Esercizi svolti di Propagazione libera - Anno 2007

07-1) Esercizio n. 1 del 29/6/2007

Un mezzo uniassico é caratterizzato dal seguente tensore dielettrico:

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4(1+i10^{-3}) & 0 \\ 0 & 0 & 4(1+i10^{-3}) \end{pmatrix}$$

Un'onda elettromagnetica piana polarizzata lungo l'asse y si propaga lungo l'asse z. Calcolare la distanza percorsa dall'onda affinché la sua densitá di potenza diventi un centesimo di quella in ingresso. Ripetere il calcolo nel caso in cui l'onda sia polarizzata lungo l'asse x.

(vedi Esercizi di Campi elettromagnetici - es. n.2 del 18/3/05)

Poiché la direzione di propagazione é lungo l'asse z, poniamo $\theta = 0$ nelle equazioni per le ampiezze dei campi, nonché $\epsilon'_{xx} = \epsilon'_x$, $\epsilon'_{yy} = \epsilon'_{zz} = \epsilon'$, relazioni costitutive che caratterizzano un cristallo uniassico il cui asse ottico é diretto lungo x. Si ha, allora:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon_x{}'}{\epsilon_0}\right) E_{0_x} = 0 \tag{1}$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}\right) E_{0_y} = 0 \tag{2}$$

$$\left(-\frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}\right) E_{0_z} = 0 \tag{3}$$

L'equazione (3) ammette la soluzione $E_{0_z} = 0$.

Sostituendo la quantitá $\left(\dfrac{v^2}{c^2}\right)_o = \dfrac{\epsilon_0}{\epsilon_x{}'}$, corrispondente all'onda ordinaria, il sistema di equazioni ammette le soluzioni:

$$E_{0x} \neq 0 \quad e \quad E_{0y=0}$$

Sostituendo la quantitá $\left(\dfrac{v^2}{c^2}\right)_e = \dfrac{\epsilon_0}{\epsilon'}$, corrispondente all'onda straordinaria, il sistema di equazioni ammette le soluzioni:

$$E_{0x} = 0 \quad e \quad E_{0y\neq 0}$$

Pertanto le onde che viaggiano nel mezzo anisotropo sono:

$$E_x = E_{0x} e^{ik_o z} \tag{4}$$
$$E_y = E_{0y} e^{ik_e z} \tag{5}$$

L'onda risultante é:

$$\vec{E} = \hat{x} E_{0x} e^{ik_o z} + \hat{y} E_{0y} e^{ik_e z} \tag{6}$$

Supponiamo che per $z = 0$, all'ingresso cioé del cristallo, il campo elettrico sia polarizzato lungo l'asse x, ossia:

$$\vec{E}(z = 0) = E_0 \hat{x} \tag{7}$$

Ne segue che il campo elettrico che si propaga nel cristallo é:

$$\vec{E} = E_0 \hat{x} e^{ik_o z} \tag{8}$$

dove:

$$k_o = \frac{\omega}{v_o} = \frac{\omega}{c}\left(\frac{c}{v}\right)_o = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\epsilon'_x}{\epsilon_0}}$$

Poiché k_o é reale, l'onda polarizzata lungo l'asse x si propaga senza attenuazione.

Supponiamo che per $z = 0$, all'ingresso cioé del cristallo, il campo elettrico sia polarizzato lungo l'asse y, ossia:

$$\vec{E}(z = 0) = E_0 \hat{y} \tag{9}$$

Ne segue che il campo elettrico che si propaga nel cristallo é:

$$\vec{E} = E_0 \hat{y} e^{ik_e z} \tag{10}$$

dove:

$$k_e = \frac{\omega}{v_e} = \frac{\omega}{c}\left(\frac{c}{v}\right)_e = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}}$$

Poiché k_e é complessa, l'onda polarizzata lungo l'asse y si propaga con attenuazione. Si ha:

$$k_e = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}} = \beta + i\alpha \tag{11}$$

Elevando al quadrato l'equazione (11), si ha:

$$\beta^2 - \alpha^2 + 2i\alpha\beta = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\epsilon'}{\epsilon_0} = \frac{\omega^2}{c^2} 4(1 + i10^{-3})$$

ossia:

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = 4\dfrac{\omega^2}{c^2} \\ \\ \alpha\beta = 2 \cdot 10^{-3}\dfrac{\omega^2}{c^2} \end{cases}$$

Dividendo membro a membro, si ha:

$$\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} = 2 \cdot 10^3$$

Moltiplicando ciascun termine per $\frac{\beta}{\alpha}$ si ha:

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 2 \cdot 10^3 \frac{\beta}{\alpha} - 1 = 0$$

da cui

$$\frac{\beta}{\alpha} = 10^3 + \sqrt{10^6 + 1} \simeq 2 \cdot 10^3 \tag{12}$$

Dividendo la (12) per la seconda equazione del sistema. si ha:

$$\frac{1}{\alpha^2} = 10^6 \frac{c^2}{\omega^2} \Longrightarrow \alpha = \underline{\underline{\frac{\omega}{c} 10^{-3}\, N_p/m}} \tag{13}$$

Per trovare la distanza d percorsa dall'onda affinché la sua densitá di potenza diventi un centesimo di quella in ingresso, deve essere:

$$e^{-2\alpha d} = \frac{1}{100}$$

ossia:

$$e^{-2\frac{\omega}{c}10^{-3}d} = \frac{1}{100}$$

ancora:

$$e^{-\left(4\pi \cdot 10^{-3} \frac{d}{\lambda_0}\right)} = \frac{1}{100}$$

essendo λ_0 la lunghezza d'onda della radiazione relativa al vuoto.

