Esercizi svolti di Campi elettromagnetici - Anno 1997

97-1) Esercizio n. 1 del 01/02/1997

In ottica i materiali conduttori sono caratterizzati dalla conoscenza dell'indice di rifrazione complesso, misurabile con metodi ellissometrici, definito come $n = \dfrac{c}{\omega}k$. Si abbia una lastra di platino spessa 1 mm e di area di superficie di 9 mm^2. Un impulso laser di potenza media 100 W e durata 0.1 s incide normalmente su tale lastra isolata. Calcolare l'aumento di temperatura della lastra, conoscendo i seguenti dati: a) massa specifica del platino: $\delta = 21370\ Kg/m^3$; b) calore specifico del platino: $c_s = 138\ Jkg^{-1}K^{-1}$; c) $\Re n = 1.3$ e $\Im n = 2.8$.

———————

Dalla definizione di onda piana in un mezzo (dielettrico o conduttore, dispersivo e non) si ha:

$$k = \frac{\omega}{c}n \Longrightarrow \beta + i\alpha = \frac{\omega}{c}\Re(n) + i\frac{\omega}{c}\Im(n)$$

da cui:

$$\beta = \frac{\omega}{c}\Re(n) \qquad e \qquad \alpha = \frac{\omega}{c}\Im(n) \quad (\Re(n) = 1.3;\ \Im(n) = 2.8)$$

Il coefficiente di riflessione per $\theta_0 = 0$ é:

$$R = \frac{(q-\beta_1)^2 + p^2}{(q+\beta_1)^2 + p^2}$$

Per $\theta_0 = 0$ risulta: $q = \beta_2$ e $p = \alpha_2$.
Quindi:

$$R = \frac{(\beta_2-\beta_1)^2 + p^2}{(\beta_2+\beta_1)^2 + p^2}$$

dove $\beta_1 = \dfrac{\omega}{c}$ in quanto il primo mezzo é l'aria (per ipotesi).
Sostituendo, si ha:

$$R = \frac{[\Re(n)-1]^2 + [\Im(n)]^2}{[\Re(n)+1]^2 + [\Im(n)]^2} = \frac{(0.3)^2 + (2.8)^2}{(2.3)^2 + (2.8)^2} = \frac{7.93}{13.13} = 0.60396$$

Sicuramente a frequenze ottiche (come richiesto dal testo) il coefficiente α é cosí grande che l'onda trasmessa si dissipa tutta in calore all'interno dello spessore della lastra (1 mm). Pertanto la potenza dissipata in calore é la potenza incidente meno quella riflessa.

$$P_{dissipata} = P_0 - RP_0 = P_0(1-R) = 39.6\ W$$

La quantitá di calore sviluppata, espressa in Joule é:

$$Q = P_{dissipata} \cdot \Delta t = 3.96\ J \quad [\Delta t = 0.1\ s]$$

Poiché il calore specifico dato dal problema é espresso in $JKg^{-1}K^{-1}$, dalla formula:

$$Q = mc_s \Delta t_{emperatura} = \delta V c_s \Delta t_{emperatura}$$

si ha:

$$\Delta t_{emperatura} = \frac{Q}{\delta V c_s} = \frac{3.96}{21370 \cdot 9 \cdot 10^{-9} \cdot 138} = 149.2\ {}^0K = \underline{\underline{149.2\ {}^0C}}$$

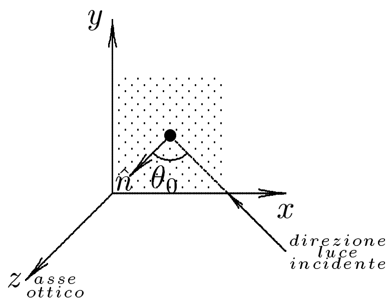
97-2) Esercizio n. 2 del 01/02/1997

Un cristallo uniassico, per cui:

$$\bar{\bar{\epsilon}} \equiv \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \equiv \epsilon_0 \begin{pmatrix} n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix},$$

é tagliato in modo tale che l'asse ottico é perpendicolare alla superficie. Un fascio di luce incide sulla superficie del cristallo con un angolo di incidenza $\theta_0 = 30^0$. Calcolare gli angoli di rifrazione competenti al raggio ordinario e straordinario rispettivamente, nei seguenti due casi: a) quarzo: $n = 1.544$, $n_z = 1.553$ (uniassico positivo); b) calcite: $n = 1.658$, $n_z = 1.486$ (uniassico negativo). Rilevare le differenti caratteristiche nella trasmissione del raggio straordinario nel quarzo e nella calcite.

