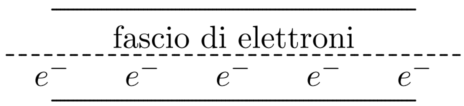
Esercizi svolti di Fisica generale II - Anno 1991

91-1) Esercizio n. 1 del 15/6/1991

Un fascio di elettroni ha forma cilindrica di raggio a e densità di carica costante. Calcolare, utilizzando l'equazione di Poisson, il campo elettrico nei punti interni ed esterni al fascio.



Scriviamo l'equazione di Poisson in coordinate cilindriche con la sola parte radiale $\nabla^2\Phi = -4\pi k\rho$ per i punti interni:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = -4\pi k\rho$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = -4\pi k r\rho$$

$$r\frac{d\Phi}{dr} = -2\pi k r^2\rho + cost$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = -2\pi k r\rho + \frac{cost}{r}$$

Segue

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{d\Phi}{dr}\hat{e}_r = 2\pi k r\rho\hat{e}_r - \frac{cost}{r}\hat{e}_r$$

Ma $cost = 0$ perchè per $r = 0 \Longrightarrow \vec{E}(0) = 0$, quindi per $0 \le r \le a$

$$\vec{E}_{(r<a)} = 2\pi k r\rho\hat{e}_r = \frac{1}{2\epsilon_0}\rho r\hat{e}_r$$

Per $r > a$ $\rho = 0$ e l'equazione è quella di Laplace

$$\nabla^2\Phi = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi}{dr}\right) = 0$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{cost}{r}$$

$$\vec{E}_{(r>a)} = -\frac{d\Phi}{dr}\hat{e}_r$$

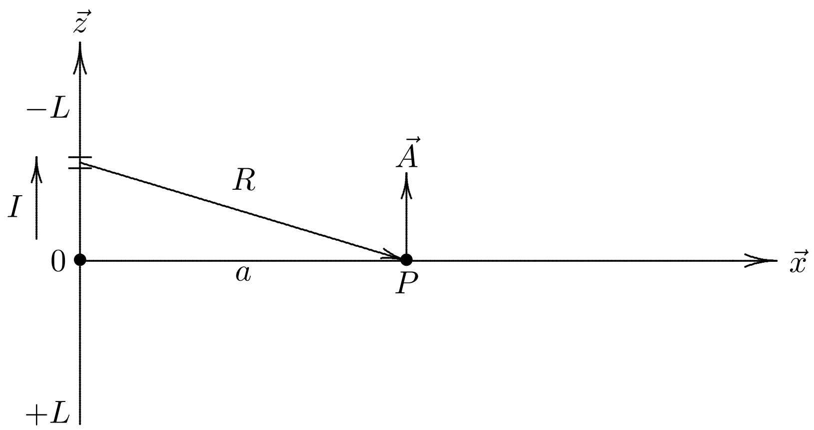
La costante $cost$ si trova imponendo che per $r = 0$ $E_{(r<a)}(a) = E_{(r>a)}(a)$, quindi

$$\frac{1}{2\epsilon_0}\rho a = -\frac{cost}{a} \Longrightarrow cost = -\frac{1}{2\epsilon_0}\rho a^2$$

$$E_{(r>a)} = \frac{1}{2\epsilon_0}\rho a^2 \frac{1}{r}\hat{e}_r$$

91-2) Esercizio n. 2 del 15/6/1991

Sia dato un filo conduttore di lunghezza finita pari a $2L$. Se esso è percorso da corrente I, determinare il potenziale vettore nel punto P sull'asse del filo. Si tenga presente che: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + cost.$



Si ha:

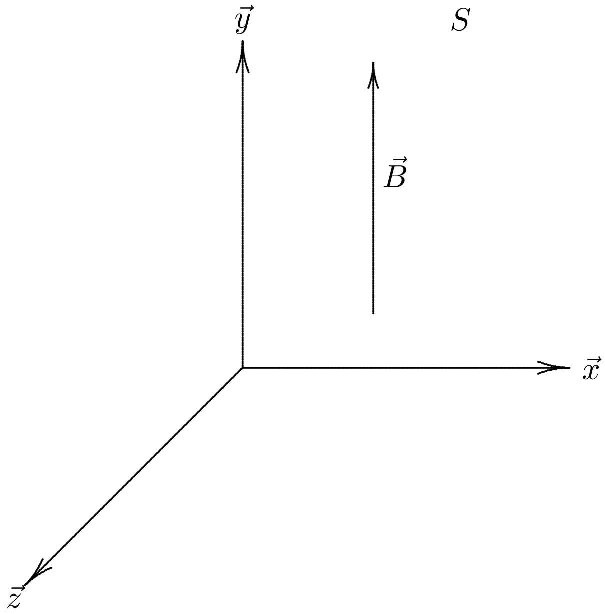
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}\,dv}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{z}\int \frac{I\,dz}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} I\hat{z}\int_{-L}^{+L}\frac{dz}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I\hat{z}\ln\frac{L+\sqrt{a^2+L^2}}{-L+\sqrt{a^2+L^2}}$$

Il valore assoluto si può omettere perchè il numeratore e il denominatore sono sempre positivi. Se invertiamo il verso della corrente anche $\vec{A}$ cambia verso.

