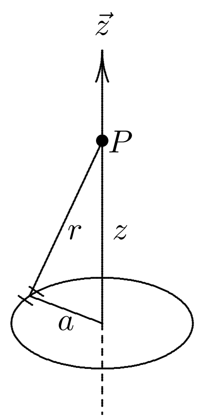
Esercizi svolti di Fisica generale II - Anno 1995

95-1) Esercizio n. 1 del 28/1/1995

Una carica $q = 20\ nC$ é uniformemente distribuita su un sottilissimo anello di raggio $a = 60\ mm$. Determinare la funzione potenziale Φ e il vettore campo elettrico $\vec{E}$ sui punti dell'asse dell'anello. Valutare le coordinate dei punti in cui il modulo di $\vec{E}$ é un estremo; verificare che esso é il massimo valore di $|E|$. Calcolare tale valore massimo e le coordinate ad esso corrispondenti.



Si ha:

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{a^2+z^2}} \Longrightarrow \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}q\left[\frac{-z}{(a^2+z^2)^{3/2}}\right]\hat{z}$$

Del resto

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}}\right] = \frac{\left(a^2+z^2\right)^{3/2} - \frac{3}{2}\left(a^2+z^2\right)^{1/2}2z^2}{(a^2+z^2)^3} = \frac{a^2+z^2-3z^2}{(a^2+z^2)^{5/2}} =$$

$$= \frac{a^2-2z^2}{(a^2+z^2)^{5/2}}$$

Tale derivata si annulla per

$$\boxed{z = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{z}{\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{a^2-2z^2}{\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}\right] = \frac{-4z\left(a^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{2}\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(a^2-2z^2\right)2z}{\left(a^2+z^2\right)^{5}} =$$

$$= \frac{-4z\left(a^2+z^2\right) - 5\left(a^2-2z^2\right)z}{\left(a^2+z^2\right)^{7/2}} = \frac{-4a^2z - 4z^3 - 5a^2z + 10z^3}{\left(a^2+z^2\right)^{7/2}} =$$

$$= \frac{6z^3 - 9a^2z}{\left(a^2+z^2\right)^{7/2}} = \frac{z\left(6z^2-9a^2\right)}{\left(a^2+z^2\right)^{7/2}}$$

Per $z = \frac{a}{\sqrt{2}}$ si ha:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{z}{\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}\right]_{\left(z=\frac{a}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}\left(3a^2-9a^2\right)}{\left(a^2+\frac{a^2}{2}\right)^{7/2}} < 0$$

quindi la funzione $E(z)$ ha un massimo; per $z = -\frac{a}{\sqrt{2}}$ la funzione $E(z)$ ha un minimo (nel senso di massimo in modulo ma opposto in verso).

Il valore massimo di E è:

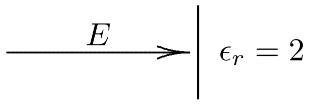
$$E_{Max} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{\left(a^2+\frac{a^2}{2}\right)^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{3}{2}a^2\right)^{3/2}} = \underline{\underline{19218.8\,\frac{V}{m}}}$$

con $z_{Max} = 0.0424\,m = 42.4\,mm$.

95-2) Esercizio n. 2 del 28/1/1995

Una lastra di materiale dielettrico isotropo e omogeneo, con le superfici infinitamente estese, é immersa, nel vuoto, in un campo elettrico esterno orientato secondo la normale alla superficie e di modulo $E = 100\ V/m$.

Se la costante dielettrica relativa del materiale é $\epsilon_r = 2$, calcolare: a) il campo elettrico (in modulo, direzione e verso) nel dielettrico; b) il vettore polarizzazione $\vec{P}$ (in modulo, direzione e verso); c) la densitá superficiale delle cariche legate.



Si ha:

$$D_{2n} = D_{1n}$$

Per cui

$$\epsilon_r E_2 = E \Longrightarrow E_2 = \frac{E}{\epsilon_r} = \underline{\underline{50\,\frac{V}{m}}}$$

Del resto

$$\vec{D}_2 = \epsilon_0 \vec{E}_2 + \vec{P} \Longrightarrow \vec{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \vec{E}_2 = \epsilon_0 \vec{E}_2$$

