Esercizi svolti di Propagazione libera - Anno 2010

10-01) Esercizio n. 1 del 22/1/2010

Un plasma omogeneo indefinito, privo di collisioni, é posto in un campo magnetico uniforme. Esso é attraversato, lungo la direzione del campo magnetico, da un'onda elettromagnetica piana di frequenza ν. Se il rapporto fra la pulsazione giromagnetica e la pulsazione di plasma é $\dfrac{\omega_g}{\omega_p} = -2$, graficare ω/ω_p in funzione di $\beta c/\omega_p$ sia per l'onda ordinaria che per l'onda straordinaria.

Questo diagramma prende il nome di diagramma di Brillouin e dá utili informazioni sul comportamento del campo elettromagnetico in un plasma. Si consideri il range di variabilitá di ω/ω_p da 1 a 10.

———————

Nel caso di propagazione longitudinale, in assenza di collisioni, si ha:

$$\beta_{ord} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{X}{1+Y}} \qquad \text{per l'onda ordinaria}$$

$$\beta_{straord} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{X}{1-Y}} \qquad \text{per l'onda straordinaria}$$

essendo:

$$X = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \qquad Y = -\frac{\omega_g}{\omega}$$

Quindi:

$$\beta_{ord} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}{1 - \dfrac{\omega_g}{\omega}}} \qquad \text{per l'onda ordinaria}$$

$$\beta_{straord} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}{1 + \dfrac{\omega_g}{\omega}}} \qquad \text{per l'onda straordinaria}$$

Posto $x = \dfrac{\omega}{\omega_p}$, si ha:

$$\beta_{ord} = \frac{\omega_p}{c} x \sqrt{1 - \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{\omega_g}{\omega_p}\frac{1}{x}}} \qquad \text{per l'onda ordinaria}$$

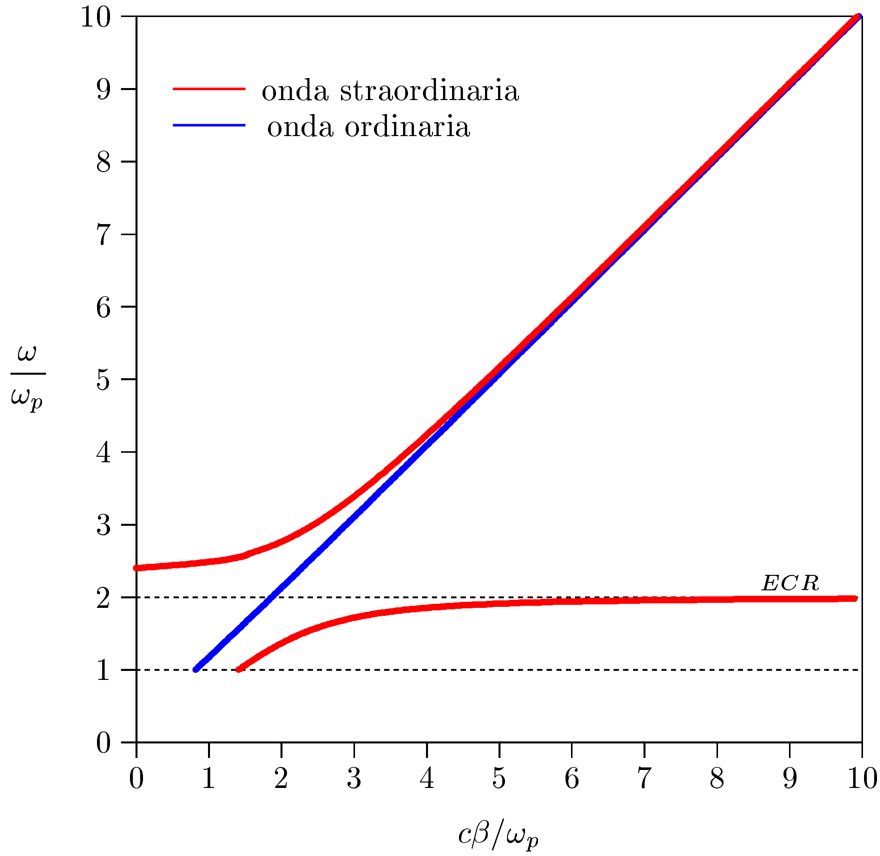
$$\beta_{straord} = \frac{\omega_p}{c} x \sqrt{1 - \frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{\omega_g}{\omega_p}\frac{1}{x}}} \qquad \text{per l'onda straordinaria}$$

e, ancora:

$$\beta_{ord} = \frac{\omega_p}{c} \sqrt{x^2 - \frac{1}{1 - \frac{\omega_g}{\omega_p}\frac{1}{x}}} \qquad \text{per l'onda ordinaria}$$

$$\beta_{straord} = \frac{\omega_p}{c} \sqrt{x^2 - \frac{1}{1 + \frac{\omega_g}{\omega_p}\frac{1}{x}}} \qquad \text{per l'onda straordinaria}$$

ω/ω_p **in funzione di** $c\beta/\omega_p$ $(Z = 0,\ \omega_g/\omega_p = -2,\ \theta = 0^0)$



Riportiamo in tabella alcuni valori numerici relativi al grafico.

Curva rossa ECR:

ω/ω_p	$c\beta/\omega_p$	ω/ω_p	$c\beta/\omega_p$	ω/ω_p	$c\beta/\omega_p$	ω/ω_p	$c\beta/\omega_p$
1.0	1.4142	1.1	1.5596	1.2	1.7146	1.3	1.8834
1.4	2.0720	1.5	2.2913	1.6	2.5612	1.7	2.8252
1.8	3.4986	1.9	4.7550	1.9790	9.9073		

Curva rossa superiore:

ω/ω_p	$c\beta/\omega_p$	ω/ω_p	$c\beta/\omega_p$	ω/ω_p	$c\beta/\omega_p$	ω/ω_p	$c\beta/\omega_p$
2.4	0.0000	2.5	1.1180	2.6	1.5578	2.7	1.8528
2.8	2.0833	2.9	2.2777	3.0	2.4495	3.1	2.6061
3.2	2.7520	3.3	2.8899	3.4	3.0218	3.5	3.1491
3.6	3.2726	3.7	3.3932	3.8	3.5113	3.9	3.6273
4.0	3.7417	4.1	3.8546	4.2	3.9662	4.3	4.0768
4.4	4.1865	4.5	4.2953	4.6	4.4035	4.7	4.5110
4.8	4.6180	4.9	4.7244	5.0	4.8305	5.1	4.9361
5.2	5.0413	5.3	5.1463	5.4	5.2509	5.5	5.3552
5.6	5.4593	5.7	5.5632	5.8	5.6669	5.9	5.7704
6.0	5.8737	6.1	5.9768	6.2	6.0798	6.3	6.1826
6.4	6.2853	6.5	6.3879	6.6	6.4904	6.7	6.5928
6.8	6.6950	6.9	6.7972	7.0	6.8993	7.1	7.0013
7.2	7.1032	7.3	7.2050	7.4	7.3068	7.5	7.4085
7.6	7.5102	7.7	7.6118	7.8	7.7133	7.9	7.8148
8.0	7.9162	8.1	8.0176	8.2	8.1190	8.3	8.2203
8.4	8.3215	8.5	8.4227	8.6	8.5239	8.7	8.6251
8.8	8.7262	8.9	8.8272	9.0	8.9283	9.1	9.0293
9.2	9.1303	9.3	9.2313	9.4	9.3322	9.5	9.4331
9.6	9.5340	9.7	9.6348	9.8	9.7357	9.9	9.8365
10.0	9.9373						

Curva blu:

ω/ω_p	$c\beta/\omega_p$	ω/ω_p	$c\beta/\omega_p$	ω/ω_p	$c\beta/\omega_p$	ω/ω_p	$c\beta/\omega_p$
1.0	0.8165	2.0	1.8708	3.0	2.8983	4.0	3.9158
5.0	4.9281	6.0	5.9372	7.0	6.9442	8.0	7.9498
9.0	8.9544	10.0	9.9582				

10-02) Esercizio n. 2 del 22/1/2010

Con riferimento al problema precedente determinare le espressioni della velocitá di gruppo relativa alle due onde (ordinaria e straordinaria) e graficarne l'andamento in funzione di ω/ω_p relativamente all'onda straordinaria nel range di variabilitá di ω/ω_p da 1 a 2.

