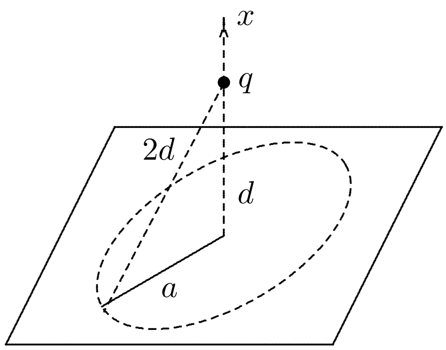
Esercizi svolti di Fisica generale II - Anno 1993

93-1) Esercizio n. 1 del 30/1/1993

Una piccola sfera metallica, sulla quale è uniformemente distribuita una quantità di carica $q = 1\,pC$, è situata ad una distanza $d = 1.5\,cm$ al di sopra di una superficie piana conduttrice infinitamente estesa e posta a potenziale zero. Calcolare la quantità di carica indotta su un cerchio del piano la cui circonferenza ha i punti che distano dalla sfera il doppio della distanza fra la sfera e il piano.



Il campo nei punti del piano $x = 0$ è:

$$E_x = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{d}{(d^2+r^2)^{3/2}}\right]$$

con $r^2 = y^2 + z^2$. Ed anche

$$\sigma_{ind} = \epsilon_0 E_x = -\frac{q}{2\pi}\frac{d}{(d^2+r^2)^{3/2}}$$

Il raggio a della circonferenza i cui punti distano $2d$ dalla sferetta (puntiforme) è

$$a^2 = 3d^2 \Longrightarrow a = \sqrt{3}d$$

La carica indotta dentro il cerchio di raggio a è:

$$Q_{ind} = -\frac{qd}{2\pi}\int_0^a \frac{2\pi r\,dr}{(d^2+r^2)^{3/2}} = -qd\left[-\frac{1}{(r^2+d^2)^{1/2}}\right]_0^a =$$

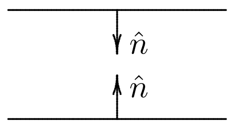
$$= -qd\left[-\frac{1}{(a^2+d^2)^{1/2}} + \frac{1}{d}\right] = -qd\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{2d}\right) = -\frac{1}{2}q = \underline{\underline{-0.5\,pC}}$$

dopo aver posto $a = \sqrt{3}d$.

La carica indotta è indipendente da d.

93-2) Esercizio n. 2 del 30/1/1993

Le armature di un condensatore piano hanno ciascuna una superficie di area $A = 50\,cm^2$; sia d la loro distanza e $V_0 = 400\,V$ la loro differenza di potenziale. Calcolare d affinchè la forza che bisogna applicare per allontanarle sia $F = 0.05\,N$.



Sulla superficie di ciascuna armatura agisce una densità superficiale di forza

$$\frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_{sup}^2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0}\hat{n}$$

La forza fra le armature è sempre attrattiva.

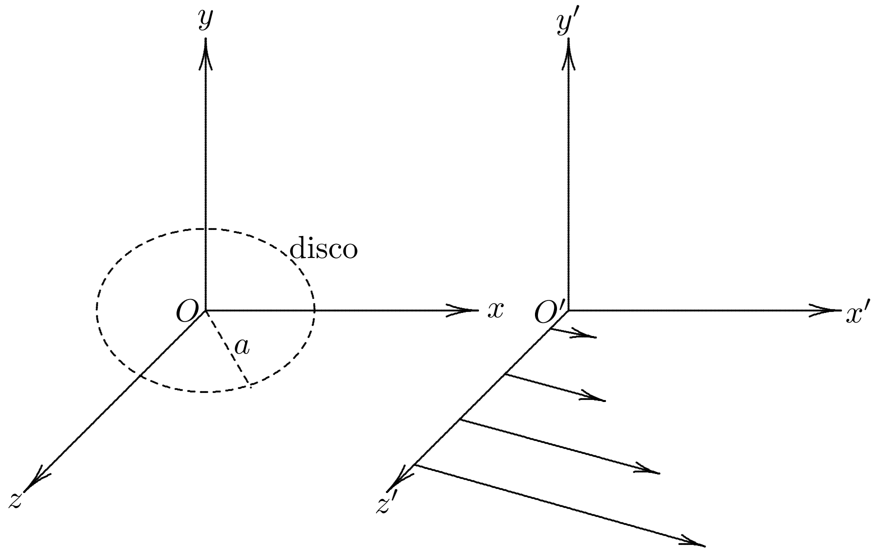
$$dF = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{V^2}{d^2} dS \Longrightarrow F = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{V^2}{d^2} S \qquad (\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\,F/m)$$

da cui:

$$d = \sqrt{\frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{V^2 S}{F}} = 2.66 \cdot 10^{-4}\,m = \underline{\underline{0.27\,mm}}$$

