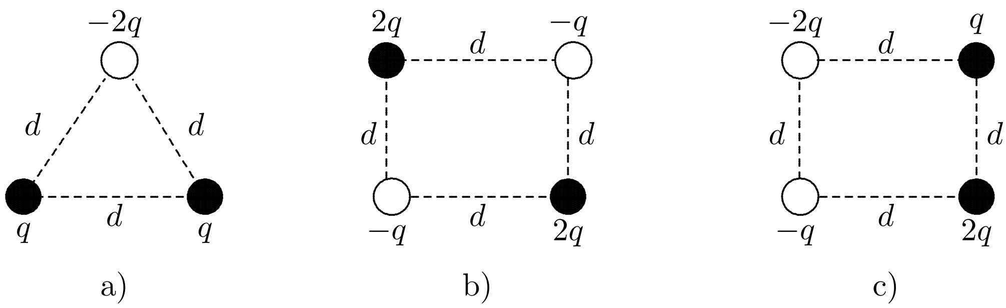
Esercizi svolti di Fisica generale II - Anno 1988

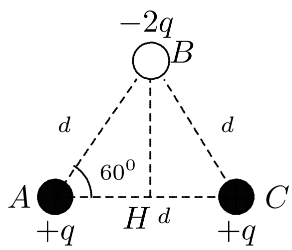
88-1) Esercizio n. 1 del 23/1/1988

Date le distribuzioni di cariche a), b), c), calcolare per ciascuna di esse il vettore momento di dipolo.



---

a) **<u>Distribuzione neutra:</u>** $\vec{p}$ è indipendente dall'origine del sistema di riferimento.



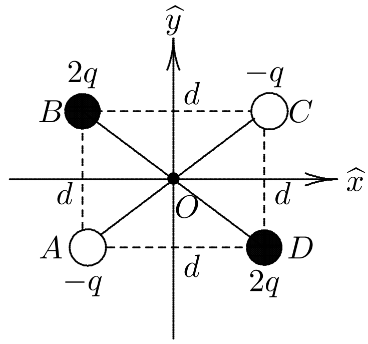
Scegliendo l'origine in A ed il segmento AC sull'asse x si ha:

$$\vec{p} = \int \vec{r}'\, dq' \qquad \vec{p} = \sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i'\, dq_i'$$

$$\vec{p} = \vec{r}_B(-2q) + \vec{r}_C q \qquad BH = d\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{p} = \left(\frac{d}{2}\widehat{x} + d\frac{\sqrt{3}}{2}\widehat{y}\right)(-2q) + dq\widehat{x} = \underline{\underline{-dq\sqrt{3}\widehat{y}}}$$

b) **<u>Distribuzione non neutra:</u>** $\vec{p}$ dipende dall'origine O. Scegliamo O al centro del quadrato:



Iniziando dal punto B e procedendo in senso orario, si ha:

$$\vec{p} = \left(-\frac{d}{2}\widehat{x} + \frac{d}{2}\widehat{y}\right) 2q + \left(\frac{d}{2}\widehat{x} + \frac{d}{2}\widehat{y}\right)(-q) + \left(\frac{d}{2}\widehat{x} - \frac{d}{2}\widehat{y}\right)(2q) + \left(-\frac{d}{2}\widehat{x} - \frac{d}{2}\widehat{y}\right)(-q) =$$

$$= -\cancel{qd\widehat{x}} - \cancel{q\frac{d}{2}\widehat{x}} + \cancel{qd\widehat{x}} + \cancel{q\frac{d}{2}\widehat{x}} + \cancel{qd\widehat{y}} - \cancel{q\frac{d}{2}\widehat{y}} - \cancel{qd\widehat{y}} + \cancel{q\frac{d}{2}\widehat{y}} = 0$$

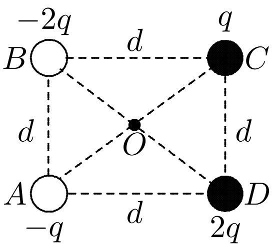
Per verificare che il momento di dipolo dipende dalla distribuzione, scegliamo l'origine O in A; si ha:

$$\vec{p} = (d\widehat{y})2q + (d\widehat{x} + d\widehat{y})(-q) + (d\widehat{x})2q =$$

$$= -dq\widehat{x} + 2dq\widehat{x} + 2qd\widehat{y} - qd\widehat{y} =$$

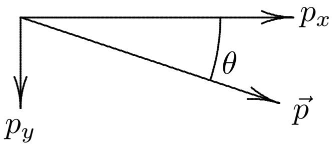
$$= \underline{\underline{dq\widehat{x} + dq\widehat{y}}}$$

c) **<u>Distribuzione neutra:</u>** $\vec{p}$ indipendente dall'origine O. Scegliamo O in A:



$$\vec{p} = (d\widehat{y})(-2q) + (d\widehat{x} + d\widehat{y})q + (d\widehat{x})(2q) = \underline{\underline{3qd\widehat{x} - qd\widehat{y}}} \qquad (*)$$

$$|p| = \sqrt{9q^2d^2 + q^2d^2} = \underline{\underline{\sqrt{10}qd}}$$



$$p_y = p_x \tan\theta \Longrightarrow \tan\theta = \frac{p_y}{p_x} = \frac{-qd}{3qd} = -\frac{1}{3}$$

$$\theta = \arctan\left(-\frac{1}{3}\right) = -18^0,4$$

Scegliamo O al centro:

$$\vec{p} = \underbrace{\left(\frac{d}{2}\widehat{x} + \frac{d}{2}\widehat{y}\right) q}_{r_C} + \underbrace{\left(-\frac{d}{2}\widehat{x} + \frac{d}{2}\widehat{y}\right)(-2q)}_{r_B} + \underbrace{\left(-\frac{d}{2}\widehat{x} - \frac{d}{2}\widehat{y}\right)(-q)}_{r_A} + \left(\frac{d}{2}\widehat{x} - \frac{d}{2}\widehat{y}\right)(2q) =$$

$$= \left(\frac{d}{2}q + \frac{d}{2}2q + \frac{d}{2}q + qd\right)\widehat{x} + \left(\frac{d}{2}q - qd + \frac{d}{2}q - qd\right)\widehat{y} =$$

$$= \underline{\underline{3qd\widehat{x} - qd\widehat{y}}}$$

che fornisce lo stesso risultato della $(*)$.