———————

La velocitá di gruppo é definita:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$$

Poiché la funzione $\beta(\omega)$ é monotona (crescente), la derivata prima é invertibile, ossia:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\dfrac{d\beta}{d\omega}}$$

Si ha allora:

$$\frac{d\beta_{ord}}{dx} = \frac{\omega_p}{c}\frac{1}{2\sqrt{x^2 - \dfrac{1}{1-\dfrac{\omega_g}{\omega_p}\dfrac{1}{x}}}}\left[2x - \frac{-\dfrac{\omega_g}{\omega_p}\dfrac{1}{x^2}}{\left(1-\dfrac{\omega_g}{\omega_p}\dfrac{1}{x}\right)^2}\right]$$

$$\frac{d\beta_{ord}}{d\omega} = \frac{d\beta_{ord}}{dx}\frac{dx}{d\omega} = \frac{1}{c}\frac{1}{2\sqrt{x^2 - \dfrac{1}{1-\dfrac{\omega_g}{\omega_p}\dfrac{1}{x}}}}\left[2x - \frac{-\dfrac{\omega_g}{\omega_p}\dfrac{1}{x^2}}{\left(1-\dfrac{\omega_g}{\omega_p}\dfrac{1}{x}\right)^2}\right]$$

essendo $\dfrac{dx}{d\omega} = \dfrac{1}{\omega_p}$. Analogamente:

$$\frac{d\beta_{straord}}{d\omega} = \frac{d\beta_{ord}}{dx}\frac{dx}{d\omega} = \frac{1}{c}\frac{1}{2\sqrt{x^2 - \dfrac{1}{1+\dfrac{\omega_g}{\omega_p}\dfrac{1}{x}}}}\left[2x - \frac{+\dfrac{\omega_g}{\omega_p}\dfrac{1}{x^2}}{\left(1+\dfrac{\omega_g}{\omega_p}\dfrac{1}{x}\right)^2}\right]$$

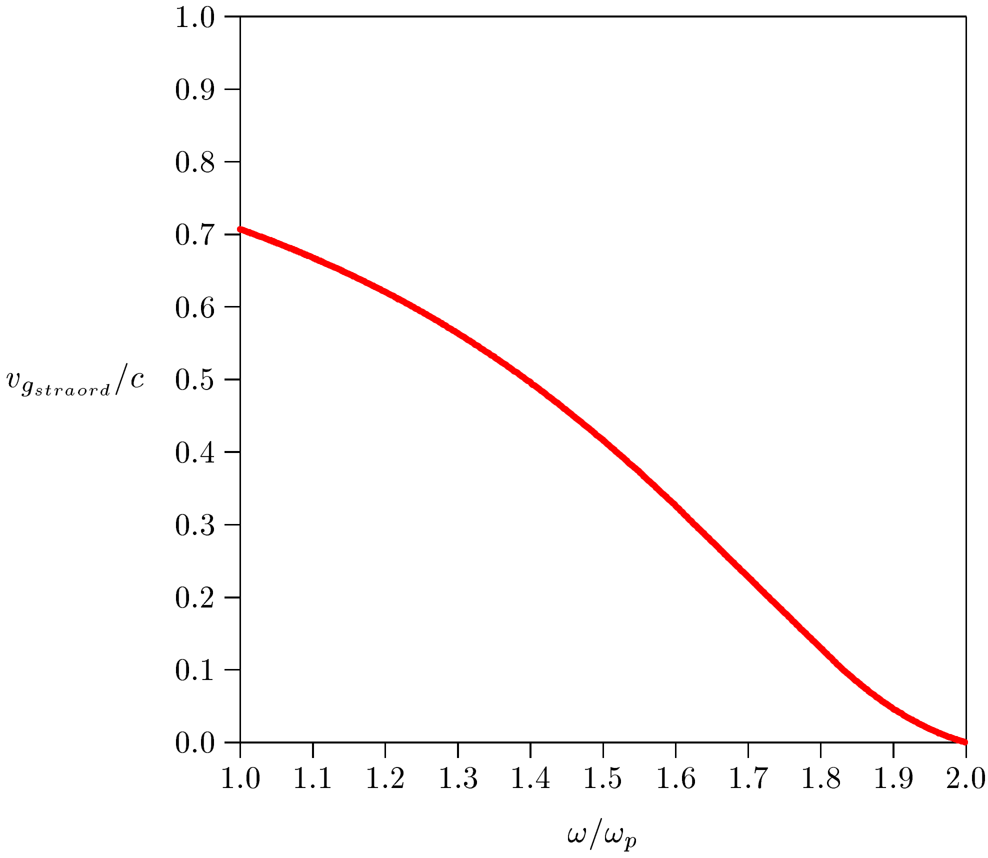
essendo $\dfrac{dx}{d\omega} = \dfrac{1}{\omega_p}$.

Ne segue:

$$v_{g_{ord}} = \frac{2c\sqrt{x^2 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{\omega_g}{\omega_p}\dfrac{1}{x}}}}{\left[2x - \dfrac{-\dfrac{\omega_g}{\omega_p}\dfrac{1}{x^2}}{\left(1 - \dfrac{\omega_g}{\omega_p}\dfrac{1}{x}\right)^2}\right]}$$

$$v_{g_{straord}} = \frac{2c\sqrt{x^2 - \dfrac{1}{1 + \dfrac{\omega_g}{\omega_p}\dfrac{1}{x}}}}{\left[2x - \dfrac{+\dfrac{\omega_g}{\omega_p}\dfrac{1}{x^2}}{\left(1 + \dfrac{\omega_g}{\omega_p}\dfrac{1}{x}\right)^2}\right]}$$

$v_{g_{straord}}/c$ **in funzione di** ω/ω_p **(**$Z=0$**,** $\omega_g/\omega_p = -2$**,** $\theta = 0^0$**)**



Riportiamo in tabella alcuni vari numerici relativi al grafico:

ω/ω_p	$v_{g_{straord}}/c$	ω/ω_p	$v_{g_{straord}}/c$	ω/ω_p	$v_{g_{straord}}/c$	ω/ω_p	$v_{g_{straord}}/c$
1.0	0.7071	1.1	0.6680	1.2	0.6207	1.3	0.5638
1.4	0.4960	1.5	0.4166	1.6	0.3263	1.7	0.2283
1.8	0.1305	1.9	0.0467	2.0	0.0000		

L'importante risultato trovato é che la velocitá di gruppo dell'onda elettromagnetica diventa zero in condizioni di risonanza ECR ossia per $\omega = |\omega_g|$. Questo, del resto, si poteva vedere dal grafico del problema precedente in quanto, nella curva ECR, ω/ω_p, per valori prossimi a $|\omega_g|/\omega_p$, si mantiene praticamente costante al variare di beta e quindi la velocitá di gruppo é zero.

10-03) Esercizio n. 1 del 19/2/2010

Un'onda elettromagnetica piana si propaga in un mezzo costituito da ferrite magnetizzata i cui parametri costitutivi sono:

$$\epsilon_r \simeq 15, \quad \frac{\omega_m}{2\pi} = 1\ GHz,$$

nella direzione del campo di induzione magnetica applicato il cui modulo é $B_0 = 700\ G$.

Determinare le espressioni della velocitá di gruppo competente alle due onde circolarmente polarizzate destra e sinistra rispettivamente. Si ponga $\gamma_e = -\left|\frac{e}{m_e}\right|$.

