Esercizi svolti di Fisica generale II - Anno 2002

02-1) Esercizio n. 1 del 1/2/2002

Il potenziale elettrostatico della carica formante la nube elettronica dell'atomo di idrogeno allo stato fondamentale é dato da:

$$\Phi(r) = \frac{|e|}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-2r/r_0}}{r} \left(1 + \frac{r}{r_0}\right)$$

dove $|e|$ é il valore assoluto della carica dell'elettrone e $r_0 = 5.29 \cdot 10^{-11}$ m il raggio di Bohr. Calcolare la corrispondente distibuzione di carica.

Applichiamo l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \Phi(r) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

che, in coordinates feriche, si scrive:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} \right) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(r)}{dr} =& \frac{|e|}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-2\dfrac{r}{r_0} e^{-2r/r_0} - e^{-2r/r_0}}{r^2} \right) + \frac{|e|}{4\pi\epsilon_0 r_0} \left(-\frac{2}{r_0} \right) e^{-2r/r_0} = \\ =& \frac{|e|}{4\pi\epsilon_0} e^{-2r/r_0} \left(-\frac{2}{r_0 r} - \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r_0^2} \right) \end{aligned}$$

$$r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{|e|}{4\pi\epsilon_0} e^{-2r/r_0} \left(-\frac{2r}{r_0} - 1 - \frac{2r^2}{r_0^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} \right) &= -\frac{2}{r_0} \frac{|e|}{4\pi\epsilon_0} e^{-2r/r_0} \left(-\frac{2r}{r_0} - 1 - \frac{2r^2}{r_0^2} \right) + \frac{|e|}{4\pi\epsilon_0} e^{-2r/r_0} \left(-\frac{2}{r_0} - \frac{4r}{r_0^2} \right) = \\ &= -\frac{|e|}{4\pi\epsilon_0} e^{-2r/r_0} \left(-\frac{4r}{r_0^2} - \frac{2}{r_0} - \frac{4r^2}{r_0^3} + \frac{2}{r_0} + \frac{4r}{r_0^2} \right) = 4 \frac{r^2}{r_0^3} \frac{|e|}{4\pi\epsilon_0} e^{-2r/r_0} \end{aligned}$$

Ne segue dalla (1):

$$\rho(r) = -4\epsilon_0 \frac{1}{r_0^3} \frac{|e|}{4\pi\epsilon_0} e^{-2r/r_0}$$

ossia:

$$\boxed{\rho(r) = -\frac{|e|}{\pi r_0^3} e^{-2r/r_0}}$$

02-2) Esercizio n. 2 del 1/2/2002

Con riferimento al problema precedente si verifichi esplicitamente che la carica totale della nube elettronica é $-|e|$. Si tenga presente che $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-ax} dx = \frac{2}{a^3}$.

$$Q = -\frac{|e|}{\pi r_0^3} \int_0^{+\infty} e^{-2r/r_0} 4\pi r^2 dr = -\frac{4|e|}{r_0^3} \int_0^{+\infty} r^2 e^{-2r/r_0} dr$$

Applicando il risultato dell'integrale dato nel testo, risulta:

$$\boxed{Q = -\frac{4|e|}{r_0^3} \frac{r_0^3}{4} = -|e|}$$

02-3) Esercizio n. 3 del 1/2/2002

Un solenoide lungo 10 *cm* e avente un diametro di 5 *cm* é costituito da 100 *spire* percorse da una corrente $I = 0.1\ A$. Calcolare il valore del campo di induzione magnetica al centro del solenoide e in un punto dell'asse che si trova sul piano contenente l'orlo del solenoide.

(vedi es. n. 1 del 20/7/1999 ed es. n. 4 del 26/6/2000)

Il campo di induzione magnetica nei punti dell'asse di un solenoide é:

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} nI \left\{ \frac{\frac{L}{2} - z}{a\sqrt{1 + \frac{\left(\frac{L}{2} - z\right)^2}{a^2}}} + \frac{\frac{L}{2} + z}{a\sqrt{1 + \frac{\left(\frac{L}{2} + z\right)^2}{a^2}}} \right\}$$

essendo L la lunghezza del solenoide e a il suo raggio.

Il valore al centro del solenoide si ha per $z = 0$ ed é il valore massimo:

$$(B_z)_{max} = \frac{\mu_0}{2} nI \left[\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} + \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} \right] = \frac{\mu_0}{2} nI \frac{L}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}}$$

Per $L = 10\ cm$, $a = 2.5\ cm$ e $n = \dfrac{100}{10 \cdot 10^{-2}} = 1000\ m^{-1}$, si ha:

$$(B_z)_{max} = \frac{\mu_0}{2} nI \frac{10}{\sqrt{(2.5)^2 + (5)^2}} = \frac{\mu_0}{2} nI \left(\frac{10}{\sqrt{6.25 + 25}} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{2} nI \cdot 1.789 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000 \cdot 0.1 \cdot 1.789}{2} = \underline{\underline{1.12 \cdot 10^{-4}\ Wb/m^2 = 1.12\ Gauss}}$$

Per un solenoide infinitamente lungo ($a << L$), con gli stessi parametri, il valore massimo sarebbe stato $(B_z)_{max}\ \mu_0 nI = 1.257\ G$.

