Esercizi svolti di Fisica generale II - Anno 1994

94-1) Esercizio n. 1 del 29/1/1994

Sia dato un campo elettrostatico uniforme. Si introducano in esso una sfera di materiale perfettamente conduttore ed una sfera di materiale perfettamente dielettrico dello stesso raggio e di costante dielettrica $\epsilon_r = 2$. Si calcoli il rapporto fra i moduli dei momenti di dipolo delle sfere, indotti dal campo. Quanto deve essere la costante dielettrica della seconda sfera perché tale rapporto diventi 1?

Sappiamo, anzitutto, che il potenziale generato da un dipolo elettrico è:

$$U_{dip.} = k\frac{p}{r^2}\cos\theta$$

Se una sfera conduttrice è posta in un campo elettrico uniforme il potenziale esterno dovuto alla sfera è di tipo dipolare:

$$U_{ext(sfera\ cond.)} = E_0 a^3 \frac{\cos\theta}{r^2}$$

Pertanto alla sfera conduttrice possiamo associare un momento di dipolo

$$p_{cond.} = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_0$$

Analogamente per una sfera dielettrica:

$$U_{ext(sfera\ diel.)} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 \frac{a^3}{r^2}\cos\theta$$

$$p_{diel.} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 a^3$$

In definitiva il rapporto fra i momenti di dipolo delle sfere è:

$$r = \frac{p_{cond.}}{p_{diel.}} = \frac{\epsilon_r + 2}{\epsilon_r - 1} = \underline{\underline{4}}$$

Affinchè tale rapporto sia unitario:

$$r \longrightarrow 1 \text{ per } \quad \epsilon_r \longrightarrow \infty$$

94-2) Esercizio n. 2 del 29/1/1994

Una pallina di forma sferica, di raggio $a = 2\ cm$, é posta in un campo di induzione magnetica uniforme di modulo $B_0 = 10000\ G$. Calcolare, in modulo, direzione e verso, il momento magnetico della pallina, indotto dal campo, nei casi in cui il materiale di cui é costituita la pallina sia: a) alluminio ($\mu_r = 1.000021$); b) argento ($\mu_r = 0.999981$); c) ferro ($\mu_r = 3000$).

Il campo magnetico nei punti interni di una sfera posto in un campo B_0 uniforme lungo l'asse $\vec{x}$ è:

$$\vec{B}_{int.} = \frac{3B_0\mu_r}{\mu_r + 2}\hat{x}\ ; \quad \vec{M} = \chi\vec{H} = \chi\frac{3B_0}{\mu_0(\mu_r + 2)}$$

ma

$$\chi = \mu_r - 1 \Longrightarrow \vec{M} = \frac{3(\mu_r - 1)}{\mu_0(\mu_r + 2)}B_0\hat{x}$$

Ne segue:

$$\vec{m} = \frac{3(\mu_r - 1)}{\mu_0(\mu_r + 2)}B_0\frac{4}{3}\pi a^3\hat{x}$$

Dai dati $B_0 = 10000\,G = 1\dfrac{Wb}{m^2}$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$; $a = 2 \cdot 10^{-2}\,m$ segue

$$\boxed{\vec{m} = 80\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}\hat{x} \quad [A \cdot m^2]}$$

In definitiva otteniamo:

$$\text{Alluminio}: \vec{m} = 5.6 \cdot 10^{-4}\widehat{x}\,A \cdot m^2$$

$$\text{Argento}: \vec{m} = -5.067 \cdot 10^{-4}\widehat{x}\,A \cdot m^2$$

$$\text{Ferro}: \vec{m} = 80\widehat{x}\,A \cdot m^2$$

94-3) Esercizio n. 3 del 29/1/1994

La costante dielettrica statica dell'acqua é $\epsilon_r = 80$. Calcolare: a) la polarizzabilitá della molecola; b) il momento di dipolo indotto se essa é introdotta in un campo elettrico uniforme di modulo $E = 100\ V/m$. Il peso molecolare e la massa volumica dell'acqua sono rispettivamente: $M = 18.02$, $\delta = 998\ Kg/m^3$.

