

# Metodo di Quine-McCluskey

Maurizio Palesi

## Definizioni

- Date due funzioni  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  si dice che  $f$  copre  $g$  (oppure  $g$  implica  $f$ ) e si scrive  $f \supset g$  se  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$  quando  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$

x	y	f(x,y)	g(x,y)
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	1

- Se  $P$  è il prodotto di letterali e  $f$  copre  $P$ , si dice che  $P$  è un **implicante** di  $f$ 
  - $P = xy$  è un implicante di  $f$

## Implicanti Primi e Mappe di Karnaugh

- Si chiama **Implicante Primo** di una funzione  $f$  un implicante non coperto da altri implicanti di  $f$  con un numero minore di letterali

Mappa di Karnaugh

		$ab$			
		00	01	11	10
$cd$	00	1			
	01	1	1		
	11	1	1	1	1
	10	1			1

$\underline{a}d$  e  $a\underline{b}$  sono implicanti primi perché non sono coperti da nessun altro implicante con un numero minore di letterali

$\underline{a}bd$  non è un implicante primo perché è coperto dall'implicante  $\underline{a}d$  formato da un numero minore di letterali

Maurizio Palesi

3

## Implicanti Essenziali e Mappe di Karnaugh

- Si chiama **Implicante Primo Essenziale** di una funzione  $f$  è un implicante primo che copre almeno un mintermine non coperto da altri implicanti di  $f$

Mappa di Karnaugh

		$ab$			
		00	01	11	10
$cd$	00	0	1		
	01	1	1		1
	11	0	1	1	1
	10	0	1	1	

$\underline{a}b$  è un implicante primo essenziale perché copre il mintermine  $\underline{a}bcd$  non coperto da nessun altro implicante

$bc$  è un implicante primo essenziale perché copre il mintermine  $abc\underline{d}$  non coperto da nessun altro implicante

Maurizio Palesi

4

## Introduzione al Metodo di Quine-McCluskey

- Metodo di minimizzazione tabellare
- Facile da tradurre in un algoritmo (metodo sistematico)
- Il numero di variabili trattate è teoricamente illimitato
- Facile da estendere al caso di funzioni a più di una uscita
- Consiste di **due fasi**:
  - Ricerca degli implicant primari
  - Ricerca della copertura ottima
- Poiché queste due fasi hanno complessità esponenziale è praticamente impossibile trovare la soluzione ottima per un numero di variabili che supera l'ordine di una decina

## Metodo di Quine-McCluskey

- L'insieme di implicant primari di una funzione  $f$  è ottenuta applicando ripetutamente, in tutti i modi possibili, la semplificazione  $x_i P + \bar{x}_i P = P$ 
  - dove  $P$  è un prodotto di letterali scelti tra  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$  in forma diretta o negata
- L'insieme di implicant è ottenuto partendo dai mintermini della funzione
- Le semplificazioni vengono applicate ai termini che differiscono in una sola posizione

## Metodo di Quine-McCluskey (I fase)

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



x	y	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

✓  
✓  
✓

x	y	z
-	1	1
1	-	1

- Si confrontano esaustivamente tutti i termini prodotto (ricavati dal passo precedente)
- Si semplificano i termini che differiscono in una sola posizione
- Si marcano (✓) i termini semplificati per indicare che gli implicanti non sono primi
- Si crea un nuovo insieme di termini prodotto da confrontare e si ripete il procedimento
- Il processo ha termine quando non ci sono elementi da semplificare

Maurizio Palesi

7

## Metodo di Quine-McCluskey (I fase)

### Formalizzazione

- Per ridurre il numero di confronti, i termini vengono divisi in **gruppi con elementi aventi lo stesso numero di 1**
- I confronti vengono svolti solo tra termini relativi a **gruppi che differiscono per un solo 1**
- Ad ogni termine **associamo un etichetta** che rappresenta l'insieme di mintermini che esso ricopre