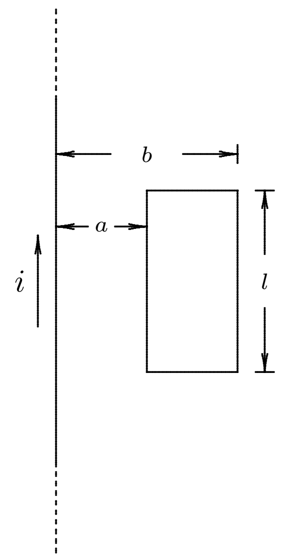
Il valore del campo di induzione magnetica in un punto dell'asse che si trova sul piano contenente l'orlo del solenoide si ha per $z = \dfrac{L}{2}$; quindi:

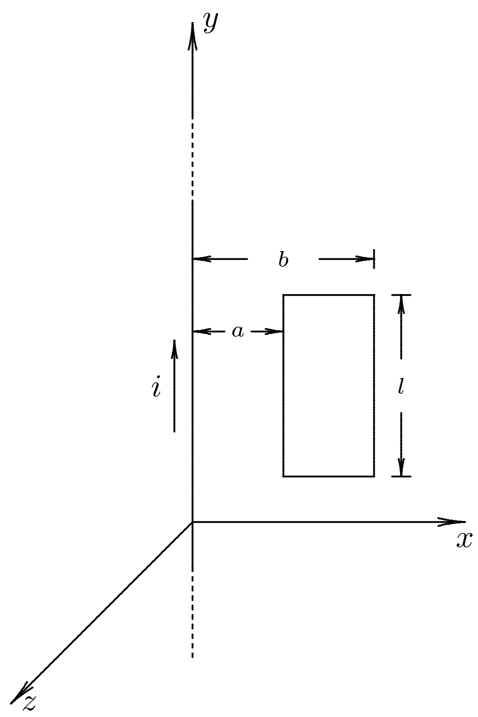
$$B_z = \frac{\mu_0}{2} nI \frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2}} = \frac{\mu_0}{2} nI \cdot 0.97 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000 \cdot 0.1 \cdot 0.97}{2} =$$

$$= \underline{\underline{0.61 \cdot 10^{-4}\ Wb/m^2 = 0.61\ Gauss}}$$

02-4) Esercizio n. 4 del 1/2/2002

Nel lungo (infinitamente) conduttore rettilineo di figura scorre una corrente variabile nel tempo $i = I_0 \sin \omega t$. Determinare l'espressione del flusso del vettore induzione magnetica attraverso la superficie della spira nonché della forza elettromotrice in essa indotta.





Scegliamo il sistema di riferimento in modo tale che il piano della spira giaccia nel piano xy.

Il campo di induzione magnetica istantaneo generato dal filo infinitamente lungo é:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{x}\widehat{z}$$

Il flusso del vettore $\vec{B}$ attraverso la superficie della spira é:

$$\Phi(\vec{B}) = \int_S \vec{B}\cdot\widehat{n}da = -\int_S \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{x}\widehat{z}\cdot\widehat{z}dxdy = -\int_S \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{x}dxdy = -\frac{\mu_0}{2\pi}l\ln\frac{b}{a}I_0\sin\omega t$$

La f.e.m. indotta é:

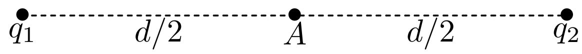
$$\epsilon = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \omega\frac{\mu_0}{2\pi}l\ln\frac{b}{a}I_0\cos\omega t$$

02-5) Esercizio n. 1 del 22/2/2002

Due cariche puntiformi $q_1 = +40 \cdot 10^{-9}\ C$ e $q_2 = -30 \cdot 10^{-9}\ C$ sono ad una distanza $d = 10\ cm$ l'una dall'altra. Il punto A si trova, sulla congiungente le due cariche, a metá distanza, mentre il punto B é, sulla congiungente le due cariche, a 8 cm da q_1. Calcolare: a) il potenziale nel punto A; b) il potenziale nel punto B; c) il lavoro richiesto per trasportare la carica $q_0 = +25 \cdot 10^{-9}\ C$ dal punto B al punto A.

---

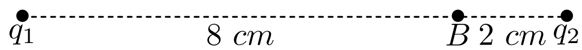
a)



Il potenziale nel punto A é:

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{d/2} + \frac{q_2}{d/2}\right) \simeq 9 \cdot 10^9 \left(\frac{40 \cdot 10^{-9} - 30 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-2}}\right) = \underline{\underline{1800\ V}}$$

b)



Il potenziale nel punto B é:

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{8 \cdot 10^{-2}} + \frac{q_2}{2 \cdot 10^{-2}}\right) \simeq 9 \cdot 10^9 \left(\frac{40 \cdot 10^{-9}}{8 \cdot 10^{-2}} - \frac{30 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-2}}\right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \left(5 \cdot 10^{-7} - 1.5 \cdot 10^{-6}\right) = \underline{\underline{-9000\ V}}$$

c) Per portare la carica q_0 dal punto B al punto A, bisogna eseguire un lavoro dato da:

$$L = -q_0 \int_{punto\ iniziale}^{punto\ finale} \vec{E} \cdot d\vec{r} = q_0 \left(V_{fin} - V_{in}\right)$$

ossia, nel nostro caso:

$$L_{B \to A} = q_0 \left(V_A - V_B\right) = 25 \cdot 10^{-9} \left(1800 + 9000\right) = \underline{\underline{2.7 \cdot 10^{-4}\ J}}$$

02-6) Esercizio n. 2 del 22/2/2002

Le molecole polari di una gas hanno un momento permanente di dipolo p_m di $5 \cdot 10^{-30}$ $C{\cdot}m$ (1.5 debye). Qual'é l'intensitá del campo elettrico esterno che bisogna applicare per causare una polarizzazione che é lo 0.5% del valore di saturazione? Si assuma una temperatura di 20^0 C.