Ne segue:

$$-4\pi \cdot 10^{-3} \frac{d}{\lambda_0} = -4.6052$$

da cui:

$$\frac{d}{\lambda_0} = \underline{\underline{\frac{1.1513}{\pi} 10^3}}$$

ossia:

$$\underline{\underline{d = 366.47\lambda_0}}$$

Per esempio, nel caso di luce di frequenza $\nu = 6.3 \cdot 10^{14}\ Hz$ ossia $\lambda_0 = 0.47619\mu m$, risulta:

$$d = 0.17451\ mm$$

Un dispositivo cosí fatto prende il nome di **polarizzatore o lamina polaroide. Esso trasmette solo la componente del campo elettrico parallela all'asse ottico ed assorbe quella perpendicolare**.

Un modo, forse piú elegante, per risolvere la (11) é il seguente:

$$k_e = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}} = \frac{\omega}{c}2\sqrt{1+i10^{-3}} = \frac{\omega}{c}2\left(1+\frac{1}{2}i10^{-3}\right) = \beta + i\alpha$$

avendo sviluppato in serie la radice quadrata. Ne segue che:

$$\alpha = \underline{\underline{\frac{\omega}{c}10^{-3}\,N_p/m}}$$

che é identica alla (13).

07-2) Esercizio n. 2 del 29/6/2007

Il campo magnetico terrestre (approssimativamente 0.6 $Gauss$) é sufficiente a causare la rotazione di Faraday quando un'onda elettromagnetica viaggia attraverso la ionosfera. Se un'onda linearmente polarizzata di frequenza $\nu = 2\ GHz$ attraversa 100 Km di ionosfera ($N = 10^{12}\ m^{-3}$), calcolare la massima rotazione possibile.

———————

(vedi Esercizi di Campi elettromagnetici - es. n.4 del 14/09/1999)

La massima rotazione di Faraday si ha per propagazione longitudinale ossia lungo la direzione del campo magnetico.

L'angolo di rotazione per unitá di percorso é:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left[\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_g)}} - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_g)}}\right]$$

$$\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} = 3.1738 \cdot 10^{15}\ (rad/s)^2$$

$$\omega_g = \frac{q_e B_0}{m_e} = -\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.6 \cdot 10^{-4}}{9.11 \cdot 10^{-31}} = -1.0538 \cdot 10^7 \quad rad/s$$

$$\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_g)} = \frac{3.1738 \cdot 10^{15}}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^9 (2\pi \cdot 2 \cdot 10^9 + 1.0538 \cdot 10^7)} = 2.0081 \cdot 10^{-5}$$

$$\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_g)} = \frac{3.1738 \cdot 10^{15}}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^9 (2\pi \cdot 2 \cdot 10^9 - 1.0538 \cdot 10^7)} = 2.0115 \cdot 10^{-5}$$

Sviluppando in serie le radici quadrate, si ha:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left[\frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_g)} - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_g)}\right]$$

$$\tau = \frac{1}{4}\frac{\omega}{c}\left(2.0115 \cdot 10^{-5} - 2.0081 \cdot 10^{-5}\right) = \frac{1}{4}\frac{2\pi \cdot 2 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} 3.4 \cdot 10^{-8} = 3.5605 \cdot 10^{-7}\ rad/m$$

L'angolo di rotazione dopo un percorso di 100 Km é:

$$\tau L = 3.5605 \cdot 10^{-7} \cdot 10^5 = 3.5605 \cdot 10^{-2}\ rad = \underline{\underline{2^0.04}}$$

07-3) Esercizio n. 1 del 7/9/2007

Un mezzo uniassico dielettrico, di permeabilitá magnetica $\mu = \mu_0$ ha il seguente tensore permeabilitá elettrica relativa:

$$\bar{\bar{\epsilon}}_r = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.001 \end{pmatrix}$$

Se un fascio di luce verde di lunghezza d'onda $\lambda = 0.5\ \mu m$ incide sulla lamina, calcolare la distanza minima affinché l'onda in uscita risulti polarizzata circolarmente (lamina a quarto d'onda o a $\lambda/4$). Si consideri che l'onda si propaghi lungo un asse ortogonale all'asse ottico per esempio lungo l'asse y e che essa, inizialmente, sia linearmente polarizzata lungo una direzione formante un angolo di 45^0 con l'asse x. Si applichi il formalismo della teoria dell'ottica dei cristalli.

———————

(vedi Esercizi di Propagazione libera es. n.2 del 28/2/2005 e es. n. 1 del 29/6/2007)

L'equazione d'onda nel dominio della frequenza competente ad un'onda elettromagnetica che si propaga in un mezzo generalmente anisotropo é:

$$\begin{cases} \omega^2\mu\epsilon_x E_x - k_y^2 E_x - k_z^2 E_x + k_x k_y E_y + k_x k_z E_z = 0 \\ k_x k_y E_x + \omega^2\mu\epsilon_y E_y - k_x^2 E_y - k_z^2 E_y + k_y k_z E_z = 0 \\ k_x k_z E_x + k_y k_z E_y + \omega^2\mu\epsilon_z E_z - k_x^2 E_z - k_y^2 E_z = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Nel caso del nostro problema risulta $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_\perp$ e $\epsilon_z = \epsilon_\parallel$; pertanto trattasi di un cristallo uniassico positivo in quanto $\epsilon_z > \epsilon$ e l'asse z ne é l'asse ottico.

