Metodo di Quine-McCluskey

Maurizio Palesi

Definizioni

- Date due funzioni $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ e $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ si dice che f copre g (oppure g implica f) e si scrive $f \supset g$ se $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1$ quando $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1$

x	y	f(x,y)	g(x,y)
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	1

- Se P è il prodotto di letterali e f copre P, si dice che P è un implicante di f
  - → $P= x\underline{y}$ è un implicante di f

Implicanti Primi e Mappe di Karnaugh

- Si chiama *Implicante Primo* di una funzione *f* un implicante non coperto da altri implicanti di *f* con un numero minore di letterali

Mappa di *Karnaugh*

cd \ ab	00	01	11	10
00	1			
01	1	1		
11	1	1	1	1
10	1			1

ad e ab sono implicanti primi perché non sono coperti da nessun altro implicante con un numero minore di letterali

abd non è un implicante primo perché è coperto dall'implicante ad formato da un numero minore di letterali

Implicanti Essenziali e Mappe di Karnaugh

- Si chiama *Implicante Primo Essenziale* di una funzione *f* è un implicante primo che copre almeno un mintermine non coperto da altri implicanti di *f*

Mappa di *Karnaugh*

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	1		
01	1	1		1
11	0	1	1	1
10	0	1	1	

ab è un implicante primo essenziale perché copre il mintermine abcd non coperto da nessun altro implicante

bc è un implicante primo essenziale perché copre il mintermine abcd non coperto da nessun altro implicante

Introduzione al Metodo di Quine-McCluskey

- Metodo di minimizzazione tabellare
- Facile da tradurre in un algoritmo (metodo sistematico)
- Il numero di variabili trattare è teoricamente illimitato
- Facile da estendere al caso di funzioni a più di una uscita
- Consiste di due fasi:
  - ➔ Ricerca degli implicanti primi
  - ➔ Ricerca della copertura ottima
- Poiché queste due fasi hanno complessità esponenziale è praticamente impossibile trovare la soluzione ottima per un numero di variabili che supera l'ordine di una decina

Metodo di Quine-McCluskey

- L'insieme di implicanti primi di una funzione f è ottenuta applicando ripetutamente, in tutti i modi possibili, la semplificazione $x_iP+\underline{x}_iP=P$
  - ➔ dove P è un prodotto di letterali scelti tra $x_1, x_2,\ldots,x_i,\ldots, x_n$ in forma diretta o negata
- L'insieme di implicanti è ottenuto partendo dai mintermini della funzione
- Le semplificazioni vengono applicate ai termini che differiscono in una sola posizione

Metodo di Quine-McCluskey (I fase)

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

x	y	z	
0	0	0	
0	1	1	√
1	0	1	√
1	1	1	√

x	y	z
-	1	1
1	-	1

- Si confrontano esaustivamente tutti i termini prodotto (ricavati dal passo precedente)
- Si semplificano i termini che differiscono in una sola posizione
- Si marcano (√) i termini semplificati per indicare che gli implicanti non sono primi
- Si crea un nuovo insieme di termini prodotto da confrontare e si ripete il procedimento
- Il processo ha termine quando non ci sono elementi da semplificare

Metodo di Quine-McCluskey (I fase)

Formalizzazione

- Per ridurre il numero di confronti, i termini vengono divisi in gruppi con elementi aventi lo stesso numero di 1
- I confronti vengono svolti solo tra termini relativi a gruppi che differiscono per un solo 1
- Ad ogni termine associamo un etichetta che rappresenta l'insieme di mintermini che esso ricopre

Gruppo	a	b	c	d	Etichetta
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	2
	0	1	0	0	4
2	0	0	1	1	3
	0	1	1	0	6
	1	1	0	0	12
3	0	1	1	1	7
	1	1	1	0	14

Vengono confrontati i gruppi:
→0 e 1
→1 e 2
→2 e 3

Metodo di Quine-McCluskey (I fase)