La polarizzazione di un gas di molecole polari é:

$$P = Np_m L(y)$$

essendo N il numero di molecole per unitá di volume; p_m il momento permanente di dipolo di ciascuna molecola e $L(y)$ la funzione di Langevin.

La polarizzazione di saturazione é:

$$P_s = Np_m$$

Ne segue che:

$$P = P_s L(y)$$

Imporre che P sia lo 0.5% di P_s, significa:

$$0.005 P_s = P_s L(y)$$

da cui:

$$L(y) = 0.005$$

A temperature dell'ordine di quella ambiente, possiamo scrivere:

$$L(y) = \frac{1}{3}\frac{p_m E}{KT} = 0.005$$

ossia:

$$E = \frac{0.005 \cdot 3KT}{p_m}$$

essendo $K = 1.38066{\cdot}10^{-23}$ $J{\cdot}K^{-1}$ la costante di Boltzmann e $T = 273.16+20 = 293^0.16$ K la temperatura assoluta del gas.

Ne segue:

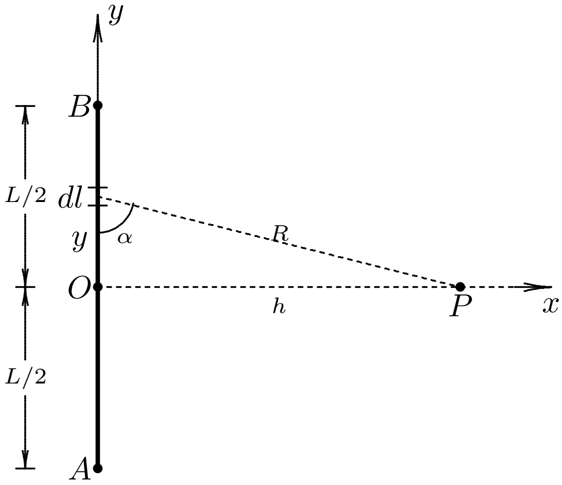
$$E = \frac{0.005 \cdot 3 \cdot 1.38066 \cdot 10^{-23} \cdot 293.16}{5 \cdot 10^{-30}} = \underline{\underline{1.2143 \cdot 10^7 \ V/m}}$$

02-7) Esercizio n. 3 del 22/2/2002

Si consideri un segmento di filo conduttore nel quale scorre una corrente di intensitá I. Si calcoli il vettore induzione magnetica in un generico punto situato sull'asse del segmento.

(vedi es. n. 4 del 26/2/1994, n. 1 del 21/7/1998, n. 3 del 21/11/1998, n. 4 del 6/5/2000)

Si consideri un segmento lungo L.



Per la prima legge di Laplace, si ha:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{l} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

Considerando un sistema di riferimento con l'asse y nella direzione del filo, si ha:

$$d\vec{l} = dy\widehat{y}, \qquad \vec{r}\,' = y\widehat{y}, \qquad \vec{r} = h\widehat{x}, \qquad R = |\vec{r} - \vec{r}\,'| = \sqrt{y^2 + h^2}$$

Pertanto il modulo di $d\vec{B}$ generato dall'elemento infinitesimo $d\vec{l}$ é:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I dy \frac{\sin\alpha}{R^2}$$

D'altra parte si ha:

$$\sin\alpha = \frac{h}{R}$$

Pertanto:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I dy \frac{h}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I dy \frac{h}{(y^2 + h^2)^{3/2}}$$

Ne segue:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I h \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dy}{\left(y^2+h^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I h \left[\frac{y}{h^2\sqrt{y^2+h^2}}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{L}{h\sqrt{L^2/4+h^2}}$$

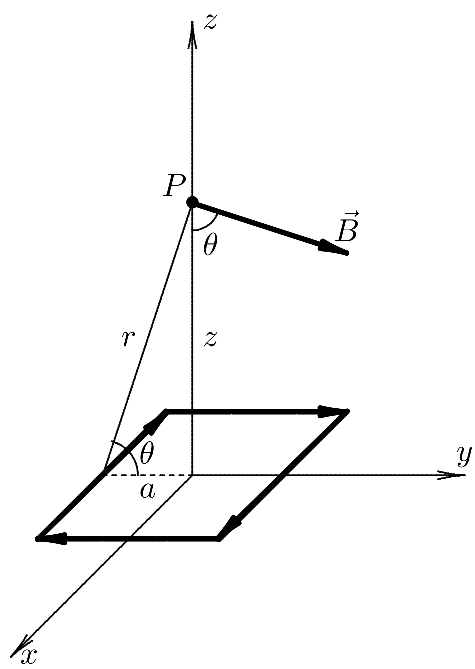
essendo:

$$\int \frac{dt}{\left(a^2+t^2\right)^{3/2}} = \frac{t}{a^2\left(a^2+t^2\right)^{1/2}} + C$$

La direzione del campo é ortogonale al piano contenente il segmento ed il suo asse. Il verso é entrante su tale piano se la corrente é diretta verso la direzione positiva dell'asse y.