Gruppo	a	b	c	d	Etichetta
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	2
	0	1	0	0	4
2	0	0	1	1	3
	0	1	1	0	6
	1	1	0	0	12
3	0	1	1	1	7
	1	1	1	0	14

Vengono confrontati i gruppi:

→ 0 e 1  
→ 1 e 2  
→ 2 e 3

Maurizio Palesi

8

## Metodo di Quine-McCluskey (I fase)

### Formalizzazione

1. Si suddividono i mintermini in gruppi  $G_i^0$  contenenti termini con  $i$  1  
 → Ciascun mintermine è etichettato con l'intero equivalente
2. Partendo dal gruppo di indice  $i$  minimo, fino all'indice massimo  $-1$ , vengono confrontati i termini del gruppo  $G_i^k$  con quelli del gruppo  $G_{i+1}^k$   
 → Se due termini differiscono solo nella posizione  $j$ , essi vengono combinati in un unico termine che viene inserito in un nuovo gruppo  $G_i^{k+1}$   
 → In posizione  $j$  viene inserito un trattino "-"  
 → I due termini vengono spuntati per indicare che non sono implicanti primi  
 → L'etichetta di questo nuovo termine è ottenuto concatenando le etichette dei termini di partenza
3. Se sono possibili altre combinazioni,  $k$  è incrementato e si ritorna al passo 2.

Maurizio Palesi

9

## Metodo di Quine-McCluskey (I fase)

### Esempio

$$f(a,b,c,d) = \Sigma(1,9,11,12,13,14,15)$$

Gr.	a	b	c	d	Etic.
$G_1^0$	0	0	0	1	1 ✓
$G_2^0$	1	0	0	1	9 ✓
	1	1	0	0	12 ✓
	1	0	1	1	11 ✓
$G_3^0$	1	1	0	1	13 ✓
	1	1	1	0	14 ✓
$G_4^0$	1	1	1	1	15 ✓

Gr.	a	b	c	d	Etic.
$G_1^1$	-	0	0	1	1,9 ✓
$G_2^1$	1	0	-	1	9,11 ✓
	1	-	0	1	9,13 ✓
	1	1	0	-	12,13 ✓
	1	1	-	0	12,14 ✓
$G_3^1$	1	-	1	1	11,15 ✓
	1	1	-	1	13,15 ✓
	1	1	1	-	14,15 ✓

Gr.	a	b	c	d	Etic.
$G_1^2$	1	-	-	1	9,11,13,15
$G_2^2$	1	1	-	-	12,13,14,15

Implicanti primi:

→ P0(1,9):  $bcd$

→ P1(9,11,13,15):  $ad$

→ P2(12,13,14,15):  $ab$

Maurizio Palesi

10

## Metodo di Quine-McCluskey (I fase)

Esempio (Comparatore  $A \leq B$ , 2 bit)

$a_1$	$a_0$	$b_1$	$b_0$	$o$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1



Gr.	$a_1$	$a_0$	$b_1$	$b_0$	Etic.
$G_1^0$	0	0	0	0	0
$G_2^0$	0	0	0	1	1
	0	0	1	0	2
	0	0	1	1	3
$G_3^0$	0	1	0	1	5
	0	1	1	0	6
	1	0	1	0	10
$G_4^0$	0	1	1	1	7
	1	0	1	1	11
$G_5^0$	1	1	1	1	15

Maurizio Palesi

11

## Metodo di Quine-McCluskey (I fase)

Esempio (Comparatore  $A \leq B$ , 2 bit)

Gr.	$a_1$	$a_0$	$b_1$	$b_0$	Etic.
$G_1^0$	0	0	0	0	0
$G_2^0$	0	0	0	1	1
	0	0	1	0	2
	0	0	1	1	3
$G_3^0$	0	1	0	1	5
	0	1	1	0	6
	1	0	1	0	10
$G_4^0$	0	1	1	1	7
	1	0	1	1	11
$G_5^0$	1	1	1	1	15