88-2) Esercizio n. 2 del 23/1/1988

Un fascio di luce incide normalmente su una superficie di vetro, dopo aver viaggiato in aria. Se il 5.3% della intensità della luce incidente viene riflessa, calcolare:
a) l'indice di rifrazione del vetro;
b) i rapporti fra i campi elettrici riflessi e i campi elettrici trasmessi relativi al campo elettrico incidente.

Se l'angolo d'incidenza è zero ed il primo mezzo è l'aria si ha:

$$r = \frac{I_r}{I_0} = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} \qquad (*)$$

Si ha per l'indice di rifrazione:

$$n^2 - 2n + 1 = rn^2 + 2rn + r$$

$$n^2(1-r) - 2n(1+r) + (1-r) = 0$$

$$n = \frac{(1+r) \pm \sqrt{(1+r)^2 - (1-r)^2}}{1-r} = \frac{1 + r \pm 2\sqrt{r}}{1-r} = \begin{cases} \dfrac{\left(1+\sqrt{r}\right)^2}{1-r} \\ \dfrac{\left(1-\sqrt{r}\right)^2}{1-r} \end{cases}$$

$$n = \begin{cases} \dfrac{\left(1+\sqrt{r}\right)^2}{1-r} = \dfrac{\left(1+\sqrt{r}\right)^2}{\left(1-\sqrt{r}\right)\left(1+\sqrt{r}\right)} = \dfrac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}} = \underline{\underline{1.598}} \\ \dfrac{\left(1-\sqrt{r}\right)^2}{1-r} = \dfrac{\left(1-\sqrt{r}\right)^2}{\left(1-\sqrt{r}\right)\left(1+\sqrt{r}\right)} = \dfrac{1-\sqrt{r}}{1+\sqrt{r}} \quad \text{da scartare perchè} < 1 \end{cases}$$

Inoltre se indichiamo con E_0' il campo riflesso e con E_0'' il campo trasmesso si ha:

$$\sqrt{R} = \frac{E_0'}{E_0} = \underline{\underline{0.2302}}$$

$$R + T = 1 \Longrightarrow T = 1 - R = 0.947$$

ed anche

$$T = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{E_0''}{E_0}\right)^2$$

essendo $n_1 = 1$ segue che:

$$\frac{E_0''}{E_0} = \sqrt{\frac{n_1}{n_2} T} = \underline{\underline{0.7698}}$$

Dimostriamo la $(*)$:
In caso di luce naturale

$$r = \frac{I_r}{I_0} = \frac{1}{2}\frac{\tan^2(\phi - \phi')}{\tan^2(\phi + \phi')} + \frac{1}{2}\frac{\sin^2(\phi - \phi')}{\sin^2(\phi + \phi')}$$

dove ϕ' è l'angolo di rifrazione.
Per ϕ e ϕ' tendenti a zero si ha:

$$\tan(\phi \mp \phi') = \sin(\phi \mp \phi') = \phi \mp \phi' \Longrightarrow r = \frac{(\phi - \phi')^2}{(\phi + \phi')^2}$$

Dalla legge di Snell segue che

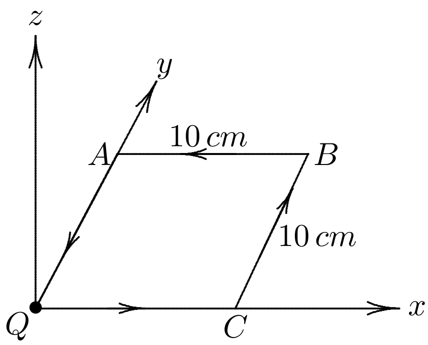
$$\sin\phi' = \frac{n_1}{n_2}\sin\phi \Longrightarrow \phi' = \frac{n_1}{n_2}\phi$$

che sostituita nella precedente restituisce la $(*)$:

$$r = \frac{\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^2}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2} = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} \qquad \text{c.v.d.}$$

88-3) Esercizio n. 3 del 23/1/1988

La spira quadrata mostrata in figura giace nel piano xy e in essa circola una corrente di $10\,A$. Se essa è immersa in un campo magnetico $B_x = 10x$ (B in Gauss, x in cm), calcolare la forza risultante sulla spira ed il momento meccanico rispetto al punto Q.



Si ha:

$$\vec{B} = 10x\widehat{x}$$

$$\text{LATO } AQ \Longrightarrow B = 0$$

$$\text{LATO } BC \Longrightarrow B_0 = 100\,\text{Gauss}$$

$$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$$

Sui lati AB e QC $d\vec{F} = 0$ in ogni punto perchè $d\vec{l} \parallel \vec{B}$. L'unico lato dove si manifesta la forza è il lato CB

$$d\vec{F} = I\,dy\,\widehat{y} \times B_0\widehat{x} = -IB_0\,dy\,\widehat{z}$$

con $B_0 = 10^{-2}\,W/m^2$. La forza è:

$$\vec{F} = -IB_0L\widehat{z}$$

$$|F| = 10^{-2} \cdot 10 \cdot 0.1 = \underline{\underline{10^{-2}\,N}} = \underline{\underline{10^3\,dyne}}$$

Inoltre per il momento meccanico si ha:

$$d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{F} = \begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & dF \end{vmatrix} = \widehat{x}y\,dF + \widehat{y}(-x\,dF)$$

Ne segue

$$dM_x = y\,dF = -IB_0 y\,dy$$

$$M_x = \int_0^L -IB_0 y\,dy = -IB_0 \frac{1}{2} L^2 = -10 \cdot 10^{-2} \cdot 0.5 \cdot 10^{-2} =$$

$$= -0.5 \cdot 10^{-3}\, N \cdot m = -0.5 \cdot 10^{4}\, dyne \cdot cm$$

Analogamente

$$dM_y = -x\,dF = IB_0 x\,dy$$

$$M_y = \int_0^L IB_0 x\,dy = IB_0 x L = 10 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2} = 10^{-3}\, N \cdot m = 10^{4}\, dyne \cdot cm$$