Confrontare il momento di dipolo indotto con quello di dipolo permanente della molecola d'acqua ($p_0 = 6.1 \cdot 10^{-30}\ C \cdot m$).

Applichiamo la formula di Clausius-Mossotti:

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{N(\epsilon_r + 2)}$$

dove N è il numero di molecole per unità di volume dato da:

$$N = \frac{N_A \delta}{M} \qquad \begin{array}{l} M = \text{peso molecolare acqua espresso in grammi} = 18.02\,g \\[2ex] \delta = \text{massa volumica espressa in g/m}^3 = 998 \cdot 10^3\, g/m^3 \end{array}$$

Segue

$$N = 3.335 \cdot 10^{28}\, \frac{molecole}{m^3}$$

e ricordando che $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\, F/m$ si ha per α

$$\alpha = 7.6732 \cdot 10^{-40}\, \frac{C^2 m}{N}$$

In definitiva il momento di dipolo indotto richiesto è:

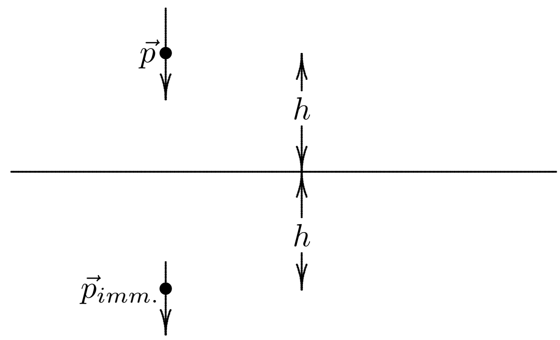
$$p_{ind.} = \alpha E = 7.6732 \cdot 10^{-40} \cdot 100 = \underline{\underline{7.6732 \cdot 10^{-38}\, C \cdot m}}$$

Il momento di dipolo permanente dell'acqua è:

$$p = \underline{\underline{6.1 \cdot 10^{-30}\, C \cdot m}}$$

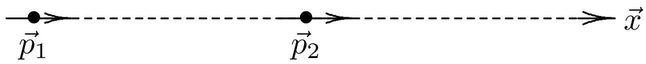
94-4) Esercizio n. 4 del 29/1/1994

Un dipolo elettrico il cui modulo del momento é $p = 1 \cdot 10^{-29}\ C \cdot m$ é posto ad un'altezza $h = 1\ cm$ al di sopra di un piano orizzontale perfettamente conduttore; il dipolo é orientato secondo la verticale verso il piano. Valutare l'immagine elettrostatica e la forza che si esercita fra dipolo e piano.



Affinché siano verificate le condizioni al contorno sul piano conduttore occorre che il dipolo immagine sia orientato come in figura.

La forza è quindi quella che si esercita fra due dipoli orientati in modo concorde e distanti $2h$.



Prendiamo l'origine in $\vec{p}_1$ e calcoliamo il campo da esso generato in $\vec{p}_2$.

$$\vec{E}_{(in\ \vec{p}_2)}(\vec{r}) = k\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} = k\frac{3px^2\hat{x} - px^2\hat{x}}{r^5} = k\frac{2p}{x^3}\hat{x}$$

Mentre

$$\vec{F}_2 = \vec{\nabla}\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(k\frac{2p^2}{x^3}\right) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{2p^2}{x^3}\right)\right]\hat{x} = -\frac{6kp^2}{x^4}$$

Per $x = 2h$ si ha:

$$x = 2h \Longrightarrow \vec{F} = -\frac{6p^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 16h^4} = -\frac{3p^2}{32\pi\epsilon_0 h^4}$$

