Esercizi svolti di Propagazione libera - Anno 2005

05-1) Esercizio n. 1 del 28/2/2005

Consideriamo un mezzo uniassico conduttore i cui parametri costitutivi sono:

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}, \qquad \bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Dimostrare che il mezzo possa essere descritto da una permeabilitá dielettrica equivalente data da:

$$\bar{\bar{\epsilon}}_{equival.} = \begin{pmatrix} \epsilon + i\dfrac{\sigma}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon + i\dfrac{\sigma}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z + i\dfrac{\sigma_z}{\omega} \end{pmatrix}$$

———————

Scriviamo l'equazione di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Poiché $\vec{J} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{E}$ e $\vec{D} = \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \vec{E}$, nel dominio del tempo, si ha:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{E} - i\omega\bar{\bar{\epsilon}} \cdot \vec{E} = -i\omega \left(\frac{\bar{\bar{\sigma}}}{-i\omega} + \bar{\bar{\epsilon}} \right) \cdot \vec{E} = -i\omega\bar{\bar{\epsilon}}_{equival.} \cdot \vec{E}$$

ossia:

$$\bar{\bar{\epsilon}}_{equival.} = \bar{\bar{\epsilon}} + i\frac{\bar{\bar{\sigma}}}{\omega} = \begin{pmatrix} \epsilon + i\dfrac{\sigma}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon + i\dfrac{\sigma}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z + i\dfrac{\sigma_z}{\omega} \end{pmatrix}$$

05-2) Esercizio n. 2 del 28/2/2005

Con riferimento al problema precedente determinare le espressioni delle costanti di propagazione dell'onda ordinaria e dell'onda straordinaria.

——————

Come risulta dalla teoria, nel caso di matrice diagonale, le equazioni per le ampiezze dei campi sono:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}\right) E_{0_x} = 0$$

$$\left(\cos^2\theta - \frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}\right) E_{0_y} + (-\cos\theta\sin\theta)\, E_{0_z} = 0$$

$$(-\cos\theta\sin\theta)\, E_{0_y} + \left(\sin^2\theta - \frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon'_z}{\epsilon_0}\right) E_{0_z} = 0$$

Dalla seconda e terza equazione possiamo ricavare la relazione di dispersione ossia dobbiamo imporre che il determinate dei coefficienti sia nullo affinché il sistema delle due equazioni ammetta soluzioni diverse da quella banale.

$$\left(\cos^2\theta - \frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}\right)\left(\sin^2\theta - \frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon'_z}{\epsilon_0}\right) - \sin^2\theta\cos^2\theta = 0$$

ossia:

$$-\frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon'_z}{\epsilon_0}\cos^2\theta - \frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}\sin^2\theta + \frac{v^4}{c^4}\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}\frac{\epsilon'_z}{\epsilon_0} = 0$$

$$-\frac{\epsilon'_z}{\epsilon_0}\cos^2\theta - \frac{\epsilon'}{\epsilon_0}\sin^2\theta + \frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}\frac{\epsilon'_z}{\epsilon_0} = 0$$

da cui;

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\dfrac{\epsilon'_z}{\epsilon_0}\cos^2\theta + \dfrac{\epsilon'}{\epsilon_0}\sin^2\theta}{\dfrac{\epsilon'}{\epsilon_0}\dfrac{\epsilon'_z}{\epsilon_0}}$$

che si puó ancora scrivere:

$$\frac{v^2}{c^2} = \epsilon_0\frac{\epsilon'_z\cos^2\theta + \epsilon'\sin^2\theta}{\epsilon'\epsilon'_z}$$

alla quale corrisponde la costante di propagazione straordinaria:

$$k^2_{straord.} = \frac{\omega^2}{v^2} = \frac{\omega^2}{c^2\epsilon_0}\frac{\epsilon'\epsilon'_z}{\epsilon'_z\cos^2\theta + \epsilon'\sin^2\theta}$$

