Esercizi svolti di Fisica generale II - Anno 1997

97-1) Esercizio n. 1 del 1/3/1997

Calcolare il lavoro necessario per trasportare un elettrone dal punto $A \equiv (1,1,1)$ al punto $B \equiv (2,2,2)$ nel campo generato da: a) una carica puntiforme di valore $Q = 10^{-9}$ C posta nell'origine delle coordinate; b) una distribuzione lineare infinita di densitá di carica $\lambda = 10^{-9}$ C/m giacente sull'asse z; c) una distribuzione piana uniforme di densitá $\sigma = 10^{-9}$ C/m^2 giacente sul piano $z = 0$.

E' conveniente calcolare il lavoro come

$$q(V_B - V_A)$$

pertanto calcoliamo il potenziale nei vari casi.

a)

$$\Phi(x,y,z) = k\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\Delta\Phi = V_B - V_A = kQ\left(\frac{1}{\sqrt{4+4+4}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = kQ\left(\frac{1}{\sqrt{12}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= kQ\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -kQ\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Quindi

$$L_{AB} = kQ|e|\frac{1}{2\sqrt{3}} = \underline{\underline{4.15 \cdot 10^{-19}\ J}}$$

b) Poichè il filo è infinitamente lungo, il campo elettrico dipende solo dalla distanza del punto campo dal filo. Siccome conosciamo il campo elettrico, si ha:

$$W = -q\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dr} \Longrightarrow L_{AB} = +|e|\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dr} = |e|\int_A^B 2k\frac{\lambda}{r}dr = 2k\lambda|e|\ln\frac{d_2}{d_1}$$

Ma $d_2 = \sqrt{12}$ e $d_1 = \sqrt{3}$, segue

$$L_{AB} = 2k\lambda|e|\ln 2 = \underline{\underline{1.99 \cdot 10^{-18}\ J}}$$

c) Analogamente, essendo $E_z = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}$

$$L_{AB} = +|e| \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |e| \int_A^B dz = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |e| = \underline{\underline{9 \cdot 10^{-18} \, J}}$$

N.B. Il quesito b) si può svolgere anche nel seguente modo:

$$L_{AB} = |e| \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \text{con} \quad \vec{E} = 2k\frac{\lambda}{r}\hat{r}$$

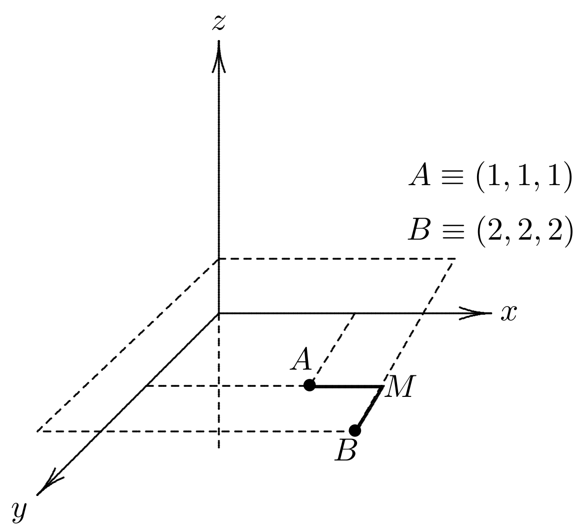
dove

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \Longrightarrow \hat{r} = \frac{\vec{r}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Longrightarrow \vec{E} = 2k\lambda \frac{x\hat{x} + y\hat{y}}{x^2 + y^2}$$

Per cui:

$$+|e| \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = |e| 2k\lambda \int_A^B \frac{x\, dx}{x^2 + y^2} + |e| 2k\lambda \int_A^B \frac{y\, dy}{x^2 + y^2}$$

Poichè l'integrale non dipende dal cammino percorso ed il campo non dipende da z come percorso scegliamo il seguente:



$$AM = \Big\{ 1 \le x \le 2 \quad \text{e} \quad y = 1 \Big\}$$

$$MB = \Big\{ 1 \le y \le 2 \quad \text{e} \quad x = 2 \Big\}$$

Segue

$$+|e|\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = |e|2k\lambda\int_1^2 \frac{x\,dx}{x^2+1} + |e|2k\lambda\int_1^2 \frac{y\,dy}{4+y^2} =$$