93-3) Esercizio n. 3 del 30/1/1993

L'asse di un disco metallico avente il diametro di $20\,cm$ ha la direzione del campo magnetico terrestre. Calcolare la differenza di potenziale fra il centro ed il bordo del disco, se esso ruota attorno al proprio asse con una velocità angolare di 3000 giri al minuto, assumendo che il modulo dell'induzione magnetica terrestre sia $0.5\,Gauss$.



Consideriamo un sistema S' che ruota nello stesso verso e con la stessa velocità angolare del disco. Consideriamo ad un istante prefissato tutti i punti del disco che si trovano sull'asse z; essi si muovono verso l'asse $x \equiv x'$ con velocità $v = \omega r$.

Applichiamo le leggi di trasformazione dei campi:

$$E'_x = E_x \qquad B'_x = B_x$$

$$E'_y = \gamma[E_y - vB_z] \qquad B'_y = \gamma\left[B_y - \frac{v}{c^2}E_z\right]$$

$$E'_z = \gamma[E_z + vB_y] \qquad B'_z = \gamma\left[B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right]$$

Nel nostro caso si ha:

$$E_x = E_y = E_z = 0$$

$$B_x = 0\,; \quad B_y = B_0\,; \quad B_z = 0$$

Ne segue che nel sistema S' si ha:

$$E'_x = 0\ ; \quad E'_y = 0\ ; \quad E'_z = \gamma v B_0$$

$$B'_x = 0\ ; \quad B'_y = \gamma B_y\ ; \quad B'_z = 0$$

Per $\gamma = 1$ i punti sul raggio del disco "vedono" un campo elettrico

$$E'_z = v B_0$$

Ne segue che:

$$d.d.p. = \int_0^a v B_0\, dr = \int_0^a \omega B_0 r\, dr = \frac{1}{2}\omega B_0 a^2$$

Risulta:

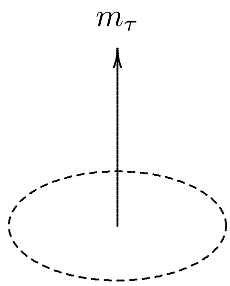
$$\begin{cases} B_0 = 0.5\ G = 0.5 \cdot 10^{-4}\ Wb/m^2 \\ a = 10\ cm = 10 \cdot 10^{-2}\ m \\ \omega = 3000\ giri/minuto = \dfrac{3000}{60}\ giri/s \end{cases}$$

Quindi:

$$d.d.p. = \frac{1}{2}\frac{3000}{60} \cdot 0.5 \cdot 10^{-4} \cdot (10 \cdot 10^{-2})^2 = 1.25 \cdot 10^{-5}\ V = \underline{\underline{12.5\,\mu V}}$$

93-4) Esercizio n. 4 del 30/1/1993

Il momento di dipolo magnetico della Terra è $m_T = 6.4 \cdot 10^{21}\, Am^2$; calcolare l'intensità di corrente che dovrebbe fluire in una spira che circondi la Terra all'equatore perchè possa produrre a distanza lontana dalla superficie terrestre lo stesso campo magnetico. Il raggio della Terra è $6400\, Km$.