———————

Dalla teoria sappiamo che, quando un'onda elettromagnetica piana si propaga in un mezzo costituito da ferrite magnetizzata nella direzione del campo di induzione magnetica applicato, essa si scompone in due onde circolarmente polarizzate, destra e sinistra, le cui costanti di propagazione al quadrato, in assenza di perdite, sono:

$$k_+^2 = \omega^2 \epsilon \mu_{xx} + i\omega^2 \epsilon \mu_{xy} = \omega^2 \epsilon \mu^+ = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \mu_r^+$$

$$k_-^2 = \omega^2 \epsilon \mu_{xx} - i\omega^2 \epsilon \mu_{xy} = \omega^2 \epsilon \mu^- = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \mu_r^-$$

Segue che l'effettiva **permeabilitá magnetica** della ferrite é definita da:

$$\begin{cases} \mu^+ = (\mu_{xx} + i\mu_{xy}) = \mu_0 \left(1 + \dfrac{\omega_0 \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} + \dfrac{\omega \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) = \mu_0 \left(1 + \dfrac{\omega_m}{\omega_0 - \omega}\right) \\ \mu^- = (\mu_{xx} - i\mu_{xy}) = \mu_0 \left(1 + \dfrac{\omega_0 \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} - \dfrac{\omega \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) = \mu_0 \left(1 + \dfrac{\omega_m}{\omega_0 + \omega}\right) \end{cases}$$

La velocitá di gruppo é:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Poiché, come si vede dai grafici studiati nella teoria, la funzione $\omega(k)$ é monotona sempre, la sua derivata é invertibile; pertanto calcoliamo:

$$\frac{dk^+}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r}\sqrt{\mu_r^+}\right) = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c}\left[\sqrt{\mu_r^+} + \frac{\omega}{2\sqrt{\mu_r^+}}\frac{d\mu_r^+}{d\omega}\right]$$

$$\frac{d\mu_r^+}{d\omega} = \frac{\omega_m}{(\omega_0 - \omega)^2}$$

$$\frac{dk^+}{d\omega} = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c}\left[\sqrt{\left(1+\frac{\omega_m}{\omega_0-\omega}\right)} + \frac{\omega}{2\sqrt{\left(1+\frac{\omega_m}{\omega_0-\omega}\right)}}\frac{\omega_m}{(\omega_0-\omega)^2}\right]$$

$$\frac{dk^+}{d\omega} = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c}\left[\frac{2\left(1+\frac{\omega_m}{\omega_0-\omega}\right)(\omega_0-\omega)^2+\omega\omega_m}{2\sqrt{\left(1+\frac{\omega_m}{\omega_0-\omega}\right)}(\omega_0-\omega)^2}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c}\left[\frac{2(\omega_0-\omega)(\omega_0-\omega+\omega_m)+\omega\omega_m}{2\sqrt{(\omega_0-\omega)^3(\omega_0-\omega+\omega_m)}}\right]$$

Ne segue:

$$\frac{d\omega}{dk^+} = v_g^+ = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}\left[\frac{2\sqrt{(\omega_0-\omega)^3(\omega_0-\omega+\omega_m)}}{2(\omega_0-\omega)(\omega_0-\omega+\omega_m)+\omega\omega_m}\right]$$

Analogamente:

$$\frac{dk^-}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r}\sqrt{\mu_r^-}\right) = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c}\left[\sqrt{\mu_r^-} + \frac{\omega}{2\sqrt{\mu_r^-}}\frac{d\mu_r^-}{d\omega}\right]$$

$$\frac{d\mu_r^-}{d\omega} = -\frac{\omega_m}{(\omega_0+\omega)^2}$$

$$\frac{dk^-}{d\omega} = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c}\left[\sqrt{\left(1+\frac{\omega_m}{\omega_0+\omega}\right)} - \frac{\omega}{2\sqrt{\left(1+\frac{\omega_m}{\omega_0+\omega}\right)}}\frac{\omega_m}{(\omega_0+\omega)^2}\right]$$

$$\frac{dk^-}{d\omega} = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c}\left[\frac{2\left(1+\frac{\omega_m}{\omega_0+\omega}\right)(\omega_0+\omega)^2-\omega\omega_m}{2\sqrt{\left(1+\frac{\omega_m}{\omega_0+\omega}\right)}(\omega_0+\omega)^2}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c}\left[\frac{2(\omega_0+\omega)(\omega_0+\omega+\omega_m)-\omega\omega_m}{2\sqrt{(\omega_0+\omega)^3(\omega_0+\omega+\omega_m)}}\right]$$

Ne segue:

$$\frac{d\omega}{dk^-} = v_g^- = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}\left[\frac{2\sqrt{(\omega_0+\omega)^3(\omega_0+\omega+\omega_m)}}{2(\omega_0+\omega)(\omega_0+\omega+\omega_m)-\omega\omega_m}\right]$$

10-04) Esercizio n. 2 del 19/2/2010

Con riferimento al problema precedente, graficare le funzioni v_g^+/c e v_g^-/c in funzione di ω/ω_0.

———————

Riscriviamo le formule delle velocitá di gruppo:

$$v_g^+ = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}\left[\frac{2\sqrt{(\omega_0-\omega)^3(\omega_0-\omega+\omega_m)}}{2(\omega_0-\omega)(\omega_0-\omega+\omega_m)+\omega\omega_m}\right]$$

$$v_g^- = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}\left[\frac{2\sqrt{(\omega_0+\omega)^3(\omega_0+\omega+\omega_m)}}{2(\omega_0+\omega)(\omega_0+\omega+\omega_m)-\omega\omega_m}\right]$$

Osserviamo immediatamente che la velocitá di gruppo v_g^+ si annulla per $\omega = \omega_0$ (Risonanza) e per $\omega = \omega_0 + \omega_m$. Essa é reale per $0 < \omega < \omega_0$ e per $\omega > \omega_0 + \omega_m$. Questo significa che la velocitá di gruppo, cosí come la costante di propagazione, é costituita da due rami. Il ramo **risonante** per frequenze angolari $0 < \omega < \omega_0$ e il ramo di **propagazione** propriamente detto per frequenze angolari $\omega > \omega_0 + \omega_m$. Quindi la frequenza angolare $\omega = \omega_0 + \omega_m$ é una frequenza di soglia per la propagazione competente a μ^+. Ne segue che nell'intervallo compreso fra ω_0 e $\omega_0 + \omega_m$ esiste solo l'onda competente a μ^-.

Per eseguire il grafico, poniamo, al solito $x = \omega/\omega_0$. In questo modo le formule delle velocitá di gruppo diventano:

$$v_g^+ = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}\left[\frac{2\omega_0^2\sqrt{(1-x)^3\left(1-x+\dfrac{\omega_m}{\omega_0}\right)}}{2\omega_0^2(1-x)\left(1-x+\dfrac{\omega_m}{\omega_0}\right)+x\omega_0\omega_m}\right]$$

$$v_g^- = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}\left[\frac{2\omega_0^2\sqrt{(1+x)^3\left(1+x+\dfrac{\omega_m}{\omega_0}\right)}}{2\omega_0^2(1+x)\left(1+x+\dfrac{\omega_m}{\omega_0}\right)-x\omega_0\omega_m}\right]$$

Dividendo per ω_0^2 numeratore e denominatore, si ha:

$$v_g^+ = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}\left[\frac{2\sqrt{(1-x)^3\left(1-x+\dfrac{\omega_m}{\omega_0}\right)}}{2(1-x)\left(1-x+\dfrac{\omega_m}{\omega_0}\right)+x\dfrac{\omega_m}{\omega_0}}\right]$$

$$v_g^- = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \left[\frac{2\sqrt{(1+x)^3 \left(1+x+\dfrac{\omega_m}{\omega_0}\right)}}{2(1+x)\left(1+x+\dfrac{\omega_m}{\omega_0}\right) - x\dfrac{\omega_m}{\omega_0}} \right]$$

