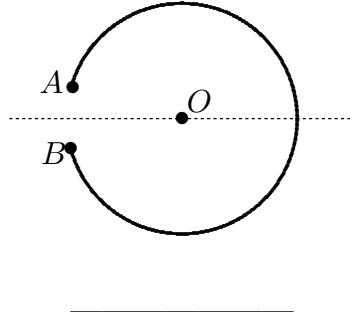


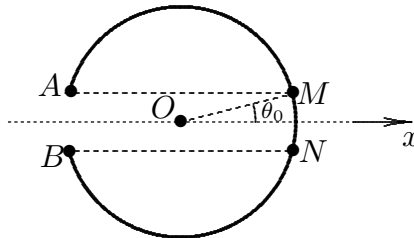
**Esercizi svolti di Fisica generale II - Anno 1998**

**98-1) Esercizio n. 1 del 30/1/1998**

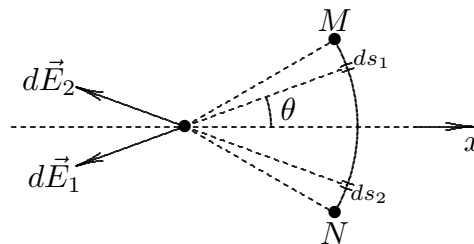
1) Una asticciola di plastica é piegata a forma di circonferenza, come in figura. Il raggio é  $R = 1\text{ m}$ , mentre la distanza fra gli estremi  $A$  e  $B$  é di  $1\text{ cm}$ . Supponendo che l'asticciola porti una carica totale positiva di  $1\text{ }\mu\text{C}$ , uniformemente distribuita, calcolare il campo elettrico nel centro  $O$ .



Consideriamo un sistema di riferimento di origine  $O$  avente l'asse  $x$  coincidente con la retta passante per l'origine ed il punto medio del segmento  $\overline{AB}$ . Da  $A$  tracciamo la parallela all'asse  $x$  che incontra la circonferenza nel punto  $M$ . Analogamente costruiamo il punto  $N$  partendo da  $B$ . Poiché la distribuzione di carica positiva é uniforme, il contributo degli archi  $\widehat{AM}$  e  $\widehat{BN}$  al campo elettrico nel punto  $O$  é nullo. Pertanto l'unico contributo al campo elettrico nel punto  $O$  é dovuto all'arco  $\widehat{MN}$ .



Per evidenti ragioni di simmetria il campo elettrico dovuto all'arco  $\widehat{MN}$  é diretto lungo l'asse  $x$  negativo.



Stacciamo sull'arco  $\widehat{MN}$  due archetti infinitesimi  $d\vec{s}_1$  e  $d\vec{s}_2$ . Poiché  $|dE_1| = |dE_2| = K \frac{\lambda dl}{R^2}$ , il contributo dei due archetti infinitesimi, nel punto  $O$ , in componenti vale:

$$dE_x = 2dE_1 \cos \theta = 2K \frac{\lambda dl}{R^2} \cos \theta = 2K \frac{\lambda}{R} \cos \theta d\theta, \quad dE_y = 0$$

avendo posto:  $dl = R d\theta$ .

Quindi, integrando:

$$E_x = 2K \frac{\lambda}{R} [\sin \theta]_0^{\theta_0} = 2K \frac{\lambda}{R} \sin \theta_0 = 2K \frac{Q \sin \theta_0}{R(2\pi R - 2R\theta_0)}$$

in quanto la densità lineare di carica  $\lambda$  é:

$$\lambda = \frac{Q}{(2\pi R - \widehat{MN})} = \frac{Q}{(2\pi R - 2R\theta_0)}$$

essendo  $\widehat{MN} = 2R\theta_0$ .

D'altra parte si ha:

$$\frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\overline{MN}}{2} = R \sin \theta_0 \quad \text{da cui} \quad \sin \theta_0 = \frac{\overline{AB}}{2R} \implies \theta_0 = \arcsin \left( \frac{\overline{AB}}{2R} \right)$$

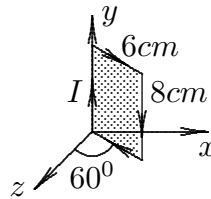
Per  $\overline{AB} = 10^{-2}$ ,  $R = 1 \text{ m}$  risulta:  $\theta_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ .

Si ha, quindi:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \frac{\overline{AB}}{2R}}{R^2(\pi - \theta_0)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \overline{AB}}{2R^3(\pi - \theta_0)} = \\ &= \frac{1}{4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}} \frac{Q 10^{-2}}{2(3.14 - 5 \cdot 10^{-3})} = \underline{\underline{14.29 \text{ V/m}}} \end{aligned}$$

**98-2) Esercizio n. 2 del 30/1/1998**

La spira rettangolare tracciata in figura é imperniata attorno all'asse  $y$  ed in essa circola una corrente di  $10\text{ A}$  nella direzione indicata. Se la spira é in un campo magnetico uniforme diretto lungo il verso positivo dell'asse  $x$  e di modulo  $B = 0.2\text{ Wb/m}^2$ , calcolare il momento meccanico al quale essa é sottoposta. Si calcoli, inoltre, la forza che agisce su ciascun lato della spira verificando che la forza totale é nulla. Le dimensioni dei lati della spira sono rispettivamente di  $8\text{ cm}$  per il lato piú lungo e di  $6\text{ cm}$  per il lato piú corto.



Il vettore momento magnetico della spira ha, per ovvie considerazioni, le seguenti componenti:

$$M_x = M \cos 60^\circ \quad M_z = -M \cos 30^\circ$$

dove  $M = IA = 10 \cdot 48 \cdot 10^{-4}\text{ A} \cdot \text{m}^2 = 48 \cdot 10^{-3}\text{ A} \cdot \text{m}^2$

Per il momento meccanico, si ha:

$$\vec{\tau} = \vec{M} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ M_x & 0 & M_z \\ B_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = M_z B_x \hat{y} = \underline{\underline{-8.31 \cdot 10^{-3} \hat{y}}}$$

**Calcolo delle forze**

a) Lato lungo sull'asse  $y$ :

$$\vec{F} = Il \hat{y} \times B \hat{x} = -IlB \hat{z}$$

avendo posto:

$$\hat{y} \times \hat{x} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{z}$$

Il modulo di essa é:  $F = 10 \cdot 8 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-1} = \underline{\underline{16 \cdot 10^{-2}\text{ Newton}}}$

Ovviamente la forza che agisce sull'altro lato lungo é opposta.

a) Lato corto uscente dall'origine:

$$\vec{F} = -Il (\cos 30^\circ \hat{x} + \cos 60^\circ \hat{z}) \times B \hat{x} = -IlB \cos 60^\circ \hat{z} \times \hat{x}$$

poiché:

$$\hat{z} \times \hat{x} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{y}$$

risulta:

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}IlB\hat{y}$$

il cui modulo é:  $F = 10 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-1} = \underline{6 \cdot 10^{-2} \text{ Newton}}$

Ovviamente la forza che agisce sull'altro lato corto é opposta.

É immediato verificare che:

$$\sum \vec{F} = 0$$

**98-3) Esercizio n. 3 del 30/1/1998**

Nella tabella sono riportati i valori di  $H$  (A/m) e di  $B$  (Wb/m<sup>2</sup>) per un campione di acciaio al silicio. Graficare  $B$  e  $\mu_r$  in funzione di  $H$  nell'intervallo compreso fra  $H = 0$  e  $H = 100$  A/m. Valutare il valore massimo di  $\mu_r$  ed il suo valore corrispondente ad  $H = 0$ . Valutare altresí il valore di  $\mu_r$  quando  $H = 800000$  A/m sapendo che ad esso corrisponde  $B = 2.92$  Wb/m<sup>2</sup>.

