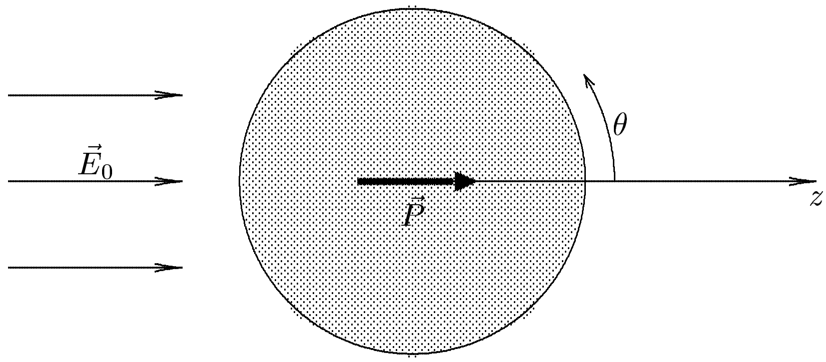
Esercizi svolti di Propagazione libera - Anno 2009

09-1) Esercizio n. 1 del 23/1/2009

Una goccia (sferica) d'acqua é posta in un campo elettrico uniforme di modulo $E_0 = 1000\ V/m$. Calcolare la densitá della carica di polarizzazione sulla superficie della goccia.

———————



Il campo elettrico all'interno di una sfera dielettrica posta in un campo elettrico uniforme é pure uniforme nella stessa direzione e verso del campo elettrico esterno iniziale. Si ha:

$$\vec{E} = \frac{3\vec{E}_0}{\epsilon_r + 2}$$

Conseguentemente la sfera si polarizza e la polarizzazione $\vec{P}$ é:

$$\vec{P} = \chi\vec{E} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\frac{3\vec{E}_0}{\epsilon_r + 2}$$

La densitá di carica di polarizzazione sulla superficie della sfera é:

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \widehat{n} = P\cos\theta = 3\epsilon_0\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}E_0\cos\theta$$

Quindi la carica di polarizzazione é positiva sulla semisfera che si affaccia sull'asse z positivo e negativa sull'altra.

Poiché per l'acqua $\epsilon_r = 81$, si ha:

$$\underline{\underline{\sigma_P = 2.56 \cdot 10^{-8}\cos\theta}}$$

09-02) Esercizio n. 2 del 23/1/2009

Un plasma omogeneo indefinito, con $\nu_{eff} = 10^5 s^{-1}$, é posto in un campo magnetico uniforme di intensitá $B = 1000\ G$. Esso é attraversato, lungo la direzione del campo magnetico, da un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 2\ GHz$. Il numero di elettroni per unitá di volume é $N_e = 10^{16}\ m^{-3}$.

Calcolare l'angolo di rotazione di Faraday (espresso in gradi) subìto dall'ellisse di polarizzazione dopo un percorso di 10 Km.

———————

Come sappiamo dalla teoria l'angolo di rotazione di Faraday subìto dall'ellisse di polarizzazione dopo un percorso z é dato da:

$$\boxed{\Psi = \frac{(\beta'_0 - \beta''_0)}{2} z}$$

Dette α'_0 e β'_0 rispettivamente il coefficiente di attenuazione e la costante di propagazione competenti all'onda ordinaria, dalla teoria di Campi elettromagnetici si ha:

$$\frac{1}{\alpha'^2_0} = \frac{\dfrac{\left[1 - \dfrac{X(1+Y)}{(1+Y)^2+Z^2}\right]}{\left[\dfrac{XZ}{(1+Y)^2+Z^2}\right]} + \sqrt{\dfrac{\left[1 - \dfrac{X(1+Y)}{(1+Y)^2+Z^2}\right]^2}{\left[\dfrac{XZ}{(1+Y)^2+Z^2}\right]^2} + 1}}{\dfrac{\omega^2}{2c^2}\left[\dfrac{XZ}{(1+Y)^2+Z^2}\right]}$$

$$\beta'^2_0 = \alpha'^2_0 + \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{X(1+Y)}{(1+Y)^2+Z^2}\right]$$

essendo:

$$X = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2, \qquad Y = \left(-\frac{\omega_g}{\omega}\right), \qquad Z = \left(\frac{\omega_{eff}}{\omega}\right)$$

Per calcolare β''_0 e α''_0 ossia la costante di propagazione ed il coefficiente di attenuazione competenti all'onda straordinaria, é sufficiente rifare i calcoli scambiando $+Y$ con $-Y$.

I dati sono:

$N_e = 10^{16}\ m^{-3}$, $B = 0.1\ Wb/m^2$, $\omega_{eff} = 2\pi \cdot 10^5\ s^{-1}$, $\omega = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^9\ rad/s$, $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} C$, $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\ Kg$.