91-3) Esercizio n. 3 del 15/6/1991

Un protone cosmico ultrarelativistico ($\gamma = 1.064 \cdot 10^6$, $v \simeq c$) si avvicina alla Terra muovendosi perpendicolarmente ad un campo magnetico di $0.1\,Gauss$. Calcolare il valore del campo elettrico e del campo magnetico osservati nel sistema di riferimento solidale al protone.



Sia v verso l'asse x positivo in S e sia $\vec{B}$ diretto verso l'asse y positivo.
In S:

$$E_x = E_y = E_z = 0\ ; \quad B_x = B_z = 0\ ; \quad B_y = 0.1\,G$$

In S':

$$\begin{array}{ll} E'_x = 0 & B'_x = 0 \\ E'_y = 0 & B'_y = \gamma B_y \\ E'_z = \gamma v B_y & B'_z = 0 \end{array}$$

Per $\gamma = 1.064 \cdot 10^6$ e $v \simeq c$ segue

$$E'_z = \underline{\underline{3.2 \cdot 10^9\,V/m}} \qquad B'_y = \underline{\underline{1.064 \cdot 10^5\,Gauss}}$$

91-4) Esercizio n. 4 del 15/6/1991

La suscettività paramagnetica di un composto il cui peso molecolare è 400 e la cui densità è $2 \cdot 10^3\, Kg \cdot m^{-3}$ è data dalla formula $\chi_m = \frac{7.3 \cdot 10^{-2}}{T}$ dove T è la temperatura assoluta. Calcolare il momento di dipolo permanente associato a ciascuna molecola.

$$K = 1.38 \cdot 10^{-23}\, J^0 K^{-1}\ ; \quad N_A = 6.022 \cdot 10^{23}\, mol^{-1}\ ; \quad P.M. = 400$$

Quindi il numero di atomi per unità di volume è:

$$N_A : 0.4 = N : 2 \cdot 10^3$$

$$N = \frac{N_A \cdot 2 \cdot 10^3}{0.4} = 3.011 \cdot 10^{27}\, \frac{atomi}{m^3}$$

Inoltre

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \frac{\chi_m}{\mu_0}\vec{B} - \chi_m \vec{M}$$

$$\vec{M}(1 + \chi_m) = \frac{\chi_m}{\mu_0}\vec{B}$$

$$\vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0(1 + \chi_m)}\vec{B}$$

Ma

$$\vec{M} \simeq \frac{N m_0^2}{3KT}\vec{B}$$

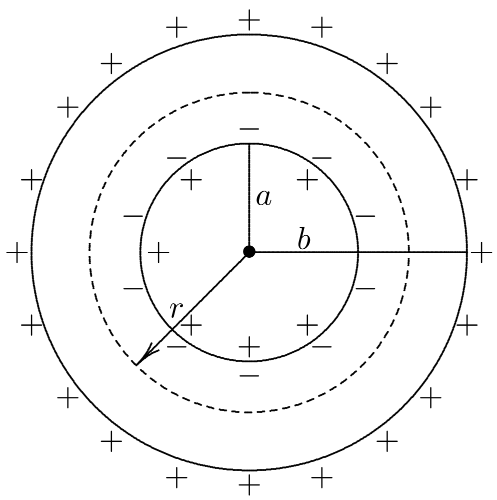
per cui se T non è molto bassa

$$\frac{\chi_m}{\mu_0} = \frac{N m_0^2}{3KT} \Longrightarrow \frac{1}{\mu_0}\frac{7.3 \cdot 10^{-2}}{T} = \frac{N m_0^2}{3KT}$$

$$m_0^2 = \frac{3K}{\mu_0 N} 7.3 \cdot 10^{-2} = 7.99 \cdot 10^{-46} \Longrightarrow m_0 = \underline{\underline{2.83 \cdot 10^{-23}\, Am^2}}$$

91-5) Esercizio n. 1 del 6/7/1991

Una sfera metallica, di raggio $a = 5\,cm$, sulla cui superficie è uniformemente distribuita una carica $q = 5\,nC$, è circondata da uno strato dielettrico di $5\,cm$ di spessore e di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 3$. Determinare l'espressione del campo elettrico nel dielettrico e calcolare in valore e segno la densità di carica di polarizzazione, dimostrando esplicitamente che la carica totale di polarizzazione è nulla.



$$a = 5\,cm\ ; \quad b = 10\,cm\ ; \quad (b-a) = 5\,cm\ ; \quad Q_{lib} = +5\,nC$$

Si ha:

$$\int_S \vec{D} \cdot \hat{n}\,da = q_l$$

$$\epsilon E 4\pi r^2 = q \Longrightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{P} = \chi\vec{E} \Longrightarrow \vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

Sup. est.:

$$\sigma_{P_{est}} = \vec{P}\cdot\hat{n} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{q}{4\pi b^2} = \underline{\underline{2.65 \cdot 10^{-8} C/m^2}} \Longrightarrow q_e = 3.3\,nC$$

$$\sigma_{P_{int}} = \vec{P}\cdot\hat{n} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{q}{4\pi a^2} = -\underline{\underline{1.06 \cdot 10^{-7} C/m^2}} \Longrightarrow q_i = -3.3\,nC$$

