Esercizi svolti di Fisica generale II - Anno 1996

96-1) Esercizio n. 1 del 24/7/1996

Una regione di spazio é sede di un campo elettrico descrivibile dalla funzione potenziale:

$$\Phi = k\,(\sin ax \sin by)\, e^{\alpha z} \qquad \text{con } \alpha = \left(a^2+b^2\right)^{1/2}$$

dove a, b, e k sono costanti.

Calcolare il campo elettrico $\vec{E}$ e la densitá di carica ρ in funzione di x, y e z.

Si ha:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\partial}{\partial x}\Phi\hat{x} - \frac{\partial}{\partial y}\Phi\hat{y} - \frac{\partial}{\partial z}\Phi\hat{z} =$$

$$= -k\left[a(\cos ax \sin by)e^{\alpha z}\hat{x} + b(\sin ax \cos by)e^{\alpha z}\hat{y} + \alpha(\sin ax \sin by)e^{\alpha z}\hat{z}\right]$$

ρ si calcola dalla

$$\vec{\nabla}\cdot\epsilon_0\vec{E} = \rho \Longrightarrow \rho = \epsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

Segue

$$\epsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \epsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial x} + \epsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial y} + \epsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial z} =$$

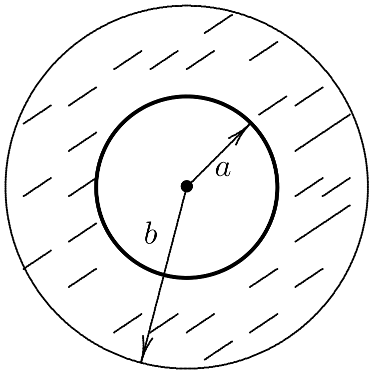
$$= -\epsilon_0 k\left[-a^2(\sin ax \sin by)e^{\alpha z} - b^2(\sin ax \sin by)e^{\alpha z} + \alpha^2(\sin ax \sin by)e^{\alpha z}\right] =$$

$$= \left[\epsilon_0 k(\sin ax \sin by)e^{\alpha z}\right]\left(a^2+b^2-\alpha^2\right) = 0$$

cioè la funzione potenziale descrive un campo esterno alla distribuzione stessa.

96-2) Esercizio n. 2 del 24/7/1996

Una sfera conduttrice di raggio a ha una carica Q distribuita uniformemente sulla sua superficie. Se la sfera é rivestita da uno strato sferico dielettrico, di costante dielettrica ϵ_r, di raggio interno a e raggio esterno b, calcolare la carica superficiale di polarizzazione sulla superficie interna e su quella esterna del dielettrico nonché la densitá volumica di carica di polarizzazione all'interno del dielettrico.



Sia Q la carica libera distribuita uniformemente sulla superficie della sfera conduttrice. Calcoliamo il campo elettrico nello strato dielettrico applicando il teorema di Gauss:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n}\, da = Q \Longrightarrow D 4\pi r^2 = Q$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{e}_r \qquad \vec{P} = \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon r^2} Q\hat{e}_r$$

Segue:

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot (-\hat{e}_r) = -\frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon r^2} Q$$

Inoltre

$$Q_{P_{(r=a)}} = -\epsilon_0(\epsilon_r - 1)\frac{Q}{\epsilon} = -Q_{P_{(r=b)}}$$

$-$ sulla sfera di raggio a, $+$ su quella di raggio b.

Tenendo presente che in coordinate sferiche per una funzione vettoriale $\vec{A}$ dipendente solo dalla variabile r, si ha:

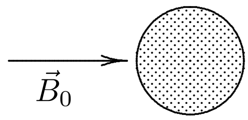
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r)$$

possiamo scrivere:

$$\varrho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon r^2} Q\right] = 0$$

96-3) Esercizio n. 3 del 24/7/1996

Una sfera di materiale magnetico, di permeabilitá magnetica relativa $\mu_r = 1000$ e raggio $a = 1\ cm$, é posta in un campo magnetico uniforme di modulo $B_0 = 1000\ G$; calcolare il momento magnetico indotto sulla sfera.



Sappiamo dalla teoria che:

$$B_{int.} = \frac{3\mu_r}{\mu_r + 2} B_0$$

Segue

$$M = \chi_m H_{int.} = \chi_m \frac{3}{\mu_r + 2} H_0$$

ma $\chi_m = \mu_r - 1$, quindi

$$M = \frac{3(\mu_r - 1)}{\mu_r + 2} H_0$$

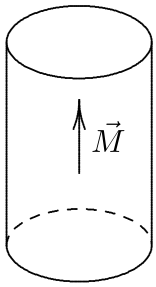
Il momento magnetico indotto è:

$$\vec{m} = \vec{M} V$$

$$m = \frac{3(\mu_r - 1)}{\mu_r + 2} \frac{4}{3} \pi a^3 \frac{B_0}{\mu_0} = \underline{\underline{0.997 A \cdot m^2}}$$

96-4) Esercizio n. 4 del 24/7/1996

Una calamita a forma di barra cilindrica, di lunghezza $l = 5\ cm$ e diametro $d = 1\ cm$, é uniformemente magnetizzata nella direzione assiale e sia $M = 10^3\ A/m$. Calcolare: a) il momento magnetico della barra; b) la densitá lineare della corrente superficiale di magnetizzazione; c) il modulo del vettore induzione magnetica al centro della calamita.