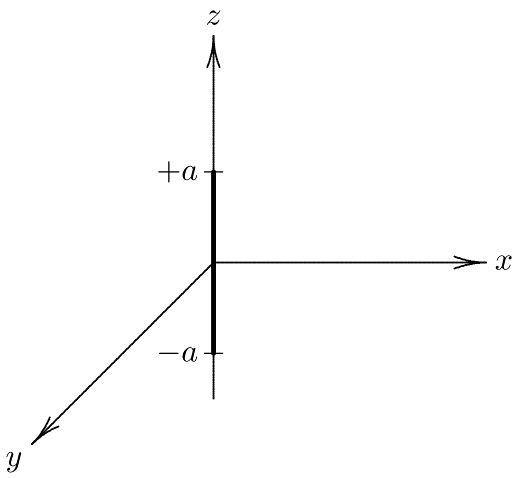
$$= |e|2k\lambda\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_1^2 + |e|2k\lambda\frac{1}{2}\left[\ln(4+y^2)\right]_1^2 =$$

$$= k\lambda|e|\left(\ln\frac{5}{2}+\ln\frac{8}{5}\right) = k\lambda|e|\ln 4 =$$

$$= 2k\lambda|e|\ln 2 \qquad \text{C.V.D.}$$

97-2) Esercizio n. 2 del 1/3/1997

Calcolare la carica totale e il vettore momento di dipolo di una sottile barra disposta lungo l'asse z $(-a \leq z \leq +a)$ avente densitá lineare di carica $\lambda = cz$, essendo c una costante reale.



Si ha:

$$Q = \int \lambda \, dr' = \int_{-a}^{+a} \lambda \, dz' = c \int_{-a}^{+a} z' \, dz' = c\frac{1}{2} \left[z'^2 \right]_{-a}^{+a} = \frac{1}{2} c \left(a^2 - a^2 \right) = 0$$

Quindi il momento di dipolo non dipende dall' origine delle coordinate.

$$\vec{p} = \int_V \vec{r'} \rho(\vec{r'}) d^3 r' = c\hat{z} \int_{-a}^{+a} z' \cdot z' \, dz' = c\hat{z} \int_{-a}^{+a} z'^2 \, dz' =$$

$$= \hat{z}\frac{1}{3} c \Big[z'^3 \Big]_{-a}^{+a} = \hat{z}\frac{1}{3} c \left(a^3 + a^3 \right) = \frac{2}{3} c a^3 \hat{z}$$

Se $c > 0$ allora $\vec{p}$ è diretto verso z positivo.

97-3) Esercizio n. 3 del 1/3/1997

Il gas argo (Z=18), in condizioni di pressione e temperatura normali, ha una costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 1,00044$. Calcolare il raggio dell'atomo di argon nonché lo spostamento fra il baricentro del nucleo e quello delle cariche negative quando l'atomo é sottoposto ad un campo elettrico esterno di modulo $E = 10^4\ V/m$.

A pressione normale ($10^5\ Pa$) e a temperatura normale ($0^0\ C$) una mole di gas occupa un volume di 22.4 litri. Quindi il numero di atomi per unità di volume è:

$$N_A : 22.4 \cdot 10^{-3} = N : 1 \Longrightarrow N = \frac{N_A}{22.4 \cdot 10^{-3}} = \frac{6 \cdot 10^{23}}{22.4 \cdot 10^{-3}} = 2.68 \cdot 10^{25}\, \frac{atomi}{m^3}$$

Sia $\epsilon_r = 1.00044$, calcoliamo la polarizzabilità α con la formula di Clausius-Mossotti:

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{N(\epsilon_r + 2)} = 1.453 \cdot 10^{-40}$$

Del resto

$$\alpha = \frac{1}{k} a^3 \Longrightarrow a = (k\alpha)^{1/3} = \underline{\underline{1.093 \cdot 10^{-10}\, m}}$$

Lo spostamento b fra il baricentro del nucleo e quello delle cariche negative è dato da:

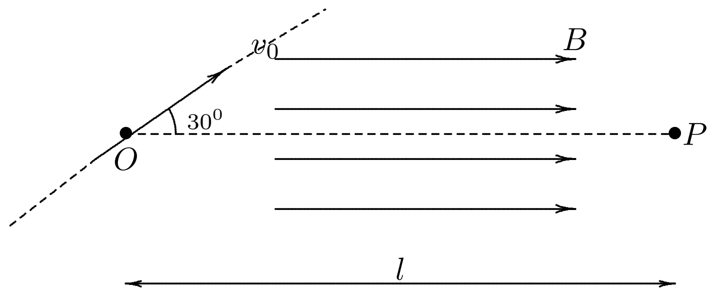
$$b = \frac{1}{k} \frac{a^3}{Ze} E_{ext} = 0.5 \cdot 10^{-22} E_{ext} = 0.5 \cdot 10^{-22} \cdot 10^4 = \underline{\underline{0.5 \cdot 10^{-18}\, m}}$$

dove $Z = 18$.

