Esercizi svolti di Propagazione libera - Anno 2008

08-1) Esercizio n. 1 del 31/1/2008

Un plasma omogeneo e isotropo ha le seguenti caratteristiche:

$$\omega_p = 10^7 \ rad/s \qquad \omega_{eff} = 10^6 \ rad/s$$

Calcolare la minima frequenza affinché un'onda elettromagnetica piana possa propagarsi nel plasma. Se la frequenza angolare dell'onda elettromagnetica viaggiante nel plasma é $\omega = 2 \cdot 10^7 \ rad/s$, calcolare la costante dielettrica relativa, la costante di propagazione ed il coefficiente di attenuazione. Calcolare, altresí, il tempo impiegato dall'onda elettromagnetica a percorrere 100 Km.

La costante di propagazione di un'onda elettromagnetica che si propaga in un plasma omogeneo e isotropo é:

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}}$$

La minima frequenza angolare (ω_c) al di sopra della quale, cioé, un'onda elettromagnetica piana possa propagarsi nel plasma é quella per cui la costante di propagazione si annulla. Questo avviene per:

$$\omega_c^2 + \omega_{eff}^2 = \omega_p^2$$

ossia:

$$\omega_c = \sqrt{\omega_p^2 - \omega_{eff}^2} = \sqrt{10^{14} - 10^{12}} = 9.9499 \cdot 10^6 \ rad/s \Longrightarrow \underline{\underline{\nu_c = 1.5836 \cdot 10^6 \ Hz}}$$

La costante dielettrica relativa ϵ_r é:

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} = 1 - \frac{10^{14}}{4 \cdot 10^{14} + 10^{12}} = 1 - 0.24938 = \underline{\underline{0.75062}}$$

La costante di propagazione β é:

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r} = \frac{2 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8}\sqrt{0.75062} = \underline{\underline{0.057759 \ rad/m}}$$

Poiché $\omega_{eff}^2 << \omega_p^2$, per il calcolo del coefficiente di attenuazione possiamo applicare la formula approssimata valida per piccole perdite:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}\omega_{eff}\omega_p^2}{c(\omega^2 + \omega_{eff}^2)\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}}} = \frac{\frac{1}{2}10^6 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 10^8 (4 \cdot 10^{14} + 10^{12})\sqrt{0.75062}} = \underline{\underline{0.00047973 \ m^{-1}}}$$

La velocitá di gruppo é, allora:

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = \frac{1}{\dfrac{\partial \beta}{\partial \omega}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \beta}{\partial \omega} =& \frac{1}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}} + \frac{\omega}{c}\frac{1}{2\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}}}\frac{2\omega\omega_p^2}{(\omega^2 + \omega_{eff}^2)^2} = \\
=& \frac{1}{c}\left[\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}}}\frac{\omega^2\omega_p^2}{(\omega^2 + \omega_{eff}^2)^2}\right] = \\
=& \frac{1}{c}\left[\frac{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} + \dfrac{\omega^2\omega_p^2}{(\omega^2 + \omega_{eff}^2)^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}}}\right] = \\
=& \frac{1}{c}\left[\frac{1 - \dfrac{\cancel{\omega_p^2\omega^2} + \omega_p^2\omega_{eff}^2 - \cancel{\omega^2\omega_p^2}}{(\omega^2 + \omega_{eff}^2)^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}}}\right] = \frac{1}{c}\left[\frac{1 - \dfrac{\omega_p^2\omega_{eff}^2}{(\omega^2 + \omega_{eff}^2)^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}}}\right]
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
v_g =& \frac{c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}}}{1 - \dfrac{\omega_p^2\omega_{eff}^2}{(\omega^2 + \omega_{eff}^2)^2}} = \frac{c\sqrt{0.75062}}{\sqrt{1 - 0.24938 \cdot \dfrac{10^{12}}{4 \cdot 10^{14} + 10^{12}}}} = \\
=& \frac{3 \cdot 10^8\sqrt{0.75062}}{\sqrt{1 - 0.24938 \cdot 0.0024938}} = \frac{3 \cdot 10^8\sqrt{0.75062}}{\sqrt{1 - 0.0006219}} = \underline{\underline{2.6 \cdot 10^8 \ m/s}}
\end{aligned}$$