Segue

$$\rho_P = -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P} = -\frac{\partial}{\partial x}P_x - \frac{\partial}{\partial y}P_y - \frac{\partial}{\partial z}P_z$$

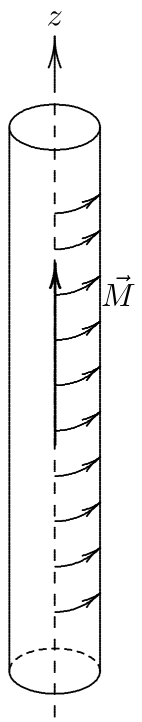
$$\left.\begin{aligned} P_x &= \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{q}{4\pi}\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \\ P_y &= \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{q}{4\pi}\frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \\ P_z &= \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{q}{4\pi}\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \vec{\nabla}' \cdot \vec{P} = 0$$

quindi

$$Q_p = \int_{S_{est}} \sigma_{P_{est}}\, dS + \int_{S_{int}} \sigma_{P_{int}}\, dS = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}q - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}q = 0 \quad \text{C.V.D.}$$

91-6) Esercizio n. 2 del 6/7/1991

Un ago magnetico avente forma di barretta cilindrica, di momento magnetico $\vec{m}$ orientato secondo l'asse, ha una sezione di $0.0314\,cm^2$ e una lunghezza di $4\,cm$. Esso è sottoposto ad un campo magnetico uniforme il cui modulo è $1, Gauss$. Da misure sperimentali si ricava che il massimo momento della forza dovuta al campo è di $10^{-6}\,Nm$. Determinare: a) la magnetizzazione $\vec{M}$; b) la densità lineare di corrente in modulo, direzione e verso in coordinate cilindriche; c) l'induzione magnetica $\vec{B}$ nei punti dell'asse di simmetria del magnete e calcolarne il modulo in corrispondenza del centro e delle estremità.



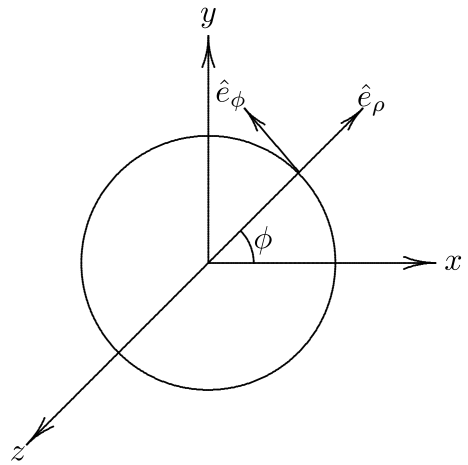
Si ha:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$\tau_{max} = mB \Longrightarrow m = \frac{\tau_{max}}{B} = \frac{10^{-6}}{10^{-4}} = 10^{-2}\,Am^2$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{m}}{V} = \frac{10^{-2}}{1.256 \cdot 10^{-7}}\hat{z} = \underline{\underline{79617.8\,A/m}}$$

Per la densità lineare di corrente si ha:



$$\vec{J} = \vec{M} \times \hat{n} = \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \hat{e}_\phi & \hat{k} \\ 0 & 0 & M \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{J} = \hat{e}_\phi M = \underline{\underline{79617.8\hat{e}_\phi\, A/m}}$$

L'aghetto è quindi equivalente ad un solenoide in cui

$$ni = J_M$$

Pertanto, sull'asse di simmetria

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} J_M (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\hat{z}$$

Essendo $a = 0.1\,cm$ ed $L = 4\,cm$ (in realtà si può approssimare nel centro come infinitamente lungo e quindi $B = \mu_0 M$). Nel centro:

$$B_{(z=0)} = \frac{\mu_0}{2} M 2\cos\theta_1$$

ciò essendo $\cos\theta_2 = \cos(\pi - \theta_1) = -\cos\theta_1$ Poichè $\cos\theta_1 = \dfrac{L}{2\sqrt{a^2 + L^2/4}}$ si ha:

$$B_{(z=0)} = \mu_0 M \frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2/4}} = 0.1\,Wb/m^2 = \underline{\underline{1000\,Gauss}}$$

Per $z = \dfrac{L}{2}\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$ segue

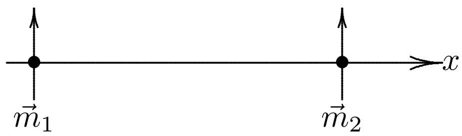
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} J_M(-\cos\theta_2)$$

ma $L = \sqrt{a^2 + L^2}\cos(\pi - \theta_2)$ per cui

$$L = \sqrt{a^2 + L^2} \Longrightarrow B = \frac{\mu_0}{2} M \frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2}} = 0.05\,Wb/m^2 = \underline{\underline{500\,Gauss}}$$

91-7) Esercizio n. 3 del 6/7/1991

Il momento magnetico di spin dell'elettrone è $m_S = \dfrac{eh}{4\pi m}$ dove $h = 6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ è la costante di Planck. Due elettroni con i momenti magnetici orientati secondo la direzione ortogonale alla retta che passa per le loro posizioni, si trovano ad una distanza r. Determinare in modulo, direzione e verso la forza di interazione magnetica fra gli elettroni e il momento della forza agente su di essi, sia nel caso che i momenti magnetici di spin siano equiversi che di verso opposto. Stabiliti i versi dei momenti per cui la forza magnetica sia attrattiva, confrontarla con la forza elettrica e calcolare la distanza per cui le due forze risultino eguali in modulo.



