



Espressioni minime mediante il metodo di Quine-Mc Cluskey

Calcolatori Elettronici

Metodo di Quine-Mc Cluskey



- Metodo di minimizzazione tabellare
 - Facile da tradurre in un algoritmo.
 - Il numero di variabili trattate è teoricamente illimitato.
 - Facile da estendere al caso di funzioni a più di una uscita.
- Consiste di due fasi:
 - Ricerca degli implicant primari;
 - Ricerca della copertura ottima.

Poiché queste due fasi hanno complessità esponenziale è praticamente impossibile trovare la soluzione ottima per un numero di variabili che supera l'ordine di una decina.

Calcolatori Elettronici

Metodo di Quine-Mc Cluskey

L'insieme di implicanti primi di una funzione f è ottenuta applicando ripetutamente, in tutti i modi possibili, la semplificazione

$$x_i P + x_i' P = P$$

dove P è un prodotto di letterali scelti tra $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ in forma diretta o negata.

L'insieme di implicanti è ottenuto partendo dai minterm della funzione.

Le semplificazioni vengono applicate ai termini che differiscono in una sola posizione.

Calcolatori Elettronici

Metodo di Quine-Mc Cluskey

x	y	z	f	Punto di partenza				
0	0	0	1					
0	0	1	0					
0	1	0	0					
0	1	1	1					
1	0	0	0					
1	0	1	1					
1	1	0	0					
1	1	1	1					

x	y	z	
0	0	0	
0	1	1	√
1	0	1	√
1	1	1	√

x	y	z	
-	1	1	
1	-	1	

Nessuna riduzione

- Si confrontano esaustivamente tutti i termini prodotto (ricavati dal passo precedente);
Si semplificano i termini che differiscono in una sola posizione;
Si marcano i termini semplificati per indicare che gli implicanti non sono primi.

Calcolatori Elettronici

Metodo di Quine-Mc Cluskey

x	y	z	f	Punto di partenza			
0	0	0	1				
0	0	1	0				
0	1	0	0				
0	1	1	1	0	1	1	√
1	0	0	0	1	0	1	√
1	0	1	1	1	1	1	√
1	1	0	0				
1	1	1	1				

x	y	z
0	0	0
-	1	1
1	-	1

Nessuna riduzione

1. Si crea un nuovo insieme di termini prodotto da confrontare e si ripete il passo 1.

Il processo ha termine quando non ci sono elementi da semplificare

Calcolatori Elettronici

Metodo di Quine-Mc Cluskey

Per ridurre il numero di confronti, i termini vengono divisi in gruppi con elementi aventi lo stesso numero di 1.

I confronti vengono svolti solo tra termini relativi a gruppi che differiscono per un solo 1.

Ad ogni termine associamo un etichetta che rappresenta l'insieme di mintermine che esso ricopre.

a	b	c	d	
0	0	0	0	0
0	0	1	0	2
0	1	0	0	4
0	0	1	1	3
0	1	1	0	6
1	1	0	0	12
0	1	1	1	7
1	1	1	0	14

← Etichetta

Vengono confrontati i gruppi

0 e 1

1 e 2

2 e 3

Calcolatori Elettronici

Metodo di Quine-Mc Cluskey

I passi da seguire per individuare gli implicanti primi sono i seguenti:

- 1) Si suddividono i minterm in gruppi G_i^0 contenenti termini con i 1. Ciascun minterm è etichettato con l'intero equivalente.
- 2) Partendo dal gruppo di indice i minimo, fino all'indice massimo -1 , vengono confrontati i termini del gruppo G_i^k con quelli del gruppo G_{i+1}^k .

Calcolatori Elettronici

Metodo di Quine-Mc Cluskey

Se due termini differiscono solo nella posizione j , essi vengono combinati in un unico termine che viene inserito in un nuovo gruppo G_i^{k+1} .

- In posizione j viene inserito un trattino "-".
- I due termini vengono spuntati per indicare che non sono implicanti primi
- L'etichetta di questo nuovo termine è ottenuto concatenando le etichette dei termini di partenza.

3) Se sono possibili altre combinazioni, k è incrementato e si ritorna al passo 2)

Calcolatori Elettronici

Esempio

$$f(a,b,c,d) = \Sigma(1,9,11,12,13,14,15)$$

G_1^0	0001	1	\checkmark	G_1^1	-001	1,9	
	1001	9	\checkmark		10-1	9,11	\checkmark
G_2^0	1100	12	\checkmark	G_2^1	1-01	9,13	\checkmark
	1011	11	\checkmark		110-	12,13	\checkmark
G_3^0	1101	13	\checkmark		11-0	12,14	\checkmark
	1110	14	\checkmark	G_3^1	1-11	11,15	\checkmark
G_4^0	1111	15	\checkmark		11-1	13,15	\checkmark
					111-	14,15	\checkmark