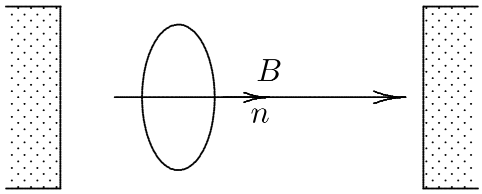
Segue:

$$P = \underline{\underline{4.427 \cdot 10^{-10}\,\frac{C}{m^2}}}$$

$$\sigma = \underline{\underline{\pm 4.427 \cdot 10^{-10}\,\frac{C}{m^2}}}$$

95-3) Esercizio n. 3 del 28/1/1995

Una piccola bobina di 60 spire é posta fra i poli di un elettromagnete in modo tale che il suo asse é orientato secondo il vettore $\vec{B}$. L'area della superficie di ogni singola spira é 3 mm^2. Durante l'intervallo di tempo in cui la bobina viene ruotata di 180^0, una carica $q = 4.50\ \mu C$ fluisce attraverso un galvanometro balistico con essa collegato. Se la resistenza della bobina, del galvanometro e dei fili di collegamento é $R = 40\ \Omega$, determinare il valore del modulo di $\vec{B}$.



Si ha:

$$\phi_1 = NBS$$

dopo la rotazione

$$\phi_2 = -NBS$$

Inoltre

$$F.e.m. = \frac{d\phi}{dt}\ \text{, ed} \quad i = \frac{F.e.m.}{R} \Longrightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{1}{R}\frac{d\phi}{dt}$$

Per cui

$$\Delta Q = \frac{1}{R}\Delta\phi = \frac{1}{R}(-NBS - NBS)$$

Segue:

$$|Q| = \frac{2NS}{R}B \Longrightarrow B = \frac{QR}{2NS} = 0.5\,\frac{Wb}{m^2} = \underline{\underline{5000\,G}}$$

95-4) Esercizio n. 4 del 28/1/1995

Un elettrone, posto in un campo di induzione magnetica uniforme $\vec{B}$, descrive un'elica di diametro $d = 80\ mm$ e di passo $p = 200\ mm$. Se il modulo di $\vec{B}$ é $50\ G$, calcolare il modulo della velocitá dell'elettrone.

Si ha:

$$m\frac{V_{\perp}^{\cancel{2}}}{R} = q\cancel{V_{\perp}}B \Longrightarrow V_{\perp} = \frac{qBR}{m} = 3.5176095 \cdot 10^7\, m/s$$

Inoltre

$$p = v_z T = v_z\frac{2\pi}{\omega} = v_z\frac{2\pi}{v_{\perp}}R \Longrightarrow v_z = \frac{v_{\perp}p}{2\pi R} = 2.7992247 \cdot 10^7\, m/s$$

In definitiva la velocità cercata ha modulo:

$$v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_z^2} = \underline{\underline{4.4954 \cdot 10^7\, m/s}}$$

95-5) Esercizio n. 1 del 24/6/1995

La dipendenza radiale della densitá di carica elettrica all'interno di un certo nucleo atomico é descritta dalla legge:$\rho = \rho_0 \left(1 - \dfrac{r^2}{a^2}\right)$, per $r \leq a$, dove $\rho_0 = 5 \cdot 10^{25}$ *coulomb*$/m^3$ e $a = 3.4 \cdot 10^{-15}$ m. Calcolare: a) la carica totale Q; b) l'espressione del potenziale V e del campo elettrico $\vec{E}$ nei punti esterni al nucleo; c) i valori di V e di E sulla superficie del nucleo; d) l'espressione del potenziale V e del campo elettrico $\vec{E}$ nei punti interni al nucleo; e) il valore di V al centro; f) la posizione del punto interno per cui il campo elettrico presenta il valore massimo.

Si ha:

$$Q = \int \rho \, dV = \int_0^a \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) 4\pi r^2 \, dr = \int_0^a \rho_0 4\pi r^2 \, dr - \int_0^a \rho_0 \frac{r^2}{a^2} 4\pi r^2 \, dr =$$

$$= 4\pi \rho_0 \frac{1}{3} a^3 - 4\pi \frac{\rho_0}{a^2} \frac{1}{5} a^5 = \frac{8}{15} \pi \rho_0 a^3 = \underline{\underline{3.29 \cdot 10^{-18} \, C}}$$

Il potenziale nei punti esterni è:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

ed il campo elettrico è:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{e}_r$$