La forza è attrattiva e vale:

$$|F| = \underline{\underline{3.37 \cdot 10^{-41}\ N}}$$

94-5) Esercizio n. 1 del 26/2/1994

Sia data una quantitá di gas CO_2 a temperatura $T = 273.15\ K$ e a pressione atmosferica normale. Si calcoli la polarizzabilitá molecolare del gas sapendo che, in tali condizioni, la costante dielettrica relativa é $\epsilon_r = 1.000988$. Da misure di viscositá si é dedotto che il raggio della molecola CO_2 é $a = 0.23 \cdot 10^{-9} m$. Confrontare tale valore del raggio molecolare con quelli che si ottengono assumendo che, in presenza di campo elettrico, la molecola si comporti come una sferetta perfettamente conduttrice o come una sferetta perfettamente dielettrica. Quale dei due modelli é piú vicino alla realtá sperimentale?

Per la formula di Clausus-Mossotti

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{N(\epsilon_r + 2)}$$

dove N si ricava dalla

$$N_A : 22.4 \cdot 10^{-3} = N : 1$$

$$N = \frac{N_A}{22.4 \cdot 10^{-3}} = 2.688 \cdot 10^{25}\, \frac{molecole}{m^3}$$

Segue che α è pari a:

$$\alpha = 3.2533 \cdot 10^{-40}\, \frac{C^2 m}{N}$$

Si ha:

$$\text{Sfera dielettrica } : \alpha = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} a^3 \Longrightarrow a^3 = \frac{\alpha(\epsilon_r + 2)}{4\pi\epsilon_0(\epsilon_r - 1)} = 8.88 \cdot 10^{-27}\, m^3$$

$$\Longrightarrow a_{diel.} = \underline{\underline{2.07 \cdot 10^{-9}\, m}}$$

$$\text{Sfera conduttrice } : \alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3 \Longrightarrow a^3 = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} = 2.92398 \cdot 10^{-30}\, m^3$$

$$\Longrightarrow a_{cond.} = \underline{\underline{0.143 \cdot 10^{-9}\, m}}$$

Poichè il raggio misurato è $a = 0.23 \cdot 10^{-9}\, m$ si rileva che la molecola si comporta approssimativamente come una sferetta conduttrice.

94-6) Esercizio n. 2 del 26/2/1994

Un piccolo campione costituito da un grammo di rame (massa volumica: $\delta = 8.96 \cdot 10^3$ Kg/m^3) é posto in un campo di induzione magnetica disuniforme in un punto in cui il modulo del campo, diretto ed orientato secondo l'asse $\vec{z}$, é $B_0 = 18\ KG$. Il modulo del campo diminuisce lungo tale asse con un gradiente che, nel punto considerato, é $\frac{dB}{dz} = 1700$ G/cm. Sul campione si esercita una forza diretta lungo l'asse $\vec{z}$, orientata, cioé, nel verso decrescente del campo; il modulo di essa é 2.6 $dyne$. Calcolare la permeabilitá magnetica relativa del rame.

Si ha:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{m} \cdot \vec{B}\right)$$

$$\vec{m} = \vec{M}v = \chi \vec{H} v = \chi \frac{B_0 \hat{z}}{\mu} v = \frac{(\mu_r - 1)}{\mu} v B_0 \hat{z}$$

$$\vec{F} = v \frac{\mu_r - 1}{\mu} \vec{\nabla}\left(B_0^2\right) = v \frac{\mu_r - 1}{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial z} B_0^2\right) \hat{z} = 2v \frac{\mu_r - 1}{\mu} B_0 \frac{\partial B_0}{\partial z} \hat{z}$$

Osserviamo subito che poichè $\dfrac{\partial B_0}{\partial z} < 0$ e la forza deve essere diretta verso $\hat{z}$ si ha che $\mu_r < 1$.

