

# Ottimizzazione delle reti combinatorie

Calcolatori Elettronici-Ingegneria Telematica

---

## Ottimizzazione delle reti combinatorie

Prof. Giuseppe Ascia

- L'ottimizzazione di un circuito comporta normalmente un compromesso tra:
  - Prestazioni (ritardo di propagazione)
  - Area (o costo)
  - Potenza dissipata
  - Testabilità
  - ...

Calcolatori Elettronici-Ingegneria Telematica

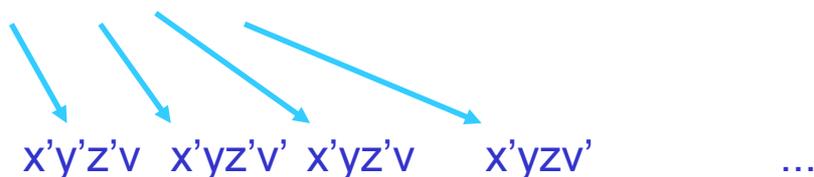
# Relazione tra Area e Ritardo

Prof. Giuseppe Ascia

- Per le realizzazioni a due livelli (somma di prodotti o prodotti di somme) è chiara

- Esempio:

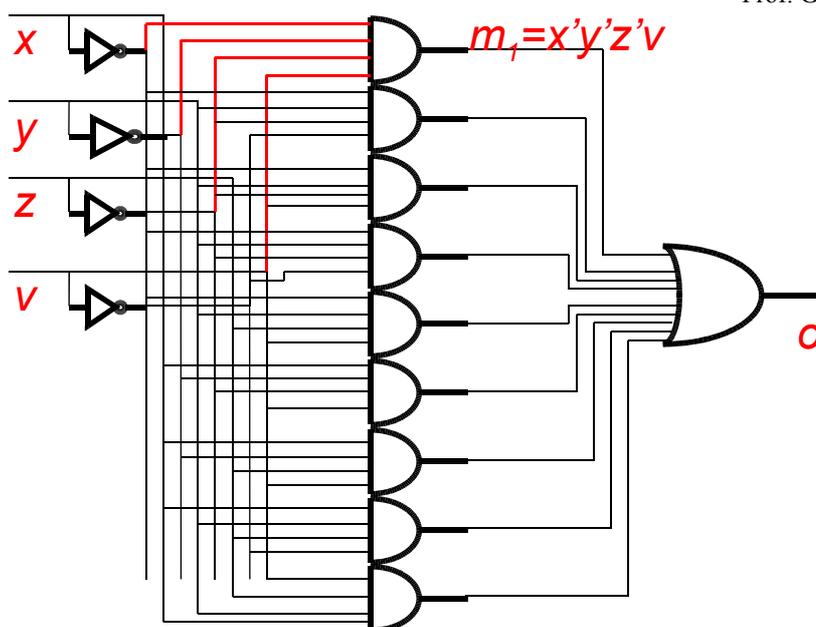
$$o = f(x,y,z,v) = \{m_1, m_4, m_5, m_6, m_7, m_9, m_{11}, m_{14}, m_{15}\}$$