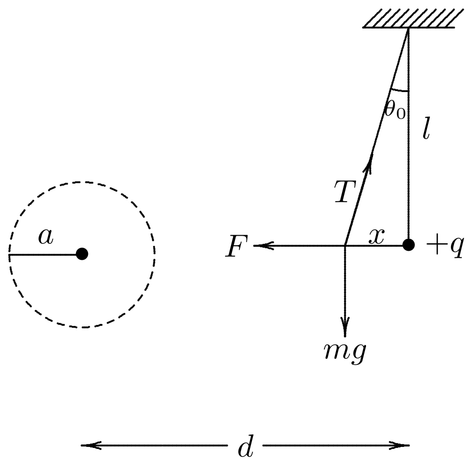


La spira deve avere lo stesso momento magnetico.

$$I \pi a^2 = m_\tau \Longrightarrow I = \frac{m_\tau}{\pi a^2} = \underline{\underline{49.7 \cdot 10^6\, A}}$$

93-5) Esercizio n. 1 del 27/2/1993

Una piccola pallina di massa m è tenuta sospesa lungo la verticale per mezzo di un filo di seta lungo l e vincolato ad un estremo. Ad una distanza d, sul piano orizzontale, dal centro di tale pallina, si trova il centro di una sfera conduttrice di raggio a e posta a potenziale zero e fissa nella sua posizione. Se si carica la pallina con una quantità di carica $+q$, determinare, all'equilibrio, l'angolo che il filo di seta forma con la verticale, nell'ipotesi di piccoli spostamenti e che $d \gg a$. (Si approssimi: $\frac{1}{(1-y)^3} \simeq 1 + 3y$).



La piccola pallina si considera puntiforme. La sfera conduttrice si carica e sulla carica puntiforme si eserciterà una forza attrattiva che farà spostare la piccola pallina dalla sua posizione di equilibrio; per effetto della gravità la pallina si fermerà quando il filo di seta raggiunge un angolo θ_0. Data la lontananza della pallina dalla sfera si può confondere l'arco con un segmento x nella stessa direzione congiungente i due centri. Si ha:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q^2 \frac{a}{(d-x)^3} \frac{1}{\left[1 - \dfrac{a^2}{(d-x)^2}\right]^2} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q^2 \frac{a}{d^3\left(1 - \dfrac{x}{d}\right)^3} \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 a}{d^3} \left(1 + 3\frac{x}{d}\right)$$

avendo trascurato la quantitá $\dfrac{a^2}{(d-x)^2}$ rispetto a 1.

All'equilibrio si ha:

$$T \sin\theta = F \; ; \quad T\cos\theta = mg$$

da cui

$$\tan\theta = \frac{F}{mg} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2 a}{d^3 mg} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2 a}{d^3 mg}\frac{3l}{d}\tan\theta$$

avendo posto $x = l\tan\theta$.

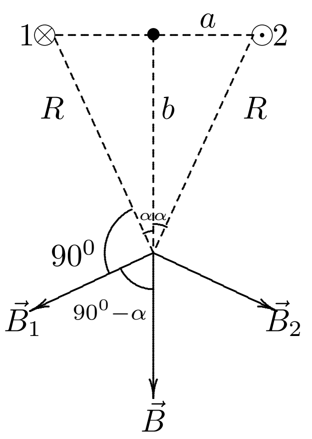
Quindi:

$$\tan\theta = \frac{\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q^2 a}{d^3 mg}}{\left(1 - \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q^2 a}{d^3 mg}\dfrac{3l}{d}\right)}$$

93-6) Esercizio n. 2 del 27/2/1993

Due fili paralleli verticali si trovano ad una distanza $2a$ e trasportano in verso opposto la stessa intensità di corrente I. In un punto equidistante dai fili e ad una distanza b dal loro piano, è posto un piccolo ago magnetico. Se il modulo del suo momento magnetico è m e il suo momento di inerzia è J, determinare il periodo delle piccole oscillazioni dell'aghetto.

Il piano del foglio sia il piano orizzontale. La figura è:



Il modulo dei campi B_1 e B_2 è:

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$B = 2\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha = 2\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\mu_0}{\pi}\frac{Ia}{a^2+b^2}$$

L'aghetto si orienterà lungo la direzione del campo magnetico.

Detto θ l'angolo fra la direzione del campo e quella del momento magnetico, l'equazione del moto è:

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + mB\sin\theta = 0$$

per piccole oscillazioni $\sin\theta \simeq \theta$ e si ha:

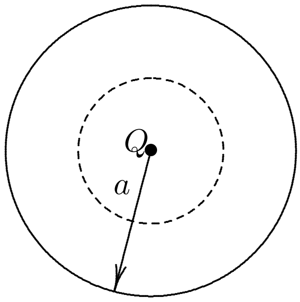
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mB}{J}\theta = 0$$

Posto $\omega^2 = \dfrac{mB}{J}$, l'aghetto compirà piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio (la direzione del campo $\vec{B}$) con un periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Segue

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mB}} = 2\sqrt{\frac{\pi^3 J(a^2 + b^2)}{\mu_0 I a m}}$$

93-7) Esercizio n. 3 del 27/2/1993

Una sfera di raggio a ha una costante dielettrica relativa ϵ_r. Una carica Q si trova nel suo centro. Calcolare la densità di carica di polarizzazione sulla superficie della sfera e la carica totale su tale superficie.