In definitiva

$$M = \sqrt{25 \cdot 10^{6} + 10^{8}} = \underline{\underline{11180\, dyne \cdot cm}}$$

$$M = \sqrt{25 \cdot 10^{-8} + 10^{-6}} = \underline{\underline{0.00111\, N \cdot cm}}$$

che è <u>identico</u> a quello che si ottiene considerando la forza applicata nel punto di mezzo del lato CB.
Infatti:

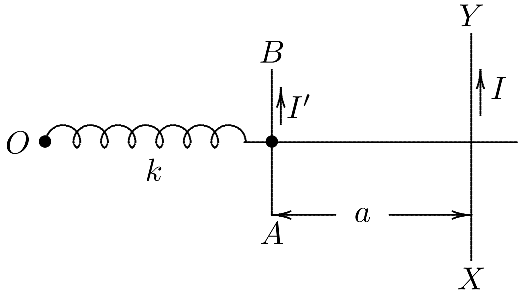
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \left(L\widehat{x} + \frac{L}{2}\widehat{y} \right) \times (-IB_0 L\widehat{z})$$

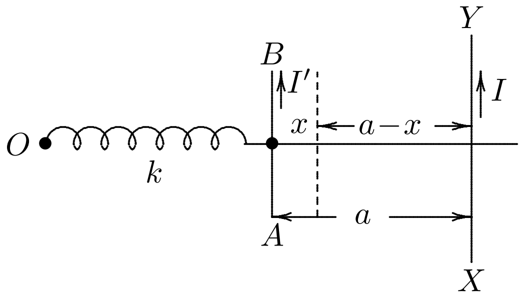
$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ L & \dfrac{L}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -IB_0 L \end{vmatrix} = \widehat{x}\left(-I\frac{L^2}{2}B_0 \right) + \widehat{y}\left(IB_0 L^2 \right)$$

88-4) Esercizio n. 1 del 5/3/1988

Siano dati un filo infinitamente lungo XY percorso da una corrente di intensità I ed una porzione di filo AB di lunghezza l percorso da una corrente di intensità I'.

Il filo AB è legato ad una molla ed in condizioni di riposo, in assenza di corrente, si trova ad una distanza a dal filo XY. Trovare la posizione di equilibrio di AB, mantenendo costante I', in funzione della intensità di corrente I.





La forza magnetica che si esercita sul filo AB è

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{II'l}{(a-x)}$$

ed è attrattiva. All'equilibrio:

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{II'l}{(a-x)} = kx$$

cioè

$$\frac{\mu_0}{2\pi} II'l = kx(a-x)$$

$$\frac{\mu_0}{2\pi} II'l = kax - kx^2$$

$$kx^2 - kax + \frac{\mu_0}{2\pi} II'l = 0$$

$$x = \frac{ka \pm \sqrt{k^2a^2 - 2k\dfrac{\mu_0}{\pi}II'l}}{2k} \tag{$*$}$$

$$\Delta > 0 \qquad k^2a^2 - 2k\frac{\mu_0}{2\pi}II'l > 0$$

$$k^2a^2 > 2k\frac{\mu_0}{\pi}II'l$$

$$a^2 > \frac{2\mu_0}{k\pi}II'l \tag{$**$}$$

La $(*)$ si può scrivere come

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - CI}}{2}$$

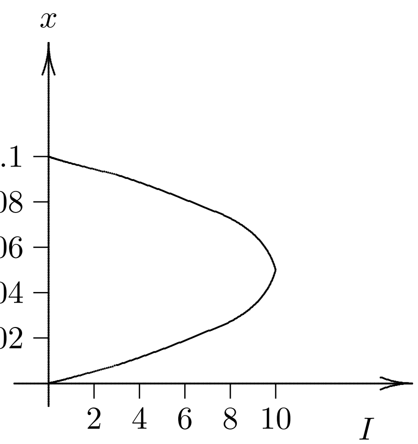
Poniamo, a titolo di esempio, e in accordo con la $(**)$:

$$a = 10\,cm = 0.1\,m \qquad C = \frac{2\mu_0 I'l}{k\pi} = 10^{-3}$$

si ha:

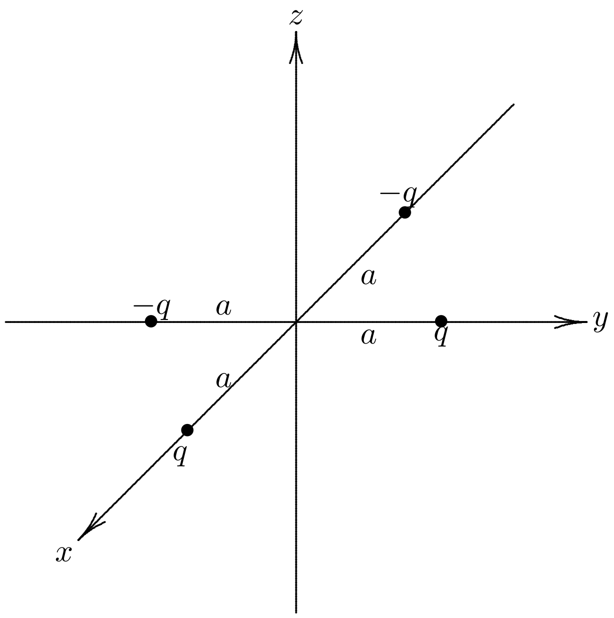
$$x_1 = \frac{a + \sqrt{\Delta}}{2}\ ; \quad x_2 = \frac{a - \sqrt{\Delta}}{2}$$

I	x_1	x_2
1	0.097	0.0025
3	0.092	0.008
5	0.085	0.015
7	0.077	0.023
9	-0.066	0.034
10	-0.05	0.05



88-5) Esercizio n. 2 del 5/3/1988

Sia data una distribuzione di cariche elettriche puntiformi come in figura. Calcolare il vettore momento di dipolo elettrico e verificare esplicitamente che esso risulta indipendente dall'origine del sistema di coordinate.



Si ha:

$$\vec{P} = 2qa\widehat{x} + 2qa\widehat{y}$$

88-6) Esercizio n. 3 del 5/3/1988

Un'onda piana incide normalmente dal vuoto su un materiale che riempie tutto un semispazio.