Il volume è:

$$v = \frac{m}{\delta} = \frac{1}{8.96}\, cm^3 = 0.1116\, cm^3 = 0.1116 \cdot 10^{-6}\, m$$

Quindi:

$$\frac{\mu_r - 1}{\mu_r} = \frac{F \mu_0}{2 v B_0 \dfrac{\partial B_0}{\partial z}} = -\frac{2.6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 0.1116 \cdot 10^{-6} \cdot 1.8 \cdot 17} = -4.7837 \cdot 10^{-6}$$

da cui

$$\mu_r - 1 = -4.7837 \cdot 10^{-6} \mu_r \Longrightarrow \mu_r = \frac{1}{1 + 4.7837 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{0.999952}}$$

N.B.: Ciò ricordando che $F\, in\, Newton = F\, in\, dyne \cdot 10^{-5}$ e $1G = 10^{-4}\, Wb/m^2$

94-7) Esercizio n. 3 del 26/2/1994

Una sfera cava di materiale magnetico é posta in un campo di induzione magnetica uniforme di intensitá $B_0 = 1000\ G$. Il diametro interno di tale strato sferico é $d = 5\ cm$. Calcolare l'intensitá dell'induzione magnetica nella parte cava nei casi in cui lo spessore dello strato sia 1 mm, 2 mm, 3 mm. Si assuma per la permeabilitá magnetica relativa del materiale di cui é costituito lo strato il valore $\mu_r = 1000$.

La formula per il campo dentro una sfera cava è:

$$B = \frac{9\mu_r B_0}{\left[(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^2}(\mu_r - 1)^2\right]}$$

Nel nostro caso $\mu_r = 1000$, $B_0 = 1000\, G = 0.1\, \frac{Wb}{m^2}$, $a = 2.5\, cm = 2.5 \cdot 10^{-2}\, m$.
Sia Δ lo spessore, segue $b = a + \Delta$, si ha:

$$\Delta = 1\, mm \quad B_{cava} = 0.0039\, \frac{Wb}{m^2} = \underline{\underline{\underline{39\, G}}}$$

$$\Delta = 2\, mm \quad B_{cava} = 0.0021\, \frac{Wb}{m^2} = \underline{\underline{\underline{21\, G}}}$$

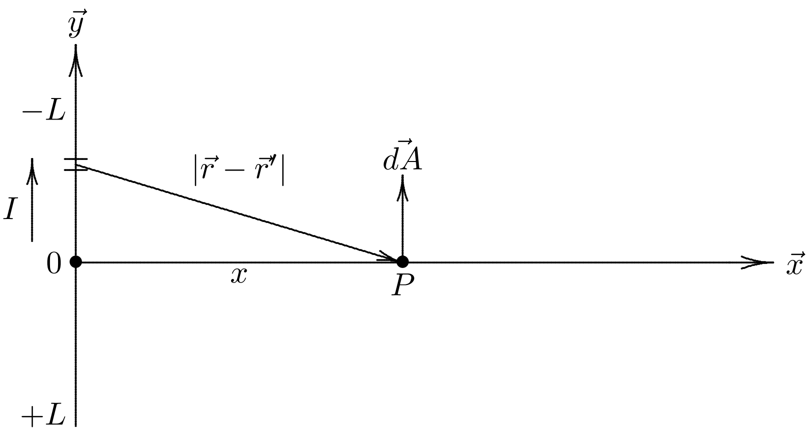
$$\Delta = 3\, mm \quad B_{cava} = 0.00154\, \frac{Wb}{m^2} = \underline{\underline{\underline{15\, G}}}$$

Se si usa la formula approssimata per $\mu_r \gg 1$ i risultati sono praticamente gli stessi:

$$B_{cava} = \frac{9B_0}{2\mu_r\left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right)}$$

94-8) Esercizio n. 4 del 26/2/1994

Sia dato un filo conduttore di lunghezza $2L$ percorso da una corrente di intensitá I. Ricavare l'espressione del potenziale vettore sui punti dell'asse del filo e dedurre l'espressione del vettore induzione magnetica. Verificare il risultato ottenuto eseguendo il calcolo mediante la prima legge di Laplace. ($\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + cost$).