Sulla superficie del nucleo risulta:

$$V_{sup.} = \underline{\underline{8.7 \cdot 10^6 \, Volt}}$$

$$E_{sup.} = \underline{\underline{2.56 \cdot 10^{21} \, V/m}}$$

Il potenziale nei punti interni si può calcolare per mezzo dell'equazione di Poisson in coordinate sferiche, tenendo conto che è

$$V = V(r)$$

Si ha:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ne segue:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(r^2 - \frac{r^4}{a^2}\right) \Longrightarrow r^2\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}r^3 + \frac{\rho_0}{5\epsilon_0 a^2}r^5 + C_1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}r + \frac{\rho_0}{5\epsilon_0 a^2}r^3 + \frac{C_1}{r^2} \Longrightarrow V = -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0}r^2 + \frac{\rho_0}{20\epsilon_0 a^2}r^4 - \frac{C_1}{r} + C$$

La costante C_1 è necessariamente nulla per fare in modo che il potenziale sia finito per $r = 0$; la costante C si calcola applicando la condizione di continuità sulla superficie:

$$V_{\text{est}_{\text{sup}}} = V_{\text{int}_{\text{sup}}} \Longrightarrow -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0}a^2 + \frac{\rho_0}{20\epsilon_0}a^2 + C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a} + \frac{7\rho_0}{60\epsilon_0}a^2 \Longrightarrow V = \frac{\rho_0}{20\epsilon_0 a^2}r^4 - \frac{\rho_0}{6\epsilon_0}r^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a} - \frac{7\rho_0}{60\epsilon_0}a^2$$

Poichè dalla formula di Q si ha che

$$\rho_0 = \frac{15}{8\pi a^3}Q$$

Segue:

$$V = \frac{3}{8}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a^5}r^4 - \frac{5}{4}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a^3}r^2 + \frac{1}{8}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a}$$

Per $r = 0$

$$V = \frac{1}{8}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a}$$

Il campo elettrico $\vec{E}$ risulta:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{e}_r = \left(-\frac{3}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a^5}r^3 + \frac{5}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a^3}r\right)\hat{e}_r$$

Il massimo di E si ha quando la derivata prima è zero, cioè:

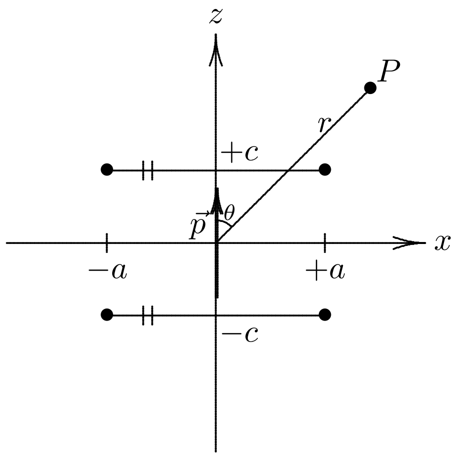
$$-\frac{9}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a^5}r^2 = -\frac{5}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a^3}$$

$$r^2 = \frac{5}{9}a^2 \Longrightarrow r = \underline{\underline{0.745a}}$$

95-6) Esercizio n. 2 del 24/6/1995

Due distribuzioni lineari ed uniformi di carica $+Q$ e $-Q$ si estendono, rispettivamente, dal punto $P_1 \equiv (-a, 0, c)$ al punto $P_2 \equiv (a, 0, c)$ e dal punto $P_3 \equiv (-a, 0, -c)$ al punto $P_4 \equiv (a, 0, -c)$. Calcolare il momento di dipolo del sistema ed esprimere la funzione potenziale in punti lontani.

Consideriamo due tratti dx della distribuzione situati simmetricamente rispetto all'asse x.



Su ciascuno di essi vi è una densità lineare $\lambda = \dfrac{Q}{2a}$ e $\lambda = -\dfrac{Q}{2a}$. Questi due tratti costituiscono un dipolo di momento

$$d\vec{p} = \lambda \, dx \, 2c\hat{z} = Q\frac{2c}{2a}dx\hat{z}$$

Il momento di dipolo totale è:

$$\vec{p} = Q2c\hat{z}$$

In un generico lontano punto P il potenziale vale quello del dipolo posto nell'origine

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}p\frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}Q2c\frac{\cos\theta}{r^2}$$

95-7) Esercizio n. 3 del 24/6/1995

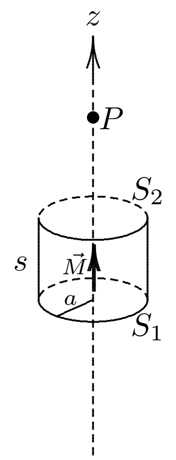
Una spira di lunghezza Γ é posta in un campo di induzione magnetica rappresentato da un potenziale vettore $\vec{A}(x,y,z,)$. Esprimere il flusso dell'induzione magnetica attraverso la superficie della spira in funzione del vettore $\vec{A}$.