Risulta:

$$\begin{cases} \omega_p^2 = \dfrac{N_e q^2}{\epsilon_0 m} = \dfrac{10^{16} \cdot \left(1.6 \cdot 10^{-19}\right)^2}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}} = 3.1738 \cdot 10^{19} \ (rad/s)^2 \\ \omega_p = 5.6336 \cdot 10^9 \ (rad/s) \\ X = \left(\dfrac{\omega_p}{\omega}\right)^2 = 0.2009 \\ \omega_g = \dfrac{q_e B}{m_e} = -\dfrac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.1}{9.11 \cdot 10^{-31}} = -1.7563 \cdot 10^{10} \ (rad/s) \\ Y = -\dfrac{\omega_g}{\omega} = 1.3976 \\ Z = \dfrac{\omega_{eff}}{\omega} = 5 \cdot 10^{-5} \end{cases}$$

Per l'onda ordinaria si ha, allora:

$$\frac{X(1+Y)}{(1+Y)^2+Z^2} = \frac{0.2009(1+1.3976)}{(1+1.3976)^2+(5\cdot 10^{-5})^2} = \frac{0.4817}{5.7485} = 0.0838$$

$$\frac{XZ}{(1+Y)^2+Z^2} = \frac{0.2009 \cdot 5 \cdot 10^{-5}}{5.7485} = 1.7474 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{\omega^2}{2c^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 4 \cdot 10^{18}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{16}} = 877.2982$$

Ne segue:

$$\frac{1}{\alpha_0'^2} = \frac{\dfrac{1-0.0838}{1.7474 \cdot 10^{-6}} + \sqrt{\dfrac{(1-0.0838)^2}{(1.7474 \cdot 10^{-6})^2}+1}}{877.2982 \cdot 1.7474 \cdot 10^{-6}} = \frac{524321.8 + 524321.8}{877.2982 \cdot 1.7474 \cdot 10^{-6}} = 6.8405 \cdot 10^8$$

$$\beta_0'^2 = 1.4619 \cdot 10^{-9} + 1754.6 \cdot 0.9162 = 1607.6$$

In definitiva:

$$\alpha_0' = 3.8234 \cdot 10^{-5} \ m^{-1} \qquad \beta_0' = 40.095 \ rad/m$$

Per l'onda straordinaria si ha, invece:

$$\frac{X(1-Y)}{(1-Y)^2+Z^2} = \frac{0.2009(1-1.3976)}{(1-1.3976)^2+(5\cdot 10^{-5})^2} = \frac{-0.07988}{0.158} = -0.5055$$

$$\frac{XZ}{(1-Y)^2+Z^2} = \frac{0.2009 \cdot 5 \cdot 10^{-5}}{0.158} = 6.3576 \cdot 10^{-5}$$

$$\frac{\omega^2}{2c^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 4 \cdot 10^{18}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{16}} = 877.2982$$

Ne segue:

$$\frac{1}{\alpha_0''^2} = \frac{\dfrac{1+0.5055}{6.3576 \cdot 10^{-5}} + \sqrt{\dfrac{(1+0.5055)^2}{(6.3576 \cdot 10^{-6})^2} + 1}}{877.2982 \cdot 6.3576 \cdot 10^{-5}} = \frac{2.36803 \cdot 10^4 + 2.36803 \cdot 10^4}{877.2982 \cdot 6.3576 \cdot 10^{-5}} = 8.4913 \cdot 10^5$$

$$\beta_0''^2 = 1.1777 \cdot 10^{-6} + 1754.6 \cdot 1.5055 = 2641.6$$

In definitiva:

$$\alpha_0'' = 1.0852 \cdot 10^{-3}\ m^{-1} \qquad \beta_0'' = 51.3965\ rad/m$$

Quindi:

$$\Psi = \frac{(\beta'_0 - \beta''_0)}{2} z = \frac{40.095 - 51.3965}{2} \cdot 10^4 = \underline{\underline{-56507.5\, rad = -3.2376 \cdot 10^6\, gradi = 8993.3\, giri}}$$

09-03) Esercizio n. 1 del 24/2/2009

Una sfera cava di materiale magnetico é posta in un campo di induzione magnetica uniforme di intensitá $B_0 = 1000\ G$. Il diametro interno di tale strato sferico é $d = 5\ cm$. Calcolare l'intensitá dell'induzione magnetica nella parte cava nei casi in cui lo spessore dello strato sia 1 mm, 2 mm, 3 mm. Si assuma per la permeabilitá magnetica relativa del materiale di cui é costituito lo strato il valore $\mu_r = 1000$.