a) Siano $\vec{m}_1 = m\hat{y}$ e $\vec{m}_2 = m\hat{y}$ (spin paralleli). Si ha:

$$\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\,(\vec{m}\cdot\hat{n})\,\hat{n} - \vec{m}}{r^3}\right] = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{x^3}\hat{y} \qquad (\text{campo su } \vec{m}_2)$$

Segue

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_{12}\right) = \vec{\nabla}\left(-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m^2}{x^3}\right) = -\widehat{x}\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{m^2}{x^3}\right] = \frac{3\mu_0}{4\pi}\frac{m^2}{x^4}\widehat{x}$$

cioè per spin paralleli la forza è repulsiva.

b) Siano $\vec{m}_1 = m\hat{y}$ e $\vec{m}_2 = -m\hat{y}$ (spin antiparalleli), segue:

$$\vec{F} = -\frac{3\mu_0}{4\pi}\frac{m^2}{x^4}\hat{i}$$

cioè per spin antiparalleli la forza è attrattiva.

In entrambi i casi $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} = 0$.

La forza elettrica che si esercita fra i due elettroni é in modulo:

$$F_{elettrica} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{x^2}$$

Le due forze sono eguali quando gli elettroni si trovano ad una distanza x^* tale che:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{{x^*}^2} = \frac{3\mu_0}{4\pi}\frac{e^2h^2}{(4\pi)^2m^2}\frac{1}{{x^*}^4}$$

da cui:

$$x^{*2} = \frac{3\mu_0 h^2 \epsilon_0}{(4\pi)^2 m^2} = \frac{3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}(6.626 \cdot 10^{-34})^2 8.854 \cdot 10^{-12}}{(4\pi)^2(0.911 \cdot 10^{-30})^2} = 1.12 \cdot 10^{-25}\, m^2$$

$$x^* = \underline{\underline{3.34 \cdot 10^{-13}\, m}}$$

91-8) Esercizio n. 4 del 6/7/1991

Una spira rettangolare di lunghezza l e larghezza w giace in una regione in cui è presente un campo di induzione magnetica $\vec{B}(t)$. sia $\theta(t)$ l'angolo che la normale alla spira forma con tale campo. Calcolare la forza elettromotrice indotta nell'ipotesi che $\vec{B}(t) = \hat{z}B_0 \sin\omega_1 t$ e $\theta(t) = \omega_2 t$.

Si ha:

$$f.e.m. = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,da = -\frac{d}{dt}\int_S B(t)\cos\theta(t)\,da =$$

$$= -\frac{d}{dt}\left[B(t)\cos\theta(t) lw\right] = -B_0 lw\frac{d}{dt}(\sin\omega_1 t\cos\omega_2 t) =$$

$$= -B_0 lw\big(\omega_1\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t - \omega_2\sin\omega_1 t\sin\omega_2 t\big)$$

91-9) Esercizio n. 1 del 26/7/1991

Assumendo che la Terra abbia la forma di una sfera di raggio $R = 6400\,Km$, calcolare la quantità di carica negativa depositata uniformemente sulla sua superficie conoscendo che il campo elettrico su tutti i punti di essa è radiale e di modulo $E = 130\,Volt/m$. Calcolare, altresì, l'energia elettrostatica immagazzinata in tale campo, considerando la Terra isolata nello spazio.

Sulla superficie di una sfera di raggio a carica negativamente, il campo elettrico è:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|Q|}{a^2}\hat{r}$$

segue

$$|E| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|Q|}{a^2} = 130$$

$$|Q| = 4\pi\epsilon_0 a^2 130 = 1.1\cdot 10^{-10}(6400)^2 10^6\cdot 130 = \underline{\underline{5.9\cdot 10^5\,C}}$$

L'energia elettrostatica è:

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0\int E^2\,dv = \frac{1}{2}\epsilon_0\int_a^\infty\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{Q^2}{r^4}4\pi r^2\,dr =$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_0\frac{Q^2 4\pi}{(4\pi\epsilon_0)^2}\int_a^\infty\frac{1}{r^2}dr = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^\infty = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{2a} =$$

$$= 9\cdot 10^9\cdot\frac{1}{2}\frac{(5.9\cdot 10^5)^2}{6400\cdot 10^3} = \underline{\underline{2.45\cdot 10^{14}\,Joule}} \qquad \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\cdot 10^9\right]$$

91-10) Esercizio n. 2 del 26/7/1991

Siano $\vec{E} = E\hat{y}$ e $\vec{B} = B\hat{z}$ un campo elettrico e un campo di induzione magnetica misurati da un osservatore O solidale ad un sistema di riferimento S. Un osservatore O' si muove rispetto ad O lungo l'asse x di S con velocità $\vec{v} = v\hat{x}$. Siano $\vec{E}'$ e $\vec{B}'$ i campi osservati da O'. a) Calcolare per quale valore di v risulta $\vec{B}' = 0$ e a quale condizione deve soddisfare il rapporto B/E perchè tale valore di v abbia significato fisico; determinare in corrispondenza il campo $\vec{E}'$. b) Calcolare per quale valore di v risulta $\vec{E}' = 0$ e a quale condizione deve soddisfare il rapporto B/E perchè tale valore di v abbia significato fisico; determinare in corrispondenza il campo $\vec{B}'$.