N.B.: Il calcolo del raggio non dipende da Z; mentre b dipende da Z.

97-4) Esercizio n. 4 del 1/3/1997

Un elettrone é iniettato in un campo di induzione magnetica $\vec{B}$ con velocitá $v_0 = 10^7$ m/s in una direzione giacente nel piano della pagina e formante un angolo di 30^0 con $\vec{B}$. Se la lunghezza l é 0.1 m, calcolare il valore di $\vec{B}$ perché l'elettrone passi per il punto P.



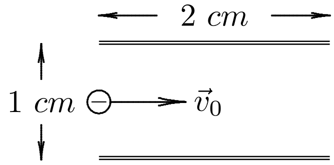
L'elettrone descriverà un'elica avente l'asse coincidente con la direzione del campo magnetico. Tale traiettoria incontrerà il punto P dopo una distanza minima pari al passo dell'elica, cioè:

$$p = v_{oz}\frac{2\pi m}{qB} = 0.1\, m$$

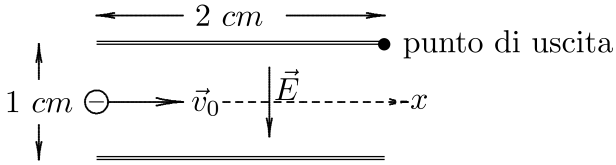
$$B = v_0 \cos 30^0 \frac{2\pi m}{q \cdot 0.1} = 10^7 \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2\pi \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.1} = 3.094 \cdot 10^{-3}\, Wb/m^2 = \underline{\underline{30.94\, Gauss}}$$

97-5) Esercizio n. 1 del 22/11/1997

Un elettrone é lanciato orizzontalmente con velocitá iniziale $v_0 = 10^7\ m/s$ nel campo elettrico uniforme esistente fra due lastre conduttrici parallele. Il campo elettrico é diretto verticalmente verso il basso. L'elettrone entra nel campo elettrico in un punto a metá distanza fra le due lastre. Determinare: a) l'intensitá del campo elettrico, se l'elettrone emergente dal campo sfiora l'elettrodo superiore; b) la direzione e la velocitá dell'elettrone quando esso emerge dal campo.



Consideriamo un sistema di riferimento con l'asse x lungo la direzione $\vec{v}_0$ e con l'origine posta nella posizione iniziale dell'elettrone.



Le equazioni del moto sono:

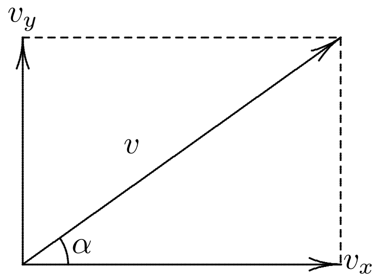
$$x = v_0 t\ , \quad y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2 \Longrightarrow y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\frac{x^2}{v_0^2}$$

Nel punto di uscita $x = L$ e $y = d$, quindi:

$$d = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\frac{L^2}{v_0^2} \Longrightarrow E = \frac{2mv_0^2 d}{eL^2} = \frac{2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{14} \cdot 0.5 \cdot 10^{-2}}{1.6 \cdot 10^{-19}(2 \cdot 10^{-2})^2} = \underline{\underline{14234\, V/m}}$$

Nel punto di uscita le componenti della velocità sono:

$$v_x = v_0 = 10^7\, m/s \quad \text{e} \quad v_y = \frac{eE}{m}t^* = \frac{eE}{m}\frac{L}{v_0} = 5 \cdot 10^6\, m/s$$



Segue

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \underline{\underline{1.12 \cdot 10^7 \, m/s}} \Longrightarrow v_y = v_x \tan\alpha \Longrightarrow \tan\alpha = 0.5 \Longrightarrow \alpha = \underline{\underline{26^0, 56}}$$