Se l'onda piana è costituita da luce non polarizzata e l'indice di rifrazione del mezzo è $n = 1.5$ calcolare:

a) il rapporto fra la potenza riflessa e la potenza incidente;
b) il rapporto fra la potenza trasmessa e la potenza incidente.

Ripetere i calcoli a) e b) per $n = 1.3$, $n = 1.7$, $n = 1.9$.

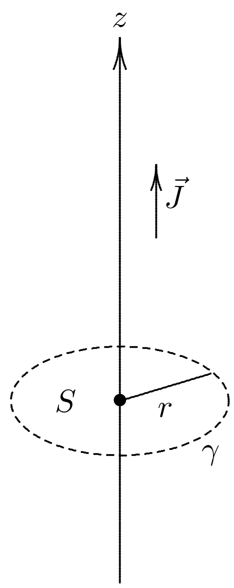
Si ha:

$$R = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} \qquad T = 1 - \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} = \frac{\cancel{n^2} + \cancel{1} + 2n - \cancel{n^2} + 2n - \cancel{1}}{(n+1)^2} = \frac{4n}{(n+1)^2}$$

n	R	T
1.3	0.017	0.9829
1.5	0.04	0.96
1.7	0.067	0.933
1.9	0.096	0.9037

88-7) Esercizio n. 1 del 9/4/1988

Una certa zona dello spazio è sede di una corrente stazionaria, il cui vettore densità $\vec{J}$ è parallelo ad un asse z di riferimento e dipende solo dalla distanza r da questo asse. Si consideri un contorno circolare di raggio r perpendicolare all'asse z e con il centro su di esso. Se indicando con C l'integrale del vettore induzione magnetica $\vec{B}$ (generato da $\vec{J}$) lungo il contorno circolare, risulta $C = \alpha r^3$, trovare l'espressione della funzione $\vec{J}(r)$.



$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \widehat{n}\, da = \mu_0 \int_0^r J 2\pi r\, dr$$

Quindi, poichè

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot \vec{dl} = \alpha r^3$$

si ha:

$$\alpha r^3 = \mu_0 \int_0^r J 2\pi r\, dr = \mu_0 2\pi \int_0^r J(r) r\, dr$$

Ne segue

$$\frac{d(\alpha r^3)}{dr} = \mu_0 2\pi J(r) r$$

$$3\alpha r^2 = 2\pi \mu_0 J(r) r \Longrightarrow J(r) = \frac{3\alpha r}{2\pi \mu_0}$$

88-8) Esercizio n. 2 del 9/4/1988

Un'onda elettromagnetica monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda = 600\,nm$ si propaga nel vuoto ed incontra un elettrone libero. Se l'intensità dell'onda è $375\,W/m^2$ ed in approssimazione di onda piana, calcolare:

a) l'ampiezza a delle oscillazioni dell'elettrone e l'ampiezza v_m della sua velocità, trascurando in prima approssimazione l'azione della componente magnetica dell'onda;
b) il rapporto fra l'ampiezza della forza magnetica e quella della forza elettrica agente sull'elettrone, utilizzando i risultati del quesito a).

Consideriamo un'onda piana il cui vettore $\vec{E}$ sia:

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Se r è la direzione di $\vec{E}_0$ l'equazione del moto dell'elettrone è:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = eE_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e}{m}E_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e}{\omega m}E_0 \sin(\omega t + \phi) + C_1$$

$$C_1 = -\frac{e}{\omega m}E_0 \sin\phi$$

per essere $\dfrac{dx}{dt} = 0$ per $t = 0$. Segue

$$x = -\frac{e}{\omega^2 m}E_0 \cos(\omega t + \phi) - \frac{e}{\omega m}E_0 \sin(\phi t) + \frac{e}{\omega^2 m}E_0 \cos\phi$$

$$a = \frac{e}{\omega^2 m}E_0 \qquad v_m = \frac{e}{\omega m}E_0$$

Si ha:

$$S = \frac{1}{\mu}E_0 B_0$$

ma

$$B_0 = \frac{E_0}{c} \qquad S_{\text{max}} = \frac{1}{\mu}\frac{e_0^2}{c} \qquad S_{\text{eff}} = \frac{S_{\text{max}}}{2}$$

ed anche

$$E_0 = \sqrt{\mu_0 c 2 S_{\text{eff}}} = 19.41 \cdot \sqrt{2}$$

$$\omega = 2\pi\nu \ , \quad c = \lambda\nu \longrightarrow \nu = \frac{c}{\lambda}$$

quindi

$$\omega = 2\pi\frac{c}{\lambda} = 3.1416 \cdot 10^{15}$$

In definitiva:

$$a = 3.46 \cdot 10^{-19}\sqrt{2} = 4.9 \cdot 10^{-19}$$

$$v_m = a\omega = 1.53 \cdot 10^{-3}\, m/s$$

$$\frac{F_B}{F_E} = \frac{v_m}{c}$$

88-9) Esercizio n. 3 del 9/4/1988

Determinare l'angolo di Brewster corrispondente ad una lastra di crown borosilicato ($n = 1.5170$) immersa in aria. Determinare l'inclinazione che ha il raggio che attraversa la lastra quando l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di Brewster.

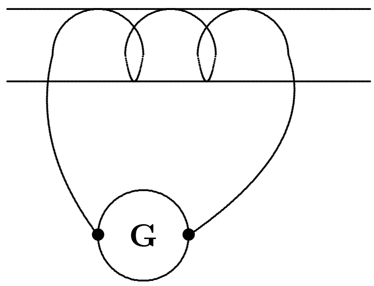
Si ha:

$$\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1} = 1.5170 \Longrightarrow \theta_B = 56^0, 6073$$

$$\theta_B + \theta_R = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \theta_R = \frac{\pi}{2} - \theta_B = 33^0, 3927$$

88-10) Esercizio n. 1 del 2/6/1988

Un solenoide lungo 50 cm e del diametro di 8 cm è formato da 500 spire. Una bobina di 20 spire avvolte strettamente circonda il solenoide al centro, ed i capi della bobina sono connessi ad un galvanometro balistico. La resistenza totale della bobina, del galvanometro e dei collegamenti è 25 Ohm. Calcolare la quantità totale di carica che passa nel galvanometro quando la corrente scende rapidamente da 3 a 1 ampere.



