Mappe di *Karnaugh*

Maurizio Palesi

Obiettivi

- Trovare una espressione in forma *SP* o *PS* minima rispetto a certi criteri di costo
- Nella ottimizzazione delle espressioni *SP* (*PS*) a due livelli l'obiettivo è:
  - Ridurre il numero di mintermini (maxtermini)
  - Ridurre il numero di letterali
  - $f(a,b,c)=\underline{abc}+\underline{a}b\underline{c}+\underline{ab}c$ equivale a $f(a,b,c)=\underline{ab}+\underline{ac}$
- Metodologie di minimizzazione
  - $\boxed{\text{Karnaugh}}$
  - Quine-Mc Cluskey

Generalità

- Si propone di identificare forme minime a due livelli applicando
  - ➔ Per *SP* la riduzione $aZ+\underline{a}Z=(a+\underline{a})Z=Z$ con Z termine prodotto (implicante) di *n*-1 variabili
  - ➔ Per PS la riduzione $(\underline{a}+Z)(a+Z)=Z$ con Z termine somma (implicato) di *n*-1 variabili
  - ➔ Esempio: $ab\underline{c} + abc = ab$

Esempio di Riduzione

- La riduzione può essere applicata iterativamente

  $ab\underline{cd} + ab\underline{c}d + abc\underline{d} + abcd =$

  $= ab\underline{c}(\underline{d}+d) + abc(\underline{d}+d) =$

  $= ab\underline{c} + abc = ab(\underline{c}+c) = ab$
- La formula di riduzione potrebbe essere facilmente applicata direttamente alle espressioni Booleane
- Il problema consiste nell'identificare
  - ➔ Sia tutti i termini su cui applicare la riduzione
  - ➔ Sia i tutti termini che partecipano a più riduzioni contemporaneamente e replicarli

Problemi

- $f(a,b)=\underline{a}b+ab+a\underline{b}$
  - ➔ $(\underline{a}+a)b + a\underline{b} = b + a\underline{b}$
  - ➔ $\underline{a}b + a(b+\underline{b}) = \underline{a}b + a$

  $\left.\right\}$ Nessuna delle due espressioni è minima!
- L'espressione minima è $a+b$ ottenuta come
  $\underline{a}b + ab + a\underline{b} =$
  $= \underline{a}b + ab + ab + a\underline{b} =$
  $= (a+\underline{a})b + a(b+\underline{b}) = b+a$

Mappe di *Karnaugh*

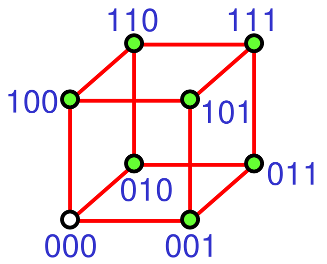
- Il metodo delle mappe di Karnaugh consente di risolvere direttamente i problemi identificati
  - ➔ Sia dovuti alla replicazione dei termini
  - ➔ Sia legati alla identificazione dei termini da raggruppare
- Il metodo delle mappe di Karnaugh è grafico
- La sua applicazione è semplice per un numero di variabili fino a 4
  - ➔ Risulta complesso per un numero di variabili da 5 a 6
  - ➔ É praticamente inattuabile per un numero di variabili superiori a 6

Esempio

- Vogliamo trovare una copertura minima della funzione OR(a,b,c)
- Occorre
  - ➔ Identificare tutti gli implicanti primi essenziali
  - ➔ Un insieme minimo di implicanti che coprano i mintermini non coperti dagli implicanti primi essenziali

Rappresentazione nD

OR(a,b,c)			
a	**b**	**c**	**o**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



- Si vede subito che gli implicanti primi essenziali sono *a*, *b* e *c* che coprono interamente la funzione
- Ma questa rappresentazione è scomoda al crescere del numero di variabili!