97-6) Esercizio n. 2 del 22/11/1997

Le armature di un condensatore piano sono separate da un dielettrico di costante dielettrica $\epsilon_r = 3$. Il modulo del campo elettrico nel dielettrico é $10^6\ V/m$. Calcolare: a) la densitá superficiale delle cariche libere sulle armature; b) la polarizzazione nel dielettrico; c) la densitá superficiale delle cariche indotte sulla superficie del dielettrico.

$$\epsilon_r = 3$$

$$E(\text{nel dielettrico }) = 10^6\, V/m$$

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r} \Longrightarrow E_0 = \epsilon_r E = 3 \cdot 10^6\, V/m$$

Si ha:

a)

$$\sigma = \epsilon_0 E_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^6 = \underline{\underline{2.656 \cdot 10^{-5}\, C/m^2}}$$

b)

$$P = \chi E = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E = \underline{\underline{1.77 \cdot 10^{-5}\, C/m^2}}$$

c)

$$\sigma_{ind.} = \vec{P} \cdot \vec{n} = P = \underline{\underline{1.77 \cdot 10^{-5}\, C/m^2}}$$

97-7) Esercizio n. 3 del 22/11/1997

Un deutone descrive una traiettoria circolare di raggio 40 cm in un campo magnetico di induzione 1.5 Wb/m^2. Calcolare: a) la velocitá del deutone; b) il tempo necessario per compiere mezza rivoluzione. Da quale differenza di potenziale dovrebbe essere accelerato il deutone per acquistare la stessa velocitá? Il deutone é costituito da un protone e da un neutrone ($m_d = 3.34 \cdot 10^{-27}\ Kg$).

Dalla formula (8.12.33) si ha:

$$R = \frac{mv_{o\perp}}{qB}$$

dove $R = 40\,cm$, $B = 1.5\,Wb/m^2$, $q = 1.6 \cdot 10^{-19}\,C$, $m_d = 3.34 \cdot 10^{-27}\,Kg$.

$$v_{o\perp} = \frac{qBR}{m} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1.5 \cdot 40 \cdot 10^{-2}}{3.34 \cdot 10^{-27}} = \underline{\underline{2.87 \cdot 10^7\,m/s}}$$

Il periodo del moto circolare è:

$$T = 2\pi\frac{m}{qB} = 8.74 \cdot 10^{-8}\,s$$

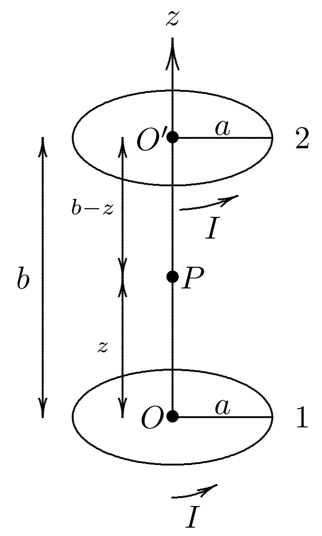
$$\frac{T}{2} = \underline{\underline{4.37 \cdot 10^{-8}\,s}}$$

Infine per il quesito c) si ha:

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV \Longrightarrow V = \frac{mv^2}{2q} = \underline{\underline{8.60 \cdot 10^6\,Volt}}$$

97-8) Esercizio n. 4 del 22/11/1997

Due spire circolari, ognuna di raggio a, in ciascuna delle quali circola una corrente di eguale intensitá e nello stesso verso, sono poste, con i loro piani paralleli, ad una distanza b. Trovare l'induzione magnetica al centro di ciascuna spira.



Consideriamo l'origine O

$$B_{1z} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2\pi a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

$$B_{2z} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2\pi a^2}{\left[a^2+(b-z)^2\right]^{3/2}}$$

Nel punto O cioè $z=0$, si ha:

$$B(O) = \frac{\mu_0}{4\pi} I 2\pi a^2 \left[\frac{1}{a^3} + \frac{1}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right]$$

Nel punto O' cioè $z=b$, si ha:

$$B(O') = \frac{\mu_0}{4\pi} I 2\pi a^2 \left[\frac{1}{(a^2+b^2)^{3/2}} + \frac{1}{a^3}\right]$$

cioè:

$$B(O') = B(O)$$

Fine Esercizi Fisica II - 1997