Si ha:

$$i = \frac{1}{R}\frac{d\phi}{dt} \ ; \quad dq = \frac{1}{R}d\phi$$

ed anche

$$\Delta Q = \frac{1}{R}\left(\phi_f - \phi_i\right)$$

$$\phi = BS = \mu_0 n I_S \pi \frac{d^2}{4} N_b$$

con $n = \dfrac{N_S}{L}$, quindi:

$$\Delta\phi = \mu_0 \pi \frac{d^2}{4}\frac{N_S N_b}{L}\left(I_{S_2} - I_{S_1}\right) = 2.527 \cdot 10^{-4}\, Weber$$

In definitiva:

$$\Delta Q = \underline{\underline{1 \cdot 10^{-5}\, Coulomb}}$$

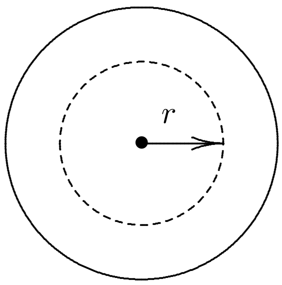
88-11) Esercizio n. 2 del 2/6/1988

In una gocciolina sferica carica, di liquido non conduttore, la carica tenderà a essere spinta verso la superficie esterna di raggio R. Una possibile distribuzione di carica è $\rho = \rho_0 r/R$, dove ρ_0 è la carica volumica massima in prossimità della superficie esterna. Calcolare il campo elettrico ed il potenziale nei punti interni ed esterni alla gocciolina.

La carica totale è:

$$Q = \int_0^R \rho_0 \frac{r}{R} 4\pi r^2\, dr = \pi \rho_0 R^3$$

Per il campo elettrico dal teorema di Gauss si ha:



$$E 4\pi r^2 = \frac{q_{\rm int}}{\epsilon_D}$$

dove

$$q_{\rm int} = \int_0^r \rho_0 \frac{r}{R} 4\pi r^2\, dr = 4\pi\rho_0 \frac{1}{4} r^4 = \rho_0 \pi \frac{r^4}{R}$$

Sostituendo si ha:

$$E 4\pi r^2 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \pi \frac{r^4}{R}$$

Segue:

$$E_{\rm int} = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} \frac{r^2}{R} \qquad r < R$$

$$E_{\rm est} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2}$$

Per il potenziale si ha:

$$\Phi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\Phi_{\rm int} = -\frac{\rho_0}{12\epsilon_0}\frac{r^3}{R} + C_1$$

$$\Phi_{\rm est} = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0}\frac{R^3}{r} + C_2$$

C_2 è zero perchè $\Phi_{\rm est} = 0$ per $r \longrightarrow \infty$, mentre C_1 si calcola imponendo che

$$\Phi_{{\rm int}\,(r=R)} = \Phi_{{\rm est}\,(r=R)}$$

cioè:

$$-\frac{\rho_0}{12\epsilon_0}R^2 + C_1 = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0}R^2$$

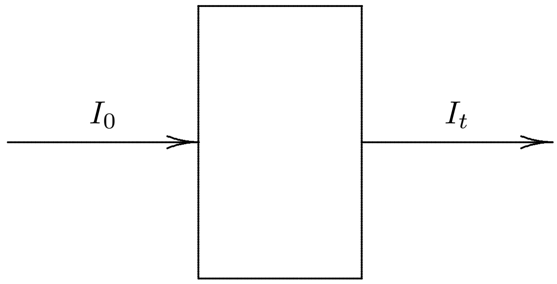
$$C_1 = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0}R^2 + \frac{\rho_0}{12\epsilon_0}R^2 = \frac{1}{3}\frac{\rho_0}{\epsilon_0}R^2$$

In definitiva, si ha:

$$\begin{cases} \Phi_{\rm int} = -\dfrac{\rho_0}{12\epsilon_0}\dfrac{r^3}{R} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\rho_0}{\epsilon_0}R^2 \\ \\ \Phi_{\rm est} = \dfrac{\rho_0}{4\epsilon_0}R^3\dfrac{1}{r} \end{cases}$$

88-12) Esercizio n. 3 del 2/6/1988

Sia data una sottile lastra di vetro con indice di rifrazione $n = 1.5$. Se un fascio di luce la colpisce sotto incidenza normale, trascurando le riflessioni multiple del vetro, calcolare il rapporto fra l'intensità della luce uscente dalla lastra e quella incidente.



La luce I_0 colpisce la prima superficie; quella che penetra nel vetro è

$$I_t' = \frac{4n}{(n+1)^2} I_0$$

Di questa, parte viene riflessa; quella che esce è:

$$I_t = \left[1 - \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2\right] \frac{4n}{(n+1)^2} I_0 = \left[\frac{4n}{(n+1)^2}\right]^2 I_0$$

Si ha per $n = 1.5$

$$I_t = \underline{\underline{0.9216 I_0}}$$

88-13) Esercizio n. 1 del 30/6/1988

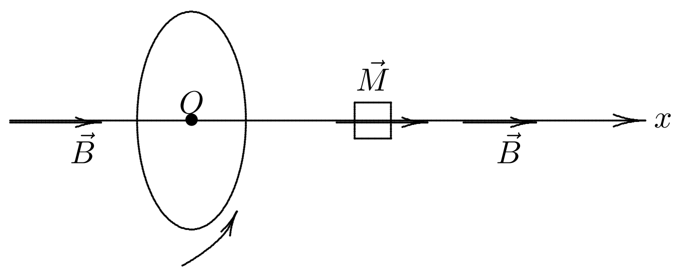
Un piccolo magnete di momento magnetico $\vec{M}$ e di massa m, è posto sull'asse di una spira circolare di raggio a, percorsa da una corrente di intensità i. Il magnete può scorrere senza attrito lungo l'asse della spira con il vettore $\vec{M}$ diretto secondo tale asse. Si suppongano trascurabili i fenomeni d'induzione. L'asse della spira è orizzontale.

a) Scelto un verso arbitrario per la corrente nella spira, valutare il verso del momento magnetico $\vec{M}$ perchè la forza alla quale è sottoposto il magnete, nella generica posizione sull'asse distante x dal centro della spira, sia attrattiva e calcolare il modulo.

b) Calcolare la posizione di equilibrio del magnete e dimostrare che essa è stabile.

c) Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni attorno a tale posizione di equilibrio.