02-8) Esercizio n. 4 del 22/2/2002

Con riferimento al problema precedente, si consideri una spira quadrata di 6 m di lato nella quale circola una corrente di 5 A. Calcolare il vettore induzione magnetica ad una distanza di 4 m dal centro del quadrato su una retta normale al piano del quadrato e passante per il suo centro.



Si abbia una spira quadrata di lato $2a$ giacente nel piano xy. Scegliamo il verso della corrente come in figura. In un generico punto P sull'asse della spira, coincidente con l'asse z del nostro sistema di riferimento, il campo di induzione magnetica generato dalla spira é la somma dei campi generati da ciascun lato. La congiungente il punto P con il punto medio di ciascun lato della spira coincide con l'asse del lato stesso. Pertanto il modulo del campo $\vec{B}$ generato da ciascun lato nel punto P é dato da:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2a}{r\sqrt{a^2 + r^2}}$$

Tenendo conto della simmetria del sistema e procedendo come nel caso della spira circolare si ha che considerando i lati paralleli a due a due le componenti ortogonali all'asse della spira si elidono e la risultante del campo é diretta lungo l'asse della spira.

Quindi il campo di induzione magnetica sull'asse della spira é:

$$B_z = 4\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2a}{r\sqrt{a^2 + r^2}} \cos\theta$$

Poiché:

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

risulta:

$$B_z = 4\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2a}{r\sqrt{a^2+r^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{8a^2}{(a^2+z^2)\sqrt{2a^2+z^2}}$$

Nel nostro caso, risulta:

$$a = 3\ m, \quad I = 5\ A, \quad z = 4\ m$$

Quindi:

$$B_z = 5\cdot 10^{-7}\frac{8\cdot 9}{25\sqrt{34}} = \frac{3.6\cdot 10^{-5}}{25\cdot 5.831} = \underline{\underline{2.4696\cdot 10^{-7}\ Wb/m^2}}$$

02-9) Esercizio n. 1 del 27/4/2002

Si consideri un campione di alluminio la cui resistivitá é $\rho = 28 \cdot 10^{-9}\ Ohm \cdot m$ e la cui massa specifica é $m_s = 2700\ Kg/m^3$. Calcolare il tempo di rilassamento relativo agli elettroni di conduzione. Nel reticolo cristallino dell'alluminio ogni atomo libera tre elettroni di conduzione e sia $M = 27$ il suo peso atomico.

Il tempo di rilassamento relativo agli elettroni di conduzione in un conduttore reale é:

$$\tau = \frac{\delta}{a\eta}$$

essendo δ la massa specifica media delle cariche mobili, η la loro densitá volumica di carica e a il coefficiente che figura nell'espressione della forza resistiva dovuta agli urti avente lo stesso segno di η:

$$d\vec{f}_a = -a\vec{v}\eta d^3\vec{r}\,'$$

Dopo un tempo pari a $4 \div 5$ volte τ la velocitá degli elettroni di conduzione diventa costante:

$$\vec{v} = \frac{\vec{E}}{a}$$

Nel reticolo cristallino dell'alluminio ogni atomo libera tre elettroni di conduzione.

Si ha:

$$a = \frac{\eta}{\sigma}, \quad \eta = 3Ne \quad e \quad \delta = 3Nm_e$$

essendo N il numero di atomi per unitá di volume e m_e la massa dell'elettrone.

Quindi:

$$\tau = \frac{3Nm_e\sigma}{9N^2e^2} = \frac{m_e\sigma}{3Ne^2}$$

Se $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ é il numero di Avogadro ossia il numero di atomi contenuti in un grammo atomo e se $M = 27$ é la massa atomica relativa dell'alluminio, risulta:

$$N : m_s = N_A : M$$

ossia:

$$N = \frac{N_A m_s}{M} = \frac{6 \cdot 10^{23} \cdot 2700}{27 \cdot 10^{-3}} = 6 \cdot 10^{28}\ m^{-3}$$

Inoltre:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{28 \cdot 10^{-9}} = 3.57 \cdot 10^{7}\ S/m$$

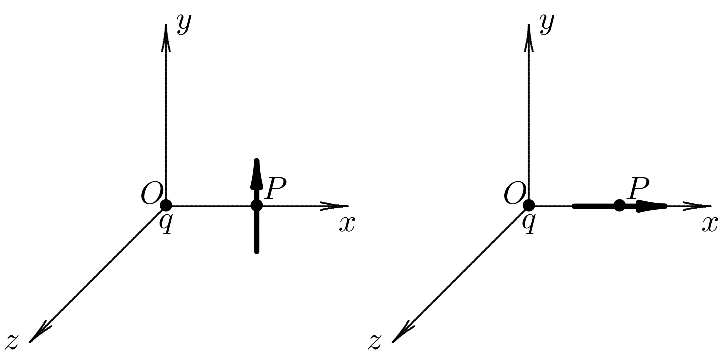
In definitiva:

$$\tau = \frac{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 3.57 \cdot 10^{7}}{3 \cdot 6 \cdot 10^{28} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2} = \underline{\underline{7.058 \cdot 10^{-15}\ s}}$$

02-10) Esercizio n. 2 del 27/4/2002

Una carica puntiforme $q = 10^{-6}$ C é posta nell'origine di un sistena di riferimento cartesiano. Un dipolo elettrico il cui modulo del momento é $|\vec{p}| = 10^{-15}$ $C \cdot m$ é posto nel punto $P \equiv (1, 0, 0)$. Calcolare la forza ed il momento meccanico che si esercitano sul dipolo nei due casi: a) $\vec{p} = |\vec{p}|\widehat{y}$ e b) $\vec{p} = |\vec{p}|\widehat{x}$.