La formula per il campo dentro una sfera cava è:

$$B = \frac{9\mu_r B_0}{\left[(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\dfrac{a^3}{b^2}(\mu_r - 1)^2\right]}$$

Nel nostro caso $\mu_r = 1000$, $B_0 = 1000\, G = 0.1\, \dfrac{Wb}{m^2}$, $a = 2.5\, cm = 2.5 \cdot 10^{-2}\, m$.
Sia Δ lo spessore, segue $b = a + \Delta$, si ha:

$$\Delta = 1\, mm \quad B_{cava} = 0.0039\, \frac{Wb}{m^2} = \underline{\underline{39\, G}}$$

$$\Delta = 2\, mm \quad B_{cava} = 0.0021\, \frac{Wb}{m^2} = \underline{\underline{21\, G}}$$

$$\Delta = 3\, mm \quad B_{cava} = 0.00154\, \frac{Wb}{m^2} = \underline{\underline{15\, G}}$$

Se si usa la formula approssimata per $\mu_r \gg 1$ i risultati sono praticamente gli stessi:

$$B_{cava} = \frac{9B_0}{2\mu_r\left(1 - \dfrac{a^3}{b^3}\right)}$$

09-04) Esercizio n. 2 del 24/2/2009

Un giratore é un dispositivo che ruota il piano di polarizzazione di una radiazione elettromagnetica di 90^0. Esso é costituito da un materiale in ferrite ($\epsilon_r \simeq 15$) con $\dfrac{\omega_m}{2\pi} = 1\ GHz$. Ad esso é applicato un campo di induzione magnetica di $700\ G$. Quanto deve essere lunga la ferrite ad una frequenza operativa di $3\ GHz$? Si ponga $\gamma_e = -\left|\dfrac{e}{m_e}\right|$.

———————

L'angolo τ di cui il vettore campo elettrico dell'onda ruota quando essa ha percorso una distanza unitaria é:

$$\tau = \frac{1}{2}\omega\sqrt{\epsilon\mu_0}\left(\sqrt{1 + \frac{\omega_0\omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} - \frac{\omega\omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2}} - \sqrt{1 + \frac{\omega_0\omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\omega\omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2}}\ \right)$$

che si puó scrivere:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r}\left(\sqrt{1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 + \omega}} - \sqrt{1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 - \omega}}\ \right)$$

Si ha:

$$\omega_0 = -\gamma_e\mu_0 H_0 = -\gamma_e B_0 = \left|\frac{e}{m_e}\right| B_0 = \frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{9.11 \cdot 10^{-31}} 0.07 = 1.2294 \cdot 10^{10}\ rad/s$$

avendo posto $e = -1.6 \cdot 10^{-19}\ C$ il valore della carica dell'elettrone e $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\ Kg$ il valore della sua massa.

Pertanto:

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_m}{\omega_0 + \omega} = \dfrac{2\pi \cdot 10^9}{1.2294 \cdot 10^{10} + 2\pi \cdot 3 \cdot 10^9} = \dfrac{2\pi \cdot 10^9}{3.1143 \cdot 10^{10}} = 0.2017 \\ \dfrac{\omega_m}{\omega_0 - \omega} = \dfrac{2\pi \cdot 10^9}{1.2294 \cdot 10^{10} - 2\pi \cdot 3 \cdot 10^9} = \dfrac{2\pi \cdot 10^9}{-6.55 \cdot 10^9} = -0.95926 \end{cases}$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} \tau =& \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r}\left(\sqrt{1 + 0.2017} - \sqrt{1 - 0.95926}\right) = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r}\,(1.09622 - 0.22077) = \\ =& \frac{1}{2}\frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8}\sqrt{15} \cdot 0.87545 = \pi \cdot 8.7545 \cdot 3.8729 = \underline{\underline{106.5\ rad/m}} \end{aligned}$$

Imponendo che dopo un tratto L (lunghezza della ferrite) il campo elettrico risulti ruotato di $\dfrac{\pi}{2}\ rad$, si ha:

$$\tau L = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow L = \frac{\pi}{2\tau} = 1.475 \cdot 10^{-2}\ m = \underline{\underline{1.475\ cm}}$$

09-05) Esercizio n. 1 del 8/5/2009

Una gabbia di Faraday a rete é costituita da una serie infinita di fili conduttori paralleli equidistanziati $a = 0.5\ cm$. Essi servono per schermare una regione da un campo elettrico di intensitá 10000 V/m. Calcolare a quale distanza dai fili il modulo del campo elettrico é ridotto ad un millesimo rispetto a quello esterno.

———————

La soluzione del problema in termine di potenziale (prima armonica), come sappiamo, é:

$$\Phi(x,z) = Ae^{-\frac{2\pi}{a}z} \cos\frac{2\pi x}{a} + \Phi_0$$

Il campo elettrico valutato come: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ risulta:

$$\vec{E} = -\widehat{x}\frac{\partial}{\partial x}\Phi - \widehat{z}\frac{\partial}{\partial z}\Phi = A\widehat{x}\frac{2\pi}{a}e^{-\frac{2\pi}{a}z} \sin\frac{2\pi x}{a} + A\widehat{z}\frac{2\pi}{a}e^{-\frac{2\pi}{a}z} \cos\frac{2\pi x}{a}$$

il cui modulo é:

$$|\vec{E}| = E_0 e^{-\frac{2\pi}{a}z}$$

essendo E_0 il modulo del campo elettrico da schermare. Affinché il campo elettrico sia un millesimo del valore esterno, occorre:

$$\frac{1}{1000}E_0 = E_0 e^{-\frac{2\pi}{a}z^*}$$

ossia:

$$\frac{1}{1000} = e^{-\frac{2\pi}{a}z^*}$$

$$\ln\left(\frac{1}{1000}\right) = -\frac{2\pi}{a}z^*$$

$$z^* = -\frac{a}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{1000}\right)$$

$$z^* \simeq \underline{\underline{5.5 \cdot 10^{-3}\ m = 5.5\ mm}}$$

09-06) Esercizio n. 2 del 8/5/2009

Un'onda elettromagnetica piana si propaga in un plasma magnetizzato nella direzione ortogonale al campo magnetostatico applicato. I parametri del plasma magnetizzato sono:

$$N_e = 10^{16}\ m^{-3},\ B = 1000\ G,\ \nu_{eff} = 0.$$

Calcolare le frequenze di soglia per le due onde ordinaria e straordinaria nonché quella della risonanza ibrida.

—————

$N_e = 10^{16}\ m^{-3}$, $B = 0.1\ Wb/m^2$, $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} C$, $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\ Kg$.
Risulta:

$$\begin{cases} \omega_p^2 = \dfrac{N_e q^2}{\epsilon_0 m} = \dfrac{10^{16} \cdot \left(1.6 \cdot 10^{-19}\right)^2}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}} = 3.1738 \cdot 10^{19}\ (rad/s)^2 \\ \omega_p = 5.6336 \cdot 10^9\ (rad/s) \\ \omega_g = \dfrac{q_e B}{m_e} = -\dfrac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.1}{9.11 \cdot 10^{-31}} = -1.7563 \cdot 10^{10}\ (rad/s) \\ X = \left(\dfrac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \\ Y = -\dfrac{\omega_g}{\omega} \\ Z = 0 \end{cases}$$

Per $\theta = 90^0$, ponendo $Z = 0$, si ha:

$$\frac{c^2 k'^2_{(\theta=\pi/2)}}{\omega^2} = 1 - X = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{c^2 k''^2_{(\theta=\pi/2)}}{\omega^2} =& 1 - \frac{X(1-X)}{(1-X) - Y^2} = \\ =& 1 - \frac{\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2} - \dfrac{\omega_g^2}{\omega^2}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_g^2} \end{aligned}$$

Le frequenze di soglia si ottengono annullando le espressioni sopra riportate.
Per l'onda polarizzata circolarmente destra si ha:

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_R^2} = 1$$

ossia:

$$\omega_R = \omega_p \Longrightarrow \nu_R = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{5.6336 \cdot 10^9}{2\pi} \simeq 8.966 \cdot 10^8 \ Hz \simeq \underline{\underline{0.89 \ GHz}}$$

Per l'onda polarizzata circolarmente sinistra si ha:

$$X(1-X) = (1-X) - Y^2$$

ossia:

$$X(1-X) - (1-X) = -Y^2$$
$$(1-X)(X-1) = -Y^2$$
$$-X^2 + 2X - 1 + Y^2 = 0$$
$$X^2 - 2X + 1 - Y^2 = 0$$
$$X^2 - 2X - (Y^2 - 1) = 0$$
$$X = 1 \pm \sqrt{1 + Y^2 - 1} = 1 \pm Y$$

Da cui:

$$\left(\frac{\omega_p}{\omega_L}\right)^2 = 1 \pm \left(-\frac{\omega_g}{\omega_L}\right)$$

corrispondente alle seguenti due equazioni di secondo grado:

$$\omega_{L_1}^2 - \omega_g \omega_{L_1} - \omega_p^2 = 0$$
$$\omega_{L_2}^2 + \omega_g \omega_{L_2} - \omega_p^2 = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$\omega_{L_1} = \frac{\omega_g + \sqrt{\omega_g^2 + 4\omega_p^2}}{2} = \frac{-1.7563 \cdot 10^{10} + \sqrt{3.0846 \cdot 10^{20} + 4 \cdot 3.1738 \cdot 10^{19}}}{2} =$$
$$= 1.6517 \cdot 10^9 \ rad/s \Longrightarrow \nu_{L_1} \simeq 2.63 \cdot 10^8 \ Hz = \underline{\underline{0.263 \ GHz}}$$

$$\omega_{L_2} = \frac{-\omega_g + \sqrt{\omega_g^2 + 4\omega_p^2}}{2} = \frac{1.7563 \cdot 10^{10} + \sqrt{3.0846 \cdot 10^{20} + 4 \cdot 3.1738 \cdot 10^{19}}}{2} =$$
$$= 1.92 \cdot 10^{10} \ rad/s \Longrightarrow \nu_{L_2} \simeq 3.06 \cdot 10^9 \ Hz = \underline{\underline{3.06 \ GHz}}$$

avendo scartato per entrambe le soluzioni certamente negative.