Calcolatori Elettronici-Ingegneria Telematica

# Relazione tra Area e Ritardo

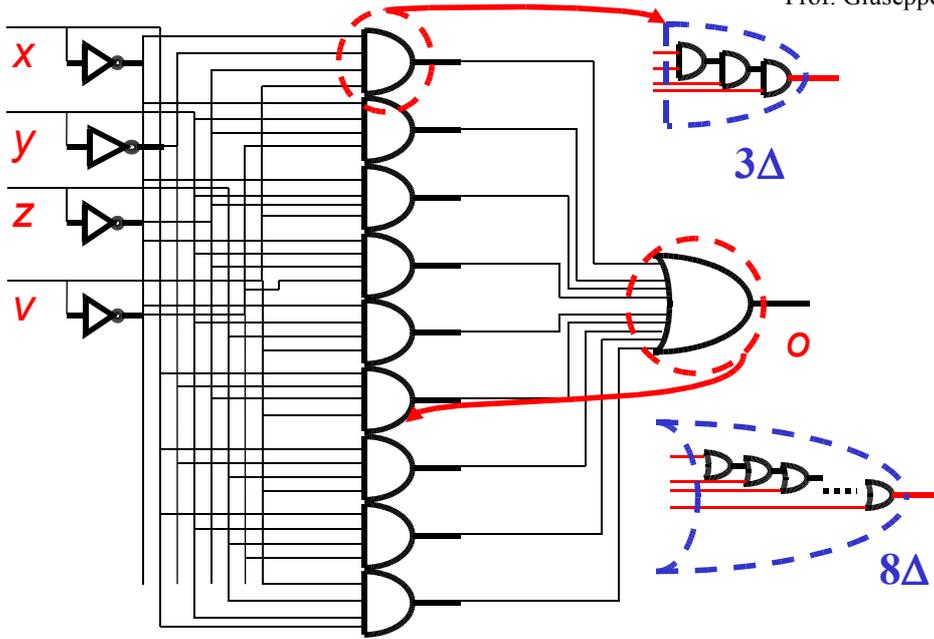
Prof. Giuseppe Ascia



Calcolatori Elettronici-Ingegneria Telematica

# Relazione tra Area e Ritardo

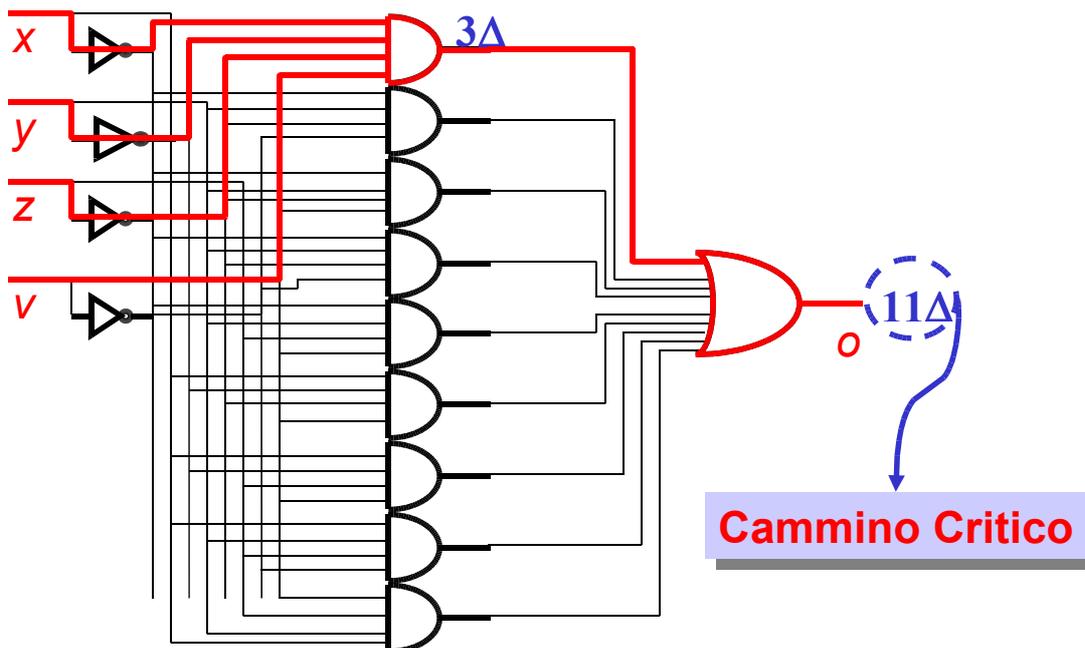
Prof. Giuseppe Ascia



Calcolatori Elettronici-Ingegneria Telematica

# Relazione tra Area e Ritardo

Prof. Giuseppe Ascia



Calcolatori Elettronici-Ingegneria Telematica

# Relazione tra Area e Ritardo

## Ottimizzazione dell'Area

Prof. Giuseppe Ascia

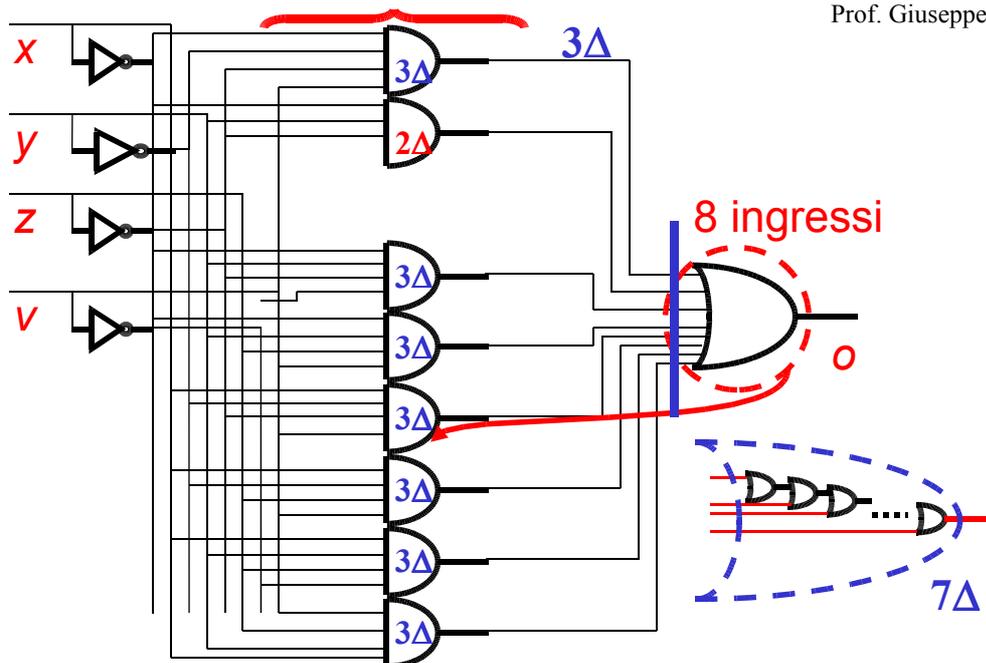
- Si considerino i mintermini:
  - $m_4 = x'yz'v'$
  - $m_5 = x'yz'v$
  - Due prodotti (2 porte AND a 4 ingressi)
- Però possiamo:
  - $x'yz'v' + x'yz'v = x'yz'(v' + v) = x'yz'$
  - Un prodotto (1 porta AND a 3 ingressi)
    - Ottimizzazione in area (1 porta in meno)
    - Nessuna ottimizzazione in ritardo per il primo livello (i restanti mintermini contengono tutti i letterali)
  - Inoltre la porta OR diventa a 8 ingressi
    - Ottimizzazione in ritardo nel secondo livello ( $7\Delta$ )

Calcolatori Elettronici-Ingegneria Telematica

# Relazione tra Area e Ritardo

## Ottimizzazione dell'Area

Prof. Giuseppe Ascia



Calcolatori Elettronici-Ingegneria Telematica

- In un circuito a due livelli (somma di prodotti)
  - La riduzione del numero di prodotti riduce sia l'**area** che il **ritardo**
  - Eliminazione di un letterale
    - Riduce il numero di ingressi nella porta AND (riduzione di **area**)
    - Riduce il ritardo di un solo segnale che arriva agli ingressi della OR ma non è detto che riduca il ritardo del cammino critico

## Minimizzazione di una funzione booleana mediante il metodo di Karnaugh

# Espressioni booleane minime

Prof. Giuseppe Ascia

## Obiettivo:

trovare una espressione in forma SP o PS minima rispetto a certi criteri di costo.

Nella ottimizzazione delle espressioni SP (PS) a due livelli l'obiettivo è:

- ridurre il numero di **minterm (maxterm)**;
- ridurre il numero di **letterali**.