G_2^2

1--1	9,11,13,15
11--	12,13,14,15

↑

Non sono
ulteriormente
riducibili

Implicanti Primi

P0(1,9): b' c' d
 P1(9,11,13,15): a d
 P2(12,13,14,15): a b

Calcolatori Elettronici

Esempio: comparatore (a ≤ b) 2 bit (0)

a2	a1	b2	b1	q
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

G_0^0	0 0 0 0	0
	0 0 0 1	1
G_1^0	0 0 1 0	2
	0 0 1 1	3
G_2^0	0 1 0 1	5
	0 1 1 0	6
	1 0 1 0	10
G_3^0	0 1 1 1	7
	1 0 1 1	11
G_4^0	1 1 1 1	15

Calcolatori Elettronici

Esempio: comparatore (a<=b) 2 bit (1)

G_0^0	0	0	0	0	0	√
G_1^0	0	0	0	1	1	√
	0	0	1	0	2	√
G_2^0	0	0	1	1	3	√
	0	1	0	1	5	√
	0	1	1	0	6	√
G_3^0	1	0	1	0	10	√
G_4^0	0	1	1	1	7	√
	1	0	1	1	11	√
	1	1	1	1	15	√

G_0^1	0	0	0	-	0,1
	0	0	-	0	0,2
	0	0	-	1	1,3
	0	-	0	1	1,5
G_1^1	0	0	1	-	2,3
	0	-	1	0	2,6
	-	0	1	0	2,10
	0	-	1	1	3,7
	-	0	1	1	3,11
G_2^1	0	1	-	1	5,7
	0	1	1	-	6,7
	1	0	1	-	10,11
G_3^1	-	1	1	1	7,15
	1	-	1	1	11,15

Calcolatori Elettronici

Esempio: comparatore (a<=b) 2 bit (2)

G_0^1	0	0	0	-	0,1	√
	0	0	-	0	0,2	√
	0	0	-	1	1,3	√
	0	-	0	1	1,5	√
G_1^1	0	0	1	-	2,3	√
	0	-	1	0	2,6	√
	-	0	1	0	2,10	√
	0	-	1	1	3,7	√
	-	0	1	1	3,11	√
G_2^1	0	1	-	1	5,7	√
	0	1	1	-	6,7	√
	1	0	1	-	10,11	√
G_3^1	-	1	1	1	7,15	√
	1	-	1	1	11,15	√

G_0^2	0	0	-	-	0,1,2,3
	0	-	-	1	1,3,5,7
G_1^2	0	-	1	-	2,3,6,7
	-	0	1	-	2,10,3,11
G_2^2	-	-	1	1	3,7,11,15

Implicanti Primi

- P0(0,1,2,3): a2'a1'
- P1(1,3,5,7): a2'b1
- P2(2,3,6,7): a2'b2
- P3(2,3,10,11): a1'b2
- P4(3,7,11,15): b2b1

Calcolatori Elettronici

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima

Essa viene realizzata mediante la tabella degli implicanti primi.

La tabella degli implicanti primi è una matrice binaria dove:

- gli indici delle righe sono gli implicanti primi individuati;
- gli indici delle colonne sono i minterm della funzione;
- l'elemento a_{ij} della matrice assume il valore * (o 1) se il minterm della colonna j è coperto dall'implicante della riga i .

	1	9	11	12	13	14	15
P0	*	*					
P1		*	*		*		*
P2				*	*	*	*

P0(1,9): b' c' d
P1(9,11,13,15): a d
P2(12,13,14,15): a b

Calcolatori Elettronici

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima

Si utilizzano criteri di essenzialità e dominanza per ridurre la complessità del problema.

Criterio di Essenzialità

È un criterio di scelta (aumenta l'insieme di copertura) e, di conseguenza, di semplificazione poiché identifica ed estrae gli implicanti primi essenziali;

Criterio di Dominanza

È un criterio di sola semplificazione poiché riduce la dimensione della tabella di copertura eliminando righe (implicanti/mintermini) o colonne (mintermini) senza operare alcuna scelta

Calcolatori Elettronici

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima

Criterio di Essenzialità:

Se una colonna contiene un solo 1, la riga che gli corrisponde è relativa ad un implicante primo essenziale (riga essenziale).

La riga essenziale e le colonne da essa coperte vengono eliminate dalla tabella. All'insieme di copertura viene aggiunto l'implicante identificato

	1	9	12	13	15	21	23	25
P0	*	*						*
P1		*			*	*		
P2			*	*	*			*
P3	*		*		*		*	
P4	*	*		*		*		

Insieme di copertura: \emptyset

	9	13	21	25
P0	*			*
P1	*		*	
P2		*		*
P4	*	*	*	

Insieme di copertura: { P3 }

Calcolatori Elettronici

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima

Criterio di dominanza di riga:

Un implicante i -esimo domina un implicante j -esimo quando P_i copre almeno tutti i mintermini coperti da P_j

P_i è eliminato dalla tabella (eliminazione della riga).

