedimento di Petrick**

Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

Ricerca della Copertura Minima - Procedimento di Petrick

		Mintermini				
		0	3	10	11	15
Implicanti primi	P0	*	*			
	P1		*	*		*
	P2			*	*	
	P3	*			*	*

- Il significato della tabella di copertura è il seguente: “per rispettare la funzionalità (vincolo)” si deve coprire il mintermine m_0 , mediante **P0 OR** mediante **P3**, **AND** si deve coprire il mintermine m_3 , mediante **P0 OR** mediante **P1**, **AND** ...

Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

Ricerca della Copertura Minima - Procedimento di Petrick

		Mintermini				
		0	3	10	11	15
Implicanti primi	P0	*	*			
	P1		*	*		*
	P2			*	*	
	P3	*			*	*

- Matematicamente

$$(P0 + P3) \cdot (P0 + P1) \cdot (P1 + P2) \cdot (P2 + P3) \cdot (P1 + P3) = 1$$

$$(P0 + P3P1) \cdot (P1P3 + P2) \cdot (P1 + P3) = 1$$

$$(P0P2 + P3P1) \cdot (P1 + P3) = 1$$

$$(P0P2P1 + P0P2P3 + P3P1) = 1$$

Gruppi di implicanti primi:

→ P0P2P1

→ P0P2P3

→ P3P1

Metodo di Quine-McCluskey

Funzioni non completamente specificate

- Una funzione Booleana può esibire delle *condizioni di indifferenza*
 - Configurazioni di ingresso che non si presenteranno mai e per le quali, quindi, qualunque valore di uscita è ammissibile
 - Configurazioni di uscita non utilizzate e per le quali, quindi, qualunque valore di uscita è ammissibile
- Una funzione Booleana che presenta condizioni di indifferenza viene detta *non completamente specificata* o *parzialmente specificata*
 - Le configurazioni per le quali il valore dell'uscita è indifferente costituiscono il *Don't care-set*

Maurizio Palesi

23

Metodo di Quine-McCluskey

Funzioni non completamente specificate

a	b	c	d	o
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	-
0	1	0	0	1
0	1	0	1	-
0	1	1	0	-
0	1	1	1	-
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Perché le condizioni di indifferenza costituiscono un'opportunità di ottimizzazione?

Don't care-set:
{abcd, abcd, abcd, abcd}

Maurizio Palesi

24

Metodo di Quine-McCluskey

Funzioni non completamente specificate

- Dal punto di vista della sintesi il *DC-set* potrebbe essere tralasciato lasciando inalterati gli algoritmi di sintesi precedentemente visti
- Le condizioni di indifferenza rappresentano però opportunità di ulteriore minimizzazione

a	b	c	d	Et.
0	1	0	0	4
1	0	1	0	10
1	0	1	1	11
1	1	0	1	13
1	1	1	0	14
1	1	1	1	15

a	b	c	d	Et.
1	0	1	-	4,11
1	-	1	0	10,14
1	-	1	1	11,15
1	1	-	1	13,15
1	1	1	-	14,15

abcd è un
implicante primo
formato da 4
letterali

Maurizio Palesi

25

Metodo di Quine-McCluskey

Funzioni non completamente specificate

- O analogamente utilizzando le Mappe di Karnaugh

		ab			
		00	01	11	10
cd	00		1		
	01			1	
	11			1	1
	10			1	1

abcd è un implicante primo
essenziale del costo di 4 letterali.
Infatti non può essere espanso visto
che non esistono altri mintermini a
distanza di Hamming 1

Maurizio Palesi

26

Metodo di Quine-McCluskey

Funzioni non completamente specificate

- Se invece si considerano le configurazioni del *DC-set* come appartenenti all'*On-set* si ha

		ab			
		00	01	11	10
cd	00		1		
	01		1	1	
	11	1	1	1	1
	10		1	1	1

$\underline{a}bcd$ può essere espanso nel cubo $\underline{a}b$ del costo di 2 letterali

Maurizio Palesi

27

Metodo di Quine-McCluskey

Funzioni non completamente specificate

- Ricerca degli implicanti primi
 - Le condizioni di indifferenza sono trattate come 1
- Ricerca della copertura ottima
 - Nella tabella di copertura compaiono, come indici di colonna, solo i mintermini relativi agli 1 della funzione
 - ✓ Cioè non è necessario coprire le condizioni di indifferenza e che quindi non potranno mai esistere implicanti primi costituiti da sole condizioni d'indifferenza
 - ✓ Le condizioni d'indifferenza vengono marcate a priori

Maurizio Palesi

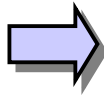
28

Metodo di Quine-McCluskey

Funzioni non completamente specificate - **Esempio**

$$f(a,b,c,d) = \Sigma(0,2,12,13) + d(4,5)$$

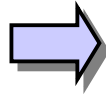
Gr.	a	b	c	d	Et.
G_0^1	0	0	0	0	0 ✓
G_1^1	0	0	1	0	2 ✓
	0	1	0	0	4 ✓
G_2^1	0	1	0	1	5 ✓
	1	1	0	0	12 ✓
G_3^1	1	1	0	1	13 ✓



Gr.	a	b	c	d	Et.
G_0^2	0	0	-	0	0,2
	0	-	0	0	0,4
G_1^2	0	1	0	-	4,5 ✓
	-	1	0	0	4,12 ✓
G_2^2	-	1	0	1	5,13 ✓
	1	1	0	-	12,13 ✓



Gr.	a	b	c	d	Et.
G_0^3	-	1	0	-	4,5,12,13



Implicanti primi:

→ P0(0,2): abd

→ P1(0,4): acd

→ P2(4,5,12,13): bc

Maurizio Palesi

29

Metodo di Quine-McCluskey

Funzioni non completamente specificate - **Esempio**

Implicanti primi:

→ P0(0,2): abd

→ P1(0,4): acd

→ P2(4,5,12,13): bc

	0	2	12	13
P0	*	*		
P1	*			
P2			*	*

	0	2	12	13
P0	*	*		
P1	*			
P2			*	*

Insieme di copertura:
{P2}

	0	2
P0	*	*
P1	*	

Insieme di copertura:
{P0, P2}

Maurizio Palesi

30

Ricavare la Copertura Minima

- Procedimento a esaurimento
 - Esaminare tutte le soluzioni possibili
 - Scegliamo una riga come appartenente alla copertura
 - ✓ Nel primo caso la si considera come **essenziale**
 - ✓ Nel secondo caso come **dominata**

Ricavare la Copertura Minima