Es.  $f(a,d,c)=a'b'c'+a'bc'+a'b'c$  equivale a  $f(a,d,c)=a'b'+a'c'$

## Metodologie di minimizzazione:

Karnaugh e Quine -Mc Cluskey;

Calcolatori Elettronici-Ingegneria Telematica

# Minimizzazione: Metodo di Karnaugh

Prof. Giuseppe Ascia

- Si propone di identificare forme minime a due livelli applicando l
  - per SP la riduzione  $aZ+a'Z=(a+a')Z=Z$  con Z termine prodotto (implicante) di n-1 variabili;
  - per PS la riduzione  $(a'+Z)(a+Z)=Z$  con Z termine somma (implicato) di n-1 variabili

Esempio:  $abc'+abc=ab$

- La riduzione può essere applicata iterativamente

Esempio:  $abc'd'+abc'd+abcd'+abcd=$   
 $abc'(d'+d)+abc(d'+d) =$   
 $abc'+abc = ab(c'+c)=ab$

Le trasformazioni utilizzate non alterano il numero dei livelli.

Calcolatori Elettronici-Ingegneria Telematica

# Minimizzazione

Prof. Giuseppe Ascia

La formula di riduzione potrebbe essere facilmente applicata direttamente alle espressioni Booleane.

Il problema consiste nell'identificare:

- sia tutti i termini su cui applicare la riduzione;
- sia i tutti termini che partecipano a più riduzioni contemporaneamente e replicarli.

$$\begin{aligned} \text{SOP: } f(a,b) &= a'b + ab + ab' = (a'+a)b + ab' = b + ab' \\ &= a'b + a(b+b') = a'b + a \end{aligned}$$

Nessuna delle due espressioni è minima.

L'espressione minima è  $a+b$  ottenuta come

$$a'b + ab + ab' = a'b + ab + ab + ab' = (a+a')b + a(b+b') = b + a$$

Calcolatori Elettronici-Ingegneria Telematica

# Mappe di Karnaugh

Prof. Giuseppe Ascia

- Il metodo delle mappe di Karnaugh consente di risolvere direttamente i problemi identificati.
  - sia dovuti alla replicazione dei termini.
  - sia legati alla identificazione dei termini da raggruppare.
- Il metodo delle mappe di Karnaugh è grafico.
  - La sua applicazione è semplice per un numero di variabili fino a 4.
  - Risulta complesso per un numero di variabili da 5 a 6.
  - É praticamente inattuabile per un numero di variabili superiori a 6.

Calcolatori Elettronici-Ingegneria Telematica

# Mappe di Karnaugh

Prof. Giuseppe Ascia

## Caratteristiche delle mappe

	b	0	1		ab	00	01	11	10	
a	0	0	1		c	0	0	1	0	1
	1	1	0			1	0	0	1	

	ab	00	01	11	10
cd	00	0	1	0	1
	01	0	1	0	1
	11	0	1	0	0
	10	1	1	0	0

Gli indici delle colonne e delle righe in posizione adiacente differiscono solo di un bit

La prima e l'ultima colonna (riga) devono essere considerate adiacenti

Per le forme SP ogni casella in cui è presente un 1 corrisponde ad un mintermine.

Calcolatori Elettronici-Ingegneria Telematica

## Costruzione delle mappe di Karnaugh

Prof. Giuseppe Ascia

- Fino a 4 variabili si costruisce un'unica tabella.
- Si dividono le variabili in due gruppi che costituiranno gli indici delle righe e delle colonne.

	ab	00	01	11	10
c	0	000 <sup>0</sup>	010 <sup>2</sup>	110 <sup>6</sup>	100 <sup>4</sup>
	1	001 <sup>1</sup>	011 <sup>3</sup>	111 <sup>7</sup>	101 <sup>5</sup>

	ab	00	01	11	10
cd	00	0000 <sup>0</sup>	0100 <sup>4</sup>	1100 <sup>12</sup>	1000 <sup>8</sup>
	01	0001 <sup>1</sup>	0101 <sup>5</sup>	1101 <sup>13</sup>	1001 <sup>9</sup>
	11	0011 <sup>3</sup>	0111 <sup>7</sup>	1111 <sup>15</sup>	1011 <sup>11</sup>
	10	0010 <sup>2</sup>	0110 <sup>6</sup>	1110 <sup>14</sup>	1010 <sup>10</sup>