Si ha:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{A}(x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^{+L} \frac{\hat{y}\, dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{y} \left[\ln \left| y + \sqrt{x^2+y^2} \right| \right]_{-L}^{+L} = \frac{\mu_0 I \hat{y}}{4\pi} \ln \frac{L + \sqrt{L^2+x^2}}{-L + \sqrt{L^2+x^2}}$$

Segue:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A_y & 0 \end{vmatrix} = -\hat{x} \frac{\partial A_y}{\partial z} + \hat{z} \frac{\partial A_y}{\partial x} = \hat{z} \frac{\partial A_y}{\partial x}$$

in quanto A è solo funzione di x.

Per cui

$$\vec{B} = \hat{z}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{-L+\sqrt{L^2+x^2}}{+L+\sqrt{L^2+x^2}}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\frac{2x}{2\sqrt{L^2+x^2}}\left(\sqrt{L^2+x^2}-L\right)-\frac{2x}{2\sqrt{L^2+x^2}}\left(\sqrt{L^2+x^2}+L\right)}{\left(\sqrt{L^2+x^2}-L\right)^2}\right] =$$

$$= -\hat{z}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{-L+\sqrt{L^2+x^2}}{+L+\sqrt{L^2+x^2}}\right)\frac{2xL}{\sqrt{L^2+x^2}\left(\sqrt{L^2+x^2}-L\right)^2} = -\hat{z}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2L}{x\sqrt{L^2+x^2}}$$

Per $L \longrightarrow \infty$ si ottiene la legge di Biot e Savart.
Applicando la legge di Laplace, si ha:

$$\vec{B}(x) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}x\hat{z}\int_{-L}^{+L}\frac{dy}{\left(y^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Ma (vedi Appunti)

$$\int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{\left(y^2\pm a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \left[\frac{\pm y}{a^2\sqrt{y^2\pm a^2}}\right]_{y_1}^{y_2}$$

Ne segue:

$$\vec{B}(x) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}x\hat{z}\left[\frac{y}{x^2\sqrt{y^2+x^2}}\right]_{-L}^{+L} = -\frac{\mu_0}{4\pi}I\times\hat{z}\frac{2L}{x^2\sqrt{L^2+x^2}} = -\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{2L}{x\sqrt{L^2+x^2}}\hat{z}$$

94-9) Esercizio n. 1 del 23/4/1994

Due piccole gocce d'acqua di forma sferica ($\epsilon_r = 81, \mu_r = 1$) sono poste in un campo elettrico uniforme orientato nel verso dell'asse x positivo e di modulo $E = 1000\ V/m$. La congiungente i centri delle gocce é orientata in direzione ortogonale al campo elettrico. Sia $a = 0.5\ mm$ il raggio di ciascuna goccia e sia $d = 2\ cm$ la distanza fra i loro centri. Calcolare in modulo, direzione e verso la forza che si esercita fra le gocce.

In presenza di campo elettrico ciascuna goccia si polarizza e costituirà un dipolo di momento

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} a^3 E_0 \hat{x}$$

(Vedi Appunti: Sfera dielettrica posta in un campo $\vec{E}$).

Ne segue che le due gocce si comportano come due dipoli paralleli posti a distanza d.

Il campo elettrico generato dal dipolo posto nell'origine è:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\left(\vec{p}\cdot\vec{r}\right)\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$$

Se il secondo dipolo è come in figura, $\vec{p}\cdot\vec{r} = 0$, per cui

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3} p\hat{x}$$

La forza che agisce sul secondo dipolo è:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{y^3}p^2\right) = \hat{y}\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3p^2}{d^4}\right]$$

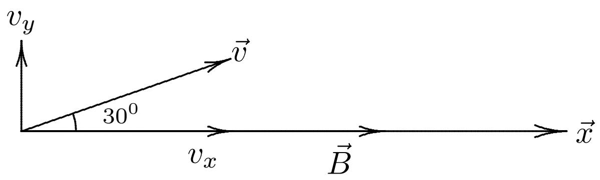
$$F = \frac{12\pi\epsilon_0}{d^4}\left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}\right)^2 a^6 E_0^2 = \underline{\underline{3\cdot 10^{-17}\,N}}$$

ed è repulsiva.