Gr.	$a_1$	$a_0$	$b_1$	$b_0$	Etic.
$G_1^1$	0	0	0	-	0,1
	0	0	-	0	0,2
	0	0	-	1	1,3
	0	-	0	1	1,5
$G_2^1$	0	0	1	-	2,3
	0	-	1	0	2,6
	-	0	1	0	2,10
	0	-	1	1	3,7
	-	0	1	1	3,11
$G_3^1$	0	1	-	1	5,7
	0	1	1	-	6,7
	1	0	1	-	10,11
$G_4^1$	-	1	1	1	7,15
	1	-	1	1	11,15

Maurizio Palesi

12

## Metodo di Quine-McCluskey (I fase)

Esempio (Comparatore  $A \leq B$ , 2 bit)

Gr.	$a_1$	$a_0$	$b_1$	$b_0$	Etic.
$G_1^1$	0	0	0	-	0,1
	0	0	-	0	0,2
$G_2^1$	0	0	-	1	1,3
	0	-	0	1	1,5
	0	0	1	-	2,3
	0	-	1	0	2,6
	-	0	1	0	2,10
$G_3^1$	0	-	1	1	3,7
	-	0	1	1	3,11
	0	1	-	1	5,7
	0	1	1	-	6,7
$G_4^1$	-	1	1	1	7,15
	1	-	1	1	11,15

Gr.	$a_1$	$a_0$	$b_1$	$b_0$	Etic.
$G_1^2$	0	0	-	-	0,1,2,3
$G_2^2$	0	-	-	1	1,3,5,7
	0	-	1	-	2,3,6,7
	-	0	1	-	2,3,10,11
$G_3^2$	-	-	1	1	3,7,11,15

Implicanti primi:

→  $P_0(0,1,2,3): \underline{a_1} \underline{a_0}$

→  $P_1(1,3,5,7): \underline{a_1} b_0$

→  $P_2(2,3,6,7): \underline{a_1} b_1$

→  $P_3(2,3,10,11): \underline{a_0} b_1$

→  $P_4(3,7,11,15): b_1 b_0$

Maurizio Palesi

13

## Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

Ricerca della Copertura Minima

- Essa viene realizzata mediante la **tabella degli implicanti primi**
- La **tabella degli implicanti primi** è una matrice binaria dove:
  - Gli indici delle **righe** sono gli **implicanti primi** individuati
  - Gli indici delle **colonne** sono i **mintermini** della funzione
  - L'elemento  $a_{ij}$  della matrice assume il valore \* se il mintermine della colonna  $j$  è coperto dall'implicante della riga  $i$

→  $P_0(1,9): \underline{bcd}$

→  $P_1(9,11,13,15): \underline{ad}$

→  $P_2(12,13,14,15): \underline{ab}$

		Mintermini							
		1	9	11	12	13	14	15	
Implicanti primi	$P_0$	*	*						
	$P_1$		*	*		*		*	
	$P_2$				*	*	*	*	

Maurizio Palesi

14

## Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

### Ricerca della Copertura Minima

- Il problema della copertura è **intrattabile** (NP completo)
- Si utilizzano criteri di **essenzialità** e **dominanza** per ridurre la complessità del problema
- **Criterio di Essenzialità**
  - È un criterio di scelta (aumenta l'insieme di copertura) e, di conseguenza, di semplificazione poiché identifica ed estrae gli implicant primari essenziali
- **Criterio di Dominanza**
  - È un criterio di sola semplificazione poiché riduce la dimensione dalla tabella di copertura eliminando righe (implicant/mintermini) o colonne (mintermini) senza operare alcuna scelta