H	0	10	20	40	50	60	80	100	150	200	500	1000	10000	100000
B	0	0.050	0.15	0.43	0.54	0.62	0.74	0.83	0.98	1.07	1.27	1.34	1.65	2.02

Per effettuare il grafico  $B - H$  e  $\mu_r - H$  occorre calcolare  $\mu_r$  dalla relazione:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Poiché per  $H = 0$  risulta  $B = 0$ , per determinare il valore di  $\mu_r$  bisogna effettuare il rapporto incrementale:

$$\mu_{(H=0)} = \left( \frac{\Delta B}{\Delta H} \right)_{(H=0)} = \frac{B_{(H=10)} - B_{(H=0)}}{H_{(H=10)} - H_{(H=0)}}$$

ossia:

$$\mu_{(H=0)} = \frac{0.050}{10} = 5 \cdot 10^{-3} \implies \mu_r = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = \underline{\underline{3979}} \quad (\text{per } H=0)$$

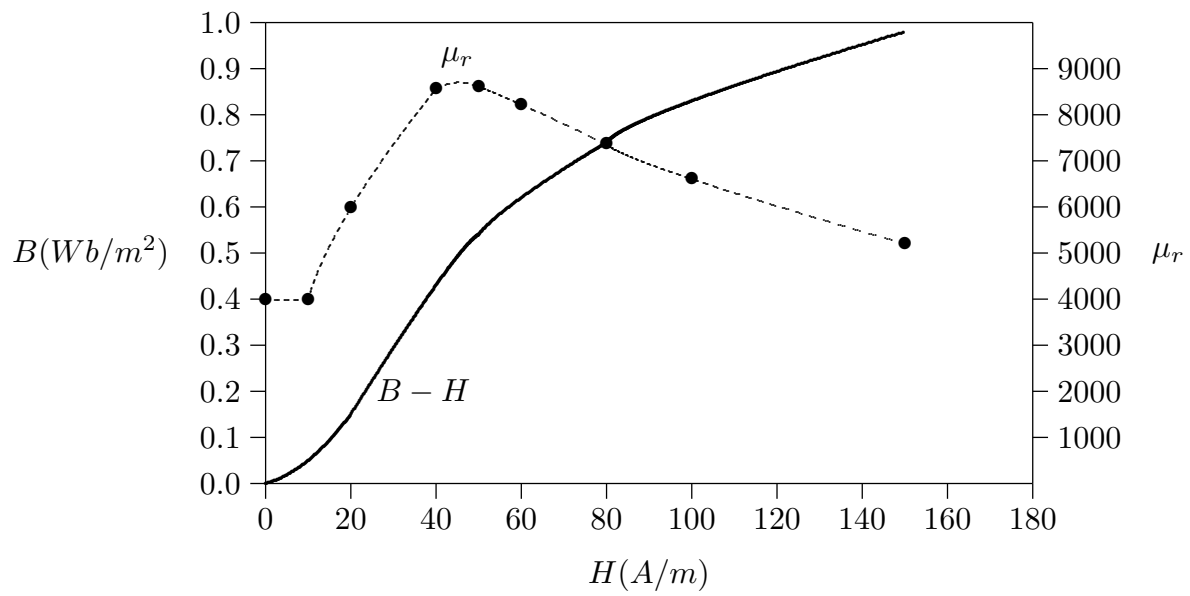
Per  $H = 800000$  si ha:

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_o H} = \frac{2.92}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 800000} = \frac{2.92}{4\pi \cdot 8} 10^2 = \underline{\underline{2.9}}$$

Per effettuare i grafici richiesti costruiamo la seguente tabella applicando la formula

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H}:$$

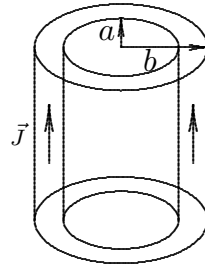
$H$	$B$	$\mu_r$
10	0.050	3979
20	0.15	5968
40	0.43	8554
50	0.54	8595
60	0.62	8223
80	0.74	7361
100	0.83	6605
150	0.98	5199



Il valore massimo di  $\mu_r$  é  $\simeq 8600$  e corrisponde a  $H \simeq 45$ .

**98-4) Esercizio n. 4 del 30/1/1998**

Un lungo tubo rettilineo di rame ha il raggio interno di 1 cm e quello esterno di 2 cm. Il conduttore é percorso da una corrente di 200 A. Calcolare l'induzione magnetica alle seguenti distanze dall'asse del tubo: 0.5 cm; 1.5 cm; 4 cm.



Applichiamo il teorema di Ampere assumendo come percorso una circonferenza  $C$  con il centro sull'asse del tubo e giacente in un piano perpendicolare ad esso. Il raggio di tale circonferenza sia  $r$ .

Si ha:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

1)  $r < a$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

Poiché per simmetria  $\vec{H}$  é tangente punto per punto a  $d\vec{l}$  e dipende solo da  $r$  si ha:

$$H \oint_c dl = 0 \quad \text{ossia} \quad H = B = 0 \quad \text{in particolare per } r = 0.5 \text{ cm}$$

2)  $a < r < b$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = J(\pi r^2 - \pi a^2)$$

Poiché per simmetria  $\vec{H}$  é tangente punto per punto a  $d\vec{l}$  e dipende solo da  $r$  si ha:

$$H2\pi r = J\pi(r^2 - a^2) \implies H = \frac{J(r^2 - a^2)}{2r} \implies B = \mu_0 \frac{J(r^2 - a^2)}{2r} = \frac{\mu_0 I(r^2 - a^2)}{2\pi r(b^2 - a^2)}$$

in quanto per il rame é  $\mu_r \simeq 1$ .

$$\text{Per } r = 1.5 \text{ cm} \implies B = 2.67 \cdot 10^{-3} \frac{1.25 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 10^{-4}} = \underline{\underline{1.1125 \cdot 10^{-3} \text{ Wb/m}^2}} = \underline{\underline{11.125 \text{ G}}}$$

2)  $r > b$

$$H2\pi r = I \implies H = \frac{I}{2\pi r} \implies B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \underline{\underline{1 \cdot 10^{-3} \text{ Wb/m}^2}} = \underline{\underline{10 \text{ G}}} \text{ (per } r = 4 \text{ cm)}$$



**98-5) Esercizio n. 1 del 27/2/1998**

Un campo elettrostatico uniforme nel vuoto e di modulo  $E_0 = 10^4 \text{ V/m}$  diminuisce in modo uniforme fino ad annullarsi dopo  $1 \mu\text{s}$ . Calcolare la corrente di spostamento attraverso una superficie quadrata di  $10 \text{ cm}$  di lato la cui normale coincide con la direzione del campo elettrico.

La corrente di spostamento é:

$$I_{spost.} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \hat{n} da$$

essendo, nel vuoto,  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ .

Per trovare la funzione  $\vec{E}(t)$ , procediamo nella seguente maniera: poiché  $\vec{E}$  diminuisce in modo uniforme significa che  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{costante}$ , quindi  $\vec{E}(t)$  é una funzione lineare in  $t$ .

Possiamo quindi scrivere:  $\vec{E} = \vec{a}t + \vec{b}$  con le condizioni che:

$$\text{Per } t = 0 \implies \vec{E} = \vec{E}_0 \implies \vec{E} = \vec{b} = \vec{E}_0$$

$$\text{Per } t = \tau \implies \vec{E} = 0 \implies \vec{E} = \vec{a}\tau + \vec{E}_0 = 0 \implies \vec{a} = -\frac{\vec{E}_0}{\tau}$$

Quindi il vettore  $\vec{E}$  si scrive:

$$\vec{E} = -\frac{\vec{E}_0}{\tau}t + \vec{E}_0$$

Pertanto:

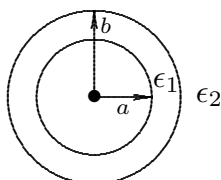
$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\epsilon_0 \frac{\vec{E}_0}{\tau} \quad \text{e poiché} \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \hat{n} = \frac{\partial D}{\partial t}$$

ne segue:

$$I_{sp} = -\epsilon_0 \frac{E_0}{\tau} S = -8.854 \cdot 10^{-12} \frac{10^4}{10^{-6}} (10 \cdot 10^{-2})^2 = \underline{\underline{-8.854 \cdot 10^{-4} \text{ A}}}$$

**98-6) Esercizio n. 2 del 27/2/1998**

Una sfera conduttrice carica ( $Q = 1 \mu C$ ) di raggio  $a = 1 \text{ cm}$  é circondata da una sfera dielettrica di costante dielettrica relativa  $\epsilon_{r1} = 3$  e di raggio  $b = 3 \text{ cm}$ . Il mezzo esterno alle due sfere é un dielettrico di costante dielettrica relativa  $\epsilon_{r2} = 1.5$ . Esprimere il vettore  $\vec{D}$  e il vettore  $\vec{E}$  nei due mezzi dielettrici. Calcolarne i valori per  $r = 2 \text{ cm}$  e  $r = 7 \text{ cm}$ .



Applichiamo il teorema di Gauss in forma integrale:

$$\int_S \vec{D} \cdot \hat{n} da = Q$$

Per calcolare i vettori del campo nel mezzo di costante dielettrica  $\epsilon_1$  consideriamo, come superficie gaussiana  $S$ , una superficie sferica di raggio  $a < r < b$ .

Si ha:

$$\int_{S_{ab}} \epsilon_1 \vec{E}_1 \cdot \hat{n} da = Q$$

essendo  $Q$  la carica distribuita uniformemente sulla superficie sferica conduttrice di raggio  $a$ .

In virtú della simmetria sferica il campo ha la stessa direzione di  $\hat{n}$ . Inoltre esso dipende solo da  $r$  (non dipende da  $\theta$  e  $\phi$ ) e quindi su tutti i punti della superficie  $S_{ab}$  é costante e si puó uscire dall'integrale.