———————



a) *b)*

Il campo elettrico generato dalla carica q, posta nell'origine delle coordinate, in un generico punto P é:

$$\vec{E} = k\frac{q}{|r|^3}\vec{r}$$

La forza, indotta dalla carica puntiforme posta nell'origine delle coordinate, su un dipolo elettrico posto in un generico punto dello spazio é:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E})$$

Caso a) - $\vec{p} = |\vec{p}|\widehat{y}$:

$$\begin{aligned}
\vec{F} =& \vec{\nabla}\left[|\vec{p}|\widehat{y} \cdot k\frac{q}{|r|^3}(x\widehat{x} + y\widehat{y} + z\widehat{z})\right] = kq|\vec{p}|\vec{\nabla}\left[\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right] = \\
=& kq|\vec{p}|\left[\widehat{x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \widehat{y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \widehat{z}\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right] = \\
=& kq|\vec{p}|\left[-\widehat{x}\frac{3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \widehat{y}\frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \widehat{z}\frac{3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}\right]
\end{aligned}$$

Se il punto P é posizionato sull'asse x del sistema di riferiemnto, la forza risulta:

$$\vec{F} = kq|\vec{p}|\frac{1}{|x|^3}\widehat{y}$$

Per $x = 1$, si ha:

$$\vec{F} = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-15} \widehat{y} = \underline{\underline{0.9 \cdot 10^{-11} \widehat{y} \ \ N}}$$

Caso b) - $\vec{p} = |\vec{p}|\widehat{x}$:

$$\begin{aligned}\vec{F} =& \vec{\nabla} \left[|\vec{p}|\widehat{x} \cdot k \frac{q}{|r|^3} (x\widehat{x} + y\widehat{y} + z\widehat{z}) \right] = kq|\vec{p}|\vec{\nabla} \left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right] = \\ =& kq|\vec{p}| \left[\widehat{x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \widehat{y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \widehat{z} \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right] = \\ =& kq|\vec{p}| \left[\widehat{x} \frac{-2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \widehat{y} \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \widehat{z} \frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \right]\end{aligned}$$

Se il punto P é posizionato sull'asse x del sistema di riferiemnto, la forza risulta:

$$\vec{F} = -2kq|\vec{p}| \frac{1}{|x|^3} \widehat{x}$$

Per $x = 1$, si ha:

$$\vec{F} = -2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-15} \widehat{y} = \underline{\underline{-1.8 \cdot 10^{-11} \widehat{x} \ \ N}}$$

02-11) Esercizio n. 3 del 27/4/2002

Con riferimento al problema precedente, calcolare esplicitamente la forza che il dipolo esercita sulla carica puntiforme e verificare, quindi, la validitá del terzo principio della dinamica.

L'espressione del campo elettrico generato da un dipolo elettrico posto nel generico punto $(O, \vec{r}\,')$ é:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\frac{3[\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')](\vec{r}-\vec{r}\,') - (\vec{r}-\vec{r}\,')^2\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5}$$

In un punto situato nell'origine delle coordinate ($\vec{r} = 0$), esso vale:

$$\vec{E}(O) = k\frac{3[\vec{p}\cdot(-\vec{r}\,')](-\vec{r}\,') - (-\vec{r}\,')^2\vec{p}}{|-\vec{r}\,'|^5}$$

Posto $\vec{r}\,' = x\widehat{x}$, si ha:

$$\vec{E}(O) = k\frac{3[\vec{p}\cdot(-x\widehat{x})](-x\widehat{x}) - x^2\vec{p}}{|-x|^5}$$

Caso a) - $\vec{p} = |\vec{p}|\widehat{y}$:

$$\vec{E}(O) = -k|\vec{p}|\frac{1}{|x|^3}\widehat{y}$$

Quindi, la forza che agisce sulla particella carica posta nell'origine delle coordinate é:

$$\vec{F} = q\vec{E}(O) = -kq|\vec{p}|\frac{1}{|x|^3}\widehat{y} = \underline{\underline{-0.9\cdot 10^{-11}\widehat{y}\ \ N}}$$

che é opposta a quella calcolata nel problema precedente.

Caso b) - $\vec{p} = |\vec{p}|\widehat{x}$:

$$\vec{E}(O) = k\frac{3(x^2|\vec{p}|\widehat{x}) - x^2|\vec{p}|\widehat{x})}{|-x|^5} = 2k|\vec{p}|\frac{1}{|x|^3}\widehat{y}$$

Quindi, la forza che agisce sulla particella carica posta nell'origine delle coordinate é:

$$\vec{F} = q\vec{E}(O) = 2kq|\vec{p}|\frac{1}{|x|^3}\widehat{x} = \underline{\underline{1.8\cdot 10^{-11}\widehat{x}\ \ N}}$$

che é opposta a quella calcolata nel problema precedente.

02-12) Esercizio n. 4 del 27/4/2002

Calcolare la forza per unitá di superficie che si esercita fra le armature di un condensatore a facce piane e parallele distanti $d = 1\ mm$, quando: a) la differenza di potenziale fra di esse é 1000 V; b) dopo essere stato caricato a 1000 V, il condensatore é sconnesso dalla batteria ed é immerso in petrolio ($\epsilon_r = 2$); c) il condensatore é prima riempito di petrolio e dopo caricato a 1000 V.