Si ha:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, da = \int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) \cdot \hat{n}\, da = \oint_\Gamma \vec{A} \cdot \vec{dl}$$

95-8) Esercizio n. 4 del 24/6/1995

Un disco di ferro di raggio a e spessore s é magnetizzato con il vettore magnetizzazione $\vec{M}$ parallelo al suo asse. Calcolare $\vec{B}$, sull'asse del disco, nei punti esterni.



Il vettore $\vec{B}$, in generale, si scrive:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{\nabla} U^*(\vec{r}) + \mu_0 \vec{M}(\vec{r})$$

Nei punti esterni $\vec{M}(\vec{r}) = 0$, pertanto:

$$\vec{B}_{ext}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{\nabla} U^*(\vec{r})$$

dove $U^*(\vec{r})$ è pari a

$$U^*(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\vec{M} \cdot \hat{n}\, da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Se $\vec{M}$ è uniforme e parallelo all'asse:

$$U^*(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} -\frac{M\, da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi} \int_{S_2} -\frac{M\, da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Assumendo l'origine delle coordinate nel centro del disco ed applicando il risultato relativo al calcolo del potenziale di un disco uniformemente carico come studiato in teoria, si ha:

$$U^*(z) = -\frac{1}{4\pi} 2\pi M \left[\sqrt{\left(z + \frac{s}{2}\right)^2 + a^2} - \left(z + \frac{s}{2}\right) \right] - \frac{1}{4\pi} 2\pi M \left[\sqrt{\left(z - \frac{s}{2}\right)^2 + a^2} - \left(z - \frac{s}{2}\right) \right] =$$

$$= Mz - \frac{M}{2} \left[\sqrt{\left(z + \frac{s}{2}\right)^2 + a^2} + \sqrt{\left(z - \frac{s}{2}\right)^2 + a^2} \right]$$

da cui:

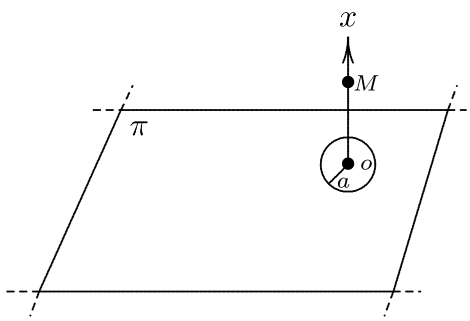
$$\vec{B}(z) = -\mu_o M \widehat{z} - \mu_0 \frac{M}{2} \widehat{z} \left[\frac{\left(z + \frac{s}{2}\right)}{\sqrt{\left(z + \frac{s}{2}\right)^2 + a^2}} + \frac{\left(z - \frac{s}{2}\right)}{\sqrt{\left(z + \frac{s}{2}\right)^2 + a^2}} \right]$$

95-9) Esercizio n. 1 del 22/7/1995

Un piano Π infinitamente esteso é sede di una distribuzione superficiale uniforme σ di carica elettrica. Su di esso é praticato un foro circolare di centro O e di raggio a.

Applicando il principio di sovrapposizione, calcolare il potenziale ed il campo elettrico generato in un punto M situato sulla retta perpendicolare a Π in O.

Noi già conosciamo il potenziale e il campo generati da un piano infinitamente esteso uniformemente carico e da un disco circolare in un punto del suo asse. Ora, il sistema proposto può essere considerato come costituito dalla sovrapposizione di un piano infinitamente esteso recante densità di carica $+\sigma$ e di un disco circolare, coincidente esattamente con l'apertura e recante la densità $-\sigma$. In ciascun punto dello spazio, dunque, il potenziale è la somma algebrica dei potenziali del piano e del disco e il campo elettrico è la somma geometrica dei rispettivi campi. Poichè siamo interessati ai punti sull'asse del foro, il campo elettrico è la somma algebrica dei campi.