Ne segue:

$$\epsilon_1 E_1 4\pi r^2 = Q \quad (a \leq r \leq b)$$

Quindi:

$$D_1 = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad E_1 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_1 r^2}$$

Per  $r = 2 \text{ cm}$  risulta:

$$D_{1(r=2cm)} = \frac{10^{-6}}{4\pi(2 \cdot 10^{-2})^2} = \underline{\underline{1.9894 \cdot 10^{-4} \text{ C/m}^2}}$$

$$E_{1(r=2cm)} = \frac{10^{-6}}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} (2 \cdot 10^{-2})^2} = \underline{\underline{7.49 \cdot 10^6 \text{ V/m}}}$$

dove:  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$  e  $\epsilon_{r1} = 3$

Analogamente per  $r > b$ , si ha:

$$\epsilon_2 E_2 4\pi r^2 = Q \quad (r \geq b)$$

Quindi:

$$D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad E_2 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_2 r^2}$$

Per  $r = 7 \text{ cm}$  risulta:

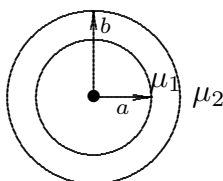
$$D_{2(r=7\text{cm})} = \frac{10^{-6}}{4\pi(7 \cdot 10^{-2})^2} = 1.624 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2$$

$$E_{2(r=7\text{cm})} = \frac{10^{-6}}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2}(7 \cdot 10^{-2})^2} = 1.2228 \cdot 10^6 \text{ V/m}$$

dove:  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$  e  $\epsilon_{r2} = 1.5$

**98-7) Esercizio n. 3 del 27/2/1998**

Un cilindro infinitamente lungo di raggio  $a = 1 \text{ cm}$  trasporta una corrente  $I = 10 \text{ A}$ . Esso é circondato da uno strato cilindrico di materiale magnetico di permeabilitá magnetica relativa  $\mu_{r1} = 1000$  e di raggio  $b = 1.5 \text{ cm}$ . Il mezzo esterno ai due cilindri é un materiale magnetico di permeabilitá magnetica  $\mu_{r2} = 500$ . Esprimere il vettore  $\vec{H}$  e il vettore  $\vec{B}$  nei due mezzi magnetici. Calcolarne i valori per  $r = 1.25 \text{ cm}$  e  $r = 3 \text{ cm}$ .



La figura mostra la sezione trasversale del sistema vista dall'alto. La corrente é uscente.

Applichiamo il teorema di Ampere:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

Per calcolare i vettori del campo nel mezzo di permeabilitá magnetica  $\mu_1$  consideriamo come circuito d'integrazione una circonferenza concentrica ai cilindri, di raggio  $a \leq r \leq b$ . Poiché  $\vec{H}$  é tangente alla circonferenza e dipende solo da  $r$  (non dipende da  $\theta$  e da  $z$ ), su tutti i punti della circonferenza  $\vec{H}$  é costante e si può uscire fuori dall'integrale.

Ne segue:

$$H_1 2\pi r = I \quad (a \leq r \leq b)$$

Quindi:

$$H_1 = \frac{I}{2\pi r} \quad B_1 = \frac{I}{2\pi r} \mu_0 \mu_{r1}$$

Per  $r = 1.25 \text{ cm}$  risulta:

$$H_{1(r=1.25\text{cm})} = \frac{10}{2\pi(1.25 \cdot 10^{-2})} = 127.328 \text{ A/m}$$

$$B_{1(r=1.25\text{cm})} = \frac{10}{2\pi(1.25 \cdot 10^{-2})} 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000 = 0.16 \text{ Wb/m}^2 = 1600 \text{ Gauss}$$

dove  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Henry/m}$  e  $\mu_{r1} = 1000$

Analogamente:

$$H_2 2\pi r = I \quad (r \geq b)$$

Quindi:

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r} \quad B_2 = \frac{I}{2\pi r} \mu_0 \mu_{r2}$$

Per  $r = 3 \text{ cm}$  risulta:

$$H_{2(r=3\text{cm})} = \frac{10}{2\pi(3 \cdot 10^{-2})} = 53.05 \text{ A/m}$$

$$B_{2(r=3\text{cm})} = \frac{10}{2\pi(3 \cdot 10^{-2})} 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 = 0.03 \text{ Wb/m}^2 = 300 \text{ Gauss}$$

dove  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Henry/m}$  e  $\mu_{r2} = 500$

**98-8) Esercizio n. 4 del 27/2/1998**

Si consideri il piano di separazione  $y = 0$  di separazione fra l'aria (regione 1,  $\mu_{r1} = 1$ ) e il ferro (regione 2,  $\mu_{r2} = 5000$ ).

- a) Assumendo  $\vec{B}_1 = 0.5\hat{x} - 10\hat{y}$ , calcolare  $\vec{B}_2$  e l'angolo che  $\vec{B}_2$  forma con l'interfaccia.  
 b) Assumendo  $\vec{B}_2 = 10\hat{x} + 0.5\hat{y}$ , calcolare  $\vec{B}_1$  e l'angolo che  $\vec{B}_1$  forma con l'interfaccia.

Appllichiamo le condizioni al contorno:

$$H_{2t} = H_{1t} \quad B_{2n} = B_{1n}$$

Le componenti dei vettori del campo nel primo mezzo sono:

$$1) H_{1t} = \frac{B_{1x}}{\mu_1} = \frac{0.5}{\mu_0}$$

$$2) B_{1n} = B_{1y} = -10$$

Quindi:

$$H_{2t} = \frac{0.5}{\mu_0} \quad e \quad B_{2n} = -10$$

Il vettore induzione magnetica nel mezzo 2 é pertanto:

$$\vec{B}_2 = \mu_{r2}0.5\hat{x} - 10\hat{y} = 2500\hat{x} - 10\hat{y}$$

dove  $\mu_{r2}=5000$

$$\tan \alpha = \frac{B_{2y}}{B_{2x}} = \frac{10}{2500} = 4 \cdot 10^{-3} \implies \alpha = 0^{\circ}.23$$

Analogamente:

Le componenti dei vettori del campo nel secondo mezzo sono:

$$1) H_{2t} = \frac{B_{2x}}{\mu_2} = \frac{10}{\mu_0\mu_{r2}}$$

$$2) B_{2n} = B_{2y} = 0.5$$

Quindi:

$$H_{1t} = \frac{10}{\mu_0\mu_{r2}} \quad e \quad B_{1n} = 0.5$$

Il vettore induzione magnetica nel mezzo 1 é pertanto:

$$\vec{B}_1 = \frac{10}{\mu_{r2}}\hat{x} + 0.5\hat{y} = 2 \cdot 10^{-3}\hat{x} + 0.5\hat{y}$$

$$\tan \alpha = \frac{B_{1y}}{B_{1x}} = \frac{0.5}{2 \cdot 10^{-3}} = 250 \implies \alpha = 89^{\circ}.77$$

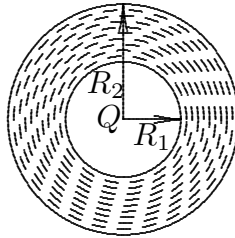
**98-9) Esercizio n. 1 del 23/6/1998**

Una carica positiva puntiforme  $Q$  é al centro di uno strato sferico di materiale dielettrico di raggio interno  $R_1$  e di raggio esterno  $R_2$ . La costante dielettrica del materiale é  $\epsilon_r$ . Determinare le espressioni di  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  e  $\vec{P}$  in funzione della distanza radiale  $R$ .

Applichiamo la legge di Gauss per i mezzi dielettrici scegliendo come superficie di integrazione una superficie sferica di raggio generico  $R$ :

$$\oint \vec{D} \cdot \hat{n} da = Q$$

essendo  $Q$  la carica totale interna alla superficie di raggio generico  $R$ .



In virtú della simmetria sferica, il vettore  $\vec{D}$  é radiale e la legge di Gauss si scrive:

$$\oint D da = Q$$

Poiché  $D$  é funzione solo di  $R$ , si puó uscire dall'integrale e, quindi:

$$D4\pi R^2 = Q$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}
 R < R_1 : \vec{D} &= \frac{Q}{4\pi R^2} \hat{e}_r, \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{e}_r, \quad \vec{P} = 0 \\
 R_1 < R < R_2 : \vec{D} &= \frac{Q}{4\pi R^2} \hat{e}_r, \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r R^2} \hat{e}_r, \quad \vec{P} = \chi \vec{E} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r R^2} \hat{e}_r = \frac{Q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r R^2} \hat{e}_r \\
 R > R_2 : \vec{D} &= \frac{Q}{4\pi R^2} \hat{e}_r, \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{e}_r, \quad \vec{P} = 0
 \end{aligned}$$

**98-10) Esercizio n. 2 del 23/6/1998**

Con riferimento al problema 1), determinare la funzione potenziale  $\Phi$  in funzione di  $R$ . Se  $\epsilon_r = 3$ ,  $R_1 = 1 \text{ cm}$  e  $R_2 = 2 \text{ cm}$ , graficare l'andamento di  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  e  $\Phi$  in funzione di  $R$ .

Consideriamo la relazione:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -(\Phi_B - \Phi_A)$$

Poiché nel sistema considerato la distribuzione delle cariche libere e di polarizzazione é finita, la funzione potenziale nel punto generico  $B$  si ottiene imponendo che per  $A$  posto all'infinito risulti  $\Phi_A = 0$ .