(vedi es. n. 2 del 30/1/1993)

La forza per unitá di superficie che si esercita sulla superficie di un conduttore perfetto e, quindi, fra le armature di un condensatore piano, é:

$$\left|\frac{d\vec{F}}{dS}\right| = \frac{1}{2}\epsilon_r\epsilon_0 E^2_{superficie}$$

La forza é attrattiva.

Caso a) - Condensatore vuoto ($\epsilon_r = 1$) le cui armature sono mantenute ad una differenza di potenziale costante $V_0 = 1000\ V$.

In tal caso il campo elettrico risulta:

$$E = \frac{V}{d}$$

e, quindi:

$$\left|\frac{d\vec{F}}{dS}\right| = \frac{1}{2}\epsilon_0\frac{V^2}{d^2} = \frac{8.854\cdot 10^{-12}\cdot 10^6}{2\cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{4.427\ \ N/m^2}}$$

Caso b) - Condensatore carico sconnesso e poi riempito di petrolio ($\epsilon_r = 2$).

Se si sconnette dalla batteria il condensatore, dopo che esso sia stato caricato per mezzo di una differenza di potenziale V_0, il campo elettrico al suo interno risulta:

$$E = \frac{V}{\epsilon_r d}$$

e, quindi:

$$\left|\frac{d\vec{F}}{dS}\right| = \frac{1}{2}\epsilon_r\epsilon_0\frac{V^2}{\epsilon_r^2 d^2} = \frac{8.854\cdot 10^{-12}\cdot 10^6}{2\cdot 2\cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{2.2135\ \ N/m^2}}$$

Caso c) - Condensatore sconnesso riempito di petrolio ($\epsilon_r = 2$) e poi connesso ad una differenza di potenziale V_0.

In tal caso il campo elettrico all'interno del condensatore é:

$$E = \frac{V}{d}$$

e, quindi:

$$\left|\frac{d\vec{F}}{dS}\right| = \frac{1}{2}\epsilon_r\epsilon_0\frac{V^2}{d^2} = \frac{2 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{8.854 \quad N/m^2}}$$

02-13) Esercizio n. 1 del 21/6/2002

Il nucleo dell'atomo di uranio contiene 92 protoni ed ha un raggio di circa 10^{-14} m. Assumendo che la carica positiva dei protoni sia distribuita uniformemente all'interno del nucleo, calcolare la sua energia elettrostatica. Se il nucleo di uranio viene scisso in due frammenti eguali di raggio $8 \cdot 10^{-15}$ m, calcolare la variazione di energia elettrostatica da esso subita.

Sappiamo che l'energia potenziale elettrostatica di una sfera piena di cariche é:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3}{5}\frac{Q^2}{a}$$

Per il nucleo dell'atomo di uranio, risulta:

$$Q = Z|e| = 92 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\ C$$

Ne segue:

$$W = 9 \cdot 10^9 \frac{3 \cdot 2.17 \cdot 10^{-34}}{5 \cdot 10^{-14}} = \underline{\underline{1.17 \cdot 10^{-10}\ J}}$$

É utile esprimere l'energia in MeV (mega elettronvolt), sapendo che $1\ MeV = 1.602 \cdot 10^{-13}\ J$. Quindi:

$$W = \underline{\underline{730\ MeV}}$$

Se il nucleo viene scisso in due frammenti di carica $Q_1 = Q_2 = \frac{Z}{2}|e| = 46 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\ C$, si ha:

$$W_1 = 9 \cdot 10^9 \frac{3 \cdot 5.417 \cdot 10^{-35}}{5 \cdot 8 \cdot 10^{-15}} = 3.6565 \cdot 10^{-11}\ J = 228.25\ MeV$$

$$W_{scissione} = W_1 + W_2 = 2W_1 = \underline{\underline{7.3130 \cdot 10^{-11}\ J = 456.5\ MeV}}$$

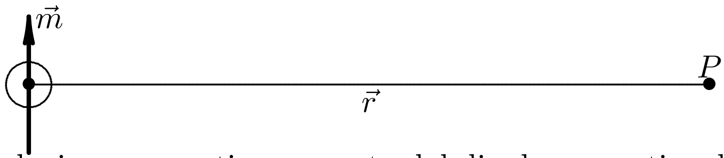
$$\Delta W = W_{scissione} - W = \underline{\underline{-4.387 \cdot 10^{-11} = -273.851\ MeV}}$$

L'energia del nucleo scisso é minore dell'energia elettrostatica del nucleo intero.

02-14) Esercizio n. 2 del 21/6/2002

Il campo di induzione magnetica generato dalla Terra, a grandi distanze, segue la legge dell'inverso del cubo della distanza. Il campo puó, quindi, essere descritto in termini di dipolo magnetico posto al centro della Terra. Se il modulo del campo ad una distanza di 15 raggi terrestri sul piano equatoriale é di 10^{-4} G, calcolare il modulo del momento di dipolo magnetico della Terra. (Il raggio della Terra é $\simeq 6400$ Km).

Sia $\vec{m}$ il momento di dipolo magnetico della Terra.