Dalla teoria dell'ottica dei cristalli si ha che l'equazione di dispersione (equazione di Fresnel) ammette due soluzioni per l'indice di rifrazione e quindi per la costante di propagazione delle onde elettromagnetiche nel cristallo. Le soluzioni per gli indici di rifrazione sono:

$$n_O^2 = \epsilon_\perp \tag{2}$$

$$n_E^2 = \frac{\epsilon_\perp \epsilon_\parallel}{\epsilon_\perp (s_x^2 + s_y^2) + \epsilon_\parallel s_z^2} \tag{3}$$

avendo indicato con n_O^2 (**O**rdinary) il quadrato dell'indice di rifrazione competente all'onda ordinaria e con n_E^2 (**E**xtraordinary) il quadrato dell'indice di rifrazione competente all'onda straordinaria.

Si deduce, quindi, che fissata una certa direzione (individuata dai coseni direttori s_x, s_y, s_z) vi sono associate due soluzioni per n^2. Per la (2), un'onda si puó propagare in qualsiasi direzione con lo stesso valore di k^2 come se il mezzo fosse isotropo; per questo l'onda si chiama **ordinaria**. Per la (3) il valore di n^2 dipende dalla direzione $\vec{s}$; per questo prende il nome di onda **straordinaria**.

Ricordiamo che:

$$k = \frac{\omega}{v_f} = \frac{\omega}{c} n \tag{4}$$

Poiché:

$$\vec{k} = k\widehat{s} \quad ossia \quad \widehat{s} = \frac{\vec{k}}{k} = \frac{k_x}{k}\widehat{x} + \frac{k_y}{k}\widehat{y} + \frac{k_z}{k}\widehat{z} \tag{5}$$

Ponendo:

$$s_x = \frac{k_x}{k}, \quad s_y = \frac{k_y}{k} \quad e \quad s_z = \frac{k_z}{k} \tag{6}$$

si ha:

$$k_x = \frac{\omega}{c} n s_x, \quad k_y = \frac{\omega}{c} n s_y \quad e \quad k_z = \frac{\omega}{c} n s_z \tag{7}$$

Supponiamo che l'onda si propaghi lungo una direzione normale all'asse ottico, sia essa la direzione dell'asse y.

In tal caso $s_x = 0$, $s_y = 1$ e $s_z = 0$, ossia $k_x = k_z = 0$ e $k_y = \frac{\omega}{c} n$.

Sostituendo nel sistema di equazioni di Maxwell (1) competente ad un mezzo anisotropo, si ha:

$$\begin{cases} \omega^2 \mu \epsilon_x E_x - k_y^2 E_x = 0 \\ \\ \omega^2 \mu \epsilon_y E_y = 0 \\ \\ \omega^2 \mu \epsilon_z E_z - k_y^2 E_z = 0 \end{cases} \tag{8}$$

ossia:

$$\begin{cases} \frac{\omega^2}{c^2} \left(\epsilon_\perp - n^2 \right) E_x = 0 \\ \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_\perp E_y = 0 \\ \frac{\omega^2}{c^2} \left(\epsilon_\parallel - n^2 \right) E_z = 0 \end{cases} \tag{9}$$

D'altra parte, per onde che si propagano lungo l'asse y, le soluzioni delle equazioni (2) e (3) sono:

$$n_O^2 = \epsilon_\perp \tag{10}$$

$$n_E^2 = \epsilon_\parallel \tag{11}$$

L'equazione (9) ammette la soluzione $E_y = 0$.

Sostituendo la quantitá $n = n_O = \sqrt{\epsilon_\perp}$, corrispondente all'onda ordinaria, il sistema di equazioni ammette le soluzioni:

$$E_x \neq 0 \quad e \quad E_z = 0 \tag{12}$$

Sostituendo la quantitá $n = n_E = \sqrt{\epsilon_\parallel}$, corrispondente all'onda straordinaria, il sistema di equazioni ammette le soluzioni:

$$E_x = 0 \quad e \quad E_z \neq 0 \tag{13}$$

Pertanto le onde che viaggiano nel mezzo anisotropo sono:

$$E_x = E_{0x} e^{ik_O y} \tag{14}$$

$$E_z = E_{0z} e^{ik_E y} \tag{15}$$

L'onda risultante é:

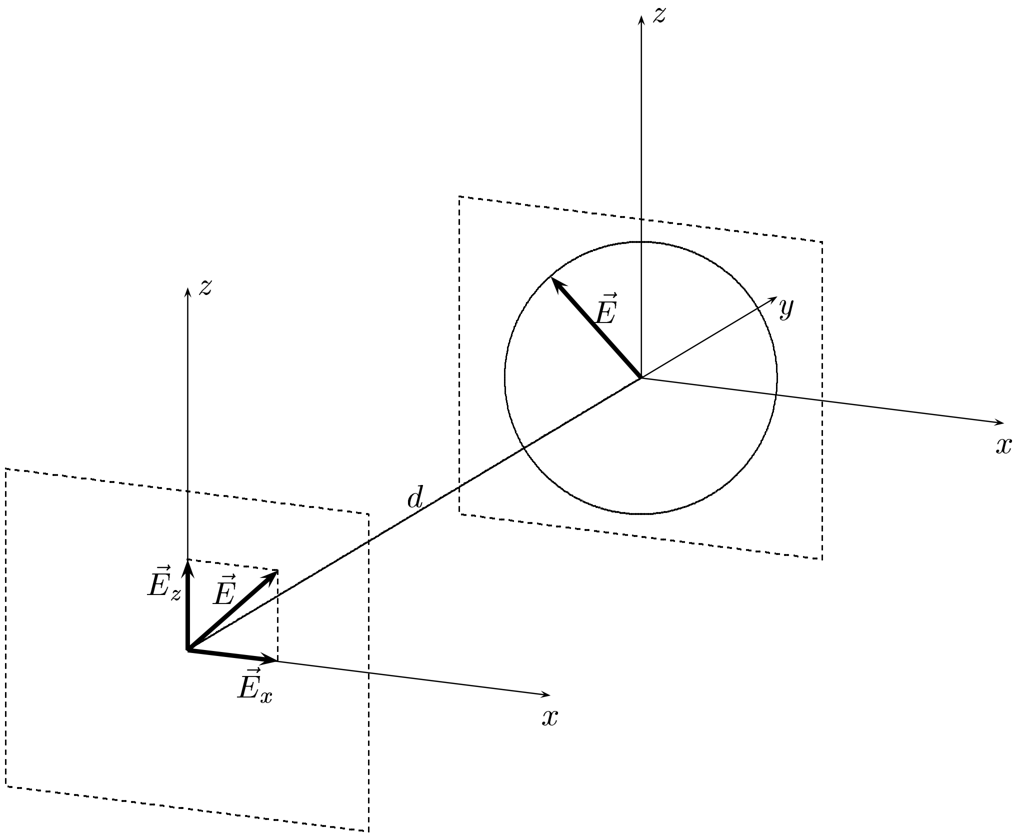
$$\vec{E} = \widehat{x} E_{0x} e^{ik_O y} + \widehat{z} E_{0z} e^{ik_E y} \tag{16}$$

Supponiamo che per $y = 0$, all'ingresso cioé del cristallo, il campo elettrico sia polarizzato lungo una direzione formante un angolo di 45^0 con l'asse x, ossia:

$$\vec{E}_{(y=0)} = E_0(\widehat{x} + \widehat{z}) \tag{17}$$

Ne segue che il campo elettrico che si propaga nel cristallo é:

$$\vec{E} = E_0(\widehat{x} e^{ik_O y} + \widehat{z} e^{ik_E y}) = E_0 e^{ik_O y} \left[\widehat{x} + \widehat{z} e^{i(k_E - k_O) y} \right] \tag{18}$$



Sia d lo spessore del cristallo. Dopo aver percorso tale distanza il campo elettrico dell'onda elettromagnetica é:

$$\vec{E}_{(y=d)} = E_0 e^{ik_O d}\left[\widehat{x} + \widehat{z} e^{i(k_E - k_O)d}\right] \tag{19}$$

Poniamo $\Delta\phi = (k_E - k_O)d$; se

$$\Delta\phi = (2r+1)\frac{\pi}{2} \qquad (r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{20}$$

il campo elettrico all'uscita del cristallo é:

$$\vec{E}_{(z=d)} = E_0 e^{ik_O d}\left[\widehat{x} + \widehat{z} e^{i(2r+1)\frac{\pi}{2}}\right] = E_0 e^{ik_O d}\left(\widehat{x} \pm i\widehat{z}\right) \begin{cases} + \text{ per } r \text{ pari} \\ - \text{ per } r \text{ dispari} \end{cases} \tag{21}$$

ossia il campo elettrico risulta polarizzato circolarmente. La polarizzazione é levogira per r pari, destrogira per r dispari.

La distanza d affinché questo accada, ossia affinché il campo elettrico sia circolarmente polarizzato é data dalla relazione:

$$(k_E - k_O)d = (2r+1)\frac{\pi}{2}$$

Per $r = 0$ si ha lo spessore minimo, ossia:

$$d_{min} = \frac{\pi}{2\,(k_E - k_O)} = \frac{\pi}{2\dfrac{\omega}{c}\left(\sqrt{\epsilon_\parallel} - \sqrt{\epsilon_\perp}\right)} = \frac{\lambda}{4}\frac{1}{\left(\sqrt{\epsilon_\parallel} - \sqrt{\epsilon_\perp}\right)}$$

per cui:

$$d_{min} = \frac{0.5 \cdot 10^{-6}}{4}\frac{1}{\left(\sqrt{2.001} - \sqrt{2}\right)} = \underline{\underline{0.0003536\ m = 0.3536\ mm}}$$

07-4) Esercizio n. 2 del 7/9/2007

Con riferimento al problema precedente si consideri un'onda elettromagnetica piana che si propaghi lungo l'asse z (asse ottico) ed il cui campo elettrico formi un angolo di 45^0 con l'asse x. Studiare lo stato di polarizzazione dell'onda all'uscita del cristallo qualunque ne sia lo spessore.

———————

Supponiamo che l'onda si propaghi lungo una direzione parallela all'asse ottico, sia cioé essa la direzione dell'asse z.

In tal caso $s_x = 0$, $s_y = 0$ e $s_z = 1$, ossia $k_x = k_y = 0$ e $k_z = \dfrac{\omega}{c} n$.

Sostituendo nel sistema di equazioni di Maxwell (1) del problema precedente competente ad un mezzo anisotropo, si ha:

$$\begin{cases} \omega^2 \mu \epsilon_x E_x - k_z^2 E_x = 0 \\ \\ \omega^2 \mu \epsilon_y E_y - k_z^2 E_y = 0 \\ \\ \omega^2 \mu \epsilon_z E_z = 0 \end{cases} \tag{1}$$

ossia:

$$\begin{cases} \dfrac{\omega^2}{c^2} \left(\epsilon_\perp - n^2 \right) E_x = 0 \\ \dfrac{\omega^2}{c^2} \left(\epsilon_\perp - n^2 \right) E_y = 0 \\ \dfrac{\omega^2}{c^2} \epsilon_\parallel E_z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

D'altra parte, per onde che si propagano lungo l'asse z, le soluzioni delle equazioni (2) e (3) del problema precedente sono:

$$n_O^2 = \epsilon_\perp \tag{3}$$

$$n_E^2 = \epsilon_\perp \tag{4}$$

L'onda ordinaria e l'onda straordinaria coincidono.