94-10) Esercizio n. 2 del 23/4/1994

Un protone ($m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}\ Kg$, $q = +1.6 \cdot 10^{-19}\ C$) penetra in un campo di induzione magnetica uniforme di intensitá $B = 1000\ G$. Il vettore velocitá, di modulo $v = 10^5\ m/s$, forma un angolo di 30^0 con la direzione del campo ed é orientato in modo tale che il verso del vettore componente lungo la direzione del campo abbia lo stesso verso di $\vec{B}$. Calcolare il raggio dell'orbita nel piano ortogonale alla direzione del campo nonché il passo dell'elica descritta dal protone.

Si ha:



La traiettoria sul piano ortogonale è una circonferenza il cui raggio è dato dalla:

$$m\frac{v_y^2}{r} = qv_yB$$

da cui

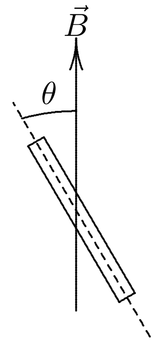
$$r = \frac{mv_y}{qB} = \frac{m}{q}\frac{v\sin 30^0}{B} = \underline{\underline{5.22\,mm}}$$

Infine il passo dell'elica è:

$$p = v_xT = v_x\frac{2\pi}{\omega} = v_x\frac{2\pi r}{v_y} = 2\pi r\cot 30^0 = \underline{\underline{56.8\,mm}}$$

94-11) Esercizio n. 3 del 23/4/1994

Un ago di bussola magnetica é posto in un campo di induzione magnetica di intensitá $B = 0.1G$; la direzione del campo e quella dell'aghetto sono complanari. Se il periodo delle piccole oscillazioni attorno alla direzione di equilibrio é $T = 1\ s$ e il momento di inerzia dell'ago é $I = 2.094 \cdot 10^{-11}\ Kg \cdot m^2$, calcolare il suo momento magnetico.



L'ago è sottoposto ad un momento meccanico

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

che tenderà ad allinearlo con il campo.

L'equazione del moto è:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + mB \sin\theta = 0$$

Nell'ipotesi di piccole oscillazioni $\sin\theta \simeq \theta$ si ha:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mB}{I}\theta = 0$$

Posto

$$\omega^2 = \frac{mB}{I} \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{mB}{I}} \Longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mB}}$$

da cui

$$m = 4\pi^2 \frac{I}{BT^2} = \underline{\underline{8.27 \cdot 10^{-5}\ A \cdot m^2}}$$

94-12) Esercizio n. 4 del 23/4/1994

Un lungo solenoide costituito da 300 spire per unitá di lunghezza é riempito di materiale paramagnetico di suscettivitá $\chi = -2 \cdot 10^{-3}$. Se nel solenoide circola una corrente di intensitá $I = 10A$, calcolare le correnti di magnetizzazione che circolano nel materiale. Si confronti il verso di tali correnti con quello (arbitrario) della corrente che circola nel solenoide.

Essendo il solenoide lungo, il campo nei punti interni è uniforme ed è espresso da:

$$B = \mu_0 n I$$

Ne segue che

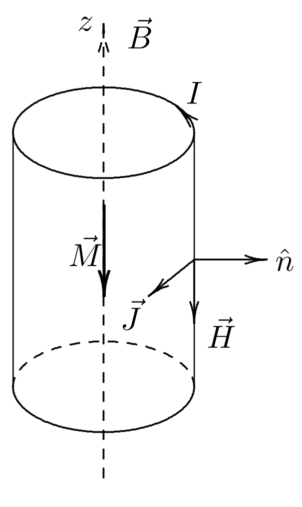
$$H = \frac{B}{\mu_0} = nI = 3000\,A/m$$

ed anche

$$\vec{M} = \chi \vec{H} = -6\hat{z}\,A/m$$

Poichè $\vec{B}$ è uniforme anche $\vec{M}$ è uniforme e le correnti di magnetizzazione sono soltanto superficiali.