Si ha:

$$\oint_S \vec{D}\cdot\hat{n}\,da = Q \Longrightarrow D4\pi r^2 = Q \Longrightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

ma

$$D = \epsilon_0\epsilon_r E \Longrightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\epsilon_r r^2}$$

Ed è anche

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} \Longrightarrow \vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}$$

Quindi

$$\vec{P} = (\epsilon_r - 1)\frac{Q}{4\pi\epsilon_r r^2}\hat{r}$$

In definitiva

$$\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}_{/r=a} = \frac{Q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r a^2}$$

$$Q_p = \sigma 4\pi a^2 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}Q$$

93-8) Esercizio n. 4 del 27/2/1993

La densità del rame è $8.92\, gcm^{-3}$; il suo peso atomico è 63.5; a) calcolare il numero di atomi per unità di volume; b) se il modulo della densità di corrente è $J = 10^3\, Am^{-2}$, trovare la velocità degli elettroni, assumendo che vi è un elettrone di conduzione per atomo.

Si ha:

$$N_A : 63.5 = n : 8.92 \qquad\qquad N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$$

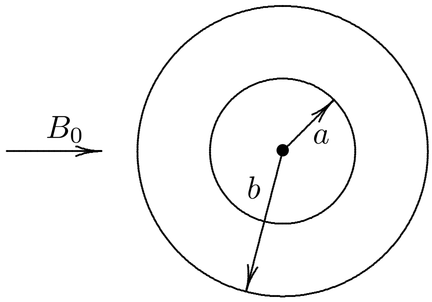
$$n = \frac{8.92 \cdot N_A}{63.5} = 8.46 \cdot 10^{22} \frac{atomi}{cm^3} = \underline{\underline{8.46 \cdot 10^{28} \frac{atomi}{m^3}}}$$

Inoltre

$$J = nev \Longrightarrow v = \frac{J}{ne} = \frac{10^3}{8.46 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} = 7.39 \cdot 10^{-8}\, m/s = \underline{\underline{7.39 \cdot 10^{-6}\, cm/s}}$$

93-9) Esercizio n. 1 del 26/6/1993

Un piccolo dispositivo elettronico deve essere schermato da un campo magnetico statico uniforme di intensità $B_0 = 20000\,Gauss$. Esso viene inserito all'interno di una sfera cava di materiale magnetico. Se il raggio interno della sfera è molto più piccolo del raggio esterno, calcolare la permeabilità magnetica relativa del materiale di cui è costituita la sfera perchè il campo nella zona cava diventi $B = 20\,Gauss$.



Nella zona cava ($r < a$) si ha:

$$B_r = \frac{9\mu_r B_0 \cos\theta}{\left[(2\mu_r+1)(\mu_r+2) - 2\dfrac{a^3}{b^3}(\mu_r-1)^2\right]}$$

$$B_\theta = -\frac{9\mu_r B_0 \sin\theta}{\left[(2\mu_r+1)(\mu_r+2) - 2\dfrac{a^3}{b^3}(\mu_r-1)^2\right]}$$

Per $a \ll b$ si ha:

$$B_r \simeq \frac{9\mu_r B_0 \cos\theta}{(2\mu_r+1)(\mu_r+2)}$$

$$B_\theta \simeq -\frac{9\mu_r B_0 \sin\theta}{(2\mu_r+1)(\mu_r+2)}$$

Il campo interno ($r < a$), in questa approssimazione e in coordinate cartesiane è:

$$B_x = B_r \cos\theta - B_\theta \sin\theta = \frac{9\mu_r B_0}{(2\mu_r+1)(\mu_r+2)}$$

$$B_y = B_r \sin\theta + B_\theta \cos\theta = 0$$

Il modulo di B nella zona cava è:

$$B = \frac{9\mu_r B_0}{(2\mu_r+1)(\mu_r+2)}$$

da cui

$$2\mu_r^2 + 4\mu_r + \mu_r + 2 = 9\mu_r \frac{B_0}{B}$$

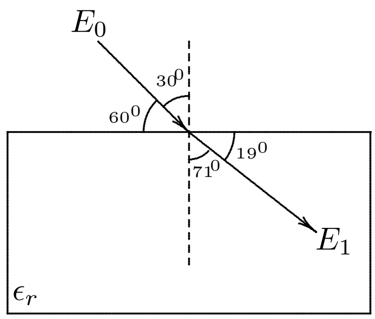
$$2\mu_r^2 + \mu_r \left(5 - 9\frac{B_0}{B}\right) + 2 = 0$$

$$\text{per} \quad \frac{B_0}{B} = \frac{20000}{20} = 1000 \Longrightarrow 2\mu_r^2 - 8995\mu_r + 2 = 0$$

$$\mu_r = \frac{8995 \pm \sqrt{8995^2 - 16}}{4} = \begin{cases} \mu_{r_1} = \underline{\underline{4497.5}} \\ \\ \mu_{r_2} = \underline{\underline{2.2225 \cdot 10^{-4}}} \end{cases}$$

93-10) Esercizio n. 2 del 26/6/1993

Una lastra di materiale dielettrico, infinitamente estesa, e sottoposta, in aria, ad un campo elettrico statico che giace in un piano ortogonale al piano della lastra. Se la direzione del campo elettrico in aria forma un angolo di 30^0 con la normale della lastra, mentre nel dielettrico tale angolo diventa 71^0, calcolare la costante dielettrica relativa del materiale.



$$E_{\parallel 0} = E_{\parallel 1}$$

$$D_{\perp 0} = D_{\perp 1}$$

$$E_0 \cos 60^0 = E_1 \cos 19^0$$

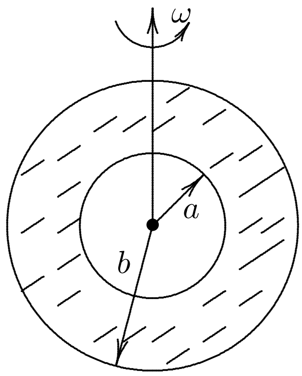
$$\epsilon_0 E_0 \cos 30^0 = \epsilon_0 \epsilon_r E_1 \cos 71^0$$

Dividendo membro a membro si ha:

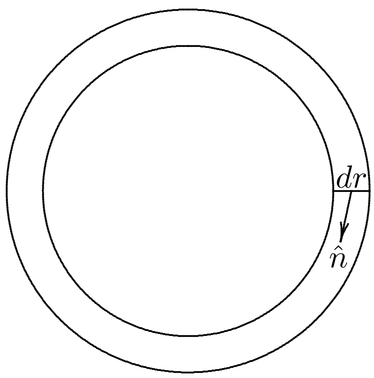
$$\boxed{\epsilon_r = \frac{\tan 60^0}{\tan 19^0} = 5.03}$$

93-11) Esercizio n. 3 del 26/6/1993

Su una sottile rondella circolare, di materiale isolante, è distribuita uniformemente una carica di densità superficiale σ. Se a è il raggio interno e b quello esterno, calcolare l'espressione del modulo del campo magnetico sull'asse della rondella, nell'ipotesi che essa ruoti attorno al proprio asse con velocità angolare ω. Si tenga presente che: $\int \frac{x^3 dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = (x^2 + a^2)^{1/2} + \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{1/2}} + C$.



Poichè sulla superficie della rondella c'è una densità superficiale di carica, appena la rondella ruota si viene a creare una densità di corrente superficiale $\vec{J}_S = Ne\vec{v}$ dove Ne è la quantità di carica per unità di superficie cioè σ. Il modulo di tale densità di corrente è $J_S = \sigma\omega r$ (essendo $v = \omega r$); pertanto esso dipende dalla distanza dal centro. Per calcolare l'intensità di corrente equivalente, si consideri una corona circolare di larghezza infinitesima dr. Si ha:



$$dI = \vec{J} \cdot \hat{n}\, dr$$

$\vec{J}$ ed $\hat{n}$ sono paralleli,

$$dI = \sigma\omega r\,dr \Longrightarrow I_{tot} = \sigma\omega \int_a^b r\,dr = \frac{\sigma\omega}{2}(b^2 - a^2)$$

In un generico punto P il contributo al campo di induzione magnetica dovuto alla corona circolare infinitesima percorsa dalla corrente dI è quello competente ad una spira percorsa dalla stessa corrente e di raggio r.