Formalizzazione

1. Si suddividono i mintermini in gruppi G_i^0 contenenti termini con *i* 1
- Ciascun mintermine è etichettato con l'intero equivalente

2. Partendo dal gruppo di indice *i* minimo, fino all'indice massimo –1, vengono confrontati i termini dei gruppo G_i^k con quelli del gruppo G_{i+1}^k
- Se due termini differiscono solo nella posizione *j*, essi vengono combinati in un unico termine che viene inserito in un nuovo gruppo G_i^{k+1}
- In posizione *j* viene inserito un trattino "-"
- I due termini vengono spuntati per indicare che non sono implicanti primi
- L'etichetta di questo nuovo termine è ottenuto concatenando le etichette dei termini di partenza

3. Se sono possibili altre combinazioni, *k* è incrementato e si ritorna al passo **2.**

Metodo di Quine-McCluskey (I fase)

Esempio

$f(a,b,c,d) = \Sigma(1,9,11,12,13,14,15)$

Gr.	a	b	c	d	Etic.	
G_1^0	0	0	0	1	1	√
G_2^0	1	0	0	1	9	√
	1	1	0	0	12	√
G_3^0	1	0	1	1	11	√
	1	1	0	1	13	√
	1	1	1	0	14	√
G_4^0	1	1	1	1	15	√

Gr.	a	b	c	d	Etic.	
G_1^1	-	0	0	1	1,9	
G_2^1	1	0	-	1	9,11	√
	1	-	0	1	9,13	√
	1	1	0	-	12,13	√
	1	1	-	0	12,14	√
G_3^1	1	-	1	1	11,15	√
	1	1	-	1	13,15	√
	1	1	1	-	14,15	√

Gr.	a	b	c	d	Etic.
G_1^2	1	-	-	1	9,11,13,15
G_2^2	1	1	-	-	12,13,14,15

Implicanti primi:
- P0(1,9): bcd
- P1(9,11,13,15): ad
- P2(12,13,14,15): ab

Metodo di Quine-McCluskey (I fase)

Esempio (Comparatore A <= B, 2 bit)

a_1	a_0	b_1	b_0	o
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Gr.	a_1	a_0	b_1	b_0	Etic.
G_1^0	0	0	0	0	0
G_2^0	0	0	0	1	1
	0	0	1	0	2
G_3^0	0	0	1	1	3
	0	1	0	1	5
	0	1	1	0	6
	1	0	1	0	10
G_4^0	0	1	1	1	7
	1	0	1	1	11
G_5^0	1	1	1	1	15

Metodo di Quine-McCluskey (I fase)

Esempio (Comparatore A <= B, 2 bit)

Gr.	a_1	a_0	b_1	b_0	Etic.	
G_1^0	0	0	0	0	0	√
G_2^0	0	0	0	1	1	√
	0	0	1	0	2	√
G_3^0	0	0	1	1	3	√
	0	1	0	1	5	√
	0	1	1	0	6	√
	1	0	1	0	10	√
G_4^0	0	1	1	1	7	√
	1	0	1	1	11	√
G_5^0	1	1	1	1	15	√

Gr.	a_1	a_0	b_1	b_0	Etic.
G_1^1	0	0	0	-	0,1
	0	0	-	0	0,2
G_2^1	0	0	-	1	1,3
	0	-	0	1	1,5
	0	0	1	-	2,3
	0	-	1	0	2,6
	-	0	1	0	2,10
G_3^1	0	-	1	1	3,7
	-	0	1	1	3,11
	0	1	-	1	5,7
	0	1	1	-	6,7
	1	0	1	-	10,11
G_4^1	-	1	1	1	7,15
	1	-	1	1	11,15

Metodo di Quine-McCluskey (I fase)

Esempio (Comparatore A <= B, 2 bit)