Il tempo impiegato a percorrere 100 Km é:

$$T = \frac{L}{v_g} = \frac{10^5}{2.6 \cdot 10^8} = 0.00038462 \ s = \underline{\underline{384.62 \ \mu s}}$$

08-2) Esercizio n. 2 del 31/1/2008

Un fascio di luce linearmente polarizzata viaggia all'interno di un tubo di vetro crown lungo 25 *cm* e diametro 1 *cm*. Il tubo é circondato da un avvolgimento di 250 spire di rame per tutta la lunghezza. Calcolare l'angolo di rotazione del piano di polarizzazione della luce che emerge dal tubo di vetro quando una corrente di 10 *A* scorre nelle spire. Si assuma che il campo generato dall'avvolgimento sia uniforme.

———————

L'angolo di rotazione di Faraday nei solidi dielettrici immersi in un campo di induzione magnetica é:

$$\theta = VBl$$

essendo V la costante di Verdet, B l'intensitá del campo di induzione magnetica (uniforme) e l la lunghezza del percorso della radiazione nel solido lungo la direzione del campo. Nel caso di vetro crown alla temperatura di 18^0 C risulta:

$$V = 2.68 \cdot 10^{-5}\ (gradi/G \cdot mm)$$

L'intensitá del campo di induzione magnetica generato da un solenoide considerato infinitamente lungo, in quanto nel caso del problema risulta $a << L$ essendo a il raggio del solenoide e L la sua lunghezza, é:

$$B = \mu_0 n I$$

essendo n il numero di spire per unitá di lunghezza, ossia:

$$n = \frac{N}{L}$$

essendo N il numero totale di spire di cui é composto il solenoide.

Si ha:

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{250}{25 \cdot 10^{-2}} \cdot 10 = 0.012566\ Wb/m^2 = 125.66\ G$$

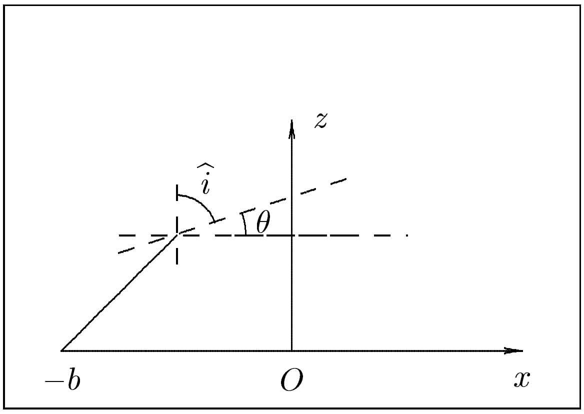
Quindi:

$$\theta = 2.68 \cdot 10^{-5} \cdot 125.66 \cdot 250 = \underline{\underline{0.84192\ gradi}}$$

08-3) Esercizio n. 1 del 28/2/2008

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 2\ MHz$ incide su uno strato ionosferico non assorbente ad un angolo di 45^0 con la verticale. La densitá elettronica nello strato aumenta linearmente con l'altezza in modo tale che la frequenza angolare di plasma é zero al di sotto di 200 Km e raggiunge il valore di $2\pi \cdot 2 \cdot 10^6\ rad/s$ a 300 Km di altezza. Determinare il tratto orizzontale percorso dal 'raggio' compreso fra il punto di entrata e quello di uscita.

———————



Si ha:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}} = \sqrt{KN}$$

essendo N la densitá elettronica nella ionosfera e $K = \dfrac{q^2}{m\epsilon_0}$

Come richiesto dal problema, dall'altezza $h_0 = 200\ Km$ fino ad una altezza $h' = 300\ Km$ $N(z)$ varia con legge lineare, cioé sia, detta a una costante,

$$N(z) = a(z - h_0)$$

Moltiplicando primo e secondo membro per K, si ha:

$$KN(z) = Ka(z - h_0) = \omega_p^2(z)$$

Da quest'ultima formula segue, come caso particolare:

$$Ka(h' - h_0) = \omega_p^2(h')$$

da cui:

$$Ka = \frac{\omega_p^2(h')}{h' - h_0} = \frac{(4\pi \cdot 10^6)^2}{10^5} = 1.5791 \cdot 10^9$$

Se indichiamo con x_1 ed x_2 le ascisse del punto di ingresso del raggio nella ionosfera e di quello di uscita, si ha dalla teoria:

$$x_2 - x_1 = \frac{2\sin 2i_0}{\dfrac{K}{\omega^2}a}$$

Ricordando che $\sin 2i_0 = \dfrac{2\tan i_0}{1+\tan^2 i_0}$, si ha:

$$x_2 - x_1 = \frac{4\tan i_0}{\dfrac{K}{\omega^2}a\left(1+\tan^2 i_0\right)}$$

essendo $K = \dfrac{q^2}{m\epsilon_0}$ e $Ka = 1.5791 \cdot 10^9$.