In S si ha:

$$E_x = 0 \qquad B_x = 0$$
$$E_y = E \qquad B_y = 0$$
$$E_z = 0 \qquad B_z = B$$

In S' si ha, in generale:

$$E'_x = E_x \qquad B'_x = B_x$$
$$E'_y = \gamma[E_y - vB_z] \qquad B'_y = \gamma\left[B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right]$$
$$E'_z = \gamma[E_x + vB_y] \qquad B'_z = \gamma\left[B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right]$$

Sostituendo:

$$E'_x = 0 \qquad B'_x = 0$$
$$E'_y = \gamma[E - vB] \qquad B'_y = 0$$
$$E'_z = 0 \qquad B'_z = \gamma\left[B - \frac{v}{c^2}E\right]$$

Segue:

a) $B' = 0$ per:

$$B = \frac{v^*}{c^2}E \Longrightarrow v^* = c^2\frac{B}{E} < c$$

ossia:

$$cB < E$$

esempio: per $B = 1\,Gauss \Longrightarrow cB = 3 \cdot 10^4$.

Per cui:

$$\frac{B}{E} < \frac{1}{c}$$

In corrispondenza:

$$E'_x = 0\,; \quad E'_y = \gamma\left[E - c^2\frac{B^2}{E}\right] = \gamma\frac{1}{E}\left[E^2 - c^2B^2\right]\;; \quad E'_z = 0$$

ossia:

$$E'_y = \frac{E^2 - c^2 B^2}{E\sqrt{1 - c^2 \frac{B^2}{E^2}}} = \sqrt{E^2 - c^2 B^2}$$

b) $E' = 0$ per

$$E = v^* B \Longrightarrow v^* = \frac{E}{B} < c$$

per cui:

$$\frac{B}{E} > \frac{1}{c}$$

In corrispondenza:

$$B'_x = 0 \; ; \quad B'_y = 0 \; ; \quad B'_z = \gamma \frac{1}{c^2 B} \left[c^2 B^2 - E^2\right]$$

ossia:

$$B'_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \frac{E^2}{B^2}}} \frac{\left[c^2 B^2 - E^2\right]}{c^2 B} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 B^2 - E^2}$$

91-11) Esercizio n. 3 del 26/7/1991

A temperatura ordinaria il Nickel è un metallo ferromagnetico. Sottoposto a campi magnetici sufficientemente intensi raggiunge la saturazione ed in corrispondenza si misura $B = 12750\,Gauss$ e $H = 5 \cdot 10^5\ A/m$. Calcolare il momento magnetico dell'atomo di Nickel. La densità del Nickel è $9 \cdot 10^3\ Kg \cdot m^{-3}$ ed il suo peso atomico è 58.71.

Se indischiamo con $\vec{m}_0$ il momento magnetico dell'atomo di Nickel si ha:

$$\vec{M}_S = N_v \vec{m}_0 \Longrightarrow m_0 = \frac{M_S}{N_v}$$

$$N_a : 58.71 = N_v : 9 \cdot 10^6 \qquad \left(N_v = \frac{N_a \delta}{P.M. \cdot 10^{-3}} \right)$$

$$N_v = \frac{N_a 9 \cdot 10^6}{58.71} = \frac{6 \cdot 10^{23} \cdot 9 \cdot 10^6}{58.71} = 9.23 \cdot 10^{28}\, \frac{atomi}{m^3}$$

Del resto

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = 514612\, A/m = 5.15 \cdot 10^5\, A/m$$

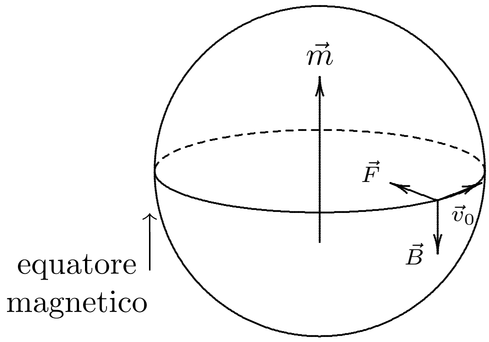
In definitiva

$$m_0 = \frac{5.15 \cdot 10^5}{9.23 \cdot 10^{28}} = 5.58 \cdot 10^{-24}\, Am^2 = \underline{\underline{0.6 \mu_B}}$$

dove μ_B è il magnetone di Bohr paria $9.2741 \cdot 10^{-24}\, Am^2$

91-12) Esercizio n. 4 del 26/7/1991

Ai fini del campo magnetico da esso prodotto, la Terra si può considerare come un dipolo magnetico di momento magnetico $\vec{m}$, orientato secondo la direzione dei poli magnetici, di modulo $m = 7.8 \cdot 10^{22}\, A \cdot m^2$. Assumendo che la Terra abbia forma sferica di raggio $R = 6400\, Km$, calcolare la velocità (in modulo, direzione e verso) che deve avere un elettrone, posto in un generico punto dell'equatore magnetico, perchè possa ruotare attorno alla Terra descrivendo l'orbita equatoriale. E' necessario risolvere il problema considerando, per la massa dell'elettrone, l'espressione relativistica.