Gr.	a_1	a_0	b_1	b_0	Etic.	
G_1^1	0	0	0	-	0,1	√
	0	0	-	0	0,2	√
G_2^1	0	0	-	1	1,3	√
	0	-	0	1	1,5	√
	0	0	1	-	2,3	√
	0	-	1	0	2,6	√
	-	0	1	0	2,10	√
G_3^1	0	-	1	1	3,7	√
	-	0	1	1	3,11	√
	0	1	-	1	5,7	√
	0	1	1	-	6,7	√
	1	0	1	-	10,11	√
G_4^1	-	1	1	1	7,15	√
	1	-	1	1	11,15	√

Gr.	a_1	a_0	b_1	b_0	Etic.
G_1^2	0	0	-	-	0,1,2,3
G_2^2	0	-	-	1	1,3,5,7
	0	-	1	-	2,3,6,7
	-	0	1	-	2,3,10,11
G_3^2	-	-	1	1	3,7,11,15

Implicanti primi:
- ➔P0(0,1,2,3): $\underline{a_1}\,\underline{a_0}$
- ➔P1(1,3,5,7): $\underline{a_1}b_0$
- ➔P2(2,3,6,7): $\underline{a_1}b_1$
- ➔P3(2,3,10,11): $\underline{a_0}b_1$
- ➔P4(3,7,11,15): b_1b_0

Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

Ricerca della Copertura Minima

- Essa viene realizzata mediante la tabella degli implicanti primi
- La tabella degli implicanti primi è una matrice binaria dove:
  - ➔Gli indici delle righe sono gli implicanti primi individuati
  - ➔Gli indici delle colonne sono i mintermini della funzione
  - ➔L'elemento a_{ij} della matrice assume il valore * se il mintermine della colonna *j* è coperto dall'implicante della riga *i*

- ➔P0(1,9): $\underline{bcd}$
- ➔P1(9,11,13,15): ad
- ➔P2(12,13,14,15): ab

Implicanti primi	Mintermini: 1	9	11	12	13	14	15
P0	*	*					
P1		*	*		*		*
P2				*	*	*	*

Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

Ricerca della Copertura Minima

- Il problema della copertura è intrattabile (*NP* completo)
- Si utilizzano criteri di essenzialità e dominanza per ridurre la complessità del problema
- **Criterio di Essenzialità**
  - È un criterio di scelta (aumenta l'insieme di copertura) e, di conseguenza, di semplificazione poiché identifica ed estrae gli implicanti primi essenziali
- **Criterio di Dominanza**
  - È un criterio di sola semplificazione poiché riduce la dimensione dalla tabella di copertura eliminando righe (implicanti/mintermini) o colonne (mintermini) senza operare alcuna scelta

Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

Ricerca della Copertura Minima - Criterio di Essenzialità

- Se una colonna contiene un solo * vuol dire che il mintermine in questione è coperto soltanto da un implicante primo. Quell'implicante è quindi un implicante primo essenziale (riga essenziale).
- **Applicazione**
  - La riga essenziale e le colonne da essa coperte vengono eliminate
  - All'insieme di copertura viene aggiunto l'implicante identificato

Mintermini

Implicanti primi	1	9	12	13	15	21	23	25
P0	*	*						*
P1		*			*	*		
P2			*	*	*			*
P3	*		*		*		*	
P4	*	*		*		*		

Copertura={∅}

Riga essenziale

Mintermini

Implicanti primi	9	13	21	25
P0	*			*
P1	*		*	
P2		*		*
P4	*	*	*	

Copertura={P3}

Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

Ricerca della Copertura Minima - Criterio di Dominanza (tra righe)

- Un implicante P_i domina un implicante P_j quando P_i copre almeno tutti i mintermini coperti da P_j
- **Applicazione**
  - ➔ P_j è eliminato dalla tabella (eliminazione della riga)

Implicanti primi / Mintermini

	9	13	21	25
P0	*			*
~~P1~~	~~*~~		~~*~~	
P2		*		*
P4	*	*	*	

Copertura={P3}

P4 domina P1

Implicanti primi / Mintermini

	9	13	21	25
P0	*			*
P2		*		*
P4	*	*	*	

Copertura={P3}

Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

Ricerca della Copertura Minima - Criterio di Dominanza (tra righe)