Ne segue:

$$x_2 - x_1 = \frac{4}{\dfrac{1.5791 \cdot 10^9}{16\pi^2 \cdot 10^{12}} \cdot 2} = 2 \cdot 10^5\ m = \underline{\underline{200\ Km}}$$

08-4) Esercizio n. 2 del 28/2/2008

Un raggio di luce gialla, viaggiante in aria, incide su una lamina di calcite lungo una direzione formante un angolo di 50^0 con la normale. La lamina é tagliata in modo tale che l'asse ottico é parallelo alla faccia frontale della lamina ed ortogonale al piano di incidenza. Calcolare la separazione angolare fra i due raggi emergenti. ($n_O = 1.6584,\ n_E = 1.4864$).

———————

Per la legge di Snell si ha:

$$n_i \sin\theta_i = n_O \sin\theta_{t_O} \Longrightarrow \sin\theta_{t_O} = \frac{n_i}{n_O}\sin\theta_i$$

$$n_i \sin\theta_i = n_E \sin\theta_{t_E} \Longrightarrow \sin\theta_{t_E} = \frac{n_i}{n_E}\sin\theta_i$$

$$\begin{aligned}\Delta\theta_t =&\theta_{t_E} - \theta_{t_O} = \arcsin\left(\frac{n_i}{n_E}\sin\theta_i\right) - \arcsin\left(\frac{n_i}{n_O}\sin\theta_i\right) = \\ &= \arcsin(0.51537) - \arcsin(0.46192) = 31^0.022 - 27^0.511 = \underline{\underline{3^0.511}}\end{aligned}$$

08-5) Esercizio n. 1 del 9/5/2008

Una pulsar é una stella di neutroni molto densa, in rapida rotazione. Essa trasmette impulsi a larga banda che sono piú intensi nella banda di frequenze comprese fra 100 MHz e 500 MHz. Il mezzo interstellare ha una densitá elettronica media di $N = 3 \cdot 10^4\ m^{-3}$. Se la differenza nel tempo di arrivo sulla Terra di due impulsi di frequenza $f_1 = 400\ MHz$ e $f_2 = 300\ MHz$ é $\Delta t = 1.13\ s$, calcolare la distanza della pulsar dalla Terra. Esprimere tale distanza in anni luce.

———————

(vedi es. n.4 del 25/2/2005)

Il tempo impiegato da un impulso a raggiungere la Terra é:

$$t = \frac{L}{v_g}$$

essendo L la distanza percorsa e v_g la velocitá di gruppo nel mezzo dispersivo data da:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$$

Si ha, nell'ipotesi che $\omega_{eff} = 0$:

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

essendo ω_p la frequenza angolare di plasma e ω la frequenza angolare centrale dell'impulso.
Si ha, nel nostro caso:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}} \simeq 9.5215 \cdot 10^7\ (rad/s)^2$$

Poiché β é una funzione sempre crescente all'aumentare di ω, la velocitá di gruppo si puó scrivere:

$$v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1}$$

Risulta:

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{c}\left[\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} + \frac{\omega\left(2\frac{\omega_p^2}{\omega^3}\right)}{2\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}\right] = \frac{1}{c}\left(\frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}\right)$$

Ne segue, nell'ipotesi che $\omega^2 >> \omega_p^2$:

$$v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \simeq c\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

Si ha:

$$t_1 = \frac{L}{v_{g_1}} \quad e \quad t_2 = \frac{L}{v_{g_2}}$$

Ne segue:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = L\left(\frac{1}{v_{g_1}} - \frac{1}{v_{g_2}}\right)$$