Il campo di induzione magnetica generato dal dipolo magnetico di momento $\vec{m}$ é:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right]$$

Nel punto P che si trova nel piano equatoriale si ha $\vec{m}\cdot\vec{r} = 0$ e, quindi:

$$\vec{B}_{equatoriale} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}}{r^3}$$

Il modulo di $\vec{m}$ é, quindi:

$$m = \frac{4\pi r^3 B_{equatoriale}}{\mu_0} = \frac{4\pi(15R_T)^3\cdot 10^{-8}}{4\pi\cdot 10^{-7}} = 0.1\cdot(15R_T)^3 = 0.1\cdot(15\cdot 6400\cdot 10^3)^3 =$$
$$= \underline{\underline{8.847\cdot 10^{22}\ (A\cdot m^2)}}$$

02-15) Esercizio n. 3 del 21/6/2002

Calcolare la densitá superficiale di carica sulla superficie della Terra in un punto dove il modulo del campo elettrico é 250 V/m ed é diretto in direzione della normale alla superficie. Valutare la foza che si esercita su un metro quadrato di superficie terrestre.

Supposta la superficie terrestre perfettamente conduttrice, il campo elettrico é ortogonale ad essa. Per il teorema di Coulomb si ha:

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

da cui:

$$|\sigma| = \epsilon_0 |\vec{E}| = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 250 = \underline{\underline{2.2135 \cdot 10^{-9} \ C/m^2}}$$

La forza per unitá di superficie é:

$$\frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} \widehat{n} = \frac{1}{2} \frac{(2.2135 \cdot 10^{-9})^2}{8.854 \cdot 10^{-12}} \widehat{n} = \underline{\underline{2.7669 \cdot 10^{-7} \widehat{n} \ \ N/m^2}}$$

02-16) Esercizio n. 4 del 21/6/2002

Calcolare la forza per centimetro di lunghezza che si esercita fra due fili paralleli, infinitamente lunghi, separati da una distanza $d = 30\ cm$ quando in ciascuno di essi scorre una corrente $I = 50\ A$.

La forza per unitá di lunghezza che si esercita fra due fili percorsi da corrente é, in modulo:

$$\left|\frac{dF}{dS}\right| = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{a} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{2500}{30} = \underline{\underline{1.67 \cdot 10^{-5}\ N/cm}}$$

La forza é repulsiva se le correnti sono discordi, attrattiva se sono concordi.

02-17) Esercizio n. 1 del 13/9/2002

La resistenza di un filo d'argento, di lunghezza 1.265 m e di diametro 0.096 cm, misurata a temperatura ambiente, é 0.0281 Ohm. La massa specifica dell'argento é $10.5 \cdot 10^3\ Kg/m^3$. Calcolare il tempo di rilassamento relativo agli elettroni di conduzione. Nel reticolo cristallino dell'argento ogni atomo libera un elettrone di conduzione e sia M=107.9 il suo peso atomico.

(vedi es. n.1 del 27/4/2002)

Il tempo di rilassamento relativo agli elettroni di conduzione in un conduttore reale é:

$$\tau = \frac{\delta}{a\eta}$$

essendo δ la massa specifica media delle cariche mobili, η la loro densitá volumica di carica e a il coefficiente che figura nell'espressione della forza resistiva dovuta agli urti avente lo stesso segno di η:

$$d\vec{f}_a = -a\vec{v}\eta d^3\vec{r}\,'$$

Dopo un tempo pari a $4 \div 5$ volte τ la velocitá degli elettroni di conduzione diventa costante:

$$\vec{v} = \frac{\vec{E}}{a}$$

Nel reticolo cristallino dell'argento ogni atomo libera un elettroni di conduzione.

Si ha:

$$a = \frac{\eta}{\sigma}, \quad \eta = Ne \quad e \quad \delta = Nm_e$$

essendo N il numero di atomi per unitá di volume e m_e la massa dell'elettrone.

Quindi:

$$\tau = \frac{Nm_e\sigma}{N^2e^2} = \frac{m_e\sigma}{Ne^2}$$

Se $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ é il numero di Avogadro ossia il numero di atomi contenuti in un grammo atomo e se $M = 107.9$ é la massa atomica relativa dell'alluminio, risulta:

$$N : m_s = N_A : M$$

ossia:

$$N = \frac{N_A m_s}{M} = \frac{6.022 \cdot 10^{23} \cdot 10.5 \cdot 10^3}{107.9 \cdot 10^{-3}} = 5.86 \cdot 10^{28}\ (atomi/m^3)$$

Inoltre:

$$\rho = \frac{RS}{l} = \frac{0.0281 \cdot \pi \dfrac{(0.096 \cdot 10^{-2})^2}{4}}{1.265} = 1.61 \cdot 10^{-8} \ (ohm \cdot m)$$

e, quindi:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{1.61 \cdot 10^{-8}} = 0.62 \cdot 10^{8} \ S/m$$

In definitiva:

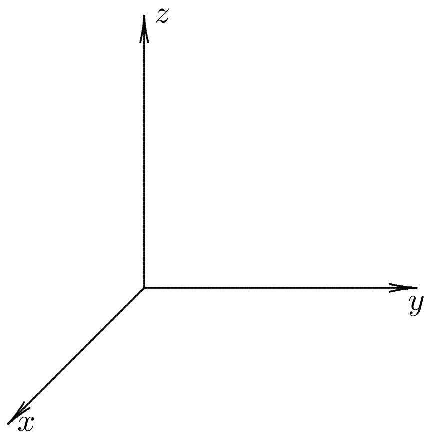
$$\tau = \frac{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 0.62 \cdot 10^{8}}{5.86 \cdot 10^{28} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2} = \underline{\underline{3.765 \cdot 10^{-14} \ s}}$$

02-18) Esercizio n. 2 del 13/9/2002

Un elettrone che si muove con velocitá di 10^4 m/s penetra in una regione dove esiste un campo di induzione magnetica uniforme di 10 *gauss*. Sia $\theta_0 = 30^0$ l'angolo che il vettore velocitá forma con il vettore $\vec{B}$. Calcolare il vettore campo elettrico necessario affinché l'elettrone possa continua a muoversi con lo stesso vettore velocitá iniziale.