La costante di propagazione ordinaria si ottiene dalla prima equazione:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon\,'}$$

ossia:

$$k_{ord.}^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = \frac{\omega^2}{c^2\epsilon_0}\epsilon\,'$$

essendo:

$$\epsilon\,' = \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega} \quad \text{e} \quad \epsilon_z\,' = \epsilon_z + i\frac{\sigma_z}{\omega}$$

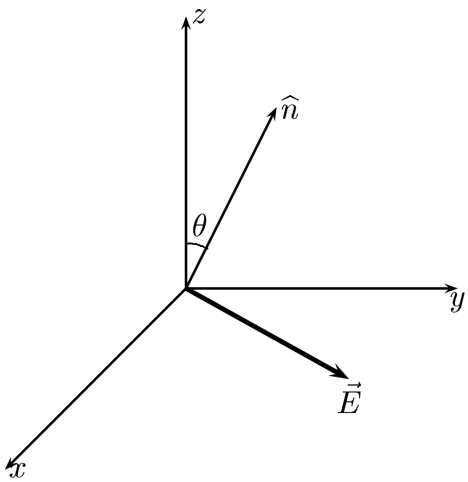
05-3) Esercizio n. 1 del 18/3/2005

Un mezzo dielettrico anisotropo é caratterizzato dal seguente tensore dielettrico:

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinare esplicitamente, ossia mediante applicazione diretta delle equazioni di Maxwell, l'espressione dell'indice di rifrazione relativo all'onda ordinaria e quella relativo all'onda straordinaria in funzione dell'angolo θ che la direzione di propagazione forma con l'asse z di un sistema di riferimento.

Consideriamo il seguente sistema di riferimento:



Come risulta dalla teoria, nel caso di matrice diagonale, le equazioni per le ampiezze dei campi sono:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon_{xx}{}'}{\epsilon_0}\right) E_{0_x} &= 0 \\ \left(\cos^2\theta - \frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon_{yy}{}'}{\epsilon_0}\right) E_{0_y} + (-\cos\theta\sin\theta)\, E_{0_z} &= 0 \\ (-\cos\theta\sin\theta)\, E_{0_y} + \left(\sin^2\theta - \frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon_{zz}{}'}{\epsilon_0}\right) E_{0_z} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Dalla seconda e terza equazione possiamo ricavare la relazione di dispersione ossia dobbiamo imporre che il determinate dei coefficienti sia nullo affinché il sistema delle due equazioni ammetta soluzioni diverse da quella banale.

$$\left(\cos^2\theta - \frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon_{yy}{}'}{\epsilon_0}\right)\left(\sin^2\theta - \frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon_{zz}{}'}{\epsilon_0}\right) - \sin^2\theta\cos^2\theta = 0$$

ossia:

$$-\frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon_{zz}{}'}{\epsilon_0}\cos^2\theta - \frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon_{yy}{}'}{\epsilon_0}\sin^2\theta + \frac{v^4}{c^4}\frac{\epsilon_{yy}{}'}{\epsilon_0}\frac{\epsilon_{zz}{}'}{\epsilon_0} = 0$$

$$-\frac{\epsilon_{zz}{}'}{\epsilon_0}\cos^2\theta - \frac{\epsilon_{yy}{}'}{\epsilon_0}\sin^2\theta + \frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon_{yy}{}'}{\epsilon_0}\frac{\epsilon_{zz}{}'}{\epsilon_0} = 0$$

da cui:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\dfrac{\epsilon_{zz}{}'}{\epsilon_0}\cos^2\theta + \dfrac{\epsilon_{yy}{}'}{\epsilon_0}\sin^2\theta}{\dfrac{\epsilon_{yy}{}'}{\epsilon_0}\dfrac{\epsilon_{zz}{}'}{\epsilon_0}}$$

che si puó ancora scrivere:

$$\frac{v^2}{c^2} = \epsilon_0\frac{\epsilon_{zz}{}'\cos^2\theta + \epsilon_{yy}{}'\sin^2\theta}{\epsilon_{yy}{}'\epsilon_{zz}{}'}$$

ossia:

$$n_e^2 = \frac{\epsilon_{yy}{}'\epsilon_{zz}{}'}{\epsilon_0(\epsilon_{zz}{}'\cos^2\theta + \epsilon_{yy}{}'\sin^2\theta)}$$

a cui corrisponde la costante di propagazione straordinaria, cosí chiamata perché dipende dalla direzione di propagazione:

$$k_e^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = \frac{\omega^2}{c^2\epsilon_0}\frac{\epsilon_{yy}{}'\epsilon_{zz}{}'}{\epsilon_{zz}{}'\cos^2\theta + \epsilon_{yy}{}'\sin^2\theta}$$