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\,(\vec{m}\cdot\vec{r})\,\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right]$$

In un generico punto dell'equatore magnetico

$$\vec{m}\cdot\vec{r} = 0 \Longrightarrow \vec{B}_{eq} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}}{R^3}$$

$$B_{eq} = 2.97 \cdot 10^5\, Wb/m^2 = 0.297\, Gauss$$

Perchè un elettrone possa descrivere l'equatore i vettori $\vec{v}$, $\vec{B}$ e $\vec{F}$ devono essere come in figura.

Dagli Appunti di Fisica II si ha:

$$R = \frac{m_e v_0}{eB} \Longrightarrow v_0 = \frac{eBR}{m_e}$$

Applicando così la formula viene una velocità di valore assurdo ($3.33 \cdot 10^{13}\, m/sec$); allora bisogna utilizzare la formula relativistica tenendo conto che il modulo della velocità è costante (escludiamo l'emissione di radiazione):

$$R = \frac{v_0}{eB}\frac{m_e}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$

essendo $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\ Kg$ la massa a riposo dell'elettrone.

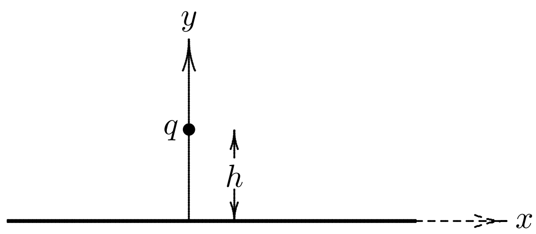
Segue, quadrando

$$R^2 = \frac{m_e^2}{e^2 B^2} \frac{v_0^2}{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}} \Longrightarrow R^2 - R^2 \frac{v_0^2}{c^2} = \frac{m_e^2}{e^2 B^2} v_0^2 \Longrightarrow v_0^2 \left(\frac{m_e^2}{e^2 B^2} + \frac{R^2}{c^2} \right) = R^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow v_0^2 = \frac{R^2}{\dfrac{R^2}{c^2} + \dfrac{m_e^2}{e^2 B^2}} = 8.987 \cdot 10^6 \Longrightarrow v = \underline{\underline{2.99 \cdot 10^8\ m/s}} \simeq c$$

91-13) Esercizio n. 1 del 14/9/1991

Una carica Q è posta ad una distanza h da un piano conduttore a potenziale zero. Calcolare il lavoro necessario per portare la carica all'infinito.



La carica induce sul piano una carica opposta e quindi fra carica e piano si esercita una forza attrattiva

$$F = k\frac{q^2}{4h^2}$$

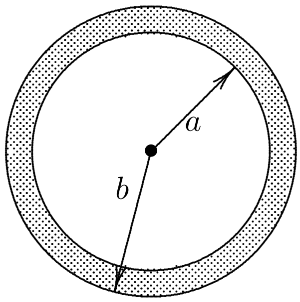
Segue

$$L = -\int \vec{F}\cdot\vec{ds} = +\int_h^\infty k\frac{q^2}{4y^2}dy = \left[-k\frac{q^2}{4}\frac{1}{y}\right]_h^\infty = +k\frac{q^2}{4h}$$

(contro le forze del campo).

91-14) Esercizio n. 2 del 14/9/1991

Uno strato sferico di materiale magnetico, di raggio esterno $b = 20\,cm$, è posto, in aria, in un campo di induzione magnetica uniforme di modulo B_0. La permeabilità magnetica relativa del materiale, competente a questo campo, è $\mu_r = 1000$. Calcolare lo spessore dello strato perchè il modulo B del campo di induzione magnetica nella parte cava si riduca di $\frac{1}{100}$ di B_0.



Essendo $\mu_r \gg 1$, le formule nella parte cava si riducono a:

$$B_r \simeq \frac{9B_0 \cos\theta}{2\mu_r\left(1 - \dfrac{a^3}{b^3}\right)} \qquad B_\theta \simeq -\frac{9B_0 \sin\theta}{2\mu_r\left(1 - \dfrac{a^3}{b^3}\right)}$$

La direzione e il verso sono come $\vec{B}_0$ ed il modulo è

$$B = \frac{9B_0}{2\mu_r\left(1 - \dfrac{a^3}{b^3}\right)}$$

Dobbiamo calcolare a perchè risulti:

$$\frac{9}{2\mu_r\left(1 - \dfrac{a^3}{b^3}\right)} = \frac{1}{100} \Longrightarrow \left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right) = \frac{450}{\mu_r}$$

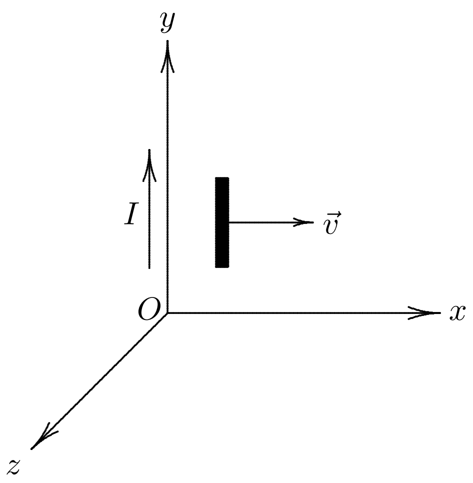
$$\frac{a^3}{b^3} = 1 - 0.45 = 0.55 \Longrightarrow a = \Big(0.55\Big)^{\frac{1}{3}} b = 0.82b = 16.4\,cm$$