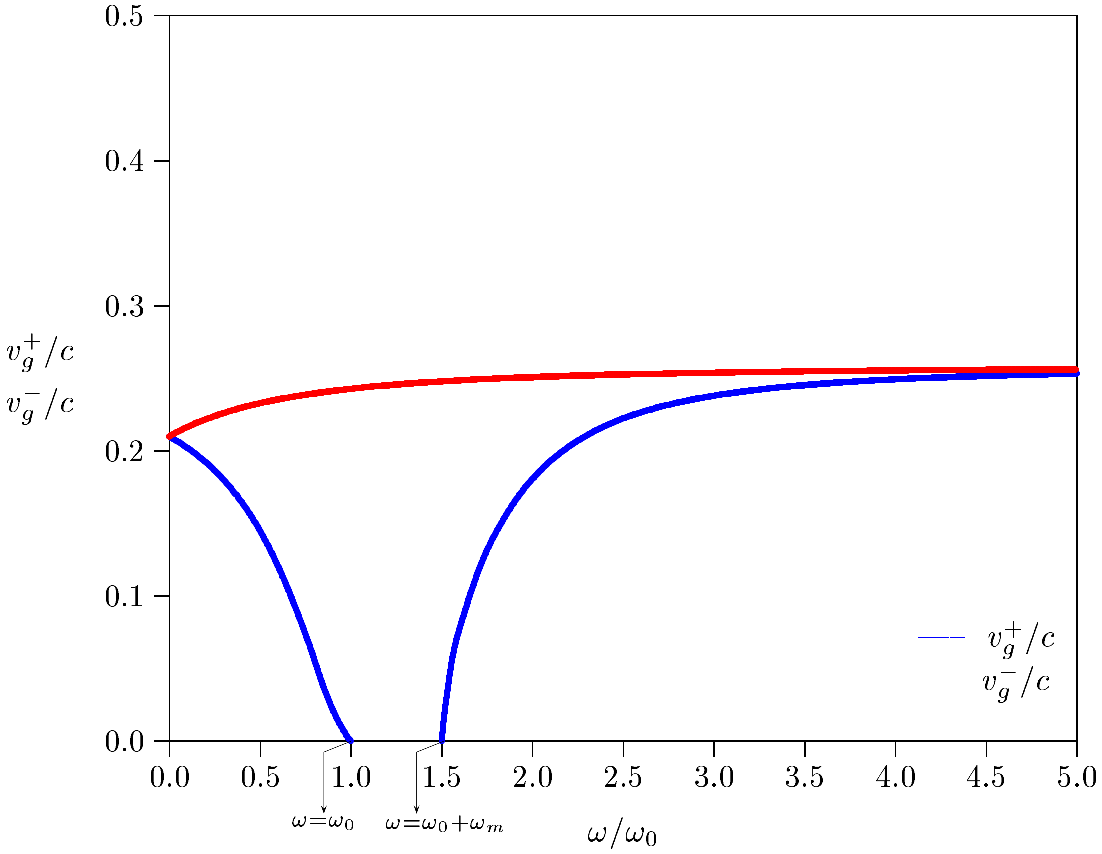
Si ha:

$$\begin{cases} \omega_0 = -\gamma_e \mu_0 H_0 = -\gamma_e B_0 = \left|\dfrac{e}{m_e}\right| B_0 = \dfrac{1.6 \cdot 10^{-19}}{9.11 \cdot 10^{-31}} 0.07 = 1.2294 \cdot 10^{10}\ rad/s \\ \dfrac{\omega_m}{\omega_0} \simeq 0.5111 \end{cases}$$

avendo posto $e = -1.6 \cdot 10^{-19}\ C$ il valore della carica dell'elettrone e $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\ Kg$ il valore della sua massa.

Facendo variare x da 0 a 5 ossia ω da 0 a $5\omega_0$ per l'onda competente a μ^- e x da 0 a 1 ossia ω da 0 a ω_0 nonché x da $1 + \dfrac{\omega_m}{\omega_0} = 1.5111$ a 5 ossia ω da $\omega_0 + \omega_m$ a $5\omega_0$ per l'onda competente a μ^+, si ottengono i seguenti grafici:

Velocitá di gruppo in ferrite magnetizzata
v_g^+/c, v_g^-/c in funzione di ω/ω_0
$(\omega_0 = 1.2294 \cdot 10^{10}\ rad/s,\ \omega_m = 2\pi \cdot 10^9\ rad/s,\ \epsilon_r = 15)$



Il valore massimo di $v_g^{\pm}/c = 0.2582$

10-05) Esercizio n. 1 del 23/4/2010

Un dispositivo per la rotazione di Faraday consiste di una lastra di ferrite ($\epsilon_r \simeq 15$) magnetizzata con un campo di induzione magnetica di 10000 G. Calcolare la spessore della lastra affinché un'onda elettromagnetica, linearmente polarizzata, di frequenza $\nu = 35\ GHz$ che si propaga lungo la direzione del campo subisca una rotazione del piano di polarizzazione di 90^0. Si ponga $\mu_{xx} = 1.105\mu_0$.

———————

$$\gamma_e = -\frac{|e|}{m} \simeq -\frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{9.11 \cdot 10^{-31}} \simeq -1.7563 \cdot 10^{11}\ C/Kg$$

$$\tau = \frac{1}{2}\omega\sqrt{\epsilon\mu_0}\left[\sqrt{1+\frac{\omega_m}{\omega_0+\omega}} - \sqrt{1+\frac{\omega_m}{\omega_0-\omega}}\ \right]$$

Si ha:

$$\mu_{xx} = \mu_0(1+\chi_{xx}) = \mu_0\left(1+\frac{\omega_0\omega_m}{\omega_0^2-\omega^2}\right) = 1.105\mu_0$$

da cui:

$$\frac{\omega_0\omega_m}{\omega_0^2-\omega^2} = 0.105$$

da cui:

$$\omega_m = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\omega_0}0.105$$

Si ha anche:

$$\omega_0 = -\gamma_e B_0 = 1.7563 \cdot 10^{11}\ rad/s, \qquad \omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 35 \cdot 10^9\ rad/s$$

Ne segue:

$$\frac{\omega_m}{\omega_0+\omega} = \frac{\omega_0-\omega}{\omega_0}0.105 = 0.105 - 0.105\frac{\omega}{\omega_0} =$$
$$= 0.105 - 0.105\frac{2\pi \cdot 35 \cdot 10^9}{1.7563 \cdot 10^{11}} = 0.105 - 0.105 \cdot 1.2521 \simeq -0.02647$$

$$\frac{\omega_m}{\omega_0-\omega} = \frac{\omega_0+\omega}{\omega_0}0.105 = 0.105 + 0.105\frac{\omega}{\omega_0} =$$
$$= 0.105 + 0.105\frac{2\pi \cdot 35 \cdot 10^9}{1.7563 \cdot 10^{11}} = 0.105 + 0.105 \cdot 1.2521 \simeq 0.23647$$

Quindi:

$$\sqrt{1+\frac{\omega_m}{\omega_0+\omega}} \simeq \sqrt{1-0.02647} \simeq 0.98668$$

$$\sqrt{1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 - \omega}} \simeq \sqrt{1 + 0.23647} \simeq 1.112$$

In definitiva:

$$\tau = \frac{1}{2}\omega\sqrt{\epsilon\mu_0}\,[0.98668 - 1.112] = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r}\cdot(-0.12532) = -\frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\sqrt{15}\cdot 0.12532 \simeq$$
$$\simeq -\frac{1}{2}\frac{2\pi\cdot 35\cdot 10^9}{3\cdot 10^8}\cdot 3.87\cdot 0.12532 \simeq -177.76\ rad/m \simeq -10185\ gradi/m =$$
$$= -\,101.85\ gradi/cm$$

Poiché, indicando con L la lunghezza della ferrite, deve essere:

$$\tau L = 90^0$$

risulta:

$$L = \frac{90}{101.85} = \underline{\underline{0.88365\ cm}}$$

10-06) Esercizio n. 2 del 23/4/2010

Con riferimento al problema precedente graficare l'angolo di rotazione unitario τ, espresso in $gradi/cm$, in funzione del rapporto ω/ω_0. Verificare graficamente il risultato del problema precedente.