Il momento magnetico della sbarra è:

$$m = MV = M\pi\frac{d^2}{4}l = 10^3\pi\frac{10^{-4}}{4}5\cdot 10^{-2} = \underline{\underline{3.93\cdot 10^{-3}\ A\cdot m^2}}$$

La densità della corrente superficiale di magnetizzazione è:

$$\vec{j}_M = \vec{M}\times\hat{n}$$

il cui modulo è:

$$|j_M| = \underline{\underline{10^3\ A/m}}$$

e la direzione è $\hat{e}_\phi$.

La barra è quindi equivalente ad un solenoide tale che

$$In = j_M$$

Pertanto per il calcolo dell'induzione magnetica al centro della calamita basta porre $z = 0$ nella formula del campo del solenoide:

$$B_{z_{(z=0)}} = \frac{l}{a\sqrt{1+\frac{l^2/4}{a^2}}}\frac{\mu_0}{2}j_M = \frac{5\cdot 10^{-2}}{5\cdot 10^{-3}\sqrt{1+\frac{25\cdot 10^{-4}}{4\cdot 25\cdot 10^{-6}}}}\frac{\mu_0}{2}j_M = \frac{5\cdot 10^{-2}}{5\cdot 10^{-3}\cdot 5}\frac{\mu_0}{2}j_M =$$

$$= 2\frac{\mu_0}{2}j_M = \mu_0 j_M = 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10^3 = 12.57\cdot 10^{-4}\,Wb/m^2 = \underline{\underline{12.57\,Gauss}}$$

che coincide con quello del solenoide infinitamente lungo.

96-5) Esercizio n. 1 del 14/9/1996

Due dipoli elettrici sono disposti come nelle figure a) e b):

$$\vec{p}_1 \uparrow \qquad \vec{p}_2 \uparrow \qquad\qquad\qquad \overrightarrow{\vec{p}_1} \qquad\qquad \overrightarrow{\vec{p}_2}$$

$$a) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b)$$

Se essi sono egualmente distanziati, esprimere, nei due casi, la forza esercitata fra i dipoli in modulo, direzione e verso.

Per un dipolo posto nell'origine di un sistema di riferimento si ha:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{3\,(\vec{p}\cdot\vec{r})\,\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$$

Un altro dipolo posto alla distanza $\vec{r}$ da esso è sottoposto ad una forza

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right)$$

a) $\qquad \vec{p}_1 \uparrow \qquad \vec{p}_2 \uparrow$

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{r} = 0$$

$$\vec{E}_1(\vec{r}_2) = k\frac{-\vec{p}_1}{r^3}$$

$$\vec{F}_{1\to 2} = \vec{\nabla}\left[\vec{p}_2 \cdot \left(-k\frac{\vec{p}_1}{r^3}\right)\right] = \vec{\nabla}\left(-k\frac{p_1 p_2}{r^3}\right)$$

Se la congiungente i due centri è l'asse x si ha:

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\hat{x} p_1 p_2 k \frac{d}{dx}\frac{1}{x^3} = +p_1 p_2 k \frac{3}{x^4}\hat{x}$$

Quindi la forza è repulsiva.

b) $\qquad \overrightarrow{\vec{p}_1} \qquad\qquad \overrightarrow{\vec{p}_2}$

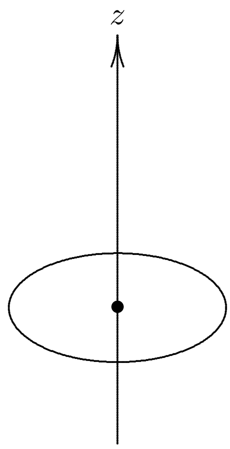
$$\vec{E}_1(\vec{r}_2) = k\frac{3p_1x^2\hat{x} - p_1x^2\hat{x}}{x^5} = kp_1\frac{2}{x^3}\hat{x}$$

$$\vec{F}_{1\to 2} = \vec{\nabla}\left(\vec{p}_2 \cdot kp_1\frac{2}{x^3}\hat{x}\right) = kp_1p_2\hat{x}\frac{d}{dx}\frac{2}{x^3} = -kp_1p_2\frac{6}{x^4}\hat{x}$$

La forza è attrattiva ed è il doppio di quella relativa al caso a).

96-6) Esercizio n. 2 del 14/9/1996

Un anello isolante filiforme di raggio $a = 1\ m$ giace sul piano xy con il centro posto nell'origine del sistema di riferimento. In esso é distribuita in modo uniforme una carica di densitá lineare $\lambda = 10^{-8}\ C/m$. Quanti giri al secondo deve effettuare la spira attorno all'asse z per produrre una corrente di $1\ \mu A$? Valutare in tal caso il campo di induzione magnetica nei punti dell'asse z situati ad una distanza dal centro pari a $d = 0.5\ m$ e $d = 1\ m$.