Segue

$$\boxed{s = b - a = 3.6\,cm}$$

91-15) Esercizio n. 3 del 14/9/1991

Un lungo filo conduttore percorso da corrente I si trova sull'asse y di un sistema di riferimento $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$. Una sottile barra metallica, di lunghezza l parallela al filo, si muove con velocità costante $\vec{v} = v\hat{x}$. Se la corrente I è diretta lungo il verso positivo dell'asse y, calcolare: a) il campo elettrico (in modulo, direzione e verso) in tutti i punti della barra; b) la f.e.m. misurabile fra gli estremi di essa; c) l'intensità e verso della corrente circolante nella barra se essa viene cortocircuitata con fili di resistenza trascurabile rispetto alla propria resistenza R.



Il campo magnetico generato dal filo è

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}\widehat{z}$$

Quindi nel sistema S ($O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$) si ha:

$$E_x = E_y = E_z = 0$$

$$B_x = B_y = 0\ ; \quad B_z = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}$$

Consideriamo un sistema S' solidale alla barra in moto. Scriviamo le trasformazioni:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x \\ E'_y &= \gamma[E_y - vB_z] \\ E'_z &= \gamma[E_z + vB_y] \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B'_x &= B_x \\ B'_y &= \gamma\left[B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right] \\ B'_z &= \gamma\left[B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right] \end{aligned}$$

che diventano

$$E'_x = 0 \qquad B'_x = 0$$

$$E'_y = \gamma v \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x} \qquad B'_y = 0$$

$$E'_z = 0 \qquad B'_z = \gamma B_z = -\gamma \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}$$

a) Il campo elettrico in tutti i punti della barra è:

$$\vec{E} = \gamma v \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}\hat{y}$$

b) La f.e.m. fra gli estremi di essa è:

$$f.e.m. = \gamma v l \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}$$

c) L'intensità di corrente è:

$$I = \frac{\gamma v l}{R}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}$$

ed ha nella barra lo stesso verso del filo.

91-16) Esercizio n. 4 del 14/9/1991

Due campioni dello stesso materiale paramagnetico (Alluminio) di densità $2.7 \cdot 10^3\, Kg \cdot m^{-3}$ e di peso atomico 27 sono immersi in un campo di induzione magnetica di modulo $B = 12000\, Gauss$. Il momento magnetico atomico del materiale è $9.27 \cdot 10^{-24}\, A \cdot m^2$. I due campioni sono mantenuti a temperature di $300^0 K$ e $77^0 K$ rispettivamente. Per entrambi i campioni, calcolare: a) la percentuale degli atomi orientati nello stesso verso del campo e quella degli atomi orientati in verso opposto; b) la magnetizzazione.

Si ha:

$$n(\theta) = \frac{N}{4\pi} e^{y \cos\theta} \; ; \quad y = \frac{\mu_m B}{KT} \; ; \quad L(y) \approx \frac{1}{3} y \; ; \quad M = N \mu_m L(y)$$

Poniamo

$$\alpha = \frac{n(\theta)}{N}$$

dove

$$N = \frac{N_A \delta}{M} = \frac{6 \cdot 10^{23} \cdot 2.7 \cdot 10^6}{27} = 6 \cdot 10^{28}\, \frac{atomi}{m^3}$$

Segue:

$$T = 300^0 K \Longrightarrow y = 2.68 \cdot 10^{-3} \; ; \; L(y) = 8.9 \cdot 10^{-4} \; ; \; \alpha(0^0) = 0.07872$$
$$\alpha(\pi) = 0.07936 \; ; \; M = 495\, A/m$$

$$T = 77^0 K \Longrightarrow y = 0.0105 \; ; \; L(y) = 3.49 \cdot 10^{-3}$$
$$\alpha(0^0) = 0.0841 \; ; \; \alpha(\pi) = 0.07874 \; ; \; M = 1941\, A/m$$

$(K = 1.38 \cdot 10^{-23}\, J^0 K^{-1}; \; N_A = 6 \cdot 10^{23})$

91-17) Esercizio n. 1 del 19/10/1991

Una bolla di sapone ha il raggio di $5\,mm$. Calcolare la carica che bisogna depositare sulla sua superficie perchè essa possa cominciare a gonfiarsi, nell'ipotesi che dentro la bolla si voglia mantenere la stessa pressione atmosferica esterna. (Si ricorda che la pressione di contrazione dovuta alla tensione superficiale di una sfera di raggio a è $\tau_S = \frac{4\sigma}{a}$ dove σ è la tensione superficiale che per l'acqua saponata vale $30 \cdot 10^{-3}\, N/m$).