————————

$$\tau = \frac{1}{2}\omega\sqrt{\epsilon\mu_0}\left[\sqrt{1+\frac{\omega_m}{\omega_0+\omega}} - \sqrt{1+\frac{\omega_m}{\omega_0-\omega}}\right]$$

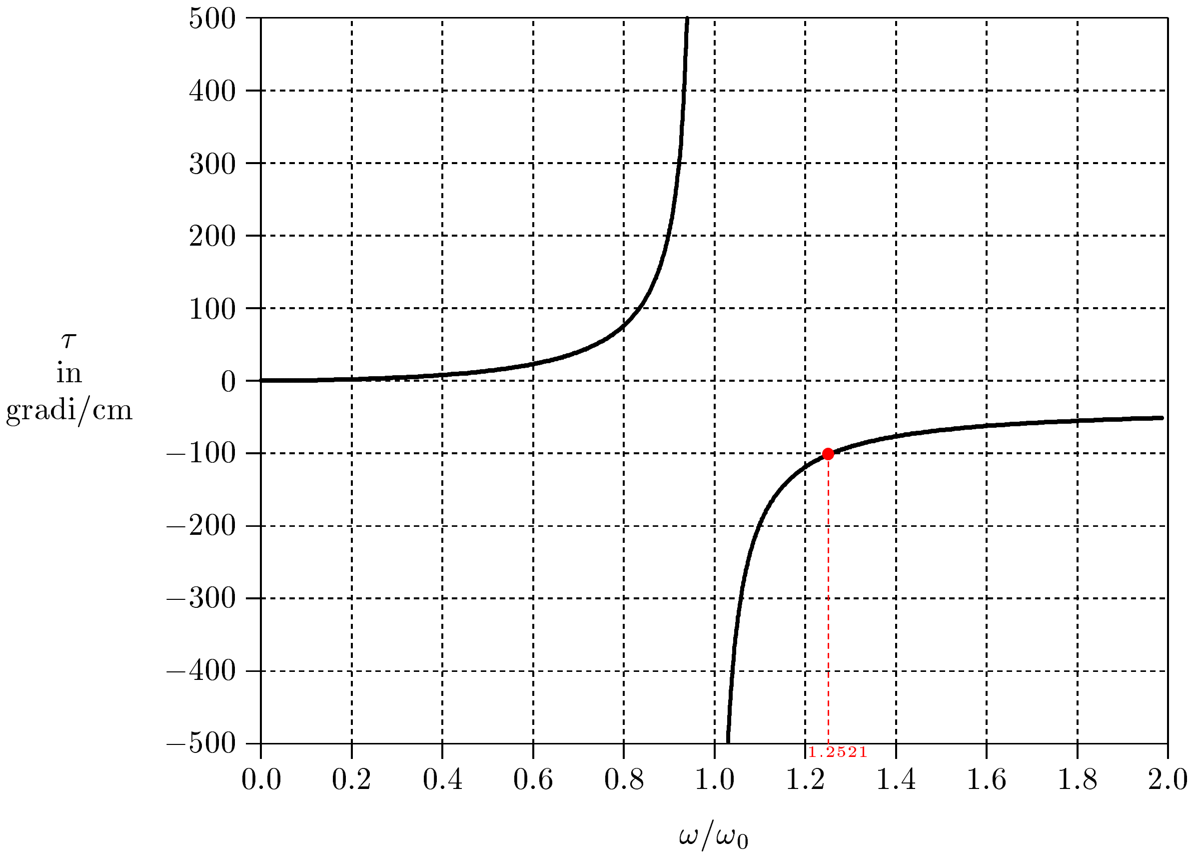
che si puó scrivere:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{c}\frac{\omega}{\omega_0}\sqrt{\epsilon_r}\left[\sqrt{1+\frac{\dfrac{\omega_m}{\omega_0}}{\left(1+\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}} - \sqrt{1+\frac{\dfrac{\omega_m}{\omega_0}}{\left(1-\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}}\right]$$

Si ha:

$$\omega_m = -1.04714\cdot 10^10/rad/s, \qquad \text{e} \qquad \frac{\omega_m}{\omega_0} = -0.059$$

τ in funzione di ω/ω_0 espresso in $gradi/cm$



Ora, $\omega = 2\pi \cdot 35 \cdot 10^9\ rad/s$ e $\omega_0 = 1.7563 \cdot 10^{11}\ rad/s$. Quindi $(\omega/\omega_0)^* = 1.2521$ a cui corrisponde $\tau^* = \underline{\underline{-101.85}}$ in gradi/cm.

10-07) Esercizio n. 1 del 25/6/2010

Si supponga che un'onda elettromagnetica piana che attraversa la ionosfera incontri lungo il suo percorso una componente longitudinale media del campo magnetico terrestre $B_L = 0.2\ Gauss$. Se il numero medio di elettroni per unitá di volume e $N = 10^{11}\ m^{-3}$, e la frequenza dell'onda, linearmente polarizzata, é $\nu = 100\ MHz$, calcolare l'angolo di rotazione di Faraday dopo un percorso di 300 Km.

———————

L'angolo di rotazione del vettore campo elettrico, per unitá di percorso dell'onda, é:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left[\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega-\omega_g)}}-\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+\omega_g)}}\right]$$

$$\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} = 3.1738\cdot 10^{14}\ (rad/s)^2 \Longrightarrow \nu_p = 2.8354\cdot 10^6\ Hz = 2.8354\ MHz$$

$$\omega_g = \frac{q_e B_L}{m_e} = -\frac{1.6\cdot 10^{-19}\cdot 0.2\cdot 10^{-4}}{9.11\cdot 10^{-31}} \simeq -3.5126\cdot 10^6 \quad rad/s$$

$$\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega-\omega_g)} = \frac{3.1738\cdot 10^{14}}{2\pi\cdot 10^8(2\pi\cdot 10^8+3.5126\cdot 10^6)} \simeq 0.79946\cdot 10^{-3}$$

$$\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+\omega_g)} = \frac{3.1738\cdot 10^{14}}{2\pi\cdot 10^8(2\pi\cdot 10^8-3.5126\cdot 10^6)} \simeq 0.80845\cdot 10^{-3}$$

Sviluppando in serie le radici quadrate, si ha:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left[\frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+\omega_g)}-\frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega-\omega_g)}\right]$$

$$\tau = \frac{1}{4}\frac{\omega}{c}\left(0.80845\cdot 10^{-3}-0.79946\cdot 10^{-3}\right) \simeq \frac{1}{4}\frac{2\pi\cdot 10^8}{3\cdot 10^8}8.99\cdot 10^{-6} \simeq 4.707\cdot 10^{-6}\ rad/m$$

L'angolo di rotazione dopo un percorso di 300 Km é:

$$\tau L = 4.707\cdot 10^{-6}\cdot 3\cdot 10^5 \simeq 1.4121\ rad \simeq \underline{\underline{80^0.9073}}$$

10-08) Esercizio n. 2 del 25/6/2010

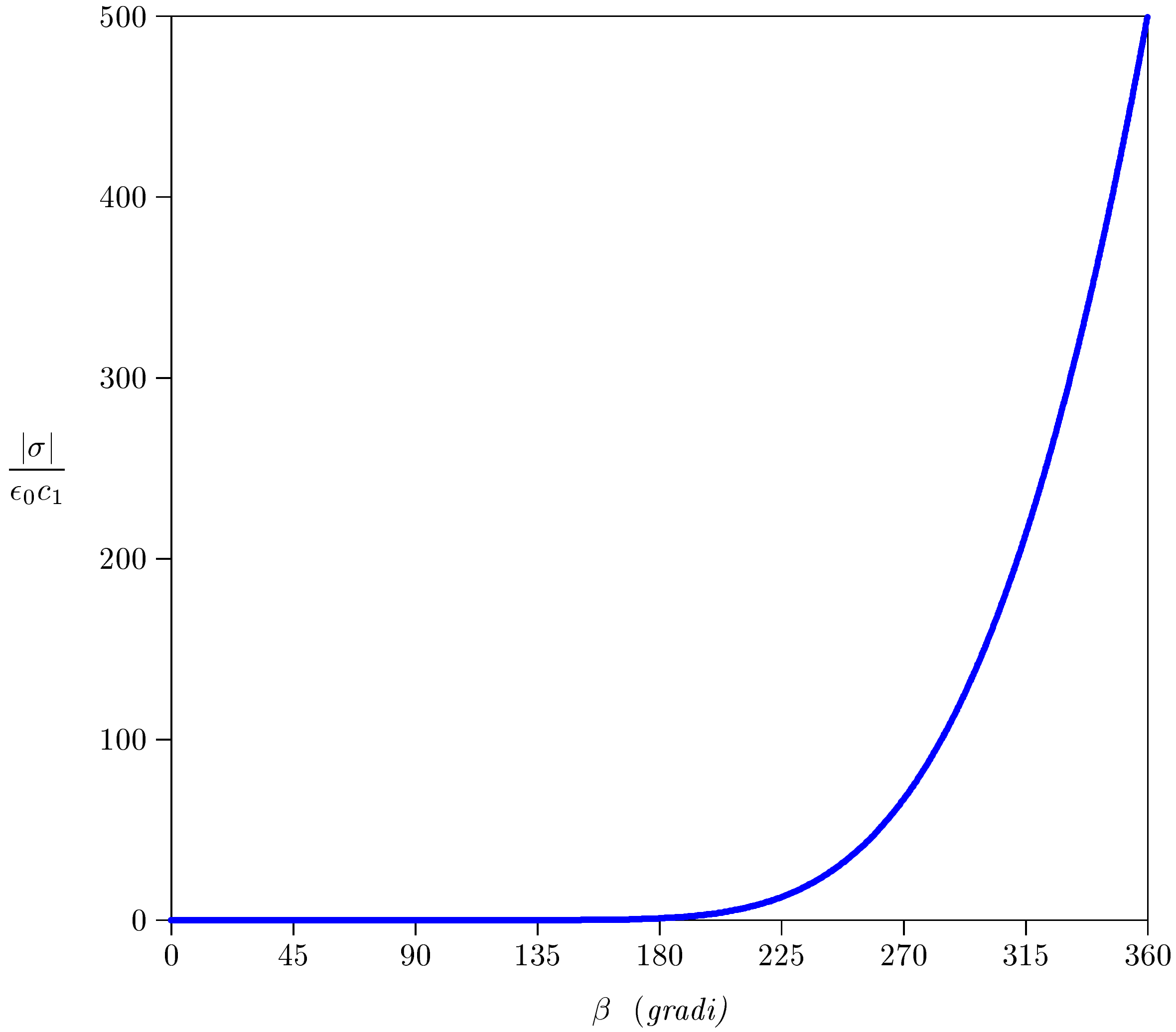
Si consideri un angolo bidimensionale costituito da due semipiani conduttori perfetti. Si supponga che in lontananza vi sia una sorgente di cariche che induce nei semipiani una densitá di carica. Graficare l'andamento di tale densitá (piú precisamente $|\sigma|/\epsilon_0 c_1$) al variare dell'angolo β fra 0^0 e 360^0, nel punto $\rho = 1\ \mu m$. Fissato l'angolo $\beta = 360^0$, si grafichi l'andamento della densitá di carica al variare della distanza dallo spigolo da $\rho_1 = 1\ \mu m$ a $\rho_2 = 1\ mm$.