Quindi:

$$\Phi(P) = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

a)  $R > R_2$

$$\Phi(R) = - \int_{\infty}^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

b)  $R_1 < R < R_2$

$$\begin{aligned} \Phi(R) &= - \int_{\infty}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dr - \int_{R_2}^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r R^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\epsilon_r R} - \frac{1}{\epsilon_r R_2} \right] = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R_2} - \frac{1}{\epsilon_r R_2} + \frac{1}{\epsilon_r R} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\epsilon_r R} \right] \end{aligned}$$

c)  $R < R_1$

$$\begin{aligned} \Phi(R) &= - \int_{\infty}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dr - \int_{R_2}^{R_1} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r R^2} dr - \int_{R_1}^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dr = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\epsilon_r R_1} \right] + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right] = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R} + \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{1}{R_2} - \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{1}{R_1} \right] = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R} + \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right] \end{aligned}$$



Per verificare la continuità, calcoliamo la funzione  $\Phi$  per  $R = R_1$  e  $R = R_2$ .

$$\begin{cases} \Phi_{(R > R_2)}(R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2} \\ \Phi_{(R_1 < R < R_2)}(R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2} \\ \Phi_{(R_1 < R < R_2)}(R_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\epsilon_r R_1} \right] \\ \Phi_{(R < R_1)}(R_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\epsilon_r R_1} \right] \end{cases}$$

La continuità é quindi verificata.

Effettuiamo i grafici di  $D$ ,  $E$  e  $\Phi$  in funzione di  $R$  con i parametri:

$$R_1 = 1 \text{ cm}, \quad R_2 = 2 \text{ cm}, \quad \epsilon_r = 3$$

Per  $D$  si riporta la funzione di  $R$  a meno di  $\frac{Q}{4\pi}$ .

Per  $E$  e  $\Phi$  si riportano le rispettive funzioni di  $R$  a meno di  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$ .

Non é necessario esprimere  $R_1$  e  $R_2$  in metri in quanto siamo interessati all'andamento delle funzioni e non ai valori di esse.

Grafico di  $E(R)$

$R < R_1$		$R_1 < R < R_2$		$R > R_2$	
$R$	$E(R)$	$R$	$E(R)$	$R$	$E(R)$
0.1	100	1	0.33	2	0.25
0.2	25	1.1	0.275	2.5	0.16
0.3	11.1	1.2	0.23	3	0.11
0.4	6.25	1.3	0.197	3.5	0.0816
0.5	4	1.4	0.17	4	0.0625
0.6	2.77	1.5	0.148	4.5	0.049
0.7	2.04	1.6	0.13	5	0.04
0.8	1.56	1.7	0.115		
0.9	1.234	1.8	0.103		
1.0	1	1.9	0.092		
		2	0.083		

Si osservi la discontinuitá del campo elettrico per  $R = R_1$  e  $R = R_2$ .

Il grafico di  $D(R)$  é identico a quello di  $E(R)$  tranne nella regione  $R_1 < R < R_2$ .

$R < R < R_2$											
$R$	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$D(R)$	1	0.8264	0.694	0.592	0.51	0.44	0.39	0.346	0.3	0.277	0.25

Si osservi la continuità di  $D$  per  $R = R_1$  e  $R = R_2$ .

Grafico di  $\Phi(R)$

$R < R_1$		$R_1 < R < R_2$		$R > R_2$	
$R$	$\Phi(R)$	$R$	$\Phi(R)$	$R$	$\Phi(R)$
0.1	9.67	1	0.67	2	0.5
0.2	4.67	1.1	0.64	2.5	0.4
0.3	3	1.2	0.61	3	0.33
0.4	2.17	1.3	0.59	3.5	0.286
0.5	1.67	1.4	0.57	4	0.25
0.6	1.34	1.5	0.55	4.5	0.22
0.7	1.095	1.6	0.542	5	0.2
0.8	0.917	1.7	0.53		
0.9	0.78	1.8	0.52		
1.0	0.67	1.9	0.51		
		2	0.5		

Si ossevi la continuità di  $\Phi(R)$  per  $R = R_1$  e  $R = R_2$ .

Illustriamo, ora, un procedimento alternativo per il calcolo della funzione potenziale  $\Phi(R)$ .

In generale, per un sistema a simmetria sferica, si può scrivere:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + C && \text{per } R < R_1 \\ \Phi_2 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R} + C_1 && \text{per } R_1 < R < R_2 \\ \Phi_3 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} && \text{per } R > R_2 \end{aligned}$$

Nell'espressione della funzione  $\Phi_3$  é stata posta eguale a zero la costante in quanto  $\Phi_3$  si deve annullare per  $R \rightarrow \infty$ .

Per la valutazione completa delle funzioni, bisogna calcolare le costanti  $C_1$  e  $C$  affinché sia salva la continuità.

Deve, cioè, essere:

$$\begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_1} + C_1 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_2} + C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \end{cases}$$

da cui:

$$C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right)$$

e:

$$C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\epsilon_r R_1} + \frac{1}{R_2} \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) - \frac{1}{R_1} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{R_1} \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) + \frac{1}{R_2} \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \right] =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right]$$

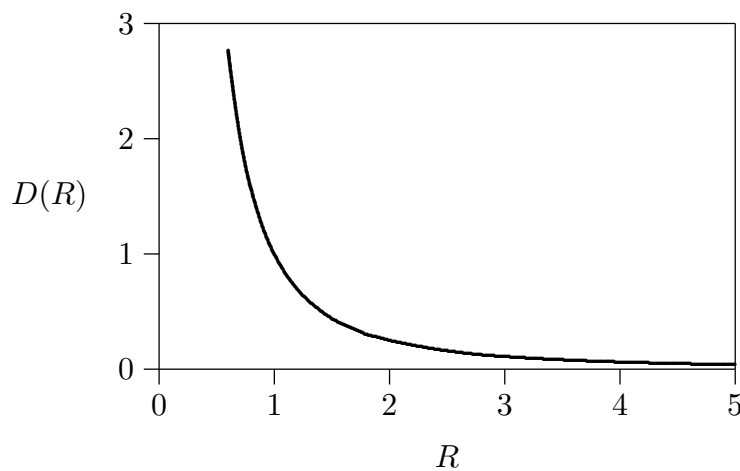
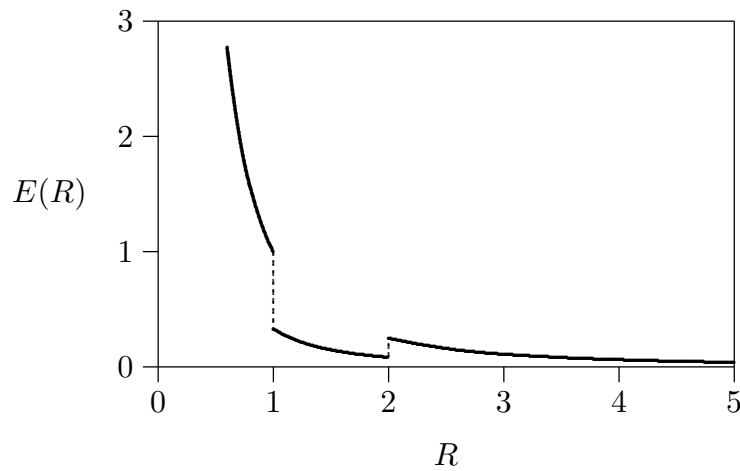
Ne segue:

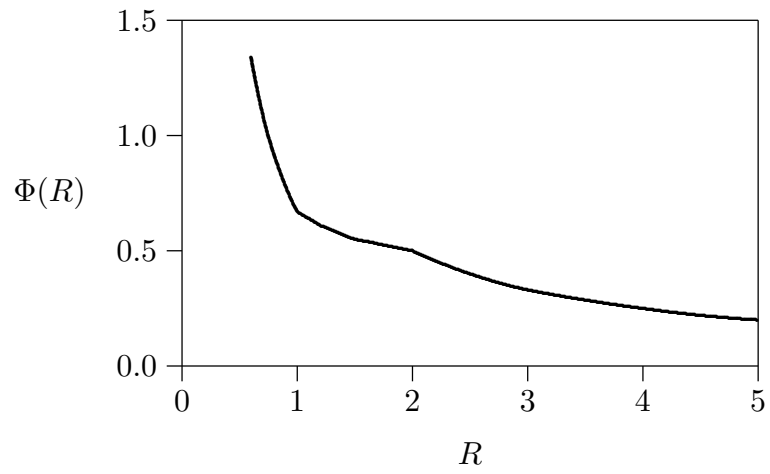
$$\Phi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R} + \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right] \quad \text{per } R < R_1$$

$$\Phi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\epsilon_r R} + \frac{1}{R_2} \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \right] \quad \text{per } R_1 < R < R_2$$

$$\Phi_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad \text{per } R > R_2$$

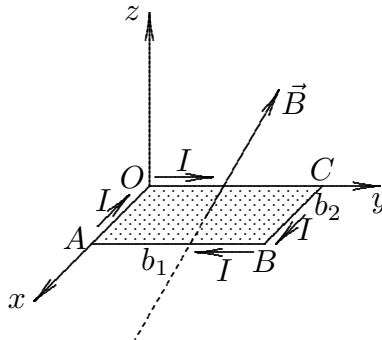
che sono identiche alle formule calcolate con il primo metodo.