Calcolatori Elettronici-Ingegneria Telematica

# Costruzione delle mappe di Karnaugh

Prof. Giuseppe Ascia

- Se la funzione booleana è rappresentata come SP, vengono riempite con un '1' le celle in corrispondenza delle configurazioni per le quali la f ha un 1;
- Le configurazioni in corrispondenza a condizioni di indifferenza vengono riempite con un '-';
- Le altre celle vengono riempite con uno '0'

$$f(a,b,c)=\Sigma(0,1,4)+d_{\Sigma}(5)$$

ab \ c	00	01	11	10
0	1 <sup>0</sup>	0 <sup>2</sup>	0 <sup>6</sup>	1 <sup>4</sup>
1	1 <sup>1</sup>	0 <sup>3</sup>	0 <sup>7</sup>	- <sup>5</sup>

$$f(a,b,c,d)=\Sigma(0,1,2,5,6,9)+d_{\Sigma}(4,7,8)$$

cd \ ab	00	01	11	10
00	1 <sup>0</sup>	- <sup>4</sup>	0 <sup>12</sup>	- <sup>8</sup>
01	1 <sup>1</sup>	1 <sup>5</sup>	0 <sup>13</sup>	1 <sup>9</sup>
11	0 <sup>3</sup>	- <sup>7</sup>	0 <sup>15</sup>	0 <sup>11</sup>
10	1 <sup>2</sup>	1 <sup>6</sup>	0 <sup>14</sup>	0 <sup>10</sup>

Calcolatori Elettronici-Ingegneria Telematica

# Costruzione delle mappe di Karnaugh

Prof. Giuseppe Ascia

- Se la funzione booleana è rappresentata come PS, vengono riempite con un '0' le celle in corrispondenza delle configurazioni in corrispondenza delle quali la f ha un 0;
- Le configurazioni in corrispondenza a condizioni di indifferenza vengono riempite con un '-';
- Le altre celle vengono riempite con uno '1'

$$f(a,b,c)=\Pi(0,1,4)+d_{\Pi}(5)$$

ab \ c	00	01	11	10
0	0 <sup>0</sup>	1 <sup>2</sup>	1 <sup>6</sup>	0 <sup>4</sup>
1	0 <sup>1</sup>	1 <sup>3</sup>	1 <sup>7</sup>	- <sup>5</sup>

$$f(a,b,c,d)=\Pi(0,1,2,5,6,9)+d_{\Pi}(4,7,8)$$

cd \ ab	00	01	11	10
00	0 <sup>0</sup>	- <sup>4</sup>	1 <sup>12</sup>	- <sup>8</sup>
01	0 <sup>1</sup>	0 <sup>5</sup>	1 <sup>13</sup>	0 <sup>9</sup>
11	1 <sup>3</sup>	- <sup>7</sup>	1 <sup>15</sup>	1 <sup>11</sup>
10	0 <sup>2</sup>	0 <sup>6</sup>	1 <sup>14</sup>	1 <sup>10</sup>

Calcolatori Elettronici-Ingegneria Telematica

# Mappe di Karnaugh

Prof. Giuseppe Ascia

$a'b'cd + a'b'cd' + a'bcd + a'bcd' =$   
 $a'c(b'd + b'd' + bd + bd') =$   
 $a'c(b'(d+d') + b(d+d')) =$   
 $a'c(b'+b) = a'c$

	ab	00	01	11	10	
cd	00	1	0	1	1	$\left. \begin{array}{l} abc'd' + abc'd = \\ abc'(d+d') = abc' \end{array} \right\}$
	01	0	0	1	0	
	11	1	1	0	0	
	10	1	1	0	0	

I mintermini di 4 variabili  $abc'd'$  e  $abc'd$ , posti in posizione adiacente nella mappa nell'espressione SP, possono essere sostituiti dal prodotto  $abc'$  di  $4-1=3$  variabili che corrisponde nella mappa ad un cubo di  $2^1=2$  caselle.