Si ha:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} dI \frac{2\pi r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

per cui

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\sigma\omega 2\pi \int_a^b \frac{r^3\,dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\int_a^b \frac{r^3\,dr}{\left(r^2 + z^2\right)^{3/2}} = \left(b^2 + z^2\right)^{1/2} + \frac{z^2}{\left(b^2 + z^2\right)^{1/2}} - \left(a^2 + z^2\right)^{1/2} - \frac{z^2}{\left(a^2 + z^2\right)^{1/2}} =$$

$$= \left(\frac{b^2 + 2z^2}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{a^2 + 2z^2}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right)$$

$$B = \frac{\mu_0 \sigma\omega}{2}\left(\frac{b^2 + 2z^2}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{a^2 + 2z^2}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right)$$

Per $z = 0$ si ha:

$$B = \frac{\mu_0 \sigma\omega}{2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

93-12) Esercizio n. 4 del 26/6/1993

Si abbia un campione di materiale paramagnetico il cui momento di dipolo atomico è uguale a 2 magnetoni di Bohr (1 magnetone di Bohr è $9.2741\cdot 10^{-24}\, A\cdot m^2$). Se il campione è sottoposto ad un campo magnetico $B = 10000\, Gauss$ e la sua temperatura è $T = 300^0 K$, calcolare il rapporto fra la magnetizzazione attuale e quella di saturazione.

Per un campione di materiale i cui atomi abbiano momento magnetico proprio (per esempio: materiale paramagnetico) ed in presenza di agitazione termica si ha:

$$M = Nm_0 \mathscr{L}(y) \qquad \text{con} \quad y = \frac{Bm_0}{KT}$$

dove Nm_0 è la magnetizzazione di saturazione M_S. Si ha, quindi:

$$\frac{M}{M_S} = \mathscr{L}(y)$$

Calcoliamo y, dai dati numerici si ha:

$$B = 10000\, G = 1\, Wb/m^2\, ; \;\; K = 1.38\cdot 10^{-23}\, J^0 K^{-1}\, ; \;\; m_0 = 2\cdot 9.2741\cdot 10^{-24}\, ; \;\; T = 300^0 K$$

$$y = \frac{Bm_0}{KT} = 44.8\cdot 10^{-4}$$

La funzione di Langevin è:

$$\mathscr{L}(y) = \left\{ \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} - \frac{1}{y} \right\}$$

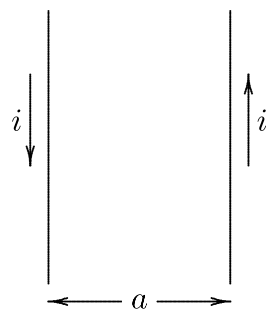
che per $y << 1$ diventa:

$$\mathscr{L}(y) = \frac{1}{3} y = 1.49\cdot 10^{-3} = 0.00149$$

Quindi il materiale presenta una magnetizzazione che è lo 0.15% di quella di saturazione.

93-13) Esercizio n. 2 del 17/7/1993

L'antenna di un filobus è costituita da due barre parallele nelle quali, con verso opposto, scorre una corrente di $200\,A$. Calcolare la forza per unità di lunghezza che si esercita fra le barre se la loro distanza è di $20\,cm$.

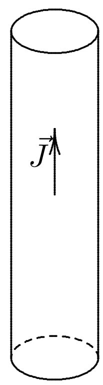


Le barre si respingono:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{a} = \underline{\underline{0.04\,N}}$$

93-14) Esercizio n. 3 del 17/7/1993

Si abbia un conduttore cilindrico di raggio a, il cui asse coincide con l'asse z di un sistema di riferimento. In essa scorre una corrente caratterizzata da un vettore densità di corrente $\vec{J} = J\hat{z}$ con J costante. Posto $A = 0$ per $r = a$, determinare il potenziale vettore dentro il conduttore utilizzando l'equazione della magnetostatica $\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$