**98-11) Esercizio n. 3 del 23/6/1998**

3) Una spira rettangolare di lati  $b_1$  e  $b_2$  giacente nel piano  $xy$  di un sistema di riferimento e percorsa da una corrente  $I$  è immersa in un campo di induzione magnetica uniforme  $\vec{B} = \hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z$ . Determinare l'espressione della forza che agisce su ciascun lato della spira, verificando che la forza totale alla quale è sottoposta la spira è nulla. Calcolare il momento meccanico che agisce sulla spira.



Scegliamo come verso della corrente quello di figura. Applichiamo la seconda legge di Laplace su ciascun lato della spira:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

essendo  $d\vec{l}$  orientato secondo il verso della corrente.

1) Lato  $\overline{OC}$ :

$$d\vec{F} = I \hat{y} dy \times (\hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z)$$

Poiché:

$$\hat{y} \times \hat{x} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{z}, \quad \hat{y} \times \hat{y} = 0, \quad \hat{y} \times \hat{z} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{x}$$

si ha:

$$d\vec{F}_{OC} = -I \hat{z} B_x dy + I \hat{x} B_z dy \quad \text{ossia} \quad \vec{F}_{OC} = -I b_1 (\hat{z} B_x - \hat{x} B_z)$$

2) Lato  $\overline{AB}$ :

$$d\vec{F}_{AB} = -I \hat{y} dy \times (\hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z) \quad \text{ossia} \quad \vec{F}_{AB} = I b_1 (\hat{z} B_x - \hat{x} B_z)$$

3) Lato  $\overline{AO}$ :

$$d\vec{F}_{AO} = -I \hat{x} dx \times (\hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z) \quad \text{ossia} \quad d\vec{F}_{AO} = -I \hat{z} dx B_y + I \hat{y} dx B_z$$

in quanto

$$\hat{x} \times \hat{z} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\hat{y}$$

Pertanto:

$$\vec{F}_{AO} = -Ib_2(\hat{z}B_y - \hat{y}B_z)$$

4) Lato  $\overline{BC}$ :

$$d\vec{F}_{BC} = I\hat{x}dx \times (\hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z) \quad \text{ossia} \quad \vec{F}_{BC} = Ib_2(\hat{z}B_y - \hat{y}B_z)$$

Quindi:

$$\vec{F}_{OC} + \vec{F}_{AB} = 0 \quad e \quad \vec{F}_{AO} + \vec{F}_{BC} = 0$$

La forza totale agente sulla spira é nulla come abbiamo dimostrato in teoria in quanto la spira é immersa in un campo di induzione magnetica uniforme.

Il momento meccanico agente sulla spira immersa nel campo **uniforme** é:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Poiché il verso della corrente da noi scelto é quello orario, si ha:

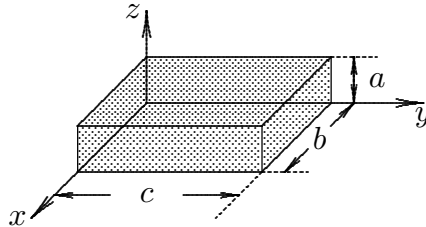
$$\vec{m} = -I\hat{z}b_1b_2$$

Quindi:

$$\vec{\tau} = -Ib_1b_2\hat{z} \times (B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}) = -Ib_1b_2\hat{y}B_x + Ib_1b_2\hat{x}B_y = Ib_1b_2(-B_x\hat{y} + B_y\hat{x})$$

**98-12) Esercizio n. 4 del 23/6/1998**

Una lastra a sezione rettangolare di materiale ferromagnetico come mostrato in figura é magnetizzata con il vettore  $\vec{M} = \hat{z}1.245 \cdot 10^6 \text{ A/m}$ . Calcolare: a) la densità di corrente superficiale di magnetizzazione su ciascuna faccia della lastra e disegnarne il verso di circolazione; b) la densità di corrente di magnetizzazione nel volume della lastra.



La densità di corrente superficiale di magnetizzazione é:

$$\vec{j}_M = \vec{M} \times \hat{n}$$

Faccia nel piano  $z = a$ :  $\hat{n} = \hat{z} \implies \vec{j}_M = 0$

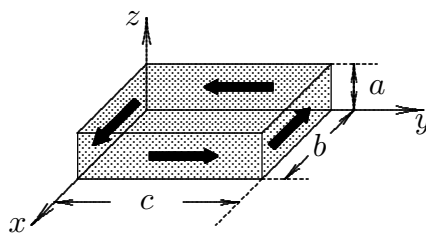
Faccia nel piano  $z = 0$ :  $\hat{n} = -\hat{z} \implies \vec{j}_M = 0$

Faccia nel piano  $y = 0$ :  $\hat{n} = -\hat{y} \implies \vec{j}_M = -M\hat{z} \times \hat{y} = M\hat{x} = 1.245 \cdot 10^6 \hat{x} \text{ A/m}$

Faccia nel piano  $y = c$ :  $\hat{n} = \hat{y} \implies \vec{j}_M = M\hat{z} \times \hat{y} = -M\hat{x} = -1.245 \cdot 10^6 \hat{x} \text{ A/m}$

Faccia nel piano  $x = 0$ :  $\hat{n} = -\hat{x} \implies \vec{j}_M = -M\hat{z} \times \hat{x} = -M\hat{y} = -1.245 \cdot 10^6 \hat{y} \text{ A/m}$

Faccia nel piano  $x = b$ :  $\hat{n} = \hat{x} \implies \vec{j}_M = M\hat{z} \times \hat{x} = M\hat{y} = 1.245 \cdot 10^6 \hat{y} \text{ A/m}$



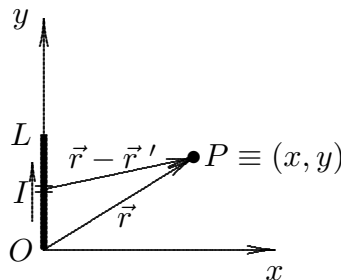
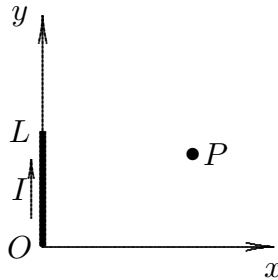
La densità di corrente volumica é nulla essendo il vettore magnetizzazione  $\vec{M}$  costante in tutto il volume; quindi:

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla}' \times \vec{M} = 0$$

**98-13) Esercizio n. 1 del 21/7/1998**

Si abbia un segmento di filo di lunghezza  $L$  percorso da corrente. Si determini l'espressione dell'induzione magnetica  $\vec{B}$  in un generico punto  $P \equiv (x, y)$ . Si effettui il calcolo nel caso particolare in cui  $x = \frac{L}{4}$  e  $y = \frac{L}{2}$ . Si tenga presente che:  $\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{3/2}} =$

$$\frac{4ax + 2b}{(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)^{1/2}} + C$$



Applichiamo la prima legge di Laplace:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Nel caso in esame, poiché il punto  $P$  si trova nel piano  $xy$ , risulta:  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$ .

Analogamente, poiché la distribuzione di corrente è situata sull'asse  $y' \equiv y$ , risulta:  $\vec{r}' = y'\hat{y}$ .

La prima legge di Laplace si scrive, allora:

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I dy' \hat{y} \times \frac{x\hat{x} + y\hat{y} - y'\hat{y}}{|x\hat{x} + y\hat{y} - y'\hat{y}|^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I dy' \hat{z} \frac{x}{(x^2 + y^2 + y'^2 - 2yy')^{3/2}} = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I dy' \hat{z} \frac{x}{(y'^2 - 2yy' + x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$



Pertanto:

$$B_z = -\frac{\mu_0}{4\pi} I x \int_0^L \frac{dy'}{(y'^2 - 2yy' + x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Tenendo conto che:

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{3/2}} = \frac{4ax + 2b}{(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)^{1/2}} + C$$

si ha:

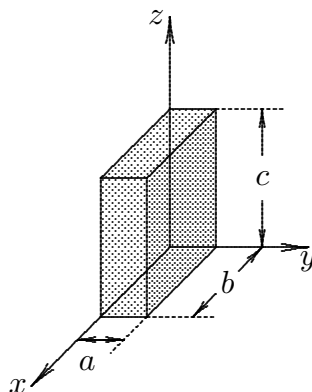
$$\begin{aligned} B_z &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I x \left[ \frac{(4y' - 4y)}{(4x^2 + 4y^2 - 4yy')(y'^2 - 2yy' + x^2 + y^2)^{1/2}} \right]_0^L = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I x \left[ \frac{4L - 4y}{4x^2(L^2 - 2yL + x^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{-4y}{4x^2(x^2 + y^2)^{1/2}} \right] = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I \left[ \frac{L - y}{x(L^2 - 2yL + x^2 + y^2)^{1/2}} + \frac{y}{x(x^2 + y^2)^{1/2}} \right] \end{aligned}$$

Per  $x = \frac{L}{4}$ ,  $y = \frac{L}{2}$ , si ha:

$$\begin{aligned} B_z &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I \left[ \frac{L - \frac{L}{2}}{\frac{L}{4} \left( L^2 - L^2 + \frac{L^2}{16} + \frac{L^2}{4} \right)^{1/2}} + \frac{\frac{L}{2}}{\frac{L}{4} \left( \frac{L^2}{16} + \frac{L^2}{4} \right)^{1/2}} \right] = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I \left[ \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \left( \frac{5}{16} \right)^{1/2} L} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \left( \frac{5}{16} \right)^{1/2} L} \right] = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{L} \frac{16}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

**98-14) Esercizio n. 2 del 21/7/1998**

Una lastra dielettrica mostrata in figura é polarizzata con il vettore  $\vec{P} = \hat{y}2.762 \cdot 10^{-11} \text{ C/m}^2$ . Calcolare: a) la densità superficiale di carica di polarizzazione su ciascuna delle sei facce; b) la densità volumica di carica di polarizzazione dentro la lastra.



