

# Minimizzazione degli stati in una rete sequenziale sincrona

## Minimizzazione del numero degli stati

Il numero minimo di elementi di memoria necessari a memorizzare gli stati dell'insieme S è:

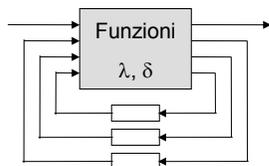
$$N_{\min} = \log_2 |S|$$

Nel modello di una macchina a stati possono esistere degli stati ridondanti

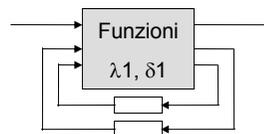
L'identificazione ed eliminazione degli stati ridondanti comporta:

- Reti combinatorie meno costose
- Minori elementi di memoria

Macchina a 8 stati, 1 ingresso, 1 uscita



Macchina a 4 stati, 1 ingresso, 1 uscita



Eliminando  
4 stati

## Minimizzazione del numero degli stati

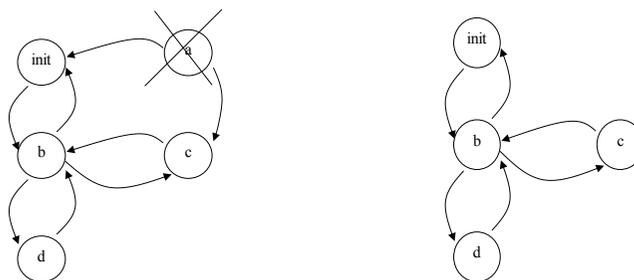
Obiettivo della riduzione del numero degli stati è l'individuazione di una macchina minima equivalente, ovvero funzionalmente equivalente e con il minimo numero di stati.

La riduzione viene realizzata in due fasi:

- Eliminazione degli stati non raggiungibili dallo stato iniziale
- Identificazione degli stati :
  - Equivalenti, per le macchine completamente specificate
  - Compatibili, per le macchine non completamente specificate

## Eliminazione degli stati irraggiungibili

Uno stato è irraggiungibile se non esiste alcuna sequenza di transizione di stato che porti dallo stato iniziale in tale stato.



## Minimizzazione di macchine completamente specificate

Siano:

- $I_\alpha$  una sequenza d'ingresso  $i_1, \dots, i_k$
- $U_\alpha$ , sequenza d'uscita ad essa associata ottenuta attraverso  $\lambda$
- $s_i, s_j$  due generici stati

Due stati  $s_i$  e  $s_j$  appartenenti ad  $S$  sono *indistinguibili* se:

$$U_{\alpha,i} = L(s_i, I_\alpha) = L(s_j, I_\alpha) = U_{\alpha,j} \quad \forall I_\alpha$$

L'indistinguibilità tra  $s_i$  e  $s_j$  si indica con  $s_i \sim s_j$

## Minimizzazione di macchine completamente specificate

La relazione di indistinguibilità gode di tre proprietà:

Riflessiva:  $s_i \sim s_i$

Simmetrica:  $s_i \sim s_j \leftrightarrow s_j \sim s_i$

Transitiva:  $s_i \sim s_j \wedge s_j \sim s_k \rightarrow s_i \sim s_k$

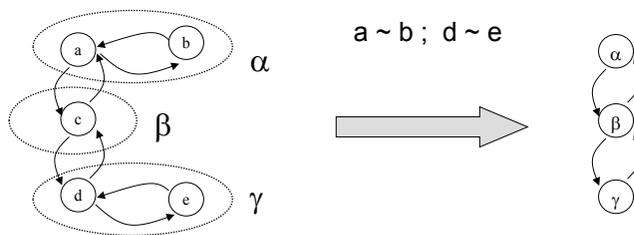
La relazione di indistinguibilità è una relazione di equivalenza

Due stati indistinguibili sono equivalenti e possono essere sostituiti da un solo stato.

## Minimizzazione di macchine completamente specificate

Un gruppo di stati tra loro equivalenti può essere raggruppato in un'unica classe.

L'insieme di classi individuate determina l'insieme di stati della macchina minima equivalente.



## Minimizzazione di macchine completamente specificate

La definizione di indistinguibilità è di difficile applicabilità poiché richiederebbe di considerare tutte le sequenze di ingresso (a priori infinite).