Dati: $i = 20\,A$; $a = 20\,cm$; $m = 50\,g$; $M = 0.5$



$$\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{M}\cdot\vec{B}\right)$$

$$\vec{B}_x = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2\pi a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}\widehat{x}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2\pi a^2\left[-\frac{3}{2}(a^2+x^2)^{1/2} 2x\right]}{(a^2+x^2)^3} =$$
$$= -\frac{\mu_0}{2} I a^2 \frac{3x}{(a^2+x^2)^{5/2}}$$

Segue

$$\vec{F} = M\frac{\partial B_x}{\partial x}\widehat{x}$$

La forza é diretta verso il centro della spira.

La posizione di equilibrio si ha per $x = 0$

$$\vec{F} = -\frac{3}{2}\mu_0 M I a^2 \frac{x}{(a^2+x^2)^{5/2}}\widehat{x}$$

$$\frac{dF_x}{dx} = -\frac{3}{2}\mu_0 M I a^2 \left[\frac{(a^2+x^2)^{5/2} - \frac{5}{2}(a^2+x^2)^{3/2}2x^2}{(a^2+x^2)^5}\right] =$$
$$= -\frac{3}{2}\mu_0 M I a^2 \frac{a^2+x^2-5x^2}{(a^2+x^2)^{7/2}} = -\frac{3}{2}\mu_0 M I a^2 \frac{a^2-4x^2}{(a^2+x^2)^{7/2}}$$

$$\frac{dF_x}{dx}_{\,x=0} = -\frac{3}{2}\mu_0 M I \frac{1}{a^3} < 0$$

quindi la posizione $x = 0$ è di equilibrio stabile. In prossimità di $x = 0$ cioè per $x \ll a$ si ha

$$F_{x\ll a} = -\frac{3}{2}\mu_0 M I \frac{x}{a^3}$$

L'equazione del moto per piccole oscillazioni è

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{3}{2}\mu_0 M I \frac{x}{a^3} = 0$$

Per cui

$$\omega^2 = \frac{3}{2}\frac{\mu_0}{m} M I \frac{1}{a^3}$$

Il periodo delle piccole oscillazioni risulta:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3}{2}\frac{\mu_0}{m}MI\frac{1}{a^3}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2ma^3}{3\mu_0 MI}} = \underline{\underline{29\ s}}$$

88-14) Esercizio n. 2 del 30/6/1988

Sia dato un solenoide infinitamente lungo di raggio a e sia n il numero di spire per unità di lunghezza. Si sopprima una spira di questo solenoide e si calcoli il campo magnetico al centro della spira soppressa.

Si considera al posto della spira soppressa una spira sovrapposta al solenoide intero percorsa da corrente opposta.

Si ha:

$$B_{\text{al centro della superficie}} = \mu_0 n i - \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{a}$$

88-15) Esercizio n. 3 del 30/6/1988

Una lastra di vetro ($n_v = 1.5$) è immersa in acqua ($n_a = 1.3$). Determinare l'angolo con cui un raggio di luce naturale, emesso da una sorgente immersa nell'acqua, deve incidere sulla superficie della lastra perchè il raggio riflesso risulti polarizzato linearmente.

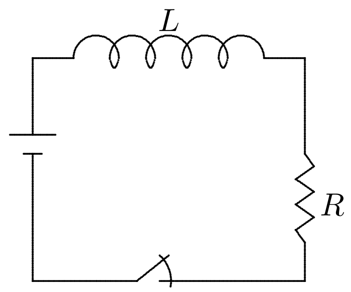
Si ha:

$$\tan\phi_P = \frac{n'}{n} = \frac{1.5}{1.3} \simeq 49^0, 08$$

il vettore parallelo al piano d'incidenza non viene riflesso.

88-16) Esercizio n. 4 del 30/6/1988

Un circuito costituito da una bobina di coefficiente di autoinduzione $L = 100\,mH$ e resistenza $R = 10\,Ohm$ collegata con una batteria di 12 V, è inizialmente aperto. Determinare l'energia immagazzinata nella bobina $10^{-2}\,s$ dopo la chiusura del circuito.



Si ha:

$$i = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

$\tau = \frac{R}{L} = \frac{10}{100\cdot 10^{-3}} = 100\,s$ Segue

$$i_{(10^{-2})} = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{10^{-2}\tau}\right) = \frac{12}{10}\left(1 - e^{10^{-2}\cdot 100}\right) = 0.7585\,A$$

Per l'energia si ha:

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\cdot 0.1\cdot (0.7585)^2 = \underline{\underline{0.02876\,Joules}}$$

88-17) Esercizio n. 1 del 20/10/1988

Due conduttori sferici sono posti nel vuoto. Uno di essi, di raggio $R = 10\,cm$, è messo a terra (cioè a potenziale zero) e l'altro è tanto piccolo che lo si può trattare come una carica puntiforme. Il conduttore piccolo porta la carica $q = 10^{-6}\,C$ ed è posto ad una distanza $d = 20\,cm$ dal centro dell'altra sfera. Calcolare la carica totale indotta sulla superficie esterna della sfera messa a terra e dimostrare che essa è uguale alla carica immagine. Calcolare, inoltre, la forza che agisce sulla sferetta piccola dovuta alle cariche indotte. N.B.: $\displaystyle\int \frac{\sin\theta\,d\theta}{(a - b\cos\theta)^{3/2}}$ si calcola ponendo $a - b\cos\theta = t$.