I mintermini di 4 variabili  $a'b'cd$ ,  $a'b'cd'$ ,  $a'bcd$ ,  $a'bcd'$ , posti tutti in posizione adiacente, possono essere sostituiti nell'espressione SP dal prodotto  $a'c$  di  $4-2=2$  variabili che corrisponde al cubo di  $2^2=4$  caselle

Calcolatori Elettronici-Ingegneria Telematica

# Mappe di Karnaugh

Prof. Giuseppe Ascia

	ab	00	01	11	10
cd	00	1	0	1	1
	01	0	0	1	0
	11	1	1	0	0
	10	1	1	0	0

In una mappa a  $n$  variabili ad un cubo di  $2^m$  caselle adiacenti corrisponde un termine prodotto di  $n-m$  variabili.

$m$  definisce la dimensione del cubo.

Le  $n-m$  variabili che restano sono quelle che nel cubo hanno lo stesso valore in tutte le caselle.

Una funzione  $f$  può essere rappresentata da una espressione SP nella quale i prodotti corrispondono ai cubi necessari per coprire tutte le caselle in cui è presente il valore 1.

Calcolatori Elettronici-Ingegneria Telematica

# Mappe di Karnaugh

Prof. Giuseppe Ascia

	ab	00	01	11	10
cd	00	1	0	1	1
	01	0	0	1	0
	11	1	1	1	1
	10	1	1	0	0

La minimizzazione è ottenuta individuando il minimo numero di cubi e, a parità di numero, quelli col la massima dimensione garantendo la copertura di tutti gli 1.

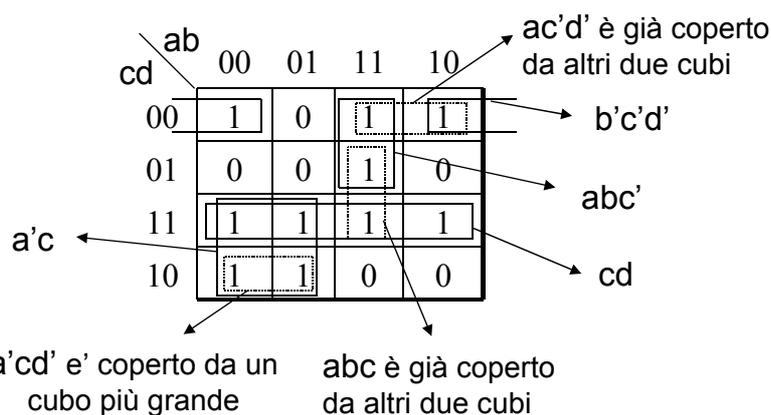
Per ottenere un'espressione minima:

- non si deve scegliere un cubo le cui caselle sono coperte da un cubo di dimensione maggiore;
- se esistono più modi di coprire gli 1, bisogna scegliere la copertura con i cubi di massima dimensione;
- non si devono scegliere cubi che coprono solo 1 di f già coperti da un insieme di altri cubi già scelti.

Calcolatori Elettronici-Ingegneria Telematica

# Mappe di Karnaugh

Prof. Giuseppe Ascia



Date le coperture

1)  $b'c'd'$ ,  $abc'$ ,  $cd$ ,  $a'cd'$     2)  $b'c'd'$ ,  $abc'$ ,  $a'c$ ,  $acd$

3)  $b'c'd'$ ,  $abc'$ ,  $a'c$ ,  $cd$

la 3) è quella minima.

$$f(a,b,c,d) = b'c'd' + abc' + a'c + cd$$

Calcolatori Elettronici-Ingegneria Telematica

# Funzioni non completamente specificate

Prof. Giuseppe Ascia

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	-	0	1	0
11	1	1	-	-
10	1	0	0	0

Le condizioni di indifferenza possono essere sfruttate per incrementare la dimensione di cubi

Nell'esempio in figura assumendo che alle cond. di indifferenza corrisponda il valore 0 otterremmo la funzione

$$f = a'b'c'd' + abc' + a'cd + a'b'c$$

Imponendo il valore 1 in tutte e tre le caselle otterremmo:

$$f = a'b' + abc' + cd$$