Se l'anello carico é in rotazione attorno al proprio asse, esso é equivalente ad una spira in quiete percorsa da corrente. La quantitá di carica che attraversa una sezione di tale spira nel tempo dt é quella che é depositata su un archetto dell'anello pari a $dl = vdt$, essendo v il modulo della velocitá di ciascun elemento di filo.

Risulta, quindi:

$$dq = \lambda dl = \lambda vdt = \lambda\omega adt$$

essendo ω la velocitá angolare di rotazione.

Ne segue:

$$I = \frac{dq}{dt} = \lambda\omega a$$

da cui:

$$\omega = \frac{I}{\lambda a} \qquad \Longrightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\lambda a}{I}$$

Il numero di giri per unitá di tempo é l'inverso del periodo:

$$n = \frac{I}{2\pi\lambda a} = \frac{10^{-6}}{2\pi \cdot 10^{-8}} = \underline{\underline{16\ giri/s}}$$

Il campo di induzione magnetica generato dall'anello in rotazione é, quindi:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2\pi a^2}{\left(a^2 + z^2\right)^{3/2}} \Longrightarrow B_z = \frac{6.283 \cdot 10^{-13}}{\left(1 + z^2\right)^{3/2}}$$

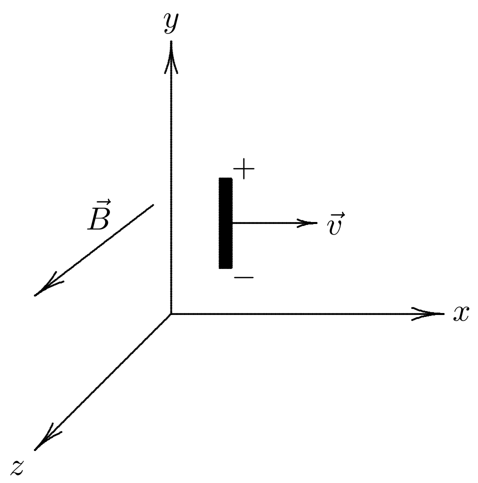
In definitiva

$$z = 0.5 \Longrightarrow B_z = \underline{\underline{4.5 \cdot 10^{-13}\, Wb/m^2}}$$

$$z = 1 \Longrightarrow B_z = \underline{\underline{2.22 \cdot 10^{-13}\, Wb/m^2}}$$

96-7) Esercizio n. 3 del 14/9/1996

Una barra metallica di lunghezza $l = 1\ m$ é disposta secondo una direzione parallela all'asse y di un sistema di riferimento. Essa si muove, nella direzione dell'asse x con una velocitá $v = 60\ Km/h$, in una regione dello spazio dove esiste un campo di induzione magnetica uniforme di modulo $B = 1000\ G$ e orientato secondo la direzione dell'asse z positivo. Valutare, in modulo e segno, la differenza di potenziale indotta fra gli estremi della sbarra.



Si ha:

$$f.e.m._{ind} = \int_l \vec{E}' \cdot \vec{dl} = \int_l \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{dl} = vBl$$

Del resto

$$60000 : 3600 = x : 1$$

$$v = 16.67\, m/s$$

$$B = 10^{-1}\, Wb/m^2$$

$$l = 1\, m$$

Ne segue:

$$f.e.m_{ind} = 16.67 \cdot 10^{-1} \cdot 1 = \underline{\underline{1.67\, Volt}}$$

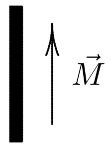
Il senso della d.d.p. è dato dal verso di $\vec{v} \times \vec{B}$:

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = -\hat{y}vB$$

Quindi il campo elettrico è diretto lungo l'asse y negativo. La d.d.p. è positiva da y positivo a y negativo.

96-8) Esercizio n. 4 del 14/9/1996

Una lunga barra cilindrica di lunghezza l e di piccola sezione trasversale é magnetizzata assialmente e sia $\vec{M} = \widehat{z}M$. Calcolare $\vec{B}$ sull'asse della barra, nei punti situati: a) alle estremitá della barra e b) al centro di essa.



Sulla superficie cilindrica vi sarà una corrente di magnetizzazione

$$\vec{j}_M = \vec{M} \times \hat{n}$$

Poichè $\vec{M}$ è diretto lungo $\hat{z}$ e $\hat{n}$ lungo $\hat{e}_\rho$, il verso di $\vec{j}$ è dato dal prodotto

$$\hat{z} \times \hat{e}_\rho = \hat{e}_\phi$$

Quindi la barra è equivalente ad un solenoide molto lungo tale che

$$nI = j_M$$

Pertanto il campo B al centro vale:

$$B = \mu_0 nI = \mu_0 j_M = \mu_0 M$$

Alle estremità si ha:

$$B \simeq \frac{\mu_0}{2} M$$

Fine Esercizi Fisica II - 1996