- L'eliminazione di una riga può generare dei nuovi implicanti essenziali
- Le righe ad essi associate vengono chiamate righe essenziali secondarie (implicanti primi secondari)

Implicanti primi / Mintermini

	~~9~~	~~13~~	~~21~~	25
P0	~~*~~			*
P2		~~*~~		*
~~P4~~	~~*~~	~~*~~	~~*~~	

Copertura={P3}

Riga essenziale secondaria

Impl. primi / Mintermini

	25
P0	*
P2	*

Copertura={P3, P4}

Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

Ricerca della Copertura Minima - Dominanza (tra colonne)

- Un mintermine m_i domina un mintermine m_j quando ogni implicante che copre m_j copre anche m_i
  - ➔ m_i è eliminato dalla tabella

Implicanti primi / Mintermini

	~~9~~	13	21	25
P0	*			*
P1	*		*	
P2		*		*
P4	*	*	*	

m_9 domina m_{21}

Implicanti primi / Mintermini

	13	21	25
P0			*
P1		*	
P2	*		*
P4	*	*	

Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

Ricerca della Copertura Minima

- Quando tutte le righe essenziali e le colonne e righe dominate sono rimosse, la tabella ottenuta, se esiste, è ciclica (tabella ciclica degli implicanti primi)
- Per scegliere gli implicanti si può
  - ➔ Effettuare una scelta arbitraria ed esaminare le conseguenze derivanti da tale scelta e dalle sue alternative
  - ➔ Usare il procedimento di *Petrick*

Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

Ricerca della Copertura Minima - Procedimento di *Petrick*

Implicanti primi	Mintermini 0	3	10	11	15
P0	*	*			
P1		*	*		*
P2			*	*	
P3	*			*	*

- Il significato della tabella di copertura è il seguente: "per rispettare la funzionalità (vincolo)"
  si deve coprire il mintermine m_0, mediante *P*0 **OR** mediante *P*3, **AND** si deve coprire il mintermine m_3, mediante *P*0 **OR** mediante *P*1, **AND** ...

Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

Ricerca della Copertura Minima - Procedimento di *Petrick*

Implicanti primi	Mintermini 0	3	10	11	15
P0	*	*			
P1		*	*		*
P2			*	*	
P3	*			*	*

- Matematicamente

  (P0 + P3) • (P0 + P1) • (P1 + P2) • (P2 + P3) • (P1 + P3) = 1
  (P0 + P3P1) • (P1P3 + P2) • (P1 + P3) = 1
  (P0P2 + P3P1) • (P1 + P3) = 1
  (P0P2P1 + P0P2P3 + P3P1) = 1

Gruppi di implicanti primi:
→P0P2P1
→P0P2P3
→P3P1

Metodo di Quine-McCluskey
Funzioni non completamente specificate

- Una funzione Booleana può esibire delle *condizioni di indifferenza*
  - ➔ Configurazioni di ingresso che non si presenteranno mai e per le quali, quindi, qualunque valore di uscita è ammissibile
  - ➔ Configurazioni di uscita non utilizzate e per le quali, quindi, qualunque valore di uscita è ammissibile
- Una funzione Booleana che presenta condizioni di indifferenza viene detta *non completamente specificata* o *parzialmente specificata*
  - ➔ Le configurazioni per le quali il valore dell'uscita è indifferente costituiscono il *Don't care-set*

Metodo di Quine-McCluskey
Funzioni non completamente specificate

a	b	c	d	o
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	-
0	1	0	0	1
0	1	0	1	-
0	1	1	0	-
0	1	1	1	-
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Perché le condizioni di indifferenza costituiscono un'opportunità di ottimizzazione?