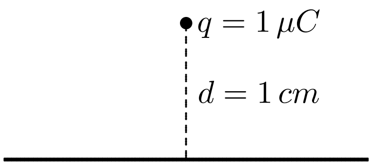
$$\vec{J_s} = \vec{M} \times \hat{n} \qquad |J_s| = |M| = 6\,A/m$$



Il verso delle correnti di magnetizzazione è opposto a quello della corrente I.

94-13) Esercizio n. 1 del 28/7/1994

Una carica elettrica puntiforme, $q = 1\ \mu C$, si trova ad una distanza $d = 1\ cm$ da un piano perfettamente conduttore. Calcolare la carica elettrica indotta su un cerchio, del piano, di raggio $r = 1\ cm$, avente per centro il piede della perpendicolare condotta dalla carica q al piano.



Si ha:

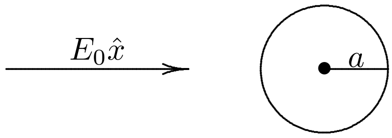
$$q_{ind} = -4\pi\epsilon_0 kqd \int_0^a \frac{r\,dr}{\left(r^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}} = qd\left[\frac{1}{\left(a^2+d^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{d}\right] = 10^{-8}\left[\frac{1}{\sqrt{2}d} - \frac{1}{d}\right] =$$

$$= 10^{-8}\,[70.71 - 100] = \underline{\underline{-2.93\cdot 10^{-7}\,C}}$$

La carica indotta è circa $\frac{1}{3}$ della carica inducente.

94-14) Esercizio n. 2 del 28/7/1994

Una sfera di costante dielettrica $\epsilon_r = 1.5$ é posta in un campo elettrico uniforme di modulo $E_0 = 1000\ V/m$. Calcolare, nei punti interni della sfera, il campo elettrico macroscopico $\vec{E}$, il vettore polarizzazione $\vec{P}$ ed il campo elettrico molecolare $\vec{E}_m$.



Il campo "macroscopico" all'interno del dielettrico è:

$$\vec{E} = \frac{3E_0}{\epsilon_r + 2}\hat{x} \Longrightarrow E = \underline{\underline{857.14\, V/m}}$$

Il vettore polarizzazione $\vec{P}$ è:

$$\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E} = \epsilon_0 \frac{3(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} E_0 = \epsilon_0 \frac{3(0.5)}{3.5} E_0 \hat{x} =$$

$$= 0.43\epsilon_0 E_0 \hat{x} \Longrightarrow P = \underline{\underline{3.8 \cdot 10^{-9}\, C \cdot m}}$$

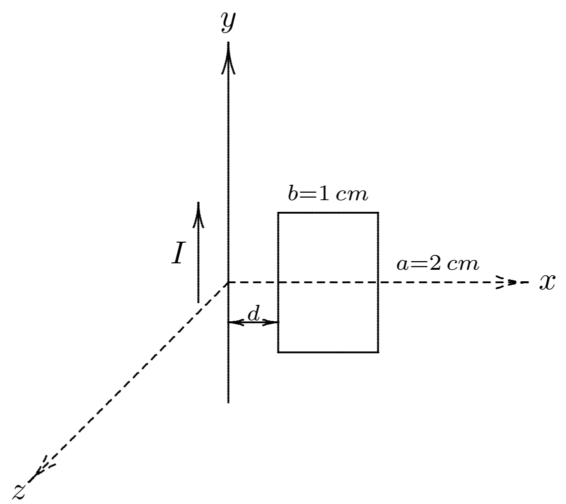
Infine il campo elettrico molecolare è:

$$\vec{E}_m = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = \vec{E} + \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{3\epsilon_0}\vec{E} = \vec{E}\left(1 + \frac{1}{3}\epsilon_r - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \vec{E}\left(\frac{2 + \epsilon_r}{3}\right) = E_0\hat{x}$$