Sia:

$$\vec{B} = B_0\widehat{z} \qquad e \qquad \vec{v} = v_{0_y}\widehat{y} + v_{0_z}\widehat{z}$$



La forza che agisce sull'elettrone é:

$$\vec{F} = -|e|\vec{v}\times\vec{B} = -|e|\begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ 0 & v_{0_y} & v_{0_z} \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = -|e|v_{0_y}B_0\widehat{x}$$

Affinché l'elettrone continui a muoversi con la stessa velocitá iniziale occorre che la forza totale che agisce su di esso é nulla, ossia:

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{magn} = 0$$

cioé:

$$\vec{F}_{tot} = -|e|\vec{E} - |e|v_{0_y}|B_0\widehat{x} = 0$$

Ne segue:

$$\boxed{\vec{E} = -v_{0_y}B_0\widehat{x}}$$

Il modulo di $\vec{E}$ é:

$$|\vec{E}| = v_{0_y}B_0 = (v_0\cos 60^0)B_0 = \frac{1}{2}10^4\cdot 10\cdot 10^{-4} = \underline{\underline{5\ V/m}}$$

02-19) Esercizio n. 3 del 13/9/2002

Alla temperatura di 25 ^0C la costante dielettrica relativa dello zolfo é 3.75. Calcolare la polarizzabilitá atomica sapendo che il peso molecolare dello zolfo é 32 e la sua massa specifica a questa temperatura é 2.05 g/cm^3.

Applichiamo l'equazione di Clausius-Mossotti:

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{N(\epsilon_r + 2)}$$

essendo N il numero di atomi per unitá di volume.

$$N = \frac{N_A m_s}{M} = \frac{6.022 \cdot 10^{23} \cdot 2.05 \cdot 10^3}{32 \cdot 10^{-3}} = 3.86 \cdot 10^{28} \ atomi/m^3$$

$$\alpha = \frac{3 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2.75}{3.86 \cdot 10^{28} \cdot 5.75} = \underline{\underline{3.29 \cdot 10^{-40} \ (farad \cdot m^2)}}$$

02-20) Esercizio n. 4 del 13/9/2002

Un atomo di idrogeno nel suo stato fondamentale ha il raggio quadratico medio orbitale pari a $3a_0^2$ essendo $a_0 = 0.529 \cdot 10^{-10}\ m$ il raggio di Bohr. Calcolare la suscettivitá magnetica dell'idrogeno gassoso in condizioni normali di temperatura e pressione. Si tenga presente che l'idrogeno é un gas biatomico e si assuma che ciascun atomo della molecola si comporta diamagneticamente come se il gas fosse monoatomico.

Sappiamo che la magnetizzazione indotta per un materiale diamagnetico é:

$$\vec{M}_{dia} = -\frac{NZe^2\langle r^2\rangle}{6m}\vec{B}$$

Tenendo conto che:

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M}$$

si ha:

$$\vec{M}_{dia} = -\frac{NZe^2\langle r^2\rangle}{6m}\mu_0\vec{H} - \frac{NZe^2\langle r^2\rangle}{6m}\mu_0\vec{M}_{dia}$$

da cui:

$$\vec{M}_{dia}\left(1 + \frac{NZe^2\langle r^2\rangle}{6m}\mu_0\right) = -\frac{NZe^2\langle r^2\rangle}{6m}\mu_0\vec{H}$$

Poiché:

$$\vec{M} = \chi\vec{H}$$

la suscettivitá diamagnetica é:

$$\chi = \frac{-\dfrac{NZe^2\langle r^2\rangle}{6m}\mu_0}{1 + \dfrac{NZe^2\langle r^2\rangle}{6m}\mu_0}$$

Poiché:

$$\frac{NZe^2\langle r^2\rangle}{6m}\mu_0 << 1$$

risulta:

$$\chi \simeq -\frac{NZe^2\langle r^2\rangle}{6m}\mu_0$$

In un gas a temperatura e pressione normali una mole occupa il volume di $22.4 dm^3$; quindi:

$$N = \frac{N_A}{22.4 \cdot 10^{-3}} = \frac{6.022 \cdot 10^{23}}{22.4 \cdot 10^{-3}} = 2.6884 \cdot 10^{25}\ molecole/m^3$$

Poiché l'idrogeno é un gas biatomico, risulta:

$$N_H = 2 \cdot 2.6884 \cdot 10^{25} = 5.3768 \cdot 10^{25} \ atomi/m^3$$

Quindi:

$$\chi = -\frac{5,3768 \cdot 10^{25}(1.6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 3(0.529 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{6 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}} = \underline{\underline{-2.6557 \cdot 10^{-9}}}$$

Fine Esercizi Fisica II - anno 2002