———————

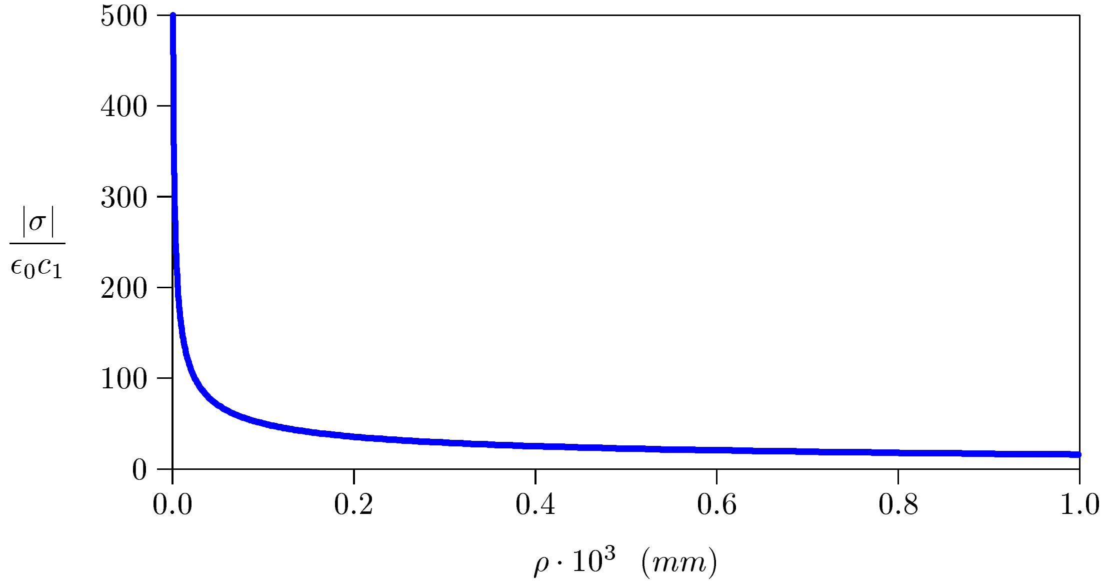
La densitá di carica sulle pareti dei semipiani in prossimitá dell'origine é:

$$|\sigma| = \epsilon_0 |E_\phi| = \epsilon_0 \frac{\pi}{\beta} c_1 \rho^{\left(\frac{\pi}{\beta} - 1\right)} \qquad per\ \rho << 1$$

$\frac{|\sigma|}{\epsilon_0 c_1}$ **in funzione di** β **per** $\rho = 1\ \mu m$



$\frac{|\sigma|}{\epsilon_0 c_1}$ **in funzione di** ρ **per** $\beta = 360^0$



10-9) Esercizio n. 1 del 23/7/2010

Nella regione verde bluastro dello spettro del visibile, e precisamente in corrispondenza della lunghezza d'onda $\lambda_0 = 4955.4\ nm$, la parte reale dell'indice di rifrazione dell'acqua a temperatura ambiente é $\Re(n) = 1.307$. Si trascuri la parte immaginaria dell'indice di rifrazione. Il numero di molecole d'acqua per unitá di volume é $N = 3.3 \cdot 10^{28}\ m^{-3}$. Calcolare la frequenza di risonanza piú vicina alla frequenza operativa considerata.

Dalla teoria si ha:

$$n = (n_L)_{(\omega_g=0)} = (n_R)_{(\omega_g=0)} = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

essendo ω_p la frequenza angolare di plasma, ω_0 la frequenza angolare di risonanza e ω la frequenza della radiazione.

La frequenza angolare di plasma é:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} = \frac{3.3 \cdot 10^{28} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}} \simeq 1.047 \cdot 10^{32}\, (rad/s)^2$$
$$\Longrightarrow \omega_p \simeq 1.023 \cdot 10^{16}\, rad/s \Longrightarrow \nu_p \simeq 1.628 \cdot 10^{15}\ Hz$$

La frequenza operativa é:

$$\nu = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3 \cdot 10^8}{4955.4 \cdot 10^{-9}} = 6.054 \cdot 10^{13}\ Hz$$

ossia:

$$\omega = 2\pi\nu = 3.804 \cdot 10^{14}\ rad/s \Longrightarrow \omega^2 = 1.447 \cdot 10^{29}\ (rad/s)^2$$

Si ha:

$$n^2 - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

ossia:

$$(n^2-1)\omega_0^2 - (n^2-1)\omega^2 = \omega_p^2$$

e, ancora:

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \frac{\omega_p^2}{(n^2-1)} = 1.447 \cdot 10^{29} + \frac{1.047 \cdot 10^{32}}{(1.307^2 - 1)} =$$
$$= 1.447 \cdot 10^{29} + 1.478 \cdot 10^{32} = 1.48 \cdot 10^{32}\ (rad/s)^2$$

da cui:

$$\omega_0 = 1.216 \cdot 10^{16}\ rad/s \Longrightarrow \nu_0 = \underline{\underline{1.935 \cdot 10^{15}}}\ Hz$$

10-10) Esercizio n. 2 del 23/7/2010

Con riferimento al problema precedente, si valuti la costante di Verdet in corrispondenza dei parametri assegnati. Se l'acqua é contenuta in un recipiente posto all'interno di un solenoide lungo 1 m e costituito da $n = 1000$ $spire/m$, ciascuna percorsa da una corrente $I = 10$ A, calcolare l'angolo di rotazione del piano di polarizzazione della luce in uscita dal solenoide. Si assuma, per il calcolo di B, il solenoide infinitamente lungo.

———————

La costante di Verdet é:

$$V = \frac{|e|}{mc}\left[\left(\frac{n^2-1}{2n}\right)\cdot\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\right]$$

e si misura in $\dfrac{rad}{m\cdot Wb/m^2} = 10^{-6}\dfrac{rad}{cm\cdot Gauss} = 57.3\cdot 10^{-7}\dfrac{gradi}{mm\cdot Gauss}$.