La frequenza di risonanza ibrida si ottiene annullando il denominatore della quantitá $c^2 k'^2_{(\theta=\pi/2)}$, ottenendo:

$$\omega_H = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_g^2} = \sqrt{3.1738 \cdot 10^{19} + 3.085 \cdot 10^{20}} \simeq 18.44 \cdot 10^9 \ rad/s$$

alla quale corrisponde:

$$\nu_H = 2.93 \cdot 10^9 \ Hz = \underline{\underline{2.93 \ GHz}}$$

che é una frequenza di risonanza conosciuta come **upper hybrid frequency**.

09-07) Esercizio n. 1 del 26/6/2009

Un metodo per misurare la densitá di un plasma (trascurando le collisioni) é quello di misurare l'angolo di rotazione di Faraday indotto dal campo magnetico esterno. Un fascio di onde elettromagnetiche piane linearmente polarizzate, di lunghezza d'onda relativa al vuoto $\lambda_0 = 8 \cdot 10^{-3}\ cm$, viaggia in un plasma uniforme, in assenza di collisioni, lungo la direzione di un campo di induzione magnetica di intensitá $B = 1000\ G$. Dopo un percorso di 100 cm il campo elettrico subisce la rotazione di Faraday di un angolo $\theta = 90^0$. Determinare la densitá del plasma.

———————

Se τ é l'angolo di rotazione per un percorso unitario ed L il percorso del fascio di onde nel plasma, si ha:

$$\theta = \tau L = \frac{\pi}{2} = 1.5708\ rad$$

ossia:

$$\tau = 1.5708\ rad/m$$

Si ha:

$$\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda_0} = 2\pi \frac{3 \cdot 10^8}{8 \cdot 10^{-5}} = 23.5619 \cdot 10^{12}\ (rad/s)$$

$$\omega_g = \frac{q_e B}{m_e} = -\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.1}{9.11 \cdot 10^{-31}} = -1.7563 \cdot 10^{10}\ (rad/s)$$

$$Y = -\frac{\omega_g}{\omega} = \frac{1.7563 \cdot 10^{10}}{23.5619 \cdot 10^{12}} = 7.454 \cdot 10^{-4} \ll 1$$

Sappiamo che l'angolo di rotazione per un percorso unitario é:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left(\sqrt{1 - \frac{X}{1+Y}} - \sqrt{1 - \frac{X}{1-Y}}\right)$$

che, tenendo conto che $Y \ll 1$ si puó scrivere:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left(\sqrt{1 - X(1-Y)} - \sqrt{1 - X(1+Y)}\right) = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left(\sqrt{(1-X) + XY} - \sqrt{(1-X) - XY}\right)$$

Elevando al quadrato:

$$\tau^2 = \frac{1}{4}\frac{\omega^2}{c^2}\left[2(1-X) - 2\sqrt{(1-X)^2 - X^2Y^2}\right]$$

ossia:

$$\tau^2 - \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}(1-X) = -\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\sqrt{(1-X)^2 - X^2Y^2}$$

Elevando al quadrato:

$$\tau^4 + \frac{1}{4}\frac{\omega^4}{c^4}(1-X)^2 - 2\tau^2\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}(1-X) = \frac{1}{4}\frac{\omega^4}{c^4}\left[(1-X)^2 - X^2Y^2\right]$$

ossia:

$$\tau^4 - 2\tau^2\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}(1-X) = -\frac{1}{4}\frac{\omega^4}{c^4}X^2Y^2$$

Ordinando:

$$\frac{1}{4}\frac{\omega^4}{c^4}Y^2X^2 + \tau^2\frac{\omega^2}{c^2}X + \left(\tau^4 - \tau^2\frac{\omega^2}{c^2}\right) = 0$$

Risulta:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{(23.5619\cdot 10^{12})^2}{9\cdot 10^{16}} = 6.1685\cdot 10^9 \Longrightarrow \frac{\omega^4}{c^4} = 38.0501\cdot 10^{18} \Longrightarrow \tau^2\frac{\omega^2}{c^2} = 15.220\cdot 10^9$$

Poiché $\tau^4 = 6.0881$, risulta $\left(\tau^4 - \tau^2\frac{\omega^2}{c^2}\right) \simeq -\tau^2\frac{\omega^2}{c^2}$ e, quindi, l'equazione in X diventa:

$$\frac{1}{4}\frac{\omega^4}{c^4}Y^2X^2 + \tau^2\frac{\omega^2}{c^2}X - \tau^2\frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

ossia:

$$\frac{1}{4}\frac{\omega^2}{\tau^2c^2}Y^2X^2 + X - 1 = 0$$

Poiché:

$$\frac{1}{4}\frac{\omega^2}{\tau^2c^2}Y^2 = 347.2614$$

La soluzione é:

$$X = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{-1+\sqrt{1+4\cdot 347.2614}}{2\cdot 347.2614} = 52.2421\cdot 10^{-3}$$