Don't care-set:
$\{\underline{ab}cd, \underline{a}b\underline{c}d, \underline{a}bc\underline{d}, \underline{a}bcd\}$

Metodo di Quine-McCluskey
Funzioni non completamente specificate

- Dal punto di vista della sintesi il *DC-set* potrebbe essere tralasciato lasciando inalterati gli algoritmi di sintesi precedentemente visti
- Le condizioni di indifferenza rappresentano però opportunità di ulteriore minimizzazione

a	b	c	d	Et.	
0	1	0	0	4	
1	0	1	0	10	√
1	0	1	1	11	√
1	1	0	1	13	√
1	1	1	0	14	√
1	1	1	1	15	√

a	b	c	d	Et.
1	0	1	-	4,11
1	-	1	0	10,14
1	-	1	1	11,15
1	1	-	1	13,15
1	1	1	-	14,15

...

abcd è un implicante primo formato da 4 letterali

Metodo di Quine-McCluskey
Funzioni non completamente specificate

- O analogamente utilizzando le Mappe di Karnaugh

cd \ ab	00	01	11	10
00		1		
01			1	
11			1	1
10			1	1

abcd è un implicante primo essenziale del costo di 4 letterali. Infatti non può essere espanso visto che non esistono altri mintermini a distanza di Hamming 1

Metodo di Quine-McCluskey
Funzioni non completamente specificate

- Se invece si considerano le configurazioni del *DC-set* come appartenenti all'*On-set* si ha

cd \ ab	00	01	11	10
00		1		
01		1	1	
11	1	1	1	1
10		1	1	1

$\underline{a}b\underline{c}\underline{d}$ può essere espanso nel cubo $\underline{a}b$ del costo di 2 letterali

Metodo di Quine-McCluskey
Funzioni non completamente specificate

- Ricerca degli implicanti primi
  - ➔ Le condizioni di indifferenza sono trattate come 1
- Ricerca della copertura ottima
  - ➔ Nella tabella di copertura compaiono, come indici di colonna, solo i mintermini relativi agli 1 della funzione
    - ✓ Cioè non è necessario coprire le condizioni di indifferenza e che quindi non potranno mai esistere implicanti primi costituiti da sole condizioni d'indifferenza
    - ✓ Le condizioni d'indifferenza vengono marcate a priori

Metodo di Quine-McCluskey

Funzioni non completamente specificate - Esempio

$f(a,b,c,d) = \Sigma(0,2,12,13) + d(4,5)$

Gr.	a	b	c	d	Et.	
G_0^1	0	0	0	0	0	√
G_1^1	0	0	1	0	2	√
	0	1	0	0	4	√
G_2^1	0	1	0	1	5	√
	1	1	0	0	12	√
G_3^1	1	1	0	1	13	√

Gr.	a	b	c	d	Et.	
G_0^2	0	0	-	0	0,2	
	0	-	0	0	0,4	
G_1^2	0	1	0	-	4,5	√
	-	1	0	0	4,12	√
G_2^2	-	1	0	1	5,13	√
	1	1	0	-	12,13	√

Gr.	a	b	c	d	Et.
G_0^3	-	1	0	-	4,5,12,13

Implicanti primi:
- P0(0,2): abd
- P1(0,4): acd
- P2(4,5,12,13): bc

Metodo di Quine-McCluskey

Funzioni non completamente specificate - Esempio

Implicanti primi:
- P0(0,2): abd
- P1(0,4): acd
- P2(4,5,12,13): bc

	0	2	12	13
P0	*	*		
P1	*			
P2			*	*

	0	2	12	13
P0	*	*		
P1	*			
P2			*	*

Insieme di copertura:
{P2}

	0	2
P0	*	*
P1	*	

Insieme di copertura:
{P0, P2}

Ricavare la Copertura Minima

- Procedimento a esaurimento
  - ➔ Esaminare tutte le soluzioni possibili
  - ➔ Scegliamo una riga come appartenente alla copertura
    - ✓ Nel primo caso la si considera come essenziale
    - ✓ Nel secondo caso come dominata

Ricavare la Copertura Minima