Ossia:

$$V = \frac{1.6\cdot 10^{-19}}{9.11\cdot 10^{-31}\cdot 3\cdot 10^{8}}\left[\left(\frac{1.307^2-1}{2\cdot 1.307}\right)\cdot\frac{1.447\cdot 10^{29}}{1.48\cdot 10^{32}-1.447\cdot 10^{29}}\right] =$$

$$= 585.43\cdot 0.271\cdot 0.979\cdot 10^{-3} = 0.155$$

Moltiplicando per $57.3\cdot 10^{-7}$, risulta:

$$V = 0.285\cdot 57.3\cdot 10^{-7} = 8.88\cdot 10^{-7}\ \frac{gradi}{mm\cdot Gauss}$$

Il campo di induzione magnetica generato dal solenoide é:

$$B = \mu_o nI = 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1000\cdot 10 = 12.56\cdot 10^{-3}\ Wb/m^2 = 125.6\ Gauss$$

L'angolo di rotazione del piano di polarizzazione della luce é allora:

$$\theta = VBl$$

essendo l la lunghezza del solenoide espressa in millimetri.

In definitiva:

$$\theta = 8.88\cdot 10^{-7}\cdot 125.6\cdot 1000 = \underline{\underline{0.11\ gradi}}$$

10-11) Esercizio n. 1 del 10/9/2010

Una stella pulsar emette contemporaneamente dei segnali a 300 MHz e 900 MHz rispettivamente. Il segnale a bassa frequenza arriva ritardato di 0.1 s rispetto a quello a piú alta frequenza. Se il ritardo é causato dalla presenza di elettroni nello spazio, calcolare la quantitá NL essendo N la densitá volumica degli elettroni e L la distanza percorsa dalla radiazione elettromagnetica.

———————

(vedi es. di Campi elettromagnetici n.4 del 23/2/2000)

Calcoliamo la velocitá di gruppo dell'onda elettromagnetica che si propaga in un plasma omogeneo e privo di collisioni. Si ha:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$$

essendo $\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}$.

Poiché β é una funzione crescente, si puó scrivere:

$$v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1}$$

Si ha, allora:

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}} + \frac{\omega}{c}\frac{2\frac{\omega_P^2}{\omega^3}}{2\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}} = \frac{1}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}} + \frac{1}{c}\frac{\frac{\omega_P^2}{\omega^2}}{\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}} = \frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}}$$

Quindi:

$$v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}$$

Sia L la distanza percorsa dalla radiazione elettromagnetica.

Indicando con ω_1 la frequenza piú bassa e con ω_2 la frequenza piú alta, i tempi impiegati a percorrere la distanza L sono rispettivamente:

$$\tau_1 = \frac{L}{c\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega_1^2}}} \qquad e \qquad \tau_2 = \frac{L}{c\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega_2^2}}}$$

Poiché sicuramente risulta:

$$\omega_P^2 << \omega_1^2 \qquad e \qquad \omega_P^2 << \omega_2^2$$

si ha:

$$\tau_1 \simeq \frac{L}{c}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\omega_P^2}{\omega_1^2}\right) \qquad e \qquad \tau_2 \simeq \frac{L}{c}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\omega_P^2}{\omega_2^2}\right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\tau_1-\tau_2 &= \frac{L}{2c}\omega_P^2\left(\frac{1}{\omega_1^2}-\frac{1}{\omega_2^2}\right) = \frac{LN}{2c}\frac{e^2}{m\epsilon_0}\left(\frac{1}{\omega_1^2}-\frac{1}{\omega_2^2}\right) = \\
&= 1.34\cdot 10^{-7}LN\left[\frac{1}{(3\cdot 10^8)^2}-\frac{1}{(9\cdot 10^8)^2}\right] = \\
&= 1.34\cdot 10^{-7}LN\left(1.1111\cdot 10^{-17}-1.2346\cdot 10^{-18}\right) = \\
&= 1.34\cdot 10^{-7}\cdot 9.8765\cdot 10^{-18}LN = \\
&= 1.3235\cdot 10^{-24}LN
\end{aligned}$$

Per $\tau_1-\tau_2=0.1$, si ha:

$$LN = \frac{0.1}{1.3235\cdot 10^{-24}} = \underline{\underline{7.56\cdot 10^{22}\ elettroni/m^2}}$$

10-12) Esercizio n. 2 del 10/9/2010

Un'onda piana polarizzata circolarmente destra si propaga, lungo la direzione di un campo di induzione magnetica $\vec{B} = B_0 \widehat{z}$, in un plasma privo di collisioni di densitá elettronica crescente con z. A quale valore della densitá si raggiunge il cutoff se $f = 2.8\ GHz$ e $B_0 = 3000\ G$?

———————

(vedi es. di Campi elettromagnetici n.1 del 28/4/2001)

Per un'onda polarizzata circolarmente destra che si propaga lungo la direzione del campo di induzione magnetica $\vec{B} = B_0 \widehat{z}$, la costante di propagazione per un plasma privo di collisioni é:

$$k'_0 = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega\left(\omega - \omega_g\right)}}$$

Il valore della densitá elettronica, ossia il valore della frequenza di plasma, per cui si ha il cutoff (cioé l'assenza di propagazione) é quello per cui risulta $k'_0 = 0$, ossia:

$$1 - \frac{\omega_p^{*2}}{\omega\left(\omega - \omega_g\right)} = 0$$

cioé:

$$\omega_p^{*2} = \omega\left(\omega - \omega_g\right)$$

Per

$$\omega = 2\pi \cdot 2.8 \cdot 10^9\ rad/s \quad e \quad \omega_g = -\frac{|e|B_0}{m_e} = -\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.3}{9.11 \cdot 10^{-31}} = -5.2689 \cdot 10^{10}\ rad/s$$

si ottiene:

$$\omega_p^{*2} = 1.7592 \cdot 10^{10}\left(1.7592 \cdot 10^{10} + 5.2689 \cdot 10^{10}\right) = 1.2363 \cdot 10^{21} \quad (rad/s)^2$$

Poiché:

$$\omega_p^{*2} = \frac{n^*(z)e^2}{m\epsilon_0} \Rightarrow n^*(z) = \frac{m\epsilon_0}{e^2}\omega_p^{*2} = \underline{\underline{3.895 \cdot 10^{17}\ e/m^3}}$$

10-13) Esercizio n. 1 del 1/10/2010

Un segnale radio emesso da una stella pulsar impiega un certo tempo, dipendente dalla frequenza, ad arrivare sulla Terra. Ció é dovuto alla presenza del mezzo interstellare che é idrogeno ionizzato con densitá elettronica $N_e \simeq 10^5\ m^{-3}$ e $\omega_{eff} \simeq 0$. Se l'intervallo di tempo di arrivo fra due impulsi consecutivi di frequenza 151 MHz e 408 MHz é $\Delta t = 4.18\ s$, calcolare la distanza della stella pulsar dalla Terra. Esprimere tale distanza in $parsec$, ($1\ parsec = 3.086 \cdot 10^{16}\ m$).

———————

(vedi Compiti di Propagazione libera es. n.1 del 25/7/2008)

Il tempo di viaggio é dato da:

$$t = \frac{L}{v_g}$$

essendo L il percorso dell'onda elettromagnetica nel mezzo e v_g la velocitá di gruppo data da:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$$

Si ha:

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Poiché β é una funzione sempre crescente all'aumentare di ω, la velocitá di gruppo si puó scrivere:

$$v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1}$$

Risulta:

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{c}\left[\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} + \frac{\omega\left(2\frac{\omega_p^2}{\omega^3}\right)}{2\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}\right] = \frac{1}{c}\left(\frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}\right)$$

Ne segue, nell'ipotesi che $\omega^2 >> \omega_p^2$:

$$v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \simeq c\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

Si ha:

$$t_1 = \frac{L}{v_{g_1}} \quad e \quad t_2 = \frac{L}{v_{g_2}}$$

Ne segue:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = L\left(\frac{1}{v_{g_1}} - \frac{1}{v_{g_2}}\right)$$

Sempre nell'ipotesi che $\omega^2 >> \omega_p^2$, si puó scrivere:

$$\frac{1}{v_g} \simeq \frac{1}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

Ne segue:

$$\Delta t = \frac{L}{c}\left(\frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega_1^2} - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega_2^2}\right) = \frac{L}{c}\frac{\omega_p^2}{8\pi^2}\left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2}\right)$$

Si ha, nel nostro caso:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} = \frac{10^5 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}} \simeq 3.1738 \cdot 10^8 \ (rad/s)^2$$

ed é quindi verificata, secondo i dati del problema, la condizione $\omega^2 >> \omega_p^2$.