Dalla prima equazione si ha:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{xx}{}'}$$

ossia:

$$n_o^2 = \frac{\epsilon_{xx}{}'}{\epsilon_0}$$

a cui corrisponde la costante di propagazione ordinaria:

$$k_o^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = \frac{\omega^2}{c^2\epsilon_0}\epsilon_{xx}{}'$$

dove gli indici e ed o indicano rispettivamente l'onda straordinaria (extraordinary) e l'onda ordinaria (ordinary).

05-4) Esercizio n. 2 del 18/3/2005

Con riferimento al mezzo del problema precedente si consideri un'onda elettromagnetica, polarizzata lungo la direzione formante un angolo di 45^0 con l'asse x di un sistema di riferimento, che si propaga lungo l'asse z. Calcolare la minima distanza percorsa dall'onda affinché essa risulti polarizzata in direzione ortogonale.

Un dispositivo che realizza tale rotazione viene chiamato **lamina a mezz'onda**, utilizzato per ruotare un fascetto di luce laser polarizzato. Se la frequenza é $f = 1 \cdot 10^{14}\ Hz$, calcolare il minimo spessore della lamina.

———————

Poiché la direzione di propagazione é lungo l'asse z, poniamo $\theta = 0$ nelle equazioni per le ampiezze dei campi, nonché $\epsilon'_{xx} = \epsilon'_x$, $\epsilon'_{yy} = \epsilon'_{zz} = \epsilon'$, relazioni costitutive che caratterizzano un cristallo uniassico il cui asse ottico é diretto lungo x come dato dal problema precedente. Si ha, allora:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon_x{}'}{\epsilon_0}\right) E_{0_x} = 0 \tag{1}$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}\right) E_{0_y} = 0 \tag{2}$$

$$\left(- \frac{v^2}{c^2}\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}\right) E_{0_z} = 0 \tag{3}$$

L'equazione (3) ammette la soluzione $E_{0_z} = 0$.

Sostituendo la quantitá $\left(\frac{v^2}{c^2}\right)_o = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_x{}'}$, corrispondente all'onda ordinaria, il sistema di equazioni ammette le soluzioni:

$$E_{0x} \neq 0 \quad e \quad E_{0y=0}$$

Sostituendo la quantitá $\left(\frac{v^2}{c^2}\right)_e = \frac{\epsilon_0}{\epsilon'}$, corrispondente all'onda straordinaria, il sistema di equazioni ammette le soluzioni:

$$E_{0x} = 0 \quad e \quad E_{0y\neq 0}$$

Pertanto le onde che viaggiano nel mezzo anisotropo sono:

$$E_x = E_{0x} e^{ik_o z} \tag{4}$$

$$E_y = E_{0y} e^{ik_e z} \tag{5}$$

L'onda risultante é:

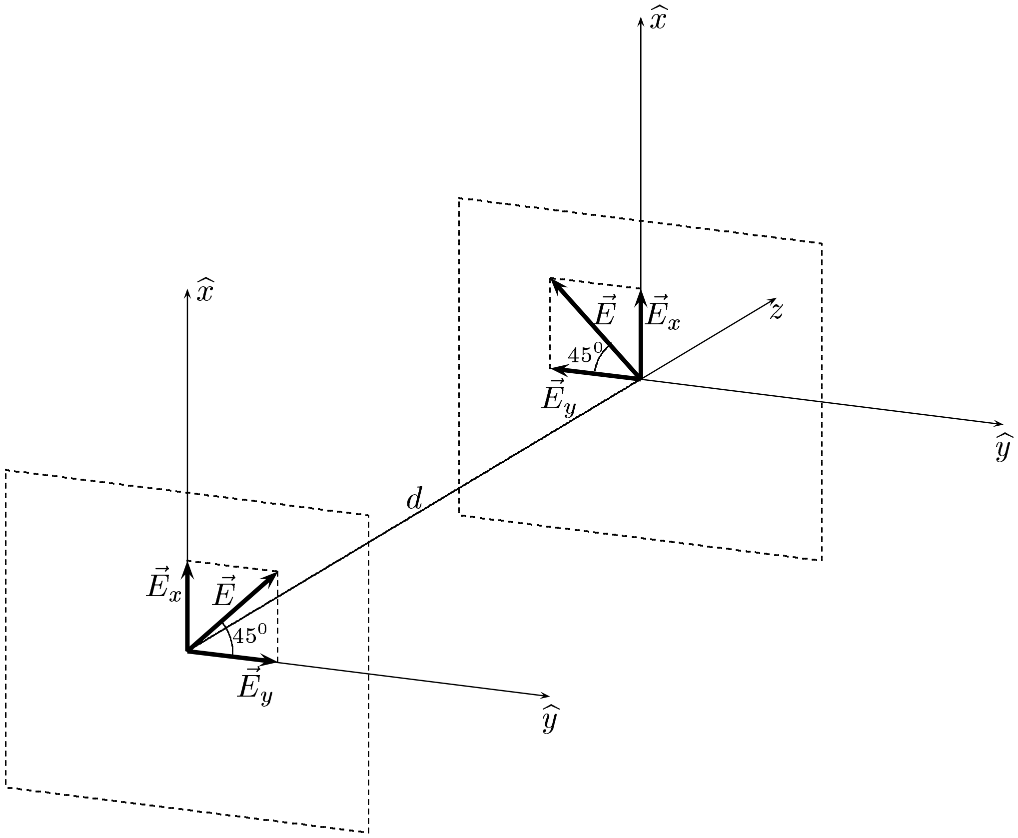
$$\vec{E} = \widehat{x} E_{0x} e^{ik_o z} + \widehat{y} E_{0y} e^{ik_e z} \tag{6}$$

Supponiamo che per $z = 0$, all'ingresso cioé del cristallo, il campo elettrico sia polarizzato lungo una direzione formante un angolo di 45^0 con l'asse x, ossia:

$$\vec{E}(z=0) = E_0(\widehat{x} + \widehat{y}) \tag{7}$$

Ne segue che il campo elettrico che si propaga nel cristallo é:

$$\vec{E} = E_0(\widehat{x}e^{ik_oz} + \widehat{y}e^{ik_ez}) = E_0e^{ik_oz}\left[\widehat{x} + \widehat{y}e^{i(k_e - k_o)z}\right] \tag{8}$$



Sia d lo spessore del cristallo. Dopo aver percorso tale distanza il campo elettrico dell'onda elettromagnetico é:

$$\vec{E}(z=d) = E_0e^{ik_od}\left[\widehat{x} + \widehat{y}e^{i(k_e - k_o)d}\right] \tag{8}$$

Poniamo $\Delta\phi = (k_e - k_o)d$; se

$$\Delta\phi = \pm(2n+1)\pi \tag{9}$$

il campo elettrico all'uscita del cristallo é:

$$\vec{E}(z=d) = E_0e^{ik_od}\left[\widehat{x} + \widehat{y}e^{-i(2n+1)\pi}\right] = E_0e^{ik_od}(\widehat{x} - \widehat{y}) \tag{10}$$

ossia il campo elettrico risulta polarizzato in direzione ortogonale a quella d'ingresso nel cristallo.