Si ricorre a una regola introdotta da Paull-Unger:

- Due stati sono  $s_i$  e  $s_j$  sono indistinguibili se e solo se per ogni simbolo di ingresso  $i_a$ :

$$\lambda(s_i, i_a) = \lambda(s_j, i_a) \quad \text{ovvero le uscite sono uguali per tutti i simboli d'ingresso}$$

$$\delta(s_i, i_a) = \delta(s_j, i_a) \quad \text{ovvero gli stati prossimi sono indistinguibili}$$

La regola è iterativa

## Minimizzazione di macchine completamente specificate

	0	1
a	d/0	b/1
b	d/0	b/1
c	a/1	d/0
d	b/0	c/0
e	a/0	c/0

← a e b sono indistinguibili poiché per tutti i valori degli ingressi  
 - le uscite sono uguali  
 ← - gli stati prossimi sono uguali

← d ed e sono indistinguibili poiché per tutti i valori degli ingressi  
 - le uscite sono uguali  
 ← - gli stati prossimi sono indistinguibili

C non è indistinguibile con gli altri stati

## Minimizzazione di macchine completamente specificate

	0	1
a	d/0	b/1
b	e/0	b/1
c	a/1	c/1
d	b/1	c/0
e	a/1	c/0

← a e b hanno la stessa uscita  
 ← se gli stati futuri d ed e sono indistinguibili,  $a \sim b$

← d ed e hanno la stessa uscita  
 ← se gli stati futuri a ed b sono indistinguibili,  $d \sim e$

a non è indistinguibile da c, d ed e poiché ha una differente uscita

Poiché l'indistinguibilità tra a e b dipende da quella tra d ed e e viceversa, possiamo concludere che  $a \sim b$ ,  $d \sim e$

Macchina minima equivalente

	0	1
$\alpha$	$\gamma$ /0	$\alpha$ /1
$\beta$	$\alpha$ /1	$\beta$ /1
$\gamma$	$\alpha$ /1	$\beta$ /0

Le classi di indistinguibilità sono:  
 $\alpha = \{a, b\}$   $\beta = \{c\}$ ,  $\gamma = \{d, e\}$

## Minimizzazione di macchine completamente specificate

Poiché gli insiemi  $I$  ed  $S$  hanno cardinalità finita, dopo un numero finito di passi si verifica una delle due condizioni:

- $s_i \not\sim s_j$  se i simboli d'uscita sono diversi o gli stati prossimi sono distinguibili
- $s_i \sim s_j$  se i simboli d'uscita sono uguali e gli stati prossimi sono indistinguibili

## Minimizzazione di macchine completamente specificate

Le relazioni di indistinguibilità possono essere identificate mediante la **Tabella delle Implicazioni**.

Tale tabella :

- Mette in relazione ogni coppia di stati
- È triangolare (proprietà simmetrica) e priva di diagonale principale

Ogni elemento della tabella contiene:

- Il simbolo di non equivalenza ( $X$ ) o di equivalenza ( $\sim$ )
- La coppia di stati a cui si rimanda la verifica, se non è possibile pronunciarsi sulla equivalenza degli stati corrispondenti.

S1	x		
S2	x	~	
S3	S1,S2	x	x
	S0	S1	S2

## Minimizzazione di macchine completamente specificate

### Analisi delle coppie degli stati

Per ogni coppia di stati:

- Se è marcata come equivalente non è richiesta una ulteriore verifica
- Se si rimanda ad un'altra coppia:
  1. se questi stati sono equivalenti anche gli stati della coppia in esame sono equivalenti;
  2. se questi sono non equivalenti anche gli stati della coppia in esame sono non equivalenti;
  3. se gli stati della coppia cui si rimanda dipendono da una coppia ulteriore si ripete il procedimento in modo iterativo

L'analisi termina quando non sono più possibili eliminazioni

Le coppie rimaste sono equivalenti

## Minimizzazione di macchine completamente specificate

	0	1
a	g/0	e/1
b	c/0	a/1
c	e/1	g/0
d	b/0	e/1
e	g/0	a/1
f	d/1	f/0
g	a/1	g/0

b	cg ae					
c	x	x				
d	bg	bc ae	x			
e	~	cg	x	bg ae		
f	x	x	de fg	x	x	
g	x	x	ae	x	x	ad
	a	b	c	d	e	f