Si ha:

$$\sigma = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Faccia sul piano } z = 0: \quad \hat{n} = -\hat{z} \quad \implies \quad \sigma_P = 0 \\ \text{Faccia sul piano } z = c: \quad \hat{n} = \hat{z} \quad \implies \quad \sigma_P = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Faccia sul piano } y = 0: \quad \hat{n} = -\hat{y} \quad \implies \quad \sigma_P = -2.762 \cdot 10^{-11} \text{ C/m}^2 \\ \text{Faccia sul piano } y = a: \quad \hat{n} = \hat{y} \quad \implies \quad \sigma_P = 2.762 \cdot 10^{-11} \text{ C/m}^2 \end{array} \right.$$

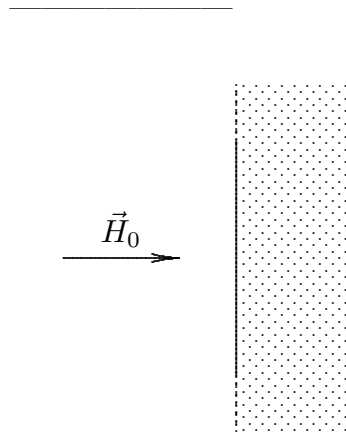
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Faccia sul piano } x = 0: \quad \hat{n} = -\hat{x} \quad \implies \quad \sigma_P = 0 \\ \text{Faccia sul piano } x = b: \quad \hat{n} = \hat{x} \quad \implies \quad \sigma_P = 0 \end{array} \right.$$

La densità di carica volumica di polarizzazione é nulla in quanto  $\vec{P}$  é costante in tutto il volume, quindi:

$$\rho_P = \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$$

**98-15) Esercizio n. 3 del 21/7/1998**

Una lastra molto estesa di spessore  $d$  é posta in un campo magnetico esterno  $\vec{H}_0 = \hat{z}H_0$  diretto secondo la normale alla superficie. Trascurando l'effetto ai bordi determinare il campo magnetico all'interno della lastra nei seguenti due casi: a) il materiale della lastra ha una permeabilità magnetica relativa  $\mu_r$ ; b) la lastra é un magnete permanente di magnetizzazione  $\vec{M} = \hat{z}M$ .



Per le condizioni al contorno deve essere:

$$B_{2n} = B_{1n}$$

sull'interfaccia sinistra della lastra. Ne segue, nell'ipotesi  $\mu_{r_{esterno}} = 1$ :

Caso a):

$$\vec{H}_0 = \mu_r \vec{H}_{interno}$$

da cui:

$$\vec{H}_{interno} = \frac{\vec{H}_0}{\mu_r}$$

Caso b):

$$\vec{H}_{interno} = \frac{1}{\mu_0} \mu_0 \vec{H}_0 - \vec{M} = \vec{H}_0 - \vec{M}$$

essendo:  $\vec{B}_{int} = \mu_0 \vec{H}_0$

**98-16) Esercizio n. 4 del 21/7/1998**

Una differenza di potenziale  $V = 6 \text{ V}$  applicata ai capi di un filo conduttore lungo  $1 \text{ Km}$  e di raggio  $a = 5 \text{ mm}$  produce una corrente di  $0.17 \text{ A}$ . Calcolare: a) la conducibilità del materiale di cui é costituito il filo; b) il valore del campo elettrico nel filo; c) la potenza dissipata nel filo; d) la velocità di drift degli elettroni assumendo che la densità volumica delle cariche mobili sia  $\eta = 3 \cdot 10^8 \text{ C/m}^3$ .

La resistenza del filo é:

$$R = \frac{V}{I} = \rho \frac{l}{S} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S}$$

Quindi:

$$\sigma = \frac{I l}{V S} = \frac{0.17}{6} \frac{10^3}{\pi(5 \cdot 10^{-3})^2} = \underline{\underline{3.6 \cdot 10^5 \text{ S/m}}}$$

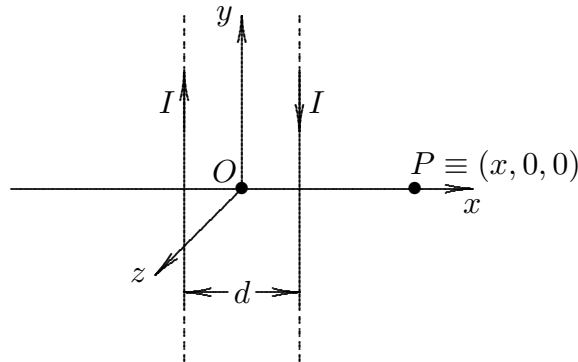
$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{\sigma S} = \frac{I V S}{S I l} = \frac{V}{l} = \frac{6}{10^3} = \underline{\underline{6 \cdot 10^{-3} \text{ V/m}}}$$

$$P = I^2 R = IV = 0.17 \cdot 6 \simeq \underline{\underline{1 \text{ W}}}$$

$$v = \frac{J}{\eta} = \frac{I}{\eta S} = \frac{0.17}{3 \cdot 10^8 \cdot \pi \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2} = \underline{\underline{7.21 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}}}$$

**98-17) Esercizio n. 1 del 5/10/1998**

1) Due fili paralleli infinitamente lunghi sono percorsi da correnti in verso opposto ma della stessa intensità. Essi sono disposti come in figura e  $d = 1 \text{ cm}$  sia la loro distanza. Esprimere il vettore induzione magnetica  $\vec{B}$  in un generico punto  $P \equiv (x, 0, 0)$  e graficarne l'andamento in funzione della distanza  $x$  per  $-5 \text{ cm} \leq x \leq 5 \text{ cm}$ .



Il contributo del filo che intercetta l'asse  $x$  nel punto  $x = -\frac{d}{2}$  al campo di induzione magnetica nel punto  $P$  é:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{x + \frac{d}{2}} \cdot (-\hat{z})$$

Il contributo del filo che intercetta l'asse  $x$  nel punto  $x = +\frac{d}{2}$  al campo di induzione magnetica nel punto  $P$  é:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{x - \frac{d}{2}} \cdot \hat{z}$$

Il campo di induzione magnetica nel punto  $P$  é, allora:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{x - \frac{d}{2}} - \frac{1}{x + \frac{d}{2}} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d \frac{1}{x^2 - \frac{d^2}{4}}$$

Il campo é simmetrico rispetto all'asse  $y$  e, come ci si deve aspettare, per  $d = 0$  risulta identicamente nullo in tutto lo spazio.

Per  $|x| < \frac{d}{2}$  il campo di induzione magnetica é orientato verso l'asse  $z$  negativo.

Per  $|x| > \frac{d}{2}$  il campo di induzione magnetica é orientato verso l'asse  $z$  positivo.