	9	13	21	25
P0	*			*
P1	*		*	
P2		*		*
P4	*	*	*	



	9	13	21	25
P0	*			*
P2		*		*
P4	*	*	*	

P4 domina P1

Insieme di copertura: { P3 }

Insieme di copertura: { P3 }

Calcolatori Elettronici

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima

- L'eliminazione di una riga può generare dei nuovi implicanti essenziali;
- Le righe ad essi associate vengono chiamate righe essenziali secondarie (implicanti primi secondari).

	9	13	21	25
P0	*		*	*
P2		*		*
P4	*	*	*	

	25
P0	*
P2	*

Insieme di copertura: { P3 }

Insieme di copertura: { P3, P4 }

Calcolatori Elettronici

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima

Dominanza tra colonne:

Un mintermine i -esimo domina un mintermine j -esimo quando ogni implicante che copre m_i copre anche m_j

m_i è eliminato dalla tabella.

	9	13	21	25
P0	*		*	*
P1	*		*	
P2		*		*
P4	*	*	*	

9 domina 21

Insieme di copertura: { P3 }

	13	21	25
P0			*
P1		*	
P2	*		*
P4	*	*	

Insieme di copertura: { P3 }

Calcolatori Elettronici

Metodo di Quine-Mc Cluskey: ricerca della copertura minima

Quando tutte le righe essenziali e le colonne e righe dominate sono rimosse, la tabella ottenuta, se esiste, è ciclica: *tabella ciclica degli implicanti primi*.

Per scegliere gli implicanti si può effettuare una scelta arbitraria ed esaminare le conseguenze derivanti da tale scelta (branch and bound) e dalle sue alternative.

Calcolatori Elettronici

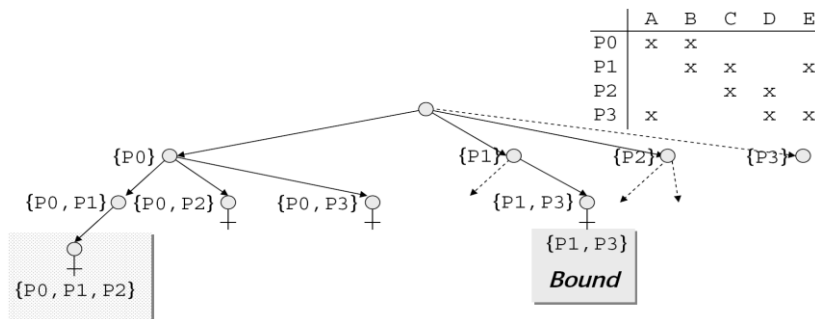
Branch and bound

1. Si sceglie un implicante primo P_i come appartenente alla soluzione e si elimina la riga corrispondente e le colonne coperte da P_i dalla tabella di copertura
2. La tabella ridotta viene esaminata per altre possibili semplificazioni (righe essenziali o relazioni di dominanza) che possono portare direttamente ad una soluzione finale S_i di costo C_i
3. Se la tabella ottenuta dalle semplificazioni, non è riducibile si sceglie un secondo implicante P_j tra quelli rimasti (considerando quindi come possibile copertura parziale la coppia $\{P_i, P_j\}$) iterando il procedimento di semplificazione e così via fino a coprire la funzione a costo C_i

Calcolatori Elettronici

Branch and bound

- Una volta individuata una soluzione si risale nell'albero, per esaminare le scelte rimaste
- Si mantiene sempre la soluzione a costo minore (bound) e si confronta il costo ottenuto con il costo minore, quando lo si supera quella soluzione viene abbandonata



Calcolatori Elettronici

Metodo di Quine-Mc Cluskey: funzioni non completamente specificate

Ricerca degli implicanti primi:

Nel passo relativo alla generazione degli implicanti primi, le condizioni di indifferenza sono trattate come 1.

Ricerca della copertura ottima:

Nella tabella di copertura compaiono, come indici di colonna, solo i mintermini relativi agli 1 della funzione

Calcolatori Elettronici

Metodo di Quine-Mc Cluskey: funzioni non completamente specificate

$$f(a,b,c,d) = \Sigma(0,2,12,13) + d(4,5)$$

0000	0	√			
0010	2	√		00-0	0,2
0100	4	√		0-00	0,4
0101	5	√	⇒	010-	4,5 √
1100	12	√		-100	4,12 √
1101	13	√		-101	5,13 √
				110-	12,13 √

⇒	-10-	4,5,12,13
---	------	-----------

$P_0(0,2): a'b'd'$		0	2	12	13	
$P_1(0,4): a'c'd'$	P_0	*	*			P ₀ e P ₂ sono essenziali
$P_2(4,5,12,13): bc'$	P_1	*				f(a,b,c,d) = a'b'd' + bc'
	P_2			*	*	

Calcolatori Elettronici