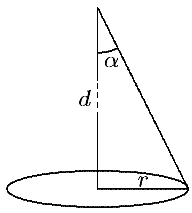
Quindi:

$$\begin{aligned}\Delta t =& 1.34 \cdot 10^{-2} L\left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2}\right) = 1.34 \cdot 10^{-14} L\left(\frac{1}{151^2} - \frac{1}{408^2}\right) = \\ =& 1.34 \cdot 10^{-14} L \cdot 3.785 \cdot 10^{-5} = 5.0719 \cdot 10^{-19} L\end{aligned}$$

da cui:

$$L = \frac{\Delta t}{5.0719 \cdot 10^{-19}} = \frac{4.18}{5.0719 \cdot 10^{-19}} = \underline{\underline{8.2415 \cdot 10^{18}\ m}}$$

É d'uso e conveniente esprimere queste lunghissime distanze in *parsec*. Il parsec é $3.086 \cdot 10^{16}\ m$; esso é la distanza dalla quale il raggio dell'orbita terrestre, $1.496 \cdot 10^{11}$ metri, sottende un angolo di 1 secondo, cioé 1 $parsec = 1.496 \cdot 10^{11} \cdot 180 \cdot 3600/\pi$.



$$r = d \tan\alpha, \quad \text{per } \alpha \simeq 0 \Longrightarrow tan\alpha \simeq \alpha \Longrightarrow d \simeq \frac{r}{\alpha}$$

D'altra parte si ha:

$$1^0 = 60';\ 1' = 60'' \Longrightarrow 1^0 = 3600''$$

ossia:

$$\alpha = 1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^0 \cdot \frac{\pi}{180}\ (rad)$$

Quindi:

$$d = 1.496 \cdot 10^{11} \cdot 3600 \cdot 180/\pi = 3.086 \cdot 10^{16}\ (m)$$

Ne segue:

$$L = \frac{8.2415 \cdot 10^{18}}{3.086 \cdot 10^{16}} \simeq \underline{\underline{267\ parsec}}$$

10-14) Esercizio n. 2 del 1/10/2010

Il campo magnetico della Terra é sufficiente a causare la rotazione del piano di polarizzazione delle onde elettromagnetiche quando attraversano il plasma ionosferico. Se un'onda elettromagnetica linearmente polarizzata, di frequenza $\nu = 2\ GHz$, si propaga per 100 Km nella ionosfera, calcolare la massima rotazione possibile del piano di polarizzazione dell'onda. I parametri della ionosfera sono $N = 10^{12}\ m^{-3}$ e $B = 0.6\ gauss$, assunti uniformi per tutto il percorso.

———————

La massima rotazione possibile del piano di polarizzazione dell'onda si ha quando la direzione di propagazione coincide con la direzione del campo di induzione magnetica applicato.

Si ha:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{10^{12} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}}} = 5.63 \cdot 10^7\ rad/s$$

$$\omega_g = -\frac{|e|B_0}{m_e} = -\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.6 \cdot 10^{-4}}{9.11 \cdot 10^{-31}} = -1.05 \cdot 10^7\ rad/s$$

Poiché:

$$X = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 = 2 \cdot 10^{-5} << 1 \qquad e \qquad Y = \left(-\frac{\omega_g}{\omega}\right) = 8.35 \cdot 10^{-4} << 1$$

si ha che l'angolo di rotazione τ per percorso unitario si puó scrivere:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}XY = 3.49 \cdot 10^{-7}\ radianti/m$$

L'angolo di rotazione dopo un percorso di 100 Km é:

$$\tau L = 3.49 \cdot 10^{-7} \cdot 10^5 = \underline{\underline{3.497 \cdot 10^{-2}\ rad.}} = \underline{\underline{2^0}}$$

10-15) Esercizio n. 1 del 5/11/2010

Uno strato sferico di materiale magnetico ($\mu_r = 5$) di raggi $a = 10\ mm$ e $b = 11\ mm$ é posto in un campo di induzione magnetica orientato lungo l'asse z di un sistema di riferimento e di modulo $B_0 = 700\ G$. Calcolare il campo di induzione magnetica nei punti interni della sfera cava.

———————

Dalla teoria sappiamo che le componenti del campo di induzione magnetica all'interno della parte cava interna dello strato sferico sono:

$$B_{r\,(r<a)} = \frac{9\mu_r B_0 \cos\theta}{\left[(2\mu_r+1)(\mu_r+2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r-1)^2\right]}$$

$$B_{\theta\,(r<a)} = -\frac{9\mu_r B_0 \sin\theta}{\left[(2\mu_r+1)(\mu_r+2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r-1)^2\right]}$$

In coordinate cartesiane, si ha:

$$B_z = B_r\cos\theta - B_\theta\sin\theta, \qquad B_x = B_r\sin\theta + B_\theta\cos\theta$$

Ne segue:

$$B_{z\,(r<a)} = \frac{9\mu_r B_0}{\left[(2\mu_r+1)(\mu_r+2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r-1)^2\right]}, \qquad B_x = 0$$

Il campo di induzione magnetica, nella regione interna allo strato, ha la stessa direzione e verso del campo esterno preesistente (imperturbato), ossia le linee di forza sono parallele all'asse z.

Quindi il modulo del campo é:

$$B_{(r<a)} = \frac{9\mu_r B_0}{\left[(2\mu_r+1)(\mu_r+2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r-1)^2\right]} = \frac{9\cdot 5\cdot 0.07}{\left[(2\cdot 5+1)(5+2) - 2\frac{10^3}{11^3}(5-1)^2\right]} =$$

$$= \frac{3.15}{(77 - 2\cdot 0.751315\cdot 16)} = \underline{\underline{0.05948\ Wb/m^2 = 594.8\ G}}$$

10-16) Esercizio n. 2 del 5/11/2010

Un'onda elettromagnetica piana viaggia in un plasma, privo di collisioni, sottoposto ad un campo di induzione magnetica uniforme orientato secondo la direzione di propagazione dell'onda. Se la frequenza angolare di plasma é $\omega_p = 2\pi \cdot 10^9\ rad/s$ e la frequenza angolare dell'onda elettromagnetica é $\omega = 1.3\omega_p$, calcolare l'angolo di rotazione di Faraday, per unitá di percorso, per $\omega_g = -0.5\omega_p$ e $\omega_g = -3.5\omega_p$.

———————

L'angolo di rotazione di Faraday, per unitá di percorso é:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left[\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_g)}} - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_g)}}\right]$$

Per $\omega_g = -0.5\omega_p$ risulta:

$$\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_g)} = \frac{\omega_p^2}{(1.3^2 + 1.3 \cdot 0.5)\omega_p^2} = \frac{1}{(1.3^2 + 1.3 \cdot 0.5)} = 0.42735$$

$$\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_g)} = \frac{\omega_p^2}{(1.3^2 - 1.3 \cdot 0.5)\omega_p^2} = \frac{1}{(1.3^2 - 1.3 \cdot 0.5)} = 0.961538$$

Quindi:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left[\sqrt{1 - 0.42735} - \sqrt{1 - 0.961538}\right] = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left[\sqrt{0.57265} - \sqrt{0.038462}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}0.56062 = \frac{1}{2}\frac{2\pi \cdot 1.3 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8}0.56062 = \underline{\underline{7.632038\ rad}}$$

Per $\omega_g = -3.5\omega_p$ risulta:

$$\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_g)} = \frac{\omega_p^2}{(1.3^2 + 1.3 \cdot 3.5)\omega_p^2} = \frac{1}{(1.3^2 + 1.3 \cdot 3.5)} = 0.1602564$$

$$\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_g)} = \frac{\omega_p^2}{(1.3^2 - 1.3 \cdot 3.5)\omega_p^2} = \frac{1}{(1.3^2 - 1.3 \cdot 3.5)} = -0.34965$$

Quindi:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left[\sqrt{1 - 0.1602564} - \sqrt{1 + 0.34965}\right] = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left[\sqrt{0.8397436} - \sqrt{1.34965}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}(-0.245369) = \frac{1}{2}\frac{2\pi \cdot 1.3 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8}(-0.245369) = \underline{\underline{-3.34035\ rad}}$$

Si evince l'interessante risultato che all'aumentare del campo di induzione magnetica (ω_g), la rotazione di Faraday avviene al contrario.