94-15) Esercizio n. 3 del 28/7/1994

Un circuito rettangolare di lato largo $a = 2\ cm$ e lato corto $b = 1\ cm$ giace, in un piano, con il lato largo parallelo ad un filo infinitamente lungo percorso da una corrente $I = 1\ A$. Se il circuito si allontana dal filo con velocitá costante $v = 1\ m/s$ in direzione parallela al lato corto, scrivere l'espressione della f.e.m. indotta nel circuito e calcolarne il valore quando la distanza dal filo del lato largo piú vicino ad esso é $d = 1\ cm$ e $d = 2\ cm$



Si ha:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}\hat{z}$$

$$f.e.m. = \oint_\gamma \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{dl} = \oint_\gamma v_0\hat{x} \times \left(-\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}\right)\hat{z} \cdot (dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y}) =$$

$$= \oint_\gamma \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}v_0\,dy \qquad \text{essendo} \quad \hat{x} \times \hat{z} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\widehat{y}$$

$$= -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Ia}{x}v_0 + \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Ia}{x+b}v_0 = \frac{\mu_0}{2\pi}Iav_0\left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}Iav_0\frac{x-x-b}{x(x+b)} = -\frac{\mu_0}{2\pi}Iabv_0\frac{1}{x(x+b)} = -\frac{4\cdot 10^{-11}}{x(x+b)}$$

In definitiva:

$$\text{Per } x = 1\,cm \Longrightarrow F.e.m. = \underline{\underline{-2 \cdot 10^{-7}\,V}}$$

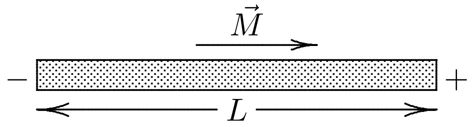
$$\text{Per } x = 2\,cm \Longrightarrow F.e.m. = \underline{\underline{-6.7 \cdot 10^{-8}\,V}}$$

94-16) Esercizio n. 4 del 28/7/1994

Una sottilissima calamita di forma cilindrica lunga $L = 10\ cm$ ed avente il diametro $d = 3\ mm$, é magnetizzata secondo la lunghezza ed il modulo di $\vec{M}$ é $M = 80000\ A/m$. Calcolare il vettore induzione magnetica al centro della calamita ed in un punto situato sull'asse ad una distanza $d = 5\ cm$ dal 'polo positivo', in approssimazione di polo puntiforme.

(vedi Compito di Fisica II: es.3 del 20/6/92)

Poichè il caso di punto esterno è già risolto nel suddetto compito, risolviamo il caso di punto interno.



Nei punti interni $U^*(\vec{r})$ è dato da:

$$U^*(x) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{MS_0}{L-x} - \frac{MS_0}{x}\right) \qquad x < L$$

$$\nabla U^*(x) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{MS_0}{(L-x)^2} + \frac{MS_0}{x^2}\right]$$

$$\vec{B}(x) = \mu_0\vec{M} - \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{MS_0}{(L-x)^2} + \frac{MS_0}{x^2}\right] \qquad x < L$$

essendo S_0 l'area della superficie di base del cilindro.

Per $x = \dfrac{L}{2}$ segue:

$$B\left(\frac{L}{2}\right) = \mu_0 M - \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{4MS_0}{L^2} + \frac{4MS_0}{L^2}\right)$$

$$= \mu_0 M - \frac{\mu_0}{4\pi} 8\frac{MS_0}{L^2} = 0.1 - 1.8 \cdot 10^{-4}$$

$$\simeq 0.1\,\frac{Wb}{m^2} = \underline{\underline{1000\,G}}$$

Fine Esercizi Fisica II - 1994