La distanza d affinché questo accada, ossia affinché il campo elettrico ruoti il suo piano di polarizzazione di 90^0, é data dalla relazione:

$$(k_e - k_o)d = -(2n+1)\pi$$

Per $n = 0$ si ha lo spessore minimo, ossia:

$$d = -\frac{\pi}{k_e - k_o} = -\frac{\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}} - \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{\epsilon'_x}{\epsilon_0}}} = -\frac{\lambda}{2}\frac{1}{n - n_x}$$

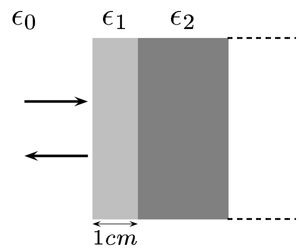
$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^{14}} = 3 \cdot 10^{-6}\ m = 3\ \mu m, \qquad n_x = 3, \qquad n = 2$$

Ne segue:

$$d_{min} = \underline{\underline{1.5\mu m}}$$

05-5) Esercizio n. 1 del 30/6/2005

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 5\ GHz$, viaggiante in aria, incide normalmente su una lamina piana dielettrica di spessore 1 cm e di indice di rifrazione $n_1 = 1.5$. Il mezzo (infinitamente esteso) a destra della lamina ha indice di rifrazione $n_2 = 2.25$. Calcolare il coefficiente di riflessione.



———————

Osserviamo che trattasi di una lamina piana il cui indice di rifrazione é minore di quello del terzo mezzo. Nel nostro caso risulta:

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^9} = 6\ cm \Longrightarrow \frac{\lambda_0}{4} = 1.5\ cm$$

Pertanto:

$$n_1 d = 1.5 \cdot 10^{-2} = \frac{\lambda_0}{4}$$

Ne segue che la riflettivitá é minima.
Si ha, d'altra parte che:

$$\sqrt{n_0 n_2} = \sqrt{2.25} = 1.5 = n_1$$

ossia l'indice di rifrazione della lamina é la media geometrica fra gli indici di rifrazione del primo e del terzo mezzo.

Ne segue dalla teoria che la riflettivitá é nulla.

Solo per illustrare la procedura di calcolo, verifichiamo il risultato applicando la formula della riflettivitá relativa ad un sistema di tre mezzi dielettrici.

Il coefficiente di riflessione dello strato dielettrico é, quindi:

$$R = \frac{|E_1|^2}{|E_0|^2} = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4 r_{12} r_{23} \sin^2 \beta_2 d}{(1 + r_{12} r_{23})^2 - 4 r_{12} r_{23} \sin^2 \beta_2 d}$$

dove:

$$r_{12} = \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} = \frac{1 - 1.5}{1 + 1.5} = -\frac{0.5}{2.5} = -0.2$$

$$r_{23} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1.5 - 2.25}{1.5 + 2.25} = -\frac{0.75}{3.75} = -0.2$$

$$\beta_2 d = \frac{\omega}{c} \cdot n_1 \cdot d = \frac{2 \cdot \pi \cdot \nu}{c} \cdot n_1 \cdot d = \frac{2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} \cdot 1.5 \cdot 10^{-2} = \frac{\pi}{2}$$

Ne segue:

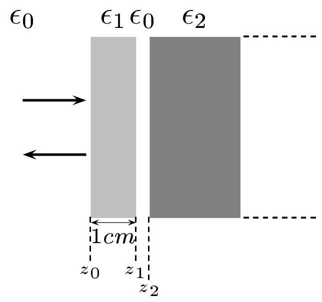
$$\sin^2 \beta_2 d = 1$$

Quindi:

$$R = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}} = \frac{(r_{12} - r_{23})^2}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}} = 0$$

05-6) Esercizio n. 2 del 30/6/2005

Si allontani, ora, la lamina di indice di rifrazione n_1 dalla lamina di indice di rifrazione n_2 lasciando uno spessore d'aria di 3 mm. Si calcoli, in tale situazione, il coefficiente di riflessione.