# Minimizzazione di macchine completamente specificate

## Analisi delle coppie degli stati

b	cg ae					
c	x	x				
d	bg	bc ae	x			
e	~	cg	x	bg ae		
f	x	x	de fg	x	x	
g	x	x	ae	x	x	ad
	a	b	c	d	e	f

b-a: c-g è indistinguibile se lo è a-e  $\rightarrow b \sim a$

d-a: b-g è distinguibile  $\rightarrow d \not\sim a$

d-b: b-c è distinguibile  $\rightarrow d \not\sim b$

e-b: c-g è indistinguibile se lo è a-e  $\rightarrow b \sim e$

e-d: b-g è distinguibile  $\rightarrow e \not\sim d$

f-c: d-e è indistinguibile se lo è b-g  $\rightarrow f \sim c$

g-c: a-e è indistinguibile  $\rightarrow g \sim c$

g-f: a-d è indistinguibile se lo è b-g  $\rightarrow g \sim f$

# Minimizzazione di macchine completamente specificate

b	~					
c	x	x				
d	x	x	x			
e	~	~	x	x		
f	x	x	x	x	x	
g	x	x	~	x	x	x
	a	b	c	d	e	f

Classi di indistinguibilità

$\alpha = \{a, b, e\}$

$\beta = \{c, g\}$

$\gamma = \{d\}$

$\delta = \{f\}$

Tabella degli stati minima equivalente

	0	1
$\alpha$	$\beta / 0$	$\alpha / 1$
$\beta$	$\alpha / 1$	$\beta / 0$
$\gamma$	$\alpha / 0$	$\alpha / 1$
$\delta$	$\gamma / 1$	$\delta / 0$

## Macchine non completamente specificate

Sono macchine in cui per alcune configurazioni degli ingressi e stati correnti non sono specificati gli stati futuri e/o le configurazioni d'uscita

	0	1
a	e/0	a/0
b	d/0	b/0
c	e/-	c/-
d	a/1	a/1
e	a/-	b/-

- La riduzione del numero degli stati in macchine non completamente specificate è ricondotta alla individuazione di una macchina minima che copre (compatibile con) quella data
- Il metodo di riduzione è simile a quello per macchine completamente specificate ma si basa sulla proprietà di compatibilità tra stati, invece che su quella di indistinguibilità.

## Macchine non completamente specificate

Data una macchina non completamente specificata:

- Una sequenza di ingresso si dice applicabile se
  - ▣ per ogni simbolo d'ingresso della sequenza la funzione stato prossimo è specificata tranne al più l'ultimo.
- Due stati  $s_i$  e  $s_j$  si dicono compatibili ( $s_i \approx s_j$ )
  - ▣ se partendo da  $s_i$  e da  $s_j$ ,
  - ▣ usando ogni possibile sequenza di ingresso applicabile,
  - ▣ si ottengono le stesse sequenze d'uscita ovunque queste siano specificate.

## Macchine non completamente specificate

La compatibilità è una relazione meno forte di quella di indistinguibilità, non vale la proprietà transitiva.

	0	1		
a	a/1	a/1	$a \approx b; b \approx c$	$a \neq c$
b	a/-	a/-		
c	a/0	a/0		

## Riduzione del numero degli stati in macchine non completamente specificate

La regola di Paull-Unger è stata estesa per trattare il caso di macchine non completamente specificate.

Due stati sono compatibili se e solo se, per ogni simbolo di ingresso  $i_a$  valgono entrambe le due seguenti relazioni:

- $\lambda(s_i, i_a) = \lambda(s_j, i_a)$ 
  - i valori d'uscita sono uguali se entrambi sono specificati
  - Se uno o entrambi non sono specificati si assume che siano uguali
- $\delta(s_i, i_a) \approx \delta(s_j, i_a)$ 
  - Gli stati prossimi sono uguali se entrambi sono specificati
  - Se uno o entrambi non sono specificati si assume che siano uguali

## Minimizzazione di macchine non completamente specificate

Poiché gli insiemi  $I$  ed  $S$  hanno cardinalità finita, dopo un numero finito di passi si verifica uno dei 3 casi:

- $s_i \neq s_j$  non compatibili se
  - i simboli d'uscita sono diversi
  - gli stati prossimi sono stati verificati come non compatibili
- $s_i \approx s_j$  compatibili se
  - i simboli d'uscita sono uguali
  - gli stati prossimi sono stati verificati come compatibili
- Compatibilità condizionata
  - insieme di coppie di stati che devono essere compatibili affinché la coppia in oggetto sia compatibile

## Minimizzazione di macchine non completamente specificate

- Le relazioni di compatibilità possono essere identificate mediante la **Tabella delle Implicazioni** che viene costruita come nel caso della indistinguibilità
- L'analisi della tabella consente di propagare le incompatibilità, ma non di risolvere i vincoli di compatibilità condizionata. Quindi al termine dell'analisi, ogni elemento contiene:
  - Il simbolo di non compatibilità (X) o di compatibilità ( $\approx$ )
  - La coppia di stati a cui si rimanda la verifica, se non è possibile pronunciarsi sulla compatibilità degli stati corrispondenti.
- Poiché la relazione di compatibilità non è transitiva, non si può concludere che tutte le compatibilità sono soddisfatte. I vincoli vanno mantenuti per la costruzione delle classi di compatibilità
- Le classi di compatibilità si costruiscono esaminando il grafo delle compatibilità, che riporta le compatibilità condizionate e quelle incondizionate