Per graficare l'andamento in funzione di  $x$  di  $B_z$  é conveniente esprimere  $x$  e  $d$  direttamente in  $cm$ , per questo la formula diventa:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d \frac{10^2}{x^2 - \frac{d^2}{4}}$$

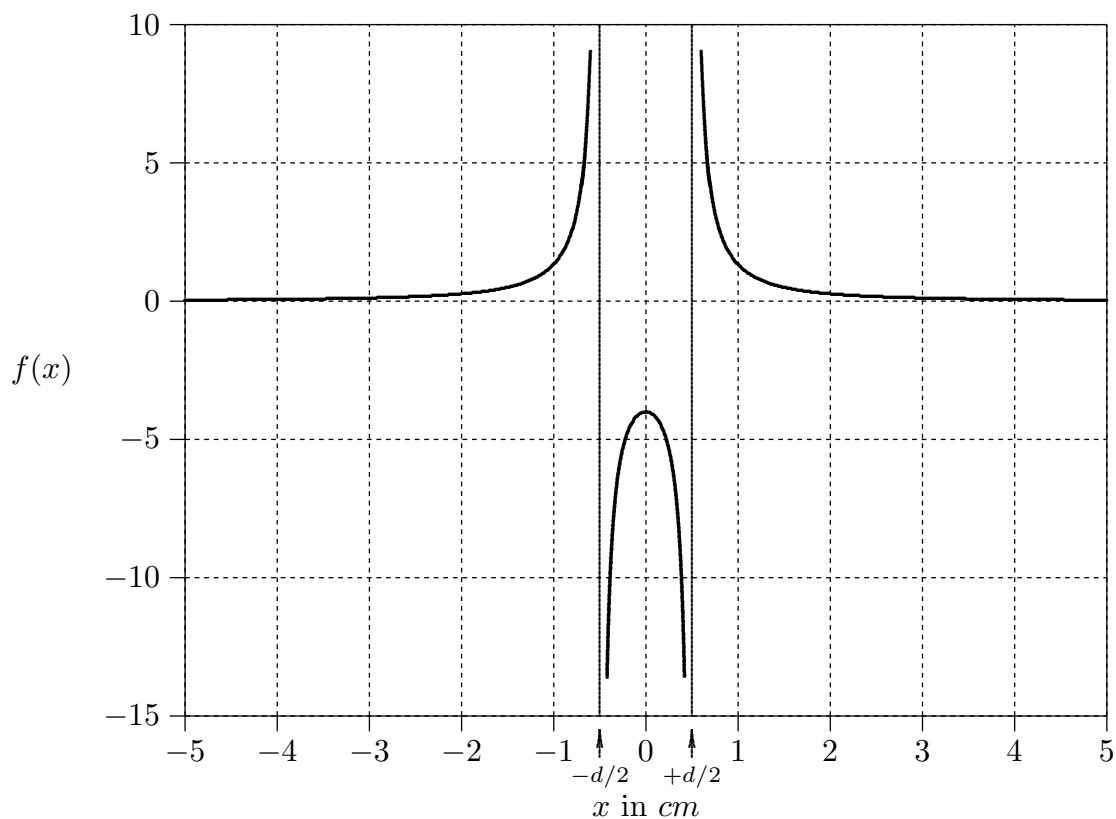
dove, ripetiamo,  $x$  e  $d$  sono espresse in  $cm$  e le altre grandezze in unità S.I.

Ovviamente valutiamo la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - \frac{d^2}{4}}$$

$x (cm)$	-5	-4	-3	-2	-1	-0.9	-0.866	-0.8
$f(x)$	0.04041	0.0635	0.11	0.26	1.33	1.78	2	2.56
$x (cm)$	-0.707	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1
$f(x)$	4	4.16	9.09	$\pm\infty$	-11.1	-6.25	-4.76	-4.16
$x (cm)$	0							
$f(x)$	-4							

Data la simmetria, per  $0 \leq x \leq 5$  la funzione assume gli stessi valori.

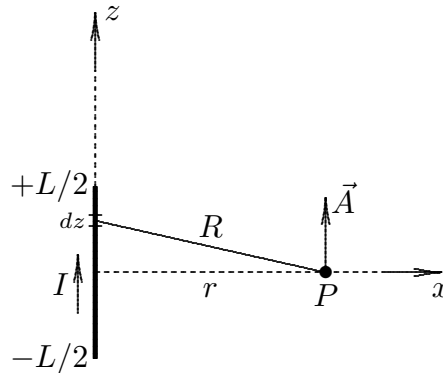


**98-18) Esercizio n. 2 del 5/10/1998**

Calcolare il potenziale vettore  $\vec{A}$  di un filo di lunghezza  $L$  percorso da corrente in un generico punto  $P$  situato sull'asse del filo ad una distanza  $r$ . Si valuti, altresì, l'espressione approssimata di  $\vec{A}$  per  $L \gg r$  dimostrando, quindi, che il potenziale vettore di un filo infinitamente lungo tende all'infinito. Sfruttando tale espressione approssimata, calcolare il potenziale vettore del sistema di fili paralleli descritti nel problema 1 e dedurne da esso il campo  $\vec{B}$ .

Si tenga presente che:  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + \text{cost.}$

vedi Compito di Fisica 2 del 15/6/1991 n.2 e Compito di Fisica 2 del 26/2/1994 n. 4.



$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} dv}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{z} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{I dz}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \hat{z} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \hat{z} \ln \frac{\frac{L}{2} + \sqrt{r^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}}{-\frac{L}{2} + \sqrt{r^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \hat{z} \ln \frac{\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \sqrt{1 + \frac{4r^2}{L^2}}}{-\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \sqrt{1 + \frac{4r^2}{L^2}}} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \hat{z} \ln \frac{\frac{L}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4r^2}{L^2}}\right)}{\frac{L}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4r^2}{L^2}}\right)} \end{aligned}$$

Per  $L \gg r$  possiamo sviluppare in serie di Taylor la quantità  $\sqrt{1 + \frac{4r^2}{L^2}}$  e scrivere:

$$\sqrt{1 + \frac{4r^2}{L^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{4r^2}{L^2} \right) = 1 + 2 \frac{r^2}{L^2}$$

Quindi:

$$\vec{A}(\vec{r})_{(L \gg r)} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} I \hat{z} \ln \frac{\left[ 2 \left( 1 + \frac{r^2}{L^2} \right) \right]}{\left( 2 \frac{r^2}{L^2} \right)}$$

Sempre per  $L \gg r$  possiamo ancora porre  $1 + \frac{r^2}{L^2} \simeq 1$ .

Ne segue:

$$\vec{A}(\vec{r})_{(L \gg r)} \simeq \frac{\mu_0}{2\pi} I \hat{z} \ln \frac{L}{r}$$

Per  $L \rightarrow +\infty \implies \vec{A}(\vec{r}) \rightarrow +\infty$

Applichiamo tale risultato al caso dei fili paralleli descritti nel problema n.1, supponendo inizialmente che i fili siano finiti. Si ha:

$$\vec{A}(x)_{\text{due fili}} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \hat{y} \left( \ln \frac{L}{x + \frac{d}{2}} - \ln \frac{L}{x - \frac{d}{2}} \right) = \frac{\mu_0}{2\pi} I \hat{y} \ln \frac{x - \frac{d}{2}}{x + \frac{d}{2}}$$

**Il potenziale cosí trovato non dipende dalla lunghezza dei fili quindi é perfettamente valido anche quando i fili sono infinitamente lunghi.**

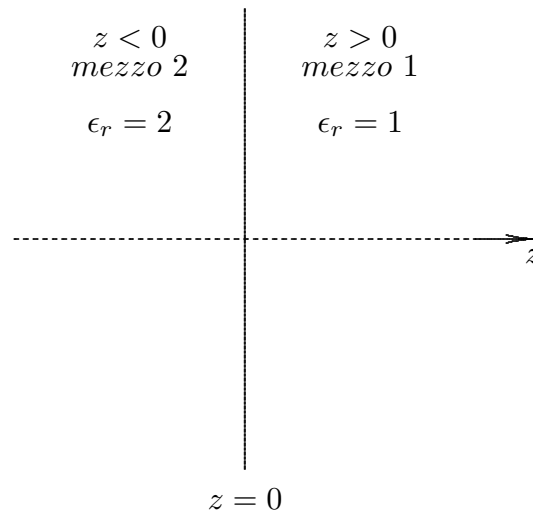
É facile verificare che il campo di induzione magnetica calcolato per mezzo del potenziale vettore cosí calcolato dá lo stesso risultato del calcolo diretto di  $\vec{B}$  effettuato nel problema n. 1. Infatti:

$$\begin{aligned} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\mu_0}{2\pi} I \ln \frac{x - \frac{d}{2}}{x + \frac{d}{2}} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \hat{z} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_0}{2\pi} I \ln \frac{x - \frac{d}{2}}{x + \frac{d}{2}} \right) = \hat{z} \frac{\mu_0}{2\pi} I \left( \frac{x + \frac{d}{2}}{x - \frac{d}{2}} \right) \left[ \frac{x + \frac{d}{2} - x + \frac{d}{2}}{\left( x + \frac{d}{2} \right)^2} \right] = \underline{\underline{\hat{z} \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{d}{x^2 - \frac{d^2}{4}}}} \end{aligned}$$



**98-19) Esercizio n. 3 del 5/10/1998**

Un mezzo dielettrico 1 ha una costante dielettrica  $\epsilon_r = 1$  e occupa la regione  $z > 0$ . Un mezzo dielettrico 2 ha una costante dielettrica  $\epsilon_r = 2$  e occupa la regione  $z < 0$ . Se il campo elettrico nel mezzo 1 é  $\vec{E}_1 = \hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z}$ , calcolare  $\vec{D}_1$ ,  $\vec{E}_2$  e  $\vec{D}_2$ .