Sempre nell'ipotesi che $\omega^2 >> \omega_p^2$, si puó scrivere:

$$\frac{1}{v_g} \simeq \frac{1}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

Ne segue:

$$\Delta t = \frac{L}{c}\left(\frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega_1^2} - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega_2^2}\right) = \frac{L}{c}\frac{\omega_p^2}{8\pi^2}\left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2}\right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\Delta t =& 4.02 \cdot 10^{-3} L\left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2}\right) = 4.02 \cdot 10^{-19} L\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{9}\right) = \\ =& 4.02 \cdot 10^{-19} L \cdot (-0.048611) = -1.9542 \cdot 10^{-20} L\end{aligned}$$

da cui:

$$L = \frac{\Delta t}{1.9542 \cdot 10^{-20}} = \frac{1.13}{1.9542 \cdot 10^{-20}} = \underline{\underline{5.7824 \cdot 10^{19}\ m}}$$

$$\text{Un anno luce} = 3 \cdot 10^8 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 9.4608 \cdot 10^{15}\ m$$

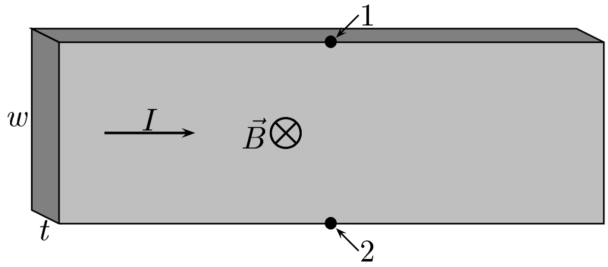
Ne segue:

$$L = \frac{5.7824 \cdot 10^{19}}{9.4608 \cdot 10^{15}} \simeq \underline{\underline{6112 \text{ anni luce}}}$$

Cosí gli impulsi ricevuti oggi sono stati trasmessi dalla stella pulsar circa sei millenni fa.

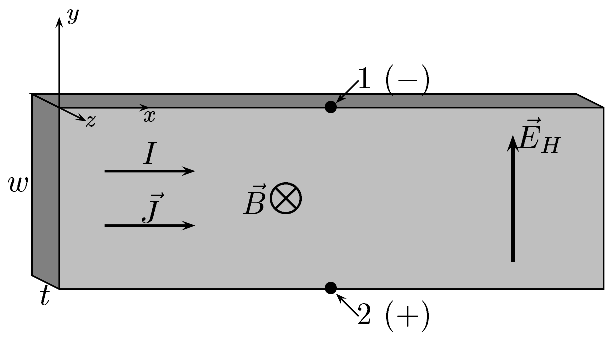
08-6) Esercizio n. 2 del 9/5/2008

Una lastra di rame di 0.5 mm di spessore, 2 cm di larghezza e di conducibilitá statica $\sigma = 5.8 \cdot 10^7\ S/m$, conduce una corrente $I = 50\ A$. Essa é posta in un campo di induzione magnetica $B = 20000\ G$ disposto come in figura. La densitá volumica degli elettroni é $n = 8.4 \cdot 10^{28}\ m^{-3}$. Calcolare il campo elettrico di Hall e la tensione di Hall fra i punti 1 e 2.



———————

Sistemiamo sulla figura lo stesso sistema di riferimento che abbiamo utilizzato nella trattazione teorica.



Risulta:

$$\vec{J} = J_x \widehat{x}, \quad \vec{B} = -B_0 \widehat{z}$$

Scriviamo l'espressione della costante di Hall:

$$R_H = \frac{(E_y)_H}{-J_x B_0} = -\frac{1}{n|e|}$$

da cui:

$$(E_y)_H = +\frac{1}{n|e|} J_x B_0$$

ossia il campo elettrico di Hall é rivolto verso l'asse y positivo.

Ma:

$$J_x = \frac{I}{wt}$$

Quindi:

$$(E_y)_H = +\frac{1}{n|e|}\frac{IB_0}{wt} = +\frac{1}{8.4 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}\frac{50 \cdot 2}{2 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = \underline{\underline{+7.4405 \cdot 10^{-4}\ V/m}}$$

La tensione di Hall fra i punti 1 e 2 é, allora:

$$V_{12} = -Ew = \underline{\underline{-1.4881 \cdot 10^{-5}\ V = -14.881\ \mu V}}$$

08-7) Esercizio n. 1 del 27/6/2008

Un plasma omogeneo indefinito, con assenza di collisioni, é posto in un campo magnetico uniforme di intensitá $B = 2000\ G$. Esso é attraversato, lungo la direzione del campo magnetico, da un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 1\ GHz$. Il numero di elettroni per unitá di volume é $N = 10^{16}\ m^{-3}$.