———————

Dagli Appunti di campi elettromagnetici si ha:

$$R = \frac{|Er|^2}{|E_0|^2} = \frac{|V_{t,0}(2,1)|^2}{|V_{t,0}(2,2)|^2}$$

dove:

$$\overline{\overline{V_{t,0}}} = \overline{\overline{V_{t,n}}} \cdot \overline{\overline{V_{n,n-1}}} \cdot \cdots \cdot \overline{\overline{V_{1,0}}}$$

essendo:

$$\overline{\overline{V_{t,n}}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n_n}{n_t}\right)\begin{pmatrix} 1 & R_{t,n} \\ R_{t,n} & 1 \end{pmatrix}$$

e:

$$R_{t,n} = \frac{\left(1 - \dfrac{n_n}{n_t}\right)}{\left(1 + \dfrac{n_n}{n_t}\right)}$$

Analogamente:

$$\overline{\overline{V_{(m+1),m}}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n_m}{n_{m+1}}\right)\begin{pmatrix} e^{ik_{m+1}(z_{m+1} - z_m)} & R_{(m+1),m}e^{ik_{m+1}(z_{m+1} - z_m)} \\ R_{(m+1),m}e^{-ik_{m+1}(z_{m+1} - z_m)} & e^{-ik_{m+1}(z_{m+1} - z_m)} \end{pmatrix}$$

e:

$$R_{(m+1),m} = \frac{\left(1 - \dfrac{n_m}{n_{m+1}}\right)}{\left(1 + \dfrac{n_m}{n_{m+1}}\right)}$$

Il mezzo trasmesso é il mezzo di costante dielettrica ϵ_2.

Quindi nel caso illustrato in figura, dove il mezzo trasmesso é il mezzo di costante dielettrica ϵ_2, si ha:

$$\overline{\overline{V_{t,0}}} = \overline{\overline{V_{\epsilon_2,\epsilon_0}}} \cdot \overline{\overline{V_{\epsilon_0,\epsilon_1}}} \cdot \overline{\overline{V_{\epsilon_1,\epsilon_0}}}$$

dove:

$$\overline{\overline{V_{\epsilon_2,\epsilon_0}}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n_0}{n_2}\right) \begin{pmatrix} 1 & R_{\epsilon_2,\epsilon_0} \\ & \\ R_{\epsilon_2,\epsilon_0} & 1 \end{pmatrix}$$

e:

$$R_{\epsilon_2,\epsilon_0} = \frac{\left(1 - \dfrac{n_0}{n_2}\right)}{\left(1 + \dfrac{n_0}{n_2}\right)} = 0.38462$$

Analogamente:

$$\overline{\overline{V_{\epsilon_0,\epsilon_1}}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{n_1}{n_0}\right)\begin{pmatrix} e^{ik_0(z_2 - z_1)} & R_{\epsilon_0,\epsilon_1} e^{ik_0(z_2 - z_1)} \\ & \\ R_{\epsilon_0,\epsilon_1} e^{-ik_0(z_2 - z_1)} & e^{-ik_0(z_2 - z_1)} \end{pmatrix}$$

e:

$$R_{\epsilon_0,\epsilon_1} = \frac{\left(1 - \dfrac{n_1}{n_0}\right)}{\left(1 + \dfrac{n_1}{n_0}\right)} = -0.2$$

e cosí:

$$\overline{\overline{V_{\epsilon_1,\epsilon_0}}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{n_0}{n_1}\right)\begin{pmatrix} e^{ik_1(z_1 - z_0)} & R_{\epsilon_1,\epsilon_0} e^{ik_1(z_1 - z_0)} \\ & \\ R_{\epsilon_1,\epsilon_0} e^{-ik_1(z_1 - z_0)} & e^{-ik_1(z_1 - z_0)} \end{pmatrix}$$

e:

$$R_{\epsilon_1,\epsilon_0} = \frac{\left(1 - \dfrac{n_0}{n_1}\right)}{\left(1 + \dfrac{n_0}{n_1}\right)} = 0.2$$

Si ha:

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{n_0}{n_2}\right) = 0.72222, \quad \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n_1}{n_0}\right) = 1.25, \quad \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n_0}{n_1}\right) = 0.83333$$

ossia:

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{n_0}{n_2}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n_1}{n_0}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n_0}{n_1}\right) = 0.75231$$