Si ha:

$$\vec{D}_1 = \epsilon_0(\hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z})$$

Le condizioni al contorno per i mezzi dielettrici sono:

$$\begin{cases} D_{2n} = D_{1n} \\ E_{2t} = E_{1t} \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \vec{D}_{2n} = 3\epsilon_0\hat{z} \\ \vec{E}_{2t} = \hat{x} - 2\hat{y} \end{cases}$$

In definitiva:

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{2t} + \vec{E}_{2n} = \hat{x} - 2\hat{y} + \frac{3}{\epsilon_{r2}}\hat{z} = \hat{x} - 2\hat{y} + \frac{3}{2}\hat{z}$$

$$\vec{D}_2 = \epsilon_0\epsilon_{r2} \left( \hat{x} - 2\hat{y} + \frac{3}{2}\hat{z} \right) = \epsilon_0 (2\hat{x} - 4\hat{y} + 3\hat{z})$$

**98-20) Esercizio n. 4 del 5/10/1998**

Una spira rettangolare di lunghezza  $l$  e larghezza  $w$  giace in una regione in cui esiste un campo di induzione magnetica  $\vec{B} = \hat{z}B \sin \omega_1 t$ . Se l'angolo formato fra la normale al piano della spira e la direzione del campo di induzione magnetica varia nel tempo con legge  $\theta = \omega_2 t$ , calcolare la forza elettromotrice indotta sulla spira.

Il flusso del campo di induzione magnetica attraverso la superficie della spira é:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} da = \int_S (B \sin \omega_1 t) \hat{z} \cdot \hat{n} da = \int_S B \sin \omega_1 t \cos \theta da = \\ &= \int_S B \sin \omega_1 t \cos \omega_2 t da = Blw \sin \omega_1 t \cos \omega_2 t \end{aligned}$$

essendo  $lw$  l'area della superficie della spira rettangolare. Ne segue che:

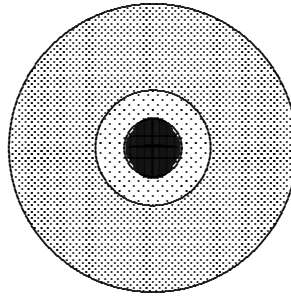
$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega_1 Blw \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t - \omega_2 Blw \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t$$

Quindi la forza elettromotrice indotta é:

$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\omega_1 Blw \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t + \omega_2 Blw \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t$
---

**98-21) Esercizio n. 1 del 21/11/1998**

Due lunghi cilindri conduttori sono separati da due strati di dielettrico perfetto. Il raggio del cilindro interno conduttore é  $r_1 = 1 \text{ mm}$ ; lo spessore del dielettrico piú interno é  $d = 1 \text{ mm}$  ed il raggio del conduttore esterno é  $r_2 = 5 \text{ mm}$ . Determinare l'espressione del campo elettrico all'interno degli strati dielettrici.



Il cilindro interno (in nero) é conduttore ed il suo raggio é  $r_1 = 1 \text{ mm}$ . Esso é circondato da uno strato dielettrico cilindrico di spessore  $d = 1 \text{ mm}$  (tratteggiato chiaro). Il tutto é circondato da uno strato dielettrico di raggio  $r_2 = 5 \text{ mm}$  (tratteggiato scuro). Infine vi é uno straterello cilindrico conduttore di raggio  $r_2 = 5 \text{ mm}$ .

Applichiamo il teorema di Gauss in forma integrale assumendo come superficie una superficie cilindrica di raggio  $r$  ed altezza  $h$ :

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} da = q$$

essendo  $q$  la carica **libera** interna ad  $S$  cioè sulla superficie del conduttore interno.

a) 1<sup>o</sup> strato dielettrico (costante dielettrica  $\epsilon_1$ ).

Risulta:

$$D2\pi r h = q \quad r_1 < r < r_1 + d$$

essendo nullo il contributo delle superfici di base in quanto ivi  $\vec{D} \cdot \hat{n} = 0$ .

La carica  $q$  si può esprimere in funzione della densità superficiale  $\sigma$ , cioè:

$$q = \int \sigma da = \int \sigma r_1 d\alpha dh = 2\pi r_1 \sigma h$$

Quindi:

$$D = \sigma \frac{r_1}{r} \quad \Rightarrow \quad E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_1} \frac{r_1}{r}$$

a) 2° strato dielettrico (costante dielettrica  $\epsilon_2$ ).

In modo del tutto analogo al caso del 1° strato, si ha:

$$E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_2} \frac{r_2}{r}$$

dove  $r$  é interna al 2° strato, cioè:  $r_1 + d < r < r_2$ .

**98-22) Esercizio n. 2 del 21/11/1998**

Il campo elettrico in una regione dello spazio é dato dalla seguente formula:

$$E_r(r) = \begin{cases} Ar & \text{for } r < a \\ B/r^2 & \text{for } r > a \end{cases}$$

dove  $A$  e  $B$  sono costanti. Calcolare la densità di carica in ciascun punto della regione.

Applichiamo la legge di Gauss in forma differenziale:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Poiché il campo é solo funzione di  $r$ , si ha in coordinate sferiche:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E)$$

Per  $r < a$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = A \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3) = 3A$$

quindi:

$$\boxed{\rho = 3A\epsilon_0}$$

Per  $r > a$ :

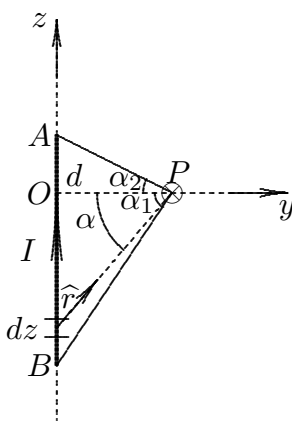
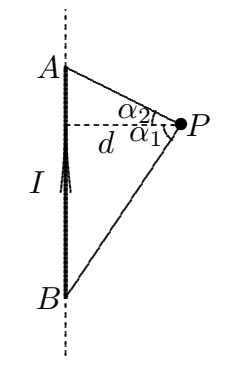
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = B \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{1}{r^2} \right) = 0$$

quindi:

$$\boxed{\rho = 0}$$

**98-23) Esercizio n. 3 del 21/11/1998**

Calcolare il vettore induzione magnetica, nel punto P, generato da un segmento AB percorso da corrente  $I$ .



Assumiamo l'origine del sistema di riferimento nel piede della perpendicolare condotta da P al segmento percorso da corrente.

Consideriamo un tratto di filo  $dz$ ; il suo contributo al campo di induzione magnetica nel punto P é dato da:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dz \hat{z} \times \hat{r}}{r^2}$$

Dalla figura si ha:

$$\hat{r} = \hat{z} \sin \alpha + \hat{y} \cos \alpha$$

Pertanto:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dz \cos \alpha (\hat{z} \times \hat{y})}{r^2}$$

Poiché  $(\hat{z} \times \hat{y}) = -\hat{x}$ , la direzione del vettore induzione magnetica é ortogonale al piano di figura e nel verso ad esso entrante. Il modulo di  $d\vec{B}$  é, quindi:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dz \cos \alpha}{r^2}$$

Dalla figura si ha:

$$z = d \tan \alpha \quad \Longrightarrow \quad dz = \frac{d}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

e

$$d = r \cos \alpha \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{d}{\cos \alpha}$$

Quindi:

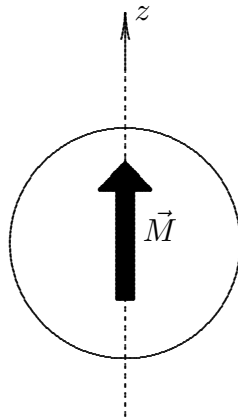
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d \cos^3 \alpha}{d^2 \cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{d} \cos \alpha d\alpha$$

Integrando sui due tratti di filo  $BO$  e  $OA$ , si ha:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{d} \left( \int_0^{\alpha_1} \cos \alpha d\alpha + \int_0^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{d} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)$$

**98-24) Esercizio n. 4 del 21/11/1998**

Un materiale magnetico di forma sferica é uniformemente magnetizzato e sia  $\vec{M} = \hat{z}M$  il vettore magnetizzazione. Trovare  $\vec{J}_M$  e  $\vec{j}_M$  usando coordinate sferiche.



In coordinate sferiche, si ha:

$$\begin{aligned} M_r &= M \cos \theta \\ M_\theta &= -M \sin \theta \\ M_\phi &= 0 \end{aligned}$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{M} &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rM_\theta) - \frac{\partial M_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\phi = \\ &= \frac{1}{r} \left[ M_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} M \cos \theta \right] \hat{e}_\phi = \frac{1}{r} [-M \sin \theta + M \sin \theta] \hat{e}_\phi = 0 \end{aligned}$$

come ci si aspettava essendo M costante.

Quindi:

$$\boxed{\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0}$$

Calcoliamo  $\vec{M} \times \hat{n} = \vec{M} \times \hat{e}_r$ . Si ha:

$$\vec{M} \times \hat{e}_r = -M_\theta \hat{e}_\phi = M \sin \theta \hat{e}_\phi$$

Quindi:

$$\boxed{\vec{j}_M = \vec{M} \times \hat{e}_r = M \sin \theta \hat{e}_\phi}$$