Rappresentazione 2D

- Rappresentiamo lo spazio Booleano *n*-dimensionale sullo spazio a due dimensioni

		a	
		0	**1**
b	**0**	00	10
	1	01	11

2 variabili

		ab			
		00	**01**	**11**	**10**
c	**0**	000	010	110	100
	1	001	011	111	101

3 variabili

➔Gli indici delle colonne e delle righe in posizione adiacente differiscono solo di un bit

➔La prima e l'ultima colonna (riga) devono essere considerate adiacenti

➔Per le forme *SP* ogni casella in cui è presente un 1 corrisponde ad un mintermine

4 variabili

		ab			
		00	**01**	**11**	**10**
cd	**00**	0000	0100	1100	1000
	01	0001	0101	1101	1001
	11	0011	0111	1111	1011
	10	0010	0110	1110	1010

Mappe di *Karnaugh*

- Ogni casela della mappa corrisponde ad un punto dello spazio Booleano
- In ogni casella può essere messo il valore della funzione in quel punto

		ab			
		00	**01**	**11**	**10**
c	**0**	0	1	1	1
	1	1	1	1	1

Mappa di Karnaugh della funzione OR(a,b,c)

- Su questa mappa si possono identificare facilmente i sottocubi di dimensione massima (implicanti primi)

Mappe di Karnaugh

c \ ab	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	1	1

c

b a

$OR(a,b,c) = a + b + c$

Esempio

$\underline{a}\underline{b}cd+\underline{a}\underline{b}c\underline{d}+\underline{a}bcd+ \underline{a}bc\underline{d} =$

$= \underline{a}c(\underline{b}d+\underline{b}\underline{d}+bd+b\underline{d}) =$

$= \underline{a}c(\underline{b}(d+\underline{d})+b(d+\underline{d})) =$

$= \underline{a}c(\underline{b}+b) = \underline{a}c$

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	0
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

$ab\underline{c}\underline{d}+ ab\underline{c}d =$

$= ab\underline{c}(d+\underline{d})=ab\underline{c}$

- In una mappa a *n* variabili ad un cubo di 2^m caselle adiacenti corrisponde un termine prodotto di *n-m* variabili
- Le *n-m* variabili che restano sono quelle che nel cubo hanno lo stesso valore in tutte le caselle
- Una funzione *f* può essere rappresentata da una espressione *SP* nella quale i prodotti corrispondono ai cubi necessari per coprire tutte le caselle in cui è presente il valore 1

Regole

- La minimizzazione è ottenuta individuando il minimo numero di cubi e, a parità di numero, quelli col la massima dimensione garantendo la copertura di tutti gli 1
- Per ottenere un'espressione minima
  - ➔Non si deve scegliere un cubo le cui caselle sono coperte da un cubo di dimensione maggiore
  - ➔Se esistono più modi di coprire gli 1, bisogna scegliere la copertura con i cubi di massima dimensione
  - ➔Non si devono scegliere cubi che coprono solo 1 di *f* già coperti da un insieme di altri cubi già scelti

Esempio

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	0
11	1	1	1	1
10	1	1	0	0

bcd

abc

acd è già coperto da altri due cubi

acd è coperto da un cubo più grande

ac

cd

abd è già coperto da altri due cubi

Esempio

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	0
11	1	1	1	1
10	1	1	0	0

$\underline{bcd}$ $ab\underline{c}$ $\underline{a}c$ cd

$f(a,b,c) = ab\underline{c} + \underline{bcd} + \underline{a}c + cd$

Esempio

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	0
11	1	1	1	1
10	1	1	0	0

$\underline{bcd}$ $ab\underline{c}$ $\underline{a}c$ acd

$f(a,b,c) = ab\underline{c} + \underline{bcd} + \underline{a}c + acd$

Esempio

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	0
11	1	1	1	1
10	1	1	0	0

bcd

abc

acd

cd

f(a,b,c) = abc + bcd + acd + cd

Maurizio Palesi

Esempio

- Le tre funzioni precedenti
  - ➔ *f*(a,b,c) = abc + bcd + ac + cd
  - ➔ *f*(a,b,c) = abc + bcd + ac + acd
  - ➔ *f*(a,b,c) = abc + bcd + acd + cd

Sono equivalenti da un punto di vista funzionale ma la prima è quella minima

Maurizio Palesi

Funzioni non Completamente Specificate

- Le condizioni di indifferenza possono essere sfruttate per incrementare la dimensione di cubi

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	-	0	1	0
11	1	1	-	-
10	1	0	0	0

Imponendo 0

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	0	0
10	1	0	0	0

$f(a,b,c) = \underline{abd} + ab\underline{c} + \underline{a}cd$

Funzioni non Completamente Specificate

- Le condizioni di indifferenza possono essere sfruttate per incrementare la dimensione di cubi

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	-	0	1	0
11	1	1	-	-
10	1	0	0	0

Imponendo 1

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	0	1	0
11	1	1	1	1
10	1	0	0	0

$f(a,b,c) = \underline{ab} + ab\underline{c} + cd$