L'equazione (2) ammette la soluzione $E_z = 0$.

Sostituendo la quantitá $n = n_O = n_E = \sqrt{\epsilon_\perp}$, corrispondente sia all'onda ordinaria che a quella straordinaria, il sistema di equazioni ammette le soluzioni:

$$E_x \neq 0 \quad e \quad E_y \neq 0 \tag{5}$$

Pertanto le onde che viaggiano nel mezzo anisotropo sono:

$$E_x = E_{0x} e^{i k_O z} \tag{6}$$

$$E_y = E_{0y} e^{i k_O z} \tag{7}$$

L'onda risultante é:

$$\vec{E} = \widehat{x}E_{0x}e^{ik_O z} + \widehat{y}E_{0y}e^{ik_O z} \tag{8}$$

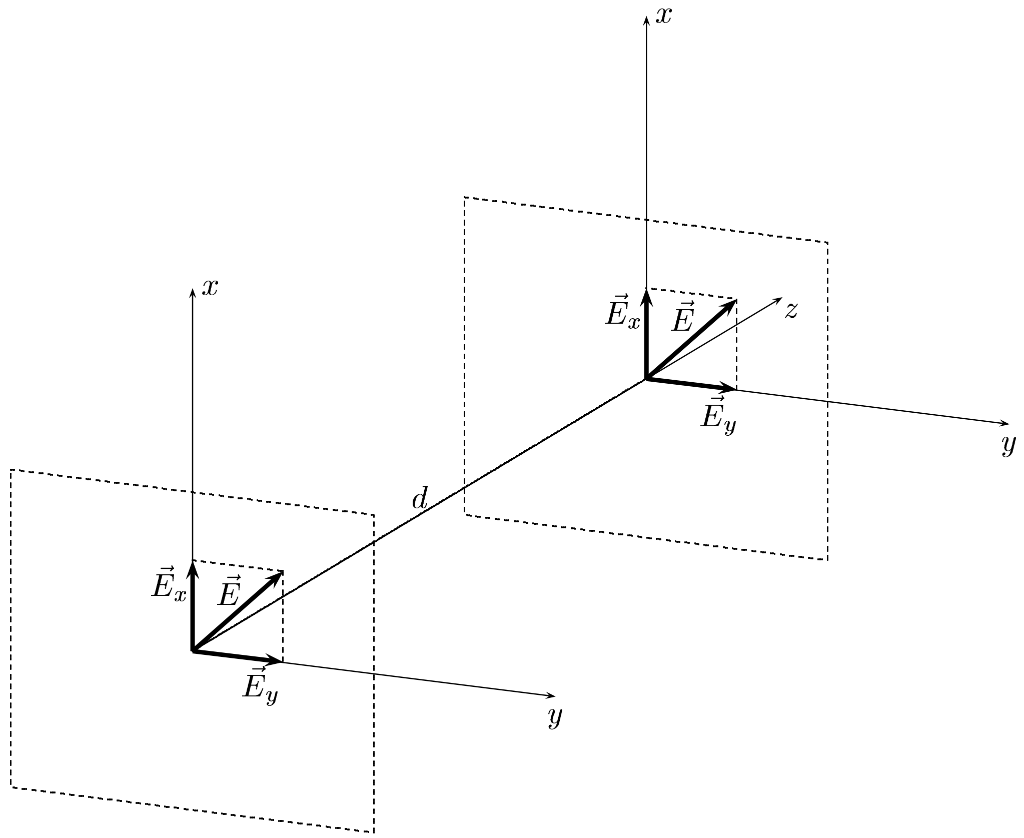
Supponiamo che per $z = 0$, all'ingresso cioé del cristallo, il campo elettrico sia polarizzato lungo una direzione formante un angolo di 45^0 con l'asse x, ossia:

$$\vec{E}_{(z=0)} = E_0(\widehat{x} + \widehat{y}) \tag{9}$$

Ne segue che il campo elettrico che si propaga nel cristallo é:

$$\vec{E} = E_0(\widehat{x}e^{ik_O z} + \widehat{y}e^{ik_O z}) = E_0 e^{ik_O z}\,(\widehat{x} + \widehat{y}) \tag{10}$$

L'onda elettromagnetica, quindi, mantiene il suo stato di polarizzazione iniziale indipendentemente dallo spessore del cristallo.



07-5) Esercizio n. 1 del 28/9/2007

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 10\ GHz$ si propaga in un plasma omogeneo uniformemente magnetizzato, lungo la direzione del campo magnetostatico applicato. Siano $B = 1000\ G$, $\omega_p = 2\pi \cdot 8\ GHz$, $\omega_{eff} = 2\pi \cdot 0.8\ GHz$.

Calcolare la costante di propagazione ed i coefficienti di attenuazione dell'onda ordinaria e dell'onda straordinaria rispettivamente.