Il valore della pressione di contrazione dovuta alla tensione superficiale è

$$\tau_S = \frac{4\sigma}{a} \qquad\qquad \sigma = 30 \cdot 10^{-3}\, N/m$$

Del resto

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2_{sup} = \tau_S$$

dove $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\, C^2/Nm^2$, ma il valore di E è dato da

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a^2}$$

Sostituendo si ha:

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2}\frac{Q^2}{a^4} = \tau_S \Longrightarrow \frac{1}{32\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{a^4} = \tau_S$$

In definitiva il valore di carica richiesta è:

$$Q^2 = 32\pi^2\epsilon_0 a^4 4\frac{\sigma}{a} = 4.19 \cdot 10^{-17}\, C^2 \Longrightarrow Q = \underline{\underline{6.47 \cdot 10^{-9}\, C}}$$

91-18) Esercizio n. 2 del 19/10/1991

Una piccola bobina costituita da 200 spire di filo sottile è sospesa per mezzo di un filo di torsione con un estremo legato ad un suo punto. Essa giace in un piano verticale sede di un campo di induzione magnetica uniforme di modulo $B = 150\,Gauss$ con le linee di forza parallele al piano della spira. L'area della superficie di ciascuna spira è di $1\,cm^2$. Quando nella bobina circola una corrente di $5\,\mu A$, il suo piano ruota di 15^0. Calcolare il modulo di torsione del filo.

Il momento magnetico della spira è ortogonale sempre al piano della spira e in condizioni di equilibrio qui esso formerà col campo magnetico un angolo di 75^0. Ricordando che il momento torcente è $C\alpha$, all'equilibrio si ha:

$$\tau = C\alpha$$

ed anche

$$\tau = MB\sin 75^0$$

con $M = INA$, dove A è l'area della spira. Per cui

$$INAB\sin 75^0 = C15^0 \Longrightarrow C = \frac{INAB\sin 75^0}{15^0} = 9.66\cdot 10^{-11}\,\frac{Nm}{grado} = \underline{\underline{5.57\cdot 10^{-9}\,\frac{Nm}{rad}}}$$

essendo $15^0 = 0.26\,rad$.

91-19) Esercizio n. 3 del 19/10/1991

In condizioni normali di temperatura e pressione il gas argon ha una costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 1.000545$. Calcolare il momento di dipolo indotto dell'atomo se esso si trova in un campo elettrico di $10\,KV/m$.

Si ha:

$$p = \alpha E_{est}$$

Dalla formula di Clausius-Mossotti:

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{N(\epsilon_r + 2)}$$

dove, al solito, N è dato da

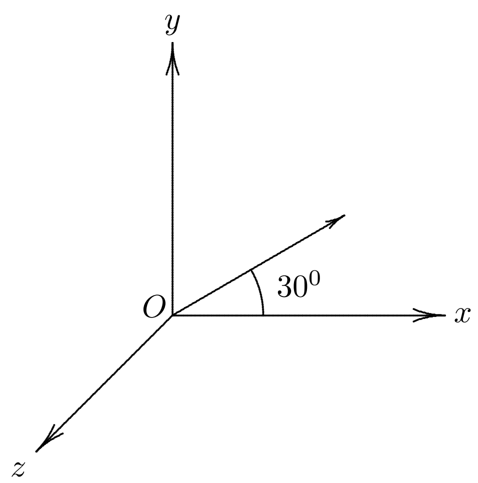
$$N = \frac{N_A}{22.4 \cdot 10^{-3}} = \frac{6 \cdot 10^{23}}{22.4 \cdot 10^{-3}} = 2.678 \cdot 10^{25}\,\frac{atomi}{m^3}$$

Segue

$$\alpha = 1.8 \cdot 10^{-40}\,m^3 \Longrightarrow p = \alpha E = 1.8 \cdot 10^{-40} \cdot 10^4 = \underline{\underline{1.8 \cdot 10^{-36}\,Cm}}$$

91-20) Esercizio n. 4 del 19/10/1991

In un sistema di riferimento $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ vi è un campo elettrico di modulo $E = 1000\,Volt/m$, giacente nel piano xy e formante un angolo di 30^0 con l'asse x. Trovare il modulo e la direzioned del campo elettrico in un sistema di riferimento che si muove lungo la direzione positiva dell'asse x con velocità $v = 0.6c$, e che ha gli assi paralleli a quelli del sistema di riferimento $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ con le origini coincidenti all'istante $t = 0$.



Sia E_0 il modulo in S, si ha:

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cos 30^0 = 866.025 \\ E_y = E_0 \sin 30^0 = 500 \\ E_z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = 0 \\ B_z = 0 \end{cases}$$

In S' si ha:

$$\begin{cases} E'_x = E_x = E_0 \cos 30^0 = 866.025 \\ E'_y = \gamma[E_y - vB_z] = \gamma E_0 \sin 30^0 = 625 \\ E'_z = \gamma[E_z + vB_y] = 0 \end{cases}$$

Ed anche

$$E'_0 = \sqrt{E_0^2 \cos^2 30^0 + \gamma^2 E_0^2 \sin^2 30^0} = \underline{\underline{1068\,V/m}}$$

Il valore di γ chiaramente è

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(0.6)^2}} = 1.25$$

Infine per la direzione si ha:

$$E'_y = E'_x \tan\alpha' \Longrightarrow \tan\alpha' = \frac{E'_y}{E'_x} = 0.721688 \Longrightarrow \alpha' = \underline{\underline{35^0, 81}}$$

Fine Esercizi Fisica II - 1991