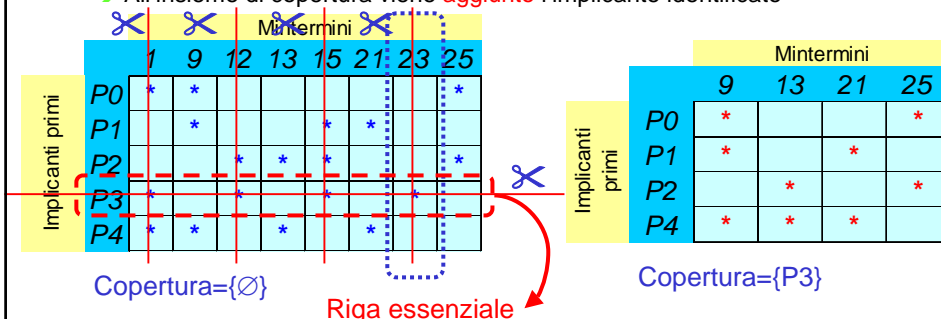
Maurizio Palesi

15

## Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

### Ricerca della Copertura Minima - Criterio di Essenzialità

- Se una colonna contiene un solo \* vuol dire che il mintermine in questione è coperto soltanto da un impicante primo. Quell'impicante è quindi un impicante primo essenziale (**riga essenziale**).
- **Applicazione**
  - La riga essenziale e le colonne da essa coperte **vengono eliminate**
  - All'insieme di copertura viene **aggiunto** l'impicante identificato



Maurizio Palesi

16



## Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

### Ricerca della Copertura Minima - Criterio di Dominanza (tra righe)

- Un implicante  $P_i$  domina un implicante  $P_j$  quando  $P_i$  copre almeno tutti i mintermini coperti da  $P_j$
- **Applicazione**  
 →  $P_j$  è eliminato dalla tabella (eliminazione della riga)

		Mintermini			
		9	13	21	25
Implicanti primi	$P_0$	*			*
	$P_1$	*		*	
	$P_2$		*		*
	$P_4$	*	*	*	

Copertura={P3}      P4 domina P1

		Mintermini			
		9	13	21	25
Implicanti primi	$P_0$	*			*
	$P_2$		*		*
	$P_4$	*	*	*	

Copertura={P3}

Maurizio Palesi

17

## Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

### Ricerca della Copertura Minima - Criterio di Dominanza (tra righe)

- L'eliminazione di una riga può generare dei nuovi implicanti essenziali
- Le righe ad essi associate vengono chiamate **righe essenziali secondarie** (implicanti primi secondari)

		Mintermini			
		9	13	21	25
Implicanti primi	$P_0$	*			*
	$P_2$		*		*
	$P_4$	*	*	*	

Copertura={P3}

Riga essenziale secondaria

		Mintermini
		25
Impl. primi	P0	*
	P2	*

Copertura={P3, P4}

Maurizio Palesi

18

## Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

### Ricerca della Copertura Minima - Dominanza (tra colonne)

- Un mintermine  $m_i$  domina un mintermine  $m_j$  quando ogni implicante che copre  $m_j$  copre anche  $m_i$   
 →  $m_j$  è eliminato dalla tabella

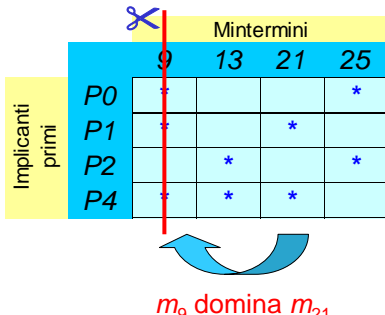


Diagram illustrating the dominance of minterm  $m_9$  over  $m_{21}$ . A red vertical line with scissors at the top indicates the removal of column  $m_{21}$ . A blue arrow points from  $m_{21}$  to  $m_9$  with the text  $m_9$  domina  $m_{21}$ .