Si ha:

$$dq' = \sigma\,da$$

$$q' = -\frac{1}{4\pi}\frac{q}{a^2}\left(\frac{a}{d}\right)\left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right)\int_0^\pi \frac{2\pi a^2 \sin\theta\,d\theta}{\left[1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d}\cos\theta\right]^{3/2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}q\left(\frac{a}{d}\right)\left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right)\int_0^\pi \frac{\sin\theta\,d\theta}{\left[1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d}\cos\theta\right]^{3/2}}$$

Pongo: $1 + \dfrac{a^2}{d^2} - 2\dfrac{a}{d}\cos\theta = t$, differenziando si ha:

$$2\frac{a}{d}\sin\theta\,d\theta = dt$$

segue

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta\,d\theta}{\left[1 + \frac{a^2}{d^2} - 2\frac{a}{d}\cos\theta\right]^{3/2}} = \int_{\left(1-\frac{a}{d}\right)^2}^{\left(1+\frac{a}{d}\right)^2} \frac{\frac{d}{2a}dt}{t^{3/2}} = \frac{d}{2a}\int_{\left(1-\frac{a}{d}\right)^2}^{\left(1+\frac{a}{d}\right)^2} t^{-\frac{3}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{d}{2a}\left[-2t^{-\frac{1}{2}}\right]_{\left(1-\frac{a}{d}\right)^2}^{\left(1+\frac{a}{d}\right)^2} = \frac{d}{2a}\left[-2\left(1 + \frac{a}{d}\right)^{-1} + 2\left(1 - \frac{a}{d}\right)^{-1}\right] =$$

$$= \frac{d}{2a}\left(\frac{-2}{1+\frac{a}{d}} + \frac{2}{1-\frac{a}{d}}\right) = \frac{d}{2a}\left(\frac{\cancel{-2} + 2\frac{a}{d} \cancel{+2} + 2\frac{a}{d}}{1-\frac{a^2}{d^2}}\right) =$$

$$= \frac{2}{1-\frac{a^2}{d^2}}$$

Così

$$\boxed{q' = -q\frac{a}{d}}$$

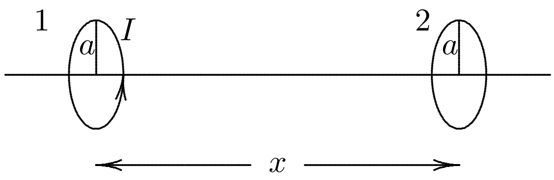
$$q' = -10^{-6}\cdot 0.5 = \underline{\underline{-5\cdot 10^{-7}\,C}}$$

Infine

$$F = kq^2\frac{a}{d^3}\frac{1}{\left(1-\frac{a^2}{d^2}\right)^2} = 9\cdot 10^9\cdot 10^{-12}\frac{10^2}{8}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} = \underline{\underline{2\cdot 10^{-1}\,N}}$$

88-18) Esercizio n. 2 del 20/10/1988

Due spire circolari e coassiali di raggio a, hanno l'asse coincidente con l'asse x di un sistema di riferimento. Sia $x \gg a$ la loro distanza. Una di esse trasporta una corrente stazionaria I e si muove lungo il comune asse con velocità v. In approssimazione dipolare, calcolare la f.e.m. indotta nell'altra spira.



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(-\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3\,(\vec{m}\cdot\vec{r})\,\vec{r}}{r^5}\right)$$

Nella spira 2 si ha:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(-\frac{I\pi a^2}{x^3} + \frac{3I\pi a^2 x^2}{x^5}\right)$$

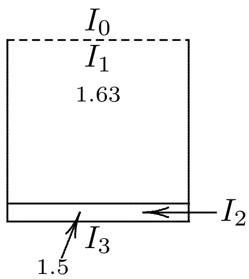
$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{x^3}\ ; \quad \phi = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{x^3}\pi a^2$$

$$F.e.m. = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dx}\frac{dx}{dt} = -v\frac{d\phi}{dx} = v\frac{\mu_0 I a^4 \pi}{2}\frac{3}{x^4} =$$

$$= \frac{3\mu_0 \pi I a^4 v}{2x^4}$$

88-19) Esercizio n. 3 del 20/10/1988

Un liquido di indice di rifrazione 1.63 occupa un recipiente di vetro a fondo piatto, aperto in sommità. L'indice di rifrazione del vetro è 1.5. Un fascio di liquido incide normalmente sulla superficie del liquido. Se il campo elettrico dell'onda incidente ha un valore massimo di $10\,V/m$ calcolare l'intensità dell'onda incidente e quella dell'onda trasmessa attraverso il recipiente di vetro, considerando un'unica riflessione per ciascuna superficie di separazione fra mezzi diversi.



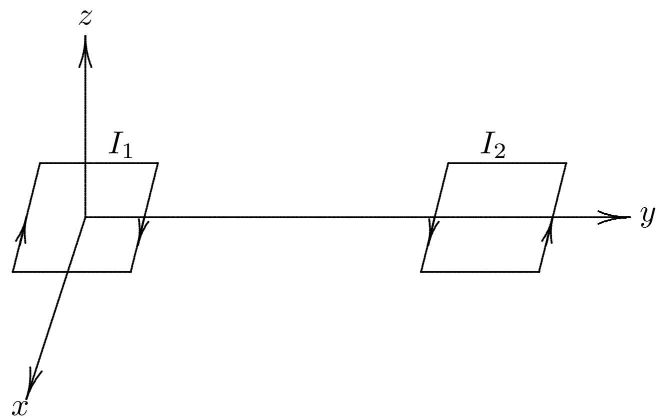
Si ha:

$$I_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 = 0.265\,\frac{Watt}{m^2}$$

$$\begin{cases} I_1 = t_1 I_0 = 0.25,\,\dfrac{W}{m^2} \\[2em] I_2 = t_2 t_1 I_0 = 0.24957\,\dfrac{W}{m^2} \\[2em] I_3 = t_3 t_2 t_1 I_0 = 0.23933,\,\dfrac{W}{m^2} \end{cases} \qquad \text{essendo} \qquad \begin{cases} t_1 = \dfrac{4n_l}{(1+n_l)^2} = 0.9426 \\[2em] t_2 = \dfrac{4n_v n_l}{(n_v+n_l)^2} = 0.99827 \\[2em] t_3 = \dfrac{4n_v}{(1+n_v)^2} = 0.96 \end{cases}$$

88-20) Esercizio n. 1 del 3/12/1988

Due spire quadrate di lato a, percorse da correnti I_1 e I_2 rispettivamente, giacciono su un piano. I loro centri sono separati da una distanza $y \gg a$. Se le correnti circolano in verso opposto, calcolare, in approssimazione dipolare, la forza che si esercita sulle spire.