———————

(vedi Esercizi svolti di Campi elettromagnetici es. n.1 del 21/7/98)

Dalla teoria sappiamo che le costanti di propagazione complesse competenti all'onda ordinaria (k_0') e all'onda straordinaria (k_0''), per propagazione longitudinale ossia lungo la direzione del campo magnetostatico ($\theta = 0^0$) sono:

$$k_0' = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{X}{1 + iZ + Y}} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\omega_{eff} - \omega_g)}} \tag{7.2.30}$$

$$k_0'' = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{X}{1 + iZ - Y}} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\omega_{eff} + \omega_g)}} \tag{7.2.31}$$

essendo:

$$X = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2, \qquad Y = \left(-\frac{\omega_g}{\omega}\right), \qquad Z = \left(\frac{\omega_{eff}}{\omega}\right) \tag{7.1.19}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} k_0'^2 =& \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{X}{1 + iZ + Y}\right) = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{X(1 - iZ + Y)}{(1+Y)^2 + Z^2}\right] = \\ =& \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{X(1+Y)}{(1+Y)^2 + Z^2} + \frac{iXZ}{(1+Y)^2 + Z^2}\right] \end{aligned}$$

Posto $k_0' = \beta_0' + i\alpha_0'$, si ha:

$$\begin{cases} \beta_0'^2 - \alpha_0'^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \dfrac{X(1+Y)}{(1+Y)^2 + Z^2}\right] \\ \alpha_0'\beta_0' = \dfrac{\omega^2}{2c^2}\left[\dfrac{XZ}{(1+Y)^2 + Z^2}\right] \end{cases}$$

Dividendo membro a membro, si ha:

$$\frac{\beta_0'}{\alpha_0'} - \frac{\alpha_0'}{\beta_0'} = \frac{2\left[1 - \dfrac{X(1+Y)}{(1+Y)^2 + Z^2}\right]}{\left[\dfrac{XZ}{(1+Y)^2 + Z^2}\right]}$$

Moltiplicando ciascun termine per $\dfrac{\beta_0'}{\alpha_0'}$ si ha:

$$\frac{\beta_0'^2}{\alpha_0'^2} - \frac{2\left[1 - \dfrac{X(1+Y)}{(1+Y)^2+Z^2}\right]}{\left[\dfrac{XZ}{(1+Y)^2+Z^2}\right]}\frac{\beta_0'}{\alpha_0'} - 1 = 0$$

da cui

$$\frac{\beta_0'}{\alpha_0'} = \frac{\left[1 - \dfrac{X(1+Y)}{(1+Y)^2+Z^2}\right]}{\left[\dfrac{XZ}{(1+Y)^2+Z^2}\right]} + \sqrt{\frac{\left[1 - \dfrac{X(1+Y)}{(1+Y)^2+Z^2}\right]^2}{\left[\dfrac{XZ}{(1+Y)^2+Z^2}\right]^2} + 1} \tag{12}$$

Dividendo la (12) per la seconda equazione del sistema, si ha:

$$\frac{1}{\alpha_0'^2} = \frac{\dfrac{\left[1 - \dfrac{X(1+Y)}{(1+Y)^2+Z^2}\right]}{\left[\dfrac{XZ}{(1+Y)^2+Z^2}\right]} + \sqrt{\dfrac{\left[1 - \dfrac{X(1+Y)}{(1+Y)^2+Z^2}\right]^2}{\left[\dfrac{XZ}{(1+Y)^2+Z^2}\right]^2} + 1}}{\dfrac{\omega^2}{2c^2}\left[\dfrac{XZ}{(1+Y)^2+Z^2}\right]} \tag{13}$$

Dalla prima equazione del sistema si ha:

$$\beta_0'^2 = \alpha_0'^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{X(1+Y)}{(1+Y)^2+Z^2}\right]$$

Si ha:

$$\omega_g = \frac{q_e B}{m} = -\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.1}{9.11 \cdot 10^{-31}} \simeq -1.7563 \cdot 10^{10} \simeq -2\pi \cdot 2.7952 \cdot 10^9 \; rad/s$$

$$X = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{8}{10}\right)^2 = 0.64, \qquad Y = \left(-\frac{\omega_g}{\omega}\right) = \left(\frac{2.7952}{10}\right) = 0.27952,$$

$$Z = \left(\frac{\omega_{eff}}{\omega}\right) = \left(\frac{0.8}{10}\right) = 0.08$$

Si ha:

$$(1+Y)^2 + Z^2 = (1+0.28)^2 + (0.08)^2 = 1.6436$$

$$\frac{XZ}{(1+Y)^2+Z^2} = \frac{0.64 \cdot 0.08}{1.6436} = 0.031151$$

$$\frac{X(1+Y)}{(1+Y)^2+Z^2} = \frac{0.64(1+0.28)}{1.6436} = 0.49823$$

$$\frac{\left[1-\dfrac{X(1+Y)}{(1+Y)^2+Z^2}\right]}{\left[\dfrac{XZ}{(1+Y)^2+Z^2}\right]} = \frac{1-0.49823}{0.031151} = 16.108$$

Ne segue che:

$$\frac{1}{\alpha_0'^2} = \frac{16.108+\sqrt{(16.108)^2+1}}{2\pi^2\cdot\left(\dfrac{10\cdot 10^9}{3\cdot 10^8}\right)^2\cdot 0.031151} = 0.047199$$

ossia:

$$\underline{\underline{\alpha_0' \simeq 4.6029\ m^{-1}}}$$

$$\beta_0'^2 = (4.6029)^2 + 2\pi^2\cdot\left(\frac{10\cdot 10^9}{3\cdot 10^8}\right)^2\cdot(1-0.49823) = 11026\ (rad/m)^2$$

da cui:

$$\underline{\underline{\beta_0' \simeq 105\ rad/m}}$$

Per calcolare β_0'' e α_0'' é sufficiente rifare i calcoli scambiando $+Y$ con $-Y$.