Ne segue:

$$\omega_p^2 = 52.2421\cdot 10^{-3}\cdot\omega^2 = 52.2421\cdot 10^{-3}\cdot(23.5619\cdot 10^{12})^2 = 29.0029\cdot 10^{24}\ (rad/s)^2$$

Poiché $\omega_p^2 = \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m}$, si ha, per la densitá del plasma:

$$N = \frac{\epsilon_0 m\omega_p^2}{q_e^2} = \underline{\underline{9.1382\cdot 10^{21}\ (m^{-3})}}$$

09-08) Esercizio n. 2 del 26/6/2009

Un fascio di luce linearmente polarizzato ($\lambda_0 = 5893 Å$) attraversa in direzione longitudinale un tubo pieno d'acqua lungo 1 m. Il tubo é introdotto in un lungo solenoide costituito da 1000 $spire/m$. Se la corrente che circola nel solenoide é 10 A, calcolare l'angolo di rotazione del piano di polarizzazione della luce emergente. Si assuma il campo magnetico, prodotto dal solenoide, uniforme.

————————

L'angolo di rotazione θ del piano di polarizzazione della luce é proporzionale al modulo dell'induzione magnetica B e alla distanza l percorsa all'interno del mezzo. Possiamo, cioé, scrivere:

$$\theta = VBl$$

dove V é una costante di proporzionalitá chiamata **costante di Verdet**.

La costante di Verdet, nel caso dell'acqua, alla lunghezza d'onda di $5893 Å$ é $2.18 \cdot 10^{-3}$ $gradi/G \cdot mm$.

Per un solenoide infinitamente esteso, risulta:

$$B = \mu_0 n I = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000 \cdot 10 = 12.566 \cdot 10^{-3}\ Wb/m^2 = 125.66\ G$$

Quindi:

$$\theta = 2.18 \cdot 10^{-3} \cdot 125.66 \cdot 1000 \simeq \underline{\underline{274^0}}$$

essendo $l = 1000\ mm$.

09-09) Esercizio n. 1 del 28/9/2009

Una sfera conduttrice di raggio $a = 1\ cm$ é posta in un campo elettrico uniforme di modulo $E = 1000\ V/m$. Sia $Q = 1\ \mu C$ la carica iniziale posta sulla superficie della sfera. Esprimere la funzione potenziale completa del sistema, nonché le espressioni delle componenti del campo elettrico esterno. Valutare la densitá di carica elettrica indotta sulla superficie della sfera e calcolarne il valore massimo.

Nel caso generale di una sfera conduttrice posta in un campo elettrico uniforme, la funzione potenziale é:

$$\Phi_{ext}(r,\theta) = U_0 - \frac{C_1}{a} + \frac{C_1}{r} - E_0 r\cos\theta + E_0 a^3 \frac{1}{r^2}\cos\theta$$
$$\Phi_{int}(r,\theta) = U_0$$

Se la sfera é inizialmente scarica $C_1 = 0$; se la sfera possiede una carica iniziale Q, si ha:

$$C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9\cdot 10^3$$

Pertanto la funzione potenziale completa del sistema é:

$$\Phi_{ext}(r,\theta) = U_0 - 9\cdot 10^5 + \frac{9\cdot 10^3}{r} - 10^3 r\cos\theta + 10^{-3}\frac{\cos\theta}{r^2}$$
$$\Phi_{int}(r,\theta) = U_0$$

Le componenti del campo elettrico esterno sono, allora:

$$E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = +\frac{9\cdot 10^3}{r^2} + 10^3\left(1 + 2\frac{10^{-6}}{r^3}\right)\cos\theta$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -10^3\left(1 - \frac{10^{-6}}{r^3}\right)\sin\theta$$

La densitá di carica superficiale indotta sulla superficie della sfera si puó ricavare dal teorema di Coulomb:

$$E_{sup} = \frac{\sigma_{sup}}{\epsilon_0}$$

che vale sulla superficie di un conduttore.

Nel nostro caso:

$$\sigma_{ind} = \epsilon_0\,[E_r]_{r=a} = \epsilon_0(9\cdot 10^7 + 3\cdot 10^3\cos\theta)$$

il cui valore massimo che si ha per $\theta = 0$ é praticamente trascurabile rispetto alla densitá di carica giá presente sulla sfera. Infatti risulta:

$$\sigma_{max} \simeq 9\cdot 10^7\epsilon_0 = 7.96\cdot 10^{-4}\ C/m^2$$

09-10) Esercizio n. 2 del 28/9/2009

Un fascio di luce linearmente polarizzato ($\lambda_0 = 5893 Å$) attraversa in direzione longitudinale un tubo pieno d'acqua lungo 50 cm. Il tubo é introdotto in un lungo solenoide costituito da 1000 $spire/m$. Se la corrente che circola nel solenoide é 15 A, calcolare l'angolo di rotazione del piano di polarizzazione della luce emergente. Si assuma uniforme il campo magnetico prodotto dal solenoide.