Si ha:

$$\vec{M}_1 = -\widehat{k} I_1 a^2 \ ; \quad \vec{M}_2 = \widehat{k} I_2 a^2$$

Il campo generato dalla spira 1 supposta sostituita da un dipolo magnetico $\vec{M}_1$ posto nel suo centro è dato da:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{\vec{M}_1}{y^3} + \frac{3\left(\vec{M}_1 \cdot \vec{y}\right)\vec{y}}{y^5}\right]$$

dove abbiamo posto $r = y$, e tenendo conto che $\vec{M}_1 \cdot \vec{y} = 0$ si ha:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\widehat{k} I_1 a^2}{y^3}\right]$$

La forza alla quale è soggetta la spira 2 di momento magnetico $\vec{M}_2 = \widehat{z} I_2 a^2$ è:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{M}_2 \cdot \vec{B}\right) = \vec{\nabla}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 I_2 a^4}{y^3}\right)$$

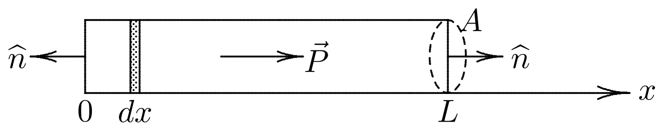
Infine

$$\vec{F} = \widehat{y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 I_2}{y^3} a^4\right) = -\widehat{y}\frac{3\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 I_2}{y^4} a^4$$

cioè è attrattiva.

88-21) Esercizio n. 2 del 3/12/1988

Una sottile sbarra di dielettrico, con sezione trasversale A, si estende lungo l'asse x da $x = 0$ a $x = L$. La sbarra è polarizzata longitudinalmente e la polarizzazione è data da $P_x = ax^2 + b$. Trovare la densità di volume della carica di polarizzazione e la carica di polarizzazione superficiale su ciascuna estremità. Mostrare *esplicitamente* che la carica legata totale è nulla.



Si ha:

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \widehat{n}$$

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \qquad \sigma_{P(x=L)} = aL^2 + b \quad \sigma_{P(x=0)} = -b$$

$$\vec{P} = \widehat{x}(ax^2 + b)$$

Chiaramente $\rho_P = -\dfrac{\partial}{\partial x}(ax^2 + b) = -2ax$

La carica totale di polarizzazione è:

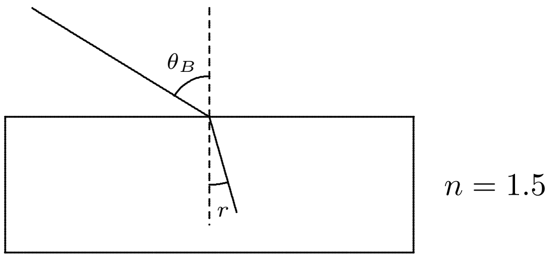
$$Q_P = \int_{V_0} \left(-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}\right) dv + \oint_{S_0} \vec{P} \cdot \widehat{n}\, da =$$

$$= \int_0^L -2axA\, dx + aL^2 A = -2aA\frac{1}{2}L^2 + aAL^2 = 0$$

con $dv = Adx$.

88-22) Esercizio n. 3 del 3/12/1988

Un fascio di luce naturale colpisce una lastra di vetro, di indice di rifrazione $n = 1.5$, con un angolo di incidenza eguale all'angolo di Brewster. Calcolare: a) l'angolo di incidenza; b) l'angolo di rifrazione; c) la percentuale di intensità luminosa riflessa; d) la percentuale di intensità luminosa rifratta. Discutere la polarizzazione del fascio riflesso e rifratto.



Si ha:

$$\tan\theta_B = 1.5 \Longrightarrow \theta_B = 56,3$$

$$r = 90^0 - \theta_B = 33^0,7$$

ed anche

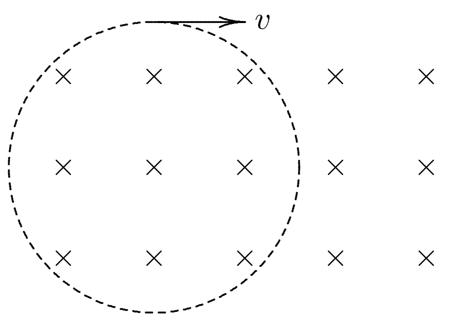
$$r = \frac{1}{2}\frac{\sin^2(\phi - \phi')}{\sin^2(\phi + \phi')} = \frac{1}{2}\sin^2(22^0,6) = 7.38\%$$

$$t = 92.62\%$$

La luce riflessa è polarizzata linearmente con il vettore elettrico normale al piano di incidenza. La luce trasmessa non è completamente polarizzata linearmente, ma è un insieme della componente parallela completamente rifratta (perchè non è riflessa) e del rimanente della componente ortogonale.

88-23) Esercizio n. 4 del 3/12/1988

Un protone con velocità $v = 10^7\, m/s$ è iniettato ortogonalmente ad un campo di induzione magnetica uniforme di $0.1\, Wb/m^2$. a) Quanto è deviato dalla linea retta il cammino della particella dopo che ha percorso $1\, cm$ nel campo? b) Quanto tempo impiega il protone a deviare di 90^0?

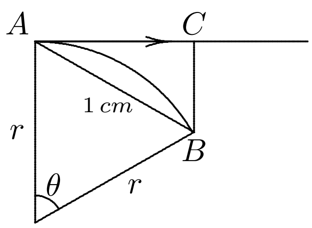


Si ha:

$$m\frac{v^2}{r} = qvB \Longrightarrow r = \frac{mv}{qB} = \frac{1.67 \cdot 10^{-27} \cdot 10^7}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.1} = 1.04\, m$$

$$\Delta s = r\theta \Longrightarrow \theta = \frac{\Delta s}{r} = 0.0096\, rad$$

Particolare



In figura $AB \simeq \Delta s$, l'angolo $C\widehat{A}B$ è $\frac{\theta}{2}$, la deviazione $CB = \Delta s \sin\frac{\theta}{2} \simeq 0.0048\, cm.$

Il tempo per deviare di 90^0 è $\frac{1}{4}$ del periodo:

$$t_{90^0} = \frac{1}{4}T = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{v}r = \underline{\underline{1.63 \cdot 10^{-7}\, sec.}}$$

Fine Esercizi Fisica II - 1988