Calcolare l'angolo di rotazione di Faraday (espresso in gradi) subìto dal campo elettrico dopo un percorso di 10 Km.

—————

$$\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} = \frac{10^{16}\cdot(1.6\cdot10^{-19})^2}{8.854\cdot10^{-12}\cdot9.11\cdot10^{-31}} = 3.1738\cdot10^{19} = 31.738\cdot10^{18} \quad (rad/s)^2$$

$$\omega_g = \frac{q_e B_0}{m_e} = -\frac{1.6\cdot10^{-19}}{9.11\cdot10^{-31}}\cdot0.2 = -3.5126\cdot10^{10}\ rad/s$$

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left[\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega-\omega_g)}} - \sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+\omega_g)}}\right]$$

$$\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega-\omega_g)} = \frac{31.738\cdot10^{18}}{2\pi\cdot10^9(2\pi\cdot10^9+3.5126\cdot10^{10})} = \frac{31.738\cdot10^{18}}{2.6018\cdot10^{20}} = 0.12198$$

$$\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+\omega_g)} = \frac{31.738\cdot10^{18}}{2\pi\cdot10^9(2\pi\cdot10^9-3.5126\cdot10^{10})} = \frac{31.738\cdot10^{18}}{-1.8122\cdot10^{20}} = -0.17514$$

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left[\sqrt{1-0.12198}-\sqrt{1+0.17514}\right] = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}(0.93703-1.084) =$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\omega}{c}0.14697 = \underline{\underline{-1.5391\ (rad/m) = -88^0.184}}$$

L'angolo di rotazione dopo un percorso di 10 Km é:

$$\tau L = -88^0.184\cdot10000 = \underline{\underline{-2249.6\ giri}}$$

08-8) Esercizio n. 2 del 27/6/2008

Si abbia una schiera di fili conduttori paralleli, infinitamente estesi ed equidistanziati di $a = 0.5$ cm. Calcolare la distanza dal piano dei fili alla quale il modulo del campo elettrico sia ridotto ad 1/10 di quello esterno da schermare.

———————

Il campo elettrico valutato al di lá dello schermo é:

$$\vec{E} = -\widehat{x}\frac{\partial}{\partial x}\Phi - \widehat{z}\frac{\partial}{\partial z}\Phi = A\widehat{x}\frac{2\pi}{a}e^{-\frac{2\pi}{a}z}\sin\frac{2\pi x}{a} + A\widehat{z}\frac{2\pi}{a}e^{-\frac{2\pi}{a}z}\cos\frac{2\pi x}{a}$$

Posto $A = E_0$, il modulo del campo elettrico é:

$$E = E_0\sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}e^{-\frac{2\pi}{a}z}\sin\frac{2\pi x}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{a}e^{-\frac{2\pi}{a}z}\cos\frac{2\pi x}{a}\right)^2} =$$

$$= E_0\sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}e^{-\frac{2\pi}{a}z}\right)^2} = E_0\frac{2\pi}{a}e^{-\frac{2\pi}{a}z}$$

Deve essere, allora:

$$\frac{2\pi}{a}e^{-\frac{2\pi}{a}z^*} = \frac{1}{10}$$

ossia:

$$e^{-\frac{2\pi}{a}z^*} = \frac{1}{10}\left(\frac{a}{2\pi}\right)$$

Ancora:

$$-\frac{2\pi}{a}z^* = \ln\left[\frac{1}{10}\left(\frac{a}{2\pi}\right)\right] \Longrightarrow z^* = -\left(\frac{a}{2\pi}\right)\ln\left[\frac{1}{10}\left(\frac{a}{2\pi}\right)\right] = \underline{\underline{0.0075111\ m = 7.5111\ mm}}$$

Ecco dimostrato come una schiera di fili (in pratica, ancora meglio, una rete) riesce a schermare da un campo elettrico esterno.