## Minimizzazione di macchine non completamente specificate

	0	1
a	e/0	a/0
b	d/0	b/0
c	e/-	c/-
d	a/1	a/1
e	a/-	b/-

b	de			
c	≈	de		
d	x	x	ae ac	
e	ab	<del>ad</del>	ae bc	ab
	a	b	c	d

### Vincoli

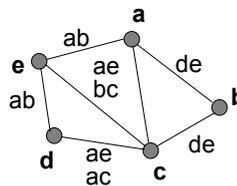
- $a \approx b$  se  $d \approx e$
- $a \approx e$  se  $a \approx b$
- $b \approx c$  se  $d \approx e$
- $b \approx e$  se  $a \approx d \rightarrow b \not\approx e$
- $c \approx d$  se  $a \approx e, a \approx c$
- $c \approx e$  se  $a \approx e, b \approx c$
- $d \approx e$  se  $a \approx b$

## Minimizzazione di macchine non completamente specificate

### Grafo di Compatibilità (GdC)

- I nodi corrispondono agli stati
- Due nodi  $n_i$  e  $n_j$  sono tra loro collegati se gli stati ad essi associati sono compatibili o la loro compatibilità dipende dalla compatibilità del loro stato prossimo.
- Per ogni arco devono essere riportati i vincoli sulla compatibilità degli stati prossimi

b	de			
c	≈	de		
d	x	x	ae ac	
e	ab	x	ae bc	ab
	a	b	c	d



## Minimizzazione di macchine non completamente specificate

### Classe di compatibilità:

- Un insieme di stati compatibili tra loro a coppie.
- Sul GdC è rappresentata da un sottografo completo
- Le classi di compatibilità tra stati non sono necessariamente disgiunte
- I seguenti insiemi sono classi di compatibilità

$C0 = \{a, b, c\}$

$C1 = \{a, c, e\}$

$C2 = \{c, d, e\}$

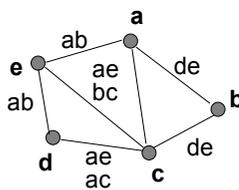
$C3 = \{a, b\}$

$C4 = \{b, c\}$

$C5 = \{a, c\}$

$C6 = \{a, e\}$

....



## Minimizzazione di macchine non completamente specificate

### Classe di massima compatibilità:

Classe di compatibilità non contenuta in nessun altra classe

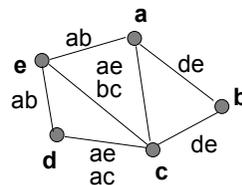
Sul GdC è individuata da un poligono completo non contenuto in nessun altro

I seguenti insiemi sono classi di massima compatibilità

$C0 = \{a, b, c\}$ , con condizione  $\langle de \rangle$

$C1 = \{a, c, e\}$ , con condizione  $\langle ab \rangle$  e  $\langle ae, bc \rangle$

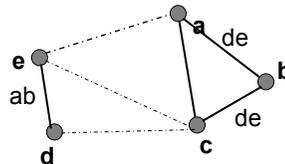
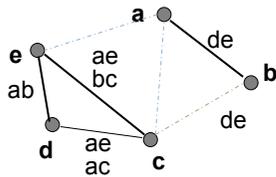
$C2 = \{c, d, e\}$ , con condizione  $\langle ab \rangle$ ,  $\langle ae, ac \rangle$  e  $\langle ae, bc \rangle$



## Minimizzazione di macchine non completamente specificate

### Insieme chiuso di classi di compatibilità:

- Per ogni classe dell'insieme, per ogni simbolo d'ingresso tutti gli stati futuri di una classe devono appartenere alla stessa classe dell'insieme, cioè tutti i vincoli sono rispettati



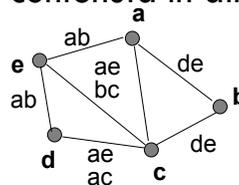
Insieme (ab), (ced): NON chiuso  
 $\square$  da (ab) con 0 vado in (ced), con 1 in (ab): OK  
 $\square$  da (ced) con 0 vado in (e) e (a): KO, con 1 in (c) e (ab): KO