L'equazione è:

$$\nabla^2 A = -\mu_0\vec{J}$$

Utilizziamo coordinate cilindriche, il potenziale vettore ha lo stesso verso di $\vec{J}$ e non dipende da ϕ e da z:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z}{\partial r}\right) = -\mu_0 J$$

$$r\frac{\partial A_z}{\partial z} = -\mu_0 J\frac{r^2}{2} + C$$

$$A_z = -\frac{1}{2}\mu_0 J\frac{1}{2}r^2 + C\ln r + C_1$$

Per $r = a$ si ha:

$$0 = -\frac{1}{2}\mu_0 J\frac{a^2}{2} + C\ln a + C_1$$

da cui:

$$C_1 = \frac{1}{2}\mu_0 J\frac{a^2}{2} - C\ln a$$

Quindi

$$A_z = -\frac{\mu_0}{4}J(r^2 - a^2) - C\ln a$$

Il potenziale vettore risulta, quindi, definito a meno di una costante arbitraria; Di solito si impone che $A_z = 0$ sulla superficie del conduttore, quindi deve essere $C = 0$.

93-15) Esercizio n. 4 del 17/7/1993

Un solenoide è lungo $5\,cm$ ed ha una sezione trasversale di $1\,cm^2$. In esso scorre una corrente di $2\,A$ ed è costituito da 1000 spire. Calcolare l'intensità di polo magnetico di una barra cilindrica delle stesse dimensioni del solenoide equivalentemente magnetizzata.

Il numero di spire per unità di lunghezza è:

$$n = \frac{N}{l} = \frac{1000}{5 \cdot 10^{-2}} = 20000$$

Segue

$$nI = 40000\,A/m \text{ (corrente per unita}' \text{ di lunghezza)}$$

M è diretto lungo z in quanto $\vec{M} \times \hat{n}$ è diretto lungo ϕ.

$$M = nI = 4 \cdot 10^4\,A/m$$

La densità superficiale di intensità di polo magnetico è

$$\sigma = \vec{M} \cdot \hat{n}$$

L'intensità di polo magnetico è:

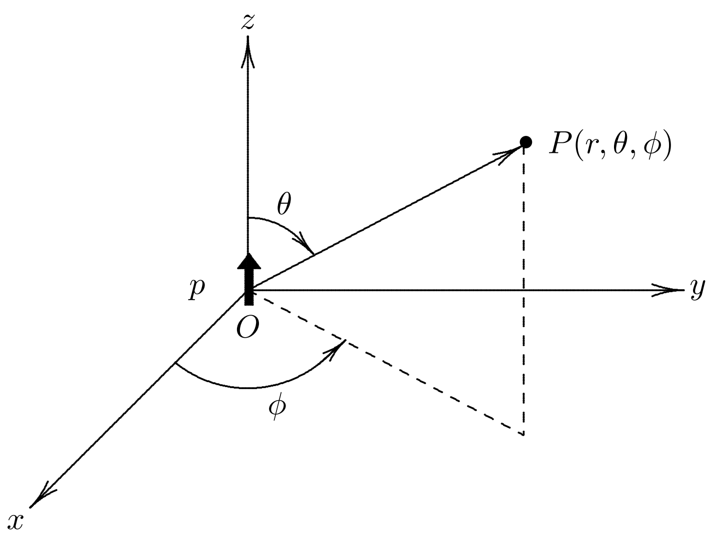
$$\sigma A = MA$$

$$\sigma A = \underline{\underline{4\,Am}}$$

93-16) Esercizio n. 1 del 25/9/1993

Verificare esplicitamente che l'espressione del potenziale di un dipolo elettrico verifica l'equazione di Laplace.

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano e utilizziamo coordinate sferiche:



In coordinate sferiche, per un dipolo posto nell'origine e orientato secondo l'asse z, il potenziale di un dipolo non dipende da ϕ ed è:

$$U_{dip} = kp\frac{\cos\theta}{r^2} \tag{1}$$

In coordinate sferiche l'equazione di Laplace, non dipendente da ϕ, si scrive:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) = 0$$

Verifichiamo che la (1) soddisfa l'equazione di Laplace. Si ha:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = kp\left(-\frac{2}{r^3}\right)\cos\theta$$

ossia:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left[kp\left(-\frac{2}{r}\right)\cos\theta\right] = kp\frac{2}{r^2}\cos\theta$$

Quindi:

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) = kp\frac{2}{r^4}\cos\theta} \tag{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -kp\frac{\sin\theta}{r^2}$$

$$\sin\theta\frac{\partial U}{\partial \theta} = -kp\frac{\sin^2\theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) = -\frac{kp}{r^2}2\sin\theta\cos\theta$$

Quindi

$$\boxed{\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) = -\frac{2kp}{r^4}\cos\theta} \tag{3}$$

Sostituendo la (2) e la (3) nell'equazione di Laplace si ha la richiesta immediata verifica.