Posto $d_2 = (z_2 - z_1)$ e $d_1 = (z_1 - z_0)$, la matrice $\overline{\overline{V_{t,0}}}$ si puó scrivere:

$$\overline{\overline{V_{t,0}}} = 0.75231 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0.38462 \\ \\ 0.38462 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{ik_0 d_2} & -0.2 \cdot e^{ik_0 d_2} \\ \\ -0.2 \cdot e^{-ik_0 d_2} & e^{-ik_0 d_2} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} e^{ik_1 d_1} & 0.2 \cdot e^{ik_1 d_1} \\ \\ 0.2 \cdot e^{-ik_1 d_1} & e^{-ik_1 d_1} \end{pmatrix}$$

ossia:

$$\overline{\overline{V_{t,0}}} = 0.75231 \cdot e^{ik_0 d_2} \cdot e^{ik_1 d_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0.38462 \\ \\ 0.38462 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -0.2 \\ \\ -0.2 \cdot e^{-2ik_0 d_2} & e^{-2ik_0 d_2} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ \\ 0.2 \cdot e^{-2ik_1 d_1} & e^{-2ik_1 d_1} \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$k_1 d_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} d_1 = \frac{\omega}{c} \cdot n_1 \cdot d_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} \cdot 1.5 \cdot 10^{-2} = \frac{\pi}{2} \ rad$$

$$k_0 d_2 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} d_2 = \frac{\omega}{c} \cdot d_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} \cdot 0.3 \cdot 10^{-2} = \frac{\pi}{10} \ rad$$

$$e^{-2ik_1 d_1} = e^{-i\pi} = -1$$

$$e^{-2ik_0 d_2} = e^{-2i\pi/10} = 0.8090 - i0.5878$$

$$\overline{\overline{V_{t,0}}} = 0.75231 \cdot e^{ik_0 d_2} \cdot e^{ik_1 d_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0.38462 \\ \\ 0.38462 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & -0.2 \\ \\ -0.2(0.8090 - i0.5878) & (0.8090 - i0.5878) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ \\ -0.2 & -1 \end{pmatrix}$$

ossia:

$$\overline{\overline{V_{t,0}}} = 0.75231 \cdot e^{ik_0 d_2} \cdot e^{ik_1 d_1} \cdot$$
$$\cdot \begin{pmatrix} 1 - 0.38462 \cdot 0.2(0.8090 - i0.5878) & -0.2 + 0.38462(0.8090 - i0.5878) \\ \\ 0.38462 - 0.2(0.8090 - i0.5878) & -0.2 \cdot 0.38462 + (0.8090 - i0.5878) \end{pmatrix} \cdot$$
$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ \\ -0.2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 0.75231 \cdot e^{ik_0 d_2} \cdot e^{ik_1 d_1} \cdot$$
$$\cdot \begin{pmatrix} 0.9378 + i0.04522 & 0.1112 - i0.2261 \\ \\ 0.2228 + i0.1176 & 0.7321 - i0.5878 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ \\ -0.2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 0.75231 \cdot e^{ik_0 d_2} \cdot e^{ik_1 d_1} \cdot$$
$$\cdot \begin{pmatrix} 0.9156 + i0.0904 & 0.0764 + i0.2352 \\ \\ 0.0764 + i0.2352 & -0.6875 + i0.6114 \end{pmatrix}$$

Ne segue che:

$$V_{t,0}(2,1) = 0.75231 \cdot e^{ik_0 d_2} \cdot e^{ik_1 d_1} \cdot (0.0764 + i0.2352)$$

$$V_{t,0}(2,2) = 0.75231 \cdot e^{ik_0 d_2} \cdot e^{ik_1 d_1} \cdot (-0.6875 + i0.6114)$$

Quindi:

$$R = \frac{|Er|^2}{|E_0|^2} = \frac{|V_{t,0}(2,1)|^2}{|V_{t,0}(2,2)|^2} = \frac{|0.0764 + i0.2352|^2}{|-0.6875 + i0.6414|^2} =$$
$$= \frac{6.115 \cdot 10^{-2}}{8.4646 \cdot 10^{-1}} = \underline{\underline{7.2242 \cdot 10^{-2} \simeq 7.22\%}}$$