		Mintermini			
		9	13	21	25
Implicanti primi	P0	*			*
	P1	*		*	
	P2		*		*
	P4	*	*	*	

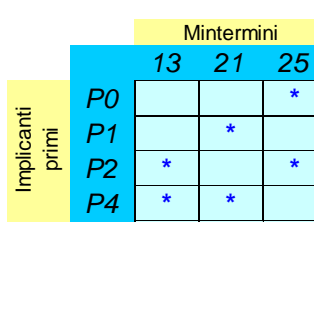


Diagram illustrating the resulting prime implicants after removing  $m_{21}$ . The table shows the prime implicants  $P_0, P_1, P_2, P_4$  and their corresponding minterms.

		Mintermini		
		13	21	25
Implicanti primi	P0			*
	P1		*	
	P2	*		*
	P4	*	*	

Maurizio Palesi

19

## Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

### Ricerca della Copertura Minima

- Quando tutte le righe essenziali e le colonne e righe dominate sono rimosse, la tabella ottenuta, se esiste, è ciclica (**tabella ciclica degli implicanti primi**)
- Per scegliere gli implicanti si può
  - Effettuare una **scelta arbitraria** ed esaminare le conseguenze derivanti da tale scelta e dalle sue alternative
  - Usare il **procedimento di Petrick**

Maurizio Palesi

20

## Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

Ricerca della Copertura Minima - Procedimento di Petrick

		Mintermini				
		0	3	10	11	15
Implicanti primi	P0	*	*			
	P1		*	*		*
	P2			*	*	
	P3	*			*	*

- Il significato della tabella di copertura è il seguente: “per rispettare la funzionalità (vincolo)” si deve coprire il mintermine  $m_0$ , mediante **P0 OR** mediante **P3**, **AND** si deve coprire il mintermine  $m_3$ , mediante **P0 OR** mediante **P1**, **AND** ...

Maurizio Palesi

21

## Metodo di Quine-McCluskey (II fase)

Ricerca della Copertura Minima - Procedimento di Petrick

		Mintermini				
		0	3	10	11	15
Implicanti primi	P0	*	*			
	P1		*	*		*
	P2			*	*	
	P3	*			*	*

- Matematicamente

$$(P0 + P3) \cdot (P0 + P1) \cdot (P1 + P2) \cdot (P2 + P3) \cdot (P1 + P3) = 1$$

$$(P0 + P3P1) \cdot (P1P3 + P2) \cdot (P1 + P3) = 1$$

$$(P0P2 + P3P1) \cdot (P1 + P3) = 1$$

$$(P0P2P1 + P0P2P3 + P3P1) = 1$$

Gruppi di implicanti primi:

→ P0P2P1

→ P0P2P3

→ P3P1

Maurizio Palesi

22

## Metodo di Quine-McCluskey

### Funzioni non completamente specificate

- Una funzione Booleana può esibire delle **condizioni di indifferenza**
  - Configurazioni di ingresso che non si presenteranno mai e per le quali, quindi, qualunque valore di uscita è ammissibile
  - Configurazioni di uscita non utilizzate e per le quali, quindi, qualunque valore di uscita è ammissibile
- Una funzione Booleana che presenta condizioni di indifferenza viene detta **non completamente specificata** o **parzialmente specificata**
  - Le configurazioni per le quali il valore dell'uscita è indifferente costituiscono il **Don't care-set**

Maurizio Palesi

23

## Metodo di Quine-McCluskey

### Funzioni non completamente specificate

a	b	c	d	o
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	-
0	1	0	0	1
0	1	0	1	-
0	1	1	0	-
0	1	1	1	-
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Perché le condizioni di indifferenza costituiscono un'opportunità di ottimizzazione?