$$(1-Y)^2+Z^2 = (1-0.27952)^2+(0.08)^2 = 0.52549$$

$$\frac{XZ}{(1-Y)^2+Z^2} = \frac{0.64\cdot 0.08}{0.52549} = 0.097433$$

$$\frac{X(1-Y)}{(1-Y)^2+Z^2} = \frac{0.64(1-0.27952)}{0.52549} = 0.87748$$

$$\frac{\left[1-\dfrac{X(1-Y)}{(1-Y)^2+Z^2}\right]}{\left[\dfrac{XZ}{(1-Y)^2+Z^2}\right]} = \frac{1-0.87748}{0.097433} = 1.2575$$

Ne segue che:

$$\frac{1}{\alpha_0''^2} = \frac{1.2575+\sqrt{(1.2575)^2+1}}{2\pi^2\cdot\left(\dfrac{10\cdot 10^9}{3\cdot 10^8}\right)^2\cdot 0.097433} = \frac{2.8641}{2136.9} = 0.0013403$$

ossia:

$$\underline{\underline{\alpha_0'' \simeq 27.315\ m^{-1}}}$$

$$\beta_0''^2 = (27.315)^2 + 2\pi^2\cdot\left(\frac{10\cdot 10^9}{3\cdot 10^8}\right)^2\cdot(1-0.87748) = 3433.3\ (rad/m)^2$$

da cui:

$$\underline{\underline{\beta_0'' \simeq 58.594\ rad/m}}$$

07-6) Esercizio n. 2 del 28/9/2007

Con riferimento al problema precedente, si ponga $\omega_{eff} = 0$. Calcolare l'angolo di rotazione per unitá di distanza percorsa che il vettore campo elettrico subisce nel plasma.

———————

Sappiamo dalla teoria che l'angolo τ di cui il vettore risultante $\vec{E}$ di un'onda elettromagnetica ruota quando essa viaggiando nella direzione longitudinale in un plasma magnetizzato ha percorso una distanza unitaria é:

$$\tau = \frac{k'_0 - k''_0}{2}$$

La rotazione é nel senso orario se $k'_0 > k''_0$. τ, dopo aver supposto $\omega_{eff} = 0$, si puó scrivere:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left[\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_g)}} - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_g)}}\right]$$

che riproduce la dipendenza della rotazione di Faraday τ con la frequenza. In termini di $X = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$ e $Y = -\frac{\omega_g}{\omega}$ puó essere scritta:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left(\sqrt{1 - \frac{X}{1+Y}} - \sqrt{1 - \frac{X}{1-Y}}\right)$$

Poiché ω_g é negativa per gli elettroni, osserviamo che τ é positiva (rotazione oraria) nel caso di propagazione parallela a $\vec{B}_0$.

Si ha:

$$X = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{2\pi \cdot 8}{2\pi \cdot 10}\right)^2 = 0.64$$

$$\omega_g = \frac{qB}{m} = -\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.1}{9.11 \cdot 10^{-31}} \simeq -1.7563 \cdot 10^{10}\ (rad/s) \simeq -2\pi \cdot 2.7953 \cdot 10^9\ (rad/s)$$

$$Y = -\frac{\omega_g}{\omega} = \frac{2.7953}{10} = 0.27953$$

$$1 - \frac{X}{1+Y} = 1 - \frac{0.64}{1 + 0.27953} = 1 - 0.50018 = 0.49982$$

$$1 - \frac{X}{1-Y} = 1 - \frac{0.64}{1 - 0.27952} = 1 - 0.88831 = 0.11169$$

Poiché i rapporti $\frac{X}{1-Y}$ e $\frac{X}{1+Y}$ non sono $<< 1$ dobbiamo utilizzare le formule esatte; quindi:

$$\sqrt{1 - \frac{X}{1+Y}} - \sqrt{1 - \frac{X}{1-Y}} = \sqrt{0.49982} - \sqrt{0.11169} = 0.70698 - 0.3342 = 0.37278$$

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{2\pi \cdot 10 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} \cdot 0.37278 \simeq 104.72 \cdot 0.37278 \simeq \underline{\underline{39.038\ rad = 2236.7\ gradi}}$$

Cioé il campo elettrico compie $\underline{\underline{2236.7/360 = 6.2131}}$ giri per metro.

07-7) Esercizio n. 1 del 30/11/2007

Si consideri un plasma omogeneo magnetizzato uniformemente e senza collisioni. Sia $B = 1000\ G$ ed $N = 10^{12}\ cm^{-3}$ il numero di elettroni per unitá di volume. Un'onda elettromagnetica linearmente polarizzata si propaga nel plasma nella stessa direzione del campo magnetico. Calcolare le frequenze di soglia dell'onda ordinaria e dell'onda straordinaria.

———————

Si ha:

$$\omega_p^2 = \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m} = \frac{10^{18} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}} = 3.1738 \cdot 10^{21}\ (rad/s)^2$$

da cui:

$$\omega_p = 5.6336 \cdot 10^{10}\ (rad/s) \Longrightarrow \nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 8.9662 \cdot 10^9\ (Hz)$$

Inoltre:

$$\omega_g = -\frac{|q_e|B}{m} = -\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-1}}{9.11 \cdot 10^{-31}} = -1.7563 \cdot 10^{10}\ (rad/s) \quad \text{ossia} \quad \omega_g/\omega_p = -0.31175$$

Consideriamo la propagazione longitudinale ossia avente la stessa direzione del campo magnetico $\theta = 0^0$ e quindi $Y_T = 0$ e $Y_L = Y = \left(-\dfrac{\omega_g}{\omega}\right)$.