———————

(vedi es. n.2 del 26/6/2009)

L'angolo di rotazione θ del piano di polarizzazione della luce é proporzionale al modulo dell'induzione magnetica B e alla distanza l percorsa all'interno del mezzo. Possiamo, cioé, scrivere:

$$\theta = VBl$$

dove V é una costante di proporzionalitá chiamata **costante di Verdet**.

La costante di Verdet, nel caso dell'acqua, alla lunghezza d'onda di $5893 Å$ é $2.18 \cdot 10^{-3}\ gradi/G \cdot mm$.

Per un solenoide infinitamente esteso, risulta:

$$B = \mu_0 n I = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000 \cdot 10 = 18.850 \cdot 10^{-3}\ Wb/m^2 = 188.5\ G$$

Quindi:

$$\theta = 2.18 \cdot 10^{-3} \cdot 188.5 \cdot 500 \simeq \underline{\underline{205^0.465}}$$

essendo $l = 500\ mm$.

09-11) Esercizio n. 1 del 23/10/2009

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 100\ MHz$, si propaga in un plasma indefinito magnetizzato, lungo la direzione del campo di induzione magnetica. I parametri del plasma sono:

$$N = 10^{14}\ m^{-3}, \quad \omega_{eff} = 2\pi \cdot 10^8\ (rad/s), \quad B = 5000\ G$$

Calcolare le costanti di propagazione ed i coefficienti di attenuazione competenti all'onda ordinaria e straordinaria rispettivamente.

Calcolare l'angolo di rotazione di Faraday (espresso in gradi) subìto dall'ellisse di polarizzazione dopo un percorso di 1 Km.

——————

Come sappiamo dalla teoria l'angolo di rotazione di Faraday subìto dall'ellisse di polarizzazione dopo un percorso z é dato da:

$$\boxed{\Psi = \frac{(\beta'_0 - \beta''_0)}{2} z}$$

Dette α'_0 e β'_0 rispettivamente il coefficiente di attenuazione e la costante di propagazione competenti all'onda ordinaria, dalla teoria di Campi elettromagnetici si ha:

$$\frac{1}{\alpha'^2_0} = \frac{\dfrac{\left[1 - \dfrac{X(1+Y)}{(1+Y)^2 + Z^2}\right]}{\left[\dfrac{XZ}{(1+Y)^2 + Z^2}\right]} + \sqrt{\dfrac{\left[1 - \dfrac{X(1+Y)}{(1+Y)^2 + Z^2}\right]^2}{\left[\dfrac{XZ}{(1+Y)^2 + Z^2}\right]^2} + 1}}{\dfrac{\omega^2}{2c^2}\left[\dfrac{XZ}{(1+Y)^2 + Z^2}\right]}$$

$$\beta'^2_0 = \alpha'^2_0 + \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{X(1+Y)}{(1+Y)^2 + Z^2}\right]$$

essendo:

$$X = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2, \qquad Y = \left(-\frac{\omega_g}{\omega}\right), \qquad Z = \left(\frac{\omega_{eff}}{\omega}\right)$$

Per calcolare β''_0 e α''_0 ossia la costante di propagazione ed il coefficiente di attenuazione competenti all'onda straordinaria, é sufficiente rifare i calcoli scambiando $+Y$ con $-Y$.

I dati sono:

$N_e = 10^{14}\ m^{-3}$, $B = 0.5\ Wb/m^2$, $\omega_{eff} = 2\pi \cdot 10^8\ (rad/s)$, $\omega = 2\pi \cdot 10^8\ (rad/s)$, $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} C$, $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\ Kg$.

Risulta:

$$
\begin{cases}
\omega_p^2 = \dfrac{N_e q^2}{\epsilon_0 m} = \dfrac{10^{14} \cdot \left(1.6 \cdot 10^{-19}\right)^2}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}} \simeq 3.1738 \cdot 10^{17}\ (rad/s)^2 \\
\omega_p = 5.6336 \cdot 10^8\ (rad/s) \Longrightarrow \nu_p \simeq 89.66\ MHz \\
X = \left(\dfrac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \simeq 0.804 \\
\omega_g = \dfrac{q_e B}{m_e} = -\dfrac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.5}{9.11 \cdot 10^{-31}} \simeq -8.78 \cdot 10^{10}\ (rad/s) \\
Y = -\dfrac{\omega_g}{\omega} \simeq 139.74 \\
Z = \dfrac{\omega_{eff}}{\omega} = 1
\end{cases}
$$