Insieme (abc), (de): chiuso  
 $\square$  da (abc) con 0 vado in (cde), con 1 in (abc): OK  
 $\square$  da (ed) con 0 vado in (a), con 1 in (ab): OK

## Minimizzazione di macchine non completamente specificate

### Copertura della tabella degli stati

Insieme di classi di compatibilità per cui ogni stato della tabella degli stati è contenuta in almeno una classe



Esempi di copertura

$\{ \{a,b,c\}, \{a,c,e\}, \{c,d,e\} \}$

$\{ \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c,e\}, \{c,d,e\} \}$

## Minimizzazione di macchine non completamente specificate

Minimizzare il numero degli stati significa:

- trovare il più piccolo insieme chiuso di classi di compatibilità che copre l'insieme di stati su cui la macchina è definita.

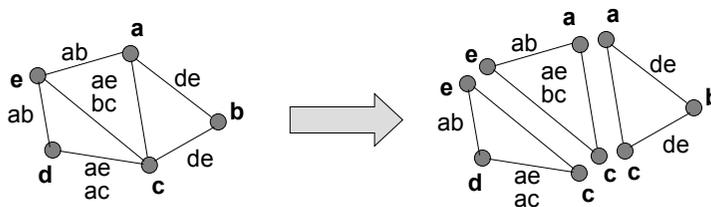
L'insieme di tutte le classi di massima compatibilità è chiuso e copre l'insieme degli stati della macchina.

Se si associa uno stato ad ogni classe di massima compatibilità si ottiene una nuova macchina con un numero di stati:

- Possibilmente minore di quello di partenza
- Non necessariamente minimo

## Minimizzazione di macchine non completamente specificate

Ricerca delle classi di massima compatibilità



Una copertura ammissibile è dall'insieme delle classi di massima compatibilità:

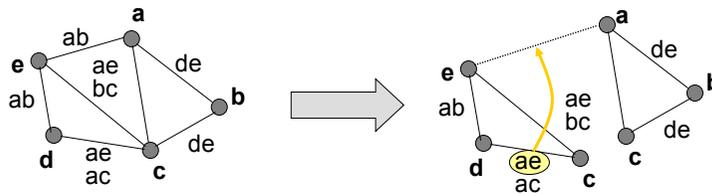
$$\alpha = \{a, b, c\} \quad \beta = \{a, c, e\} \quad \gamma = \{c, d, e\}$$

Tale copertura non è minima.

Le classi di questa copertura condividono diversi stati

# Minimizzazione di macchine non completamente specificate

Nella precedente copertura gli stati  $\{a,c,e\}$  sono già coperti dalle altre due classi

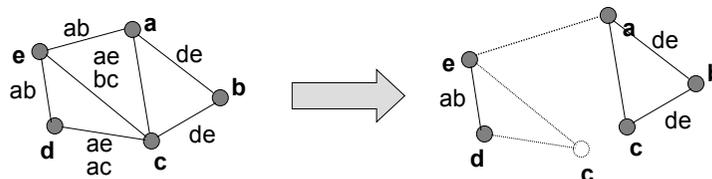


La copertura ottenuta  $\alpha=\{a,b,c\}$  ,  $\beta =\{c,d,e\}$  non forma un insieme chiuso in quanto non è rispettato il vincolo **ae** da cui dipende  $d \approx c$ .

**ae** non è contenuto né in  $\alpha$  né in  $\beta$

# Minimizzazione di macchine non completamente specificate

Poiché lo stato  $c$  è già coperto dalla classe  $\alpha$  possiamo escluderlo da  $\beta$



La copertura ottenuta  $\alpha=\{a,b,c\}$  ,  $\beta =\{d,e\}$  forma un insieme chiuso

Tabella degli stati

	0	1
a	e/0	a/0
b	d/0	b/0
c	e/-	c/-
d	a/1	a/1
e	a/-	b/-

Classi di massima  
compatibilità

$\alpha=\{a,b,c\}$   
 $\beta =\{d,e\}$



Tabella degli stati  
ridotta

	0	1
$\alpha$	$\beta$ /0	$\alpha$ /0
$\beta$	$\alpha$ /1	$\alpha$ /1

## Algoritmo greedy per la minimizzazione

---

- 1) si sceglie una classe massima di compatibilità a cui si associa uno stato della macchina minimale
- 2) si rimuovono dal grafo di compatibilità tutti i nodi di questa classe ( e i relativi archi) se non implicano la violazione di vincoli di compatibilità
- 3) se il grafo contiene ancora poligoni si torna al punto 1.