Si ha, per l'onda ordinaria:

$$\frac{c^2 k'^2_{(\theta=0^0)}}{\omega^2} = 1 - \frac{X}{(1+iZ)+Y}$$

Si ha, per l'onda straordinaria:

$$\frac{c^2 k''^2_{(\theta=0^0)}}{\omega^2} = 1 - \frac{X}{(1+iZ)-Y}$$

Ponendo $Z = 0$ si ha:

$$\frac{c^2 k'^2_{(\theta=0^0)}}{\omega^2} = 1 - \frac{X}{1+Y} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega-\omega_g)} \tag{1}$$

$$\frac{c^2 k''^2_{(\theta=\pi/2)}}{\omega^2} = 1 - \frac{X}{1-Y} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+\omega_g)} \tag{2}$$

$k'_{(\theta=0^0)}$ compete ad un'onda circolarmente polarizzata destra e $k''_{(\theta=0^0)}$ compete ad un'onda circolarmente polarizzata sinistra. Le frequenze di soglia si ottengono annullando le espressioni (1) e (2).

Per l'onda polarizzata circolarmente destra si ha:

$$\omega_R(\omega_R - \omega_g) = \omega_p^2$$

da cui:

$$\omega_R = \frac{\omega_g}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_g^2}{4} + \omega_p^2} = -0.87815 \cdot 10^{10} \pm \sqrt{\frac{(-1.7563 \cdot 10^{10})^2}{4} + 3.1738 \cdot 10^{21}} =$$
$$= -\,0.87815 \cdot 10^{10} \pm 5.70171 \cdot 10^{10} = \underline{\underline{4.8236 \cdot 10^{10}}}\ rad \Longrightarrow \nu_R = \underline{\underline{7.677 \cdot 10^9\ Hz}}$$

avendo scartata la soluzione negativa. Da cui:

$$\frac{\omega_R}{\omega_p} = 0.85622$$

Per l'onda polarizzata circolarmente sinistra si ha:

$$\omega_L(\omega_L + \omega_g) = \omega_p^2$$

da cui:

$$\omega_L = -\,\frac{\omega_g}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_g^2}{4} + \omega_p^2} = 0.87815 \cdot 10^{10} \pm \sqrt{\frac{(-1.7563 \cdot 10^{10})^2}{4} + 3.1738 \cdot 10^{21}} =$$
$$= 0.87815 \cdot 10^{10} \pm 5.70171 \cdot 10^{10} = \underline{\underline{6.5799 \cdot 10^{10}}}\ rad \Longrightarrow \nu_L = \underline{\underline{10.472 \cdot 10^9\ Hz}}$$

avendo scartata la soluzione negativa. Da cui:

$$\frac{\omega_L}{\omega_p} = 1.168$$

07-8) Esercizio n. 2 del 30/11/2007

Con riferimento al problema precedente si valuti l'angolo unitario di rotazione di Faraday se la frequenza dell'onda é $\nu = 20\ GHz$.

Sappiamo dalla teoria che l'angolo τ di cui il vettore risultante $\vec{E}$ di un'onda elettromagnetica ruota quando essa viaggiando nella direzione longitudinale in un plasma magnetizzato ha percorso una distanza unitaria é:

$$\tau = \frac{k_0' - k_0''}{2}$$

La rotazione é nel senso orario se $k_0' > k_0''$. τ, dopo aver supposto $\omega_{eff} = 0$, si puó scrivere:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left[\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_g)}} - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_g)}}\right]$$

che riproduce la dipendenza della rotazione di Faraday τ con la frequenza. In termini di $X = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$ e $Y = -\frac{\omega_g}{\omega}$ puó essere scritta:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left(\sqrt{1 - \frac{X}{1+Y}} - \sqrt{1 - \frac{X}{1-Y}}\right)$$

Poiché ω_g é negativa per gli elettroni, osserviamo che τ é positiva (rotazione oraria) nel caso di propagazione parallela a $\vec{B}_0$.

Si ha:

$$X = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{5.6336 \cdot 10^{10}}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{10}}\right)^2 = 0.20098$$

$$Y = -\frac{\omega_g}{\omega} = -\frac{1.7563 \cdot 10^{10}}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^10} = 0.13976$$

$$1 - \frac{X}{1+Y} = 1 - \frac{0.20098}{1 + 0.13976} = 1 - 0.17634 = 0.82366$$

$$1 - \frac{X}{1-Y} = 1 - \frac{0.20098}{1 - 0.13976} = 1 - 0.23363 = 0.76637$$

Poiché i rapporti $\frac{X}{1-Y}$ e $\frac{X}{1+Y}$ non sono $<< 1$ dobbiamo utilizzare le formule esatte; quindi:

$$\sqrt{1 - \frac{X}{1+Y}} - \sqrt{1 - \frac{X}{1-Y}} = \sqrt{0.82366} - \sqrt{0.76637} = 0.90756 - 0.87543 = 0.03213$$

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{2\pi \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} \cdot 0.03213 \simeq 209.44 \cdot 0.03213 \simeq \underline{\underline{6.7293\ rad/m = 385.56\ gradi}}$$

Cioé il campo elettrico compie $\underline{\underline{385.56/360 = 1.071}}$ giri per metro.

Fine Esercizi Propagazione libera - 2007