Per l'onda ordinaria si ha, allora:

$$\frac{X(1+Y)}{(1+Y)^2 + Z^2} = \frac{0.804(1+139.74)}{(1+139.74)^2 + 1} = \frac{113.72}{1.98 \cdot 10^4} \simeq 5.74 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{XZ}{(1+Y)^2 + Z^2} = \frac{0.804}{1.98 \cdot 10^4} \simeq 4.08 \cdot 10^{-5}$$

$$\frac{\omega^2}{2c^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 10^{16}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{16}} \simeq 2.1932$$

Ne segue:

$$\frac{1}{\alpha_0'^2} = \frac{\dfrac{1 - 5.74 \cdot 10^{-3}}{4.08 \cdot 10^{-5}} + \sqrt{\dfrac{\left(1 - 5.74 \cdot 10^{-3}\right)^2}{\left(4.08 \cdot 10^{-5}\right)^2} + 1}}{2.1932 \cdot 4.08 \cdot 10^{-5}} \simeq \frac{2.437 \cdot 10^4 + 2.437 \cdot 10^4}{8.948 \cdot 10^{-5}} \simeq 5.45 \cdot 10^8$$

da cui:

$$\alpha_0'^2 = \frac{1}{5.45 \cdot 10^8} \simeq 1.835 \cdot 10^{-9}\ (m^{-2})$$

$$\beta_0'^2 = 1.835 \cdot 10^{-9} + 4.3864 \cdot 0.99426 \simeq 4.3612\ (rad/m)^2$$

In definitiva:

$$\alpha_0' \simeq \underline{\underline{4.2837 \cdot 10^{-5}\ (m^{-1})}} \qquad \beta_0' \simeq \underline{\underline{2.088\ (rad/m)}}$$

Per l'onda straordinaria si ha, invece:

$$\frac{X(1-Y)}{(1-Y)^2 + Z^2} = \frac{0.804(1-139.74)}{(1-139.74)^2 + 1} \simeq \frac{-111.6469}{1.9155 \cdot 10^4} \simeq -5.8233 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{XZ}{(1-Y)^2+Z^2} = \frac{0.804}{1.9155 \cdot 10^4} \simeq 4.1973 \cdot 10^{-5}$$

$$\frac{\omega^2}{2c^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 10^{16}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{16}} \simeq 2.1932$$

Ne segue:

$$\frac{1}{\alpha_0''^2} = \frac{\dfrac{1+5.8233 \cdot 10^{-3}}{4.1973 \cdot 10^{-5}} + \sqrt{\dfrac{\left(1+5.8233 \cdot 10^{-3}\right)^2}{\left(4.1973 \cdot 10^{-5}\right)^2}+1}}{2.1932 \cdot 4.1973 \cdot 10^{-5}} \simeq$$

$$\simeq \frac{2.3964 \cdot 10^4 + 2.3964 \cdot 10^4}{2.1932 \cdot 4.1973 \cdot 10^{-5}} \simeq 5.2 \cdot 10^8$$

da cui:

$$\alpha_0''^2 = \frac{1}{5.2 \cdot 10^8} = 1.923 \cdot 10^{-9} \ (m^{-2})$$

$$\beta_0''^2 = 1.923 \cdot 10^{-9} + 4.3864 \cdot 1.0058 \simeq 4.4118 \ (rad/m)^2$$

In definitiva:

$$\alpha_0'' = \underline{\underline{4.3852 \cdot 10^{-5} \ (m^{-1})}} \qquad \beta_0'' = \underline{\underline{2.1 \ (rad/m)}}$$

Quindi:

$$\Psi = \frac{(\beta'_0 - \beta''_0)}{2} z = \frac{2.088 - 2.1}{2} \cdot 10^3 = \underline{\underline{-6\, rad = -343^0.77}}$$

09-12) Esercizio n. 2 del 23/10/2009

Con riferimento al problema precedente, graficare la densitá di energia mediata in un periodo immagazzinata nel plasma, nell'ipotesi di $Z = 0$, al variare di ω/ω_p.

Verificare che la formula esatta della teoria é:

$$< w_e >= \epsilon_0 \left[1 + X \frac{(1+Y^2)}{(1-Y^2)^2} \right] |A|^2$$

———————

Si conosce dalla teoria che, se il campo elettrico penetra nel plasma linearmente polarizzato:

$$< w_e >= \epsilon_0 \left[1 + X \frac{(1+Y^2)}{(1-Y^2)^2} \right] |A|^2$$

Sappiamo che:

$$X = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_p^2}}$$

Posto $x = \dfrac{\omega}{\omega_p}$, si ha:

$$X = \frac{1}{x^2}$$

Analogamente:

$$Y = -\frac{\omega_g}{\omega} = -\frac{\omega_g}{\omega_p}\frac{\omega_p}{\omega} = -\frac{\omega_g}{\omega_p}\frac{1}{x} = 155.85\frac{1}{x}$$

$< w_e >$ **in funzione di** ω/ω_p **(**$Z = 0$**,** $\omega_g/\omega_p = -155.85$**,** $|A| = |C|$**,** $\theta = 0^0$**)**