Il potenziale di un disco carico ($-\sigma$) sui punti dell'asse ($x > 0$) è:

$$\Phi(M) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{x^2+a^2} - x\right)$$

Il campo elettrico è:

$$\vec{E} = -\hat{x}\frac{d}{dx}\Phi(x) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\widehat{x}$$

Analogamente il potenziale e il campo elettrico di un piano carico sono:

$$\Phi_{piano}(M) = -\int E\,dx + C = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}x + C \qquad (x > 0)$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad (x > 0)$$

Il potenziale e il campo elettrico del sistema sono:

$$\Phi(M) = -\cancel{\frac{\sigma}{2\epsilon_0}x} + C - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\sqrt{x^2+a^2} + \cancel{\frac{\sigma}{2\epsilon_0}x} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\sqrt{x^2+a^2} + C$$

$$E = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0\sqrt{x^2+a^2}}$$

95-10) Esercizio n. 2 del 22/7/1995

Una sostanza paramagnetica di volume v e di suscettivitá χ_m é posta sull'asse di una spira circolare, di raggio a, percorsa da una corrente di intensitá I.

Calcolare l'espressione della forza alla quale é sottoposta la sostanza in funzione della distanza x dal centro della spira.

Il campo di induzione magnetica B generato dalla spira è:

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{Ia^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \Longrightarrow \vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{m} \cdot \vec{B}\right)$$

dove

$$\vec{m} = \vec{M}v = \chi_m v \vec{H} = \frac{\chi_m v}{\mu} \vec{B}$$

Ma $\mu = \mu_0(\chi_m + 1)$, quindi:

$$\vec{m} = \frac{\chi_m v}{\mu_0(\chi_m + 1)} \vec{B}$$

Inoltre, per $\chi_m \ll 1$ $\vec{m} = \dfrac{\chi_m v}{\mu_0} \vec{B}$. Ne segue:

$$\vec{F} = \hat{x} \frac{d}{dx} \frac{\chi_m v}{\mu_0} B^2 = \hat{x} \frac{\chi_m v}{\mu_0} \frac{\mu_0^2}{4} I^2 a^4 \frac{d}{dx} \frac{1}{(x^2 + a^2)^3} =$$

$$= \hat{x} \frac{\chi_m v}{\mu_0} \frac{\mu_0^2}{4} I^2 a^4 \left[\frac{-3(x^2 + a^2)^2 2x}{(x^2 + a^2)^6} \right] = \hat{x} \left[-\frac{3\chi_m v \mu_0 I^2 a^4}{2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^4} \right]$$

Poichè $\chi_m > 0$ in quanto la sostanza è paramagnetica la forza è attrattiva.

95-11) Esercizio n. 3 del 22/7/1995

Si considerino i nuclei ^{13}C e ^{13}N degli isotopi del carbonio e dell'azoto. Essi hanno numeri atomici: $Z_{Carbonio} = 6$, $Z_{azoto} = 7$. Supponendo che i nuclei abbiano lo stesso raggio $R = 3.3 \cdot 10^{-13}\ cm$, calcolare la differenza fra le loro energie elettrostatiche.

L'energia elettrostatica di una sfera piena di carica è data da:

$$W = k\frac{3}{5}\frac{Q^2}{a}$$

dove

$$Q_{carbonio} = Z_c e = 6e$$

$$Q_{azoto} = 7e$$

Ne segue:

$$W_{carbonio} = k\frac{3}{5}\frac{e^2}{a}36$$

$$W_{azoto} = k\frac{3}{5}\frac{e^2}{a}49$$

In definitiva la differenza di energia elettrostatica è:

$$\Delta W = \frac{3}{5}k\frac{e^2}{a}13 = 0.6 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{3.3 \cdot 10^{-15}}13 = \underline{\underline{54.46 \cdot 10^{-14}\ J}}$$

95-12) Esercizio n. 4 del 22/7/1995

Un elettrone si muove di moto rettilineo uniforme con velocitá relativistica caratterizzata da $\gamma = 2 \cdot 10^4$. Valutare il massimo valore di $\vec{E}$ e di $\vec{B}$ generati dall'elettrone ad una distanza $d = 10\ mm$ dalla traiettoria.

Il campo elettrico massimo si ha per $\theta = 90^0$.

$$E_{Max} = k\frac{e}{d^2}\gamma = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{(10^{-2})^2} 2 \cdot 10^4 = \underline{\underline{0.29\, V/m}}$$

Per quanto riguarda il campo magnetico si ha:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\left(\vec{v} \times \vec{E}\right)$$

$$B_{Max} = \frac{v}{c^2}E_{Max} = \epsilon_0\mu_0 v E_{Max}$$

Ma $v \simeq c$ dunque

$$B_{Max} = \frac{1}{c}E_{Max} = \underline{\underline{9.67 \cdot 10^{-10}\, Wb/m^2}}$$

Fine Esercizi Fisica II - 1995