93-17) Esercizio n. 2 del 25/9/1993

Un elettrone atomico ruota in un'orbita di raggio $a_0 = 0.528 \cdot 10^{-10}\, m$ (raggio di Bohr). Calcolare il momento magnetico di dipolo associato al moto dell'elettrone e calcolare il campo magnetico sull'asse dell'orbita ad una distanza $r = 30a_0$, utilizzando l'approssimazione dipolare.

Il momento magnetico è definito:

$$m = I\pi a_0^2$$

La corrente I per una carica singola in moto su un'orbita si definisce:

$$I = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{dq}{dt}dt = \frac{e}{\tau}$$

dove τ è il tempo impiegato per descrivere l'orbita cioè il periodo. Esso si ottiene:

$$m_e\omega^2 a_0 = k\frac{e^2}{a_0^2}$$

dove $k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$. Segue

$$\omega^2 = \frac{ke^2}{m_e a_0^3} \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{ke^2}{m_e a_0^3}} \Longrightarrow \tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m_e a_0^3}{ke^2}}$$

dove $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\, Kg$ ed $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\, C$. Quindi:

$$m = \frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{ke^2}{m_e a_0^3}}\pi a_0^2 = \frac{e^2}{2}a_0\sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 m_e a_0}} = \underline{\underline{9.2638 \cdot 10^{-24}\, A \cdot m^2}}$$

Questo risultato importante è il magnetone di Bohr ($\mu_B = 9.274 \cdot 10^{-24}\, Am^2$). La discrepanza fra i due valori è dovuta alle leggere differenze e approssimazioni nelle costanti (per esempio il valore più esatto di a_0 è $0.529 \cdot 10^{-10}\, m$).

Il campo magnetico generato da questo momento magnetico di dipolo è:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\,(\vec{m}\cdot\hat{n})\,\hat{n} - \vec{m}}{r^3}\right]$$

Nel caso di $\vec{m} \parallel \hat{n}$ si ha:

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m}{r^3}$$

per $r = 30a_0$ segue

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m}{(30a_0)^3} = 4.66 \cdot 10^{-4}\, Wb/m^2 = \underline{\underline{4.66\, Gauss}}$$

Il campo generato da un elettrone orbitale atomico è abbastanza elevato anche in punti distanti. E' facile verificare che l'approssimazione dipolare è ottima attraverso il confronto con il campo generato da una spira percorsa da corrente in un punto sul proprio asse ad una distanza pari a trenta volte il raggio della spira.

93-18) Esercizio n. 4 del 25/9/1993

La suscettività magnetica di una mole di gas elio è $\chi = -2.4 \cdot 10^{-11}$. Mostrare che questo valore corrisponde ad un raggio quadratico medio dell'orbita elettronica nell'atomo di elio di $1.22 a_0^2$ dove a_0 è il raggio della prima orbita dell'atomo di idrogeno.

Si ha:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0(1+\chi_m)} \simeq \frac{\vec{B}}{\mu_0}\chi_m$$

Per le formule studiate per il diamagnetismo si ha:

$$\frac{\chi_m}{\mu_0} = \frac{NZe^2 < r^2 >}{6m_e}$$

dove essendo χ_m data per una mole di gas N è N_A (numero di Avogadro). Si ha:

$$< r^2 >= \frac{6m_e\chi_m}{\mu_0 NZe^2} = \frac{1.31 \cdot 10^{-40}}{3.88 \cdot 10^{-20}} = 3.376 \cdot 10^{-21}\, m^2$$

($Z = 2$; $N_A = 6 \cdot 10^{23}$; $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\, Kg$) che è praticamente eguale a $1.22 a_0^2 = 3.4 \cdot 10^{-21}\, m^2$, dove $a_0 = 0.528 \cdot 10^{-10}\, m$

Fine Esercizi Fisica II - 1993