**Don't care-set:**  
{abcd, abcd, abcd, abcd}

Maurizio Palesi

24

## Metodo di Quine-McCluskey

Funzioni non completamente specificate

- Dal punto di vista della sintesi il **DC-set** potrebbe essere tralasciato lasciando inalterati gli algoritmi di sintesi precedentemente visti
- Le condizioni di indifferenza rappresentano però opportunità di ulteriore minimizzazione

a	b	c	d	Et.
0	1	0	0	4
1	0	1	0	10
1	0	1	1	11
1	1	0	1	13
1	1	1	0	14
1	1	1	1	15

a	b	c	d	Et.
1	0	1	-	4,11
1	-	1	0	10,14
1	-	1	1	11,15
1	1	-	1	13,15
1	1	1	-	14,15

abcd è un  
implicante primo  
formato da 4  
letterali

Maurizio Palesi

25

## Metodo di Quine-McCluskey

Funzioni non completamente specificate

- O analogamente utilizzando le Mappe di Karnaugh

		ab			
		00	01	11	10
cd	00		1		
	01			1	
	11			1	1
	10			1	1

abcd è un implicante primo  
essenziale del costo di 4 letterali.  
Infatti non può essere espanso visto  
che non esistono altri mintermini a  
distanza di Hamming 1

Maurizio Palesi

26

## Metodo di Quine-McCluskey

Funzioni non completamente specificate

- Se invece si considerano le configurazioni del *DC-set* come appartenenti all'*On-set* si ha

cd	ab			
	00	01	11	10
00		1		
01		1	1	
11	1	1	1	1
10		1	1	1

abcd può essere espanso nel cubo  
ab del costo di 2 letterali

Maurizio Palesi

27

## Metodo di Quine-McCluskey

Funzioni non completamente specificate

- Ricerca degli implicanti primi
  - Le condizioni di indifferenza sono trattate come 1
- Ricerca della copertura ottima
  - Nella tabella di copertura compaiono, come indici di colonna, solo i mintermini relativi agli 1 della funzione
    - ✓ Cioè non è necessario coprire le condizioni di indifferenza e che quindi non potranno mai esistere implicanti primi costituiti da sole condizioni d'indifferenza
    - ✓ Le condizioni d'indifferenza vengono marcate a priori

Maurizio Palesi

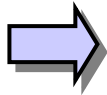
28

## Metodo di Quine-McCluskey

Funzioni non completamente specificate - **Esempio**

$$f(a,b,c,d) = \Sigma(0,2,12,13) + d(4,5)$$

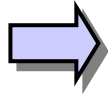
Gr.	a	b	c	d	Et.
$G_0^1$	0	0	0	0	0 ✓
$G_1^1$	0	0	1	0	2 ✓
	0	1	0	0	4 ✓
$G_2^1$	0	1	0	1	5 ✓
	1	1	0	0	12 ✓
$G_3^1$	1	1	0	1	13 ✓



Gr.	a	b	c	d	Et.
$G_0^2$	0	0	-	0	0,2 ✓
	0	-	0	0	0,4 ✓
$G_1^2$	0	1	0	-	4,5 ✓
	-	1	0	0	4,12 ✓
$G_2^2$	-	1	0	1	5,13 ✓
	1	1	0	-	12,13 ✓



Gr.	a	b	c	d	Et.
$G_0^3$	-	1	0	-	4,5,12,13



Implicanti primi:

→  $P_0(0,2)$ : abd

→  $P_1(0,4)$ : acd

→  $P_2(4,5,12,13)$ : bc

Maurizio Palesi

29

## Metodo di Quine-McCluskey

Funzioni non completamente specificate - **Esempio**

Implicanti primi:

→  $P_0(0,2)$ : abd

→  $P_1(0,4)$ : acd

→  $P_2(4,5,12,13)$ : bc

	0	2	12	13
P0	*	*		
P1	*			
P2			*	*

	0	2	12	13
P0	*	*		
P1	*			
P2			*	*

Insieme di copertura:  
{P2}

	0	2
P0	*	*
P1	*	

Insieme di copertura:  
{P0, P2}

Maurizio Palesi

30