———————



Il raggio di luce incidente giace nel piano parallelo al piano xz contenente l'asse ottico e il versore normale alla superficie del cristallo é parallelo all'asse ottico. Eventualmente per uniformarsi alla figura nel caso di plasmi sottoposti a campo magnetico disegnata nel corso di Campi elettromagnetici si puó invertire il verso della propagazione della luce incidente. Per analogia a tale teoria si ha:

$$\epsilon\,'_{xx} = \epsilon_0 n^2, \quad \epsilon\,'_{xy} = \epsilon\,'_{yx} = 0, \quad \epsilon\,'_{yy} = \epsilon_0 n^2, \quad \epsilon\,'_{yz} = \epsilon\,'_{zy} = 0, \quad \epsilon\,'_{zz} = \epsilon_0 n_z^2$$

Le equazioni proiettate sono allora:

$$E_{0x}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}n^2\right) = 0$$

$$E_{0y}\left(\cos^2\theta - \frac{v^2}{c^2}n^2\right) + E_{0z}\left(-\cos\theta\sin\theta\right) = 0$$

$$E_{0y}\left(-\cos\theta\sin\theta\right) + E_{0z}\left(\sin^2\theta - \frac{v^2}{c^2}n_z^2\right) = 0$$

Una soluzione per $\frac{v^2}{c^2}$si ottiene dalla prima equazione indipendente:

$$1 - \frac{v^2}{c^2} n^2 = 0 \Longrightarrow \left(\frac{v^2}{c^2} \right)_{ord} = \frac{1}{n^2}$$

Per la seconda soluzione si deve avere:

$$\begin{vmatrix} \cos^2\theta - \frac{v^2}{c^2} n^2 & -\cos\theta \sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta - \frac{v^2}{c^2} n_z^2 \end{vmatrix} = 0$$

ossia:

$$\underline{\underline{\sin^2\theta\cos^2\theta}} - \frac{v^2}{c^2} n_z^2 \cos^2\theta - \frac{v^2}{c^2} n^2 \sin^2\theta + \frac{v^4}{c^4} n_z^2 n^2 - \underline{\underline{\sin^2\theta\cos^2\theta}} = 0$$

$$\frac{v^2}{c^2} n^2 n_z^2 - \left(n_z^2 \cos^2\theta + n^2 \sin^2\theta \right) = 0$$

da cui:

$$\left(\frac{v^2}{c^2} \right)_{straord} = \frac{n_z^2 \cos^2\theta + n^2 \sin^2\theta}{n^2 n_z^2}$$

Ne segue, dunque:

$$k_{2_{ord}} = \frac{\omega}{v_{ord}} = \frac{\omega}{c} n$$

$$k_{2_{straord}} = \frac{\omega}{v_{straord}} = \underline{\underline{\frac{\omega n n_z}{c\sqrt{n_z^2 \cos^2\theta + n^2 \sin^2\theta}}}}$$

Ovviamente:

$$k_1 = \frac{\omega}{c}$$

Le leggi di Snell sono quindi:

$$k_1 \sin\theta_0 = k_{2ord} \sin\theta_{2ord}$$

$$k_1 \sin\theta_0 = k_{2straord} \sin\theta_{2straord}$$

Per quanto riguarda il raggio ordinario si ha, allora:

$$\sin\theta_{2ord} = \frac{\frac{\omega}{c}\sin\theta_0}{\frac{\omega}{c} n} = \frac{1}{n}\sin\theta_0$$

Quarzo: $n = 1.544 \begin{cases} \sin\theta_{2ord} = \frac{1}{1.544}\frac{1}{2} = 0.323834 \\ \theta_{2ord} = \underline{\underline{18^0.89}} \end{cases}$

Calcite: $n = 1.658$ $\begin{cases} \sin\theta_{2ord} = \dfrac{1}{1.658}\dfrac{1}{2} = 0.301568 \\ \\ \theta_{2ord} = \underline{\underline{17^0.55}} \end{cases}$

Per il raggio straordinario, si ha:

$$\sin\theta_0 = \frac{n n_z \sin\theta}{\sqrt{n_z^2\cos^2\theta + n^2\sin^2\theta}}$$

Elevando al quadrato:

$$\sin^2\theta_0 = \frac{n^2 n_z^2 \sin^2\theta}{n_z^2\cos^2\theta + n^2\sin^2\theta}$$

Posto $\sin^2\theta = \dfrac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ e $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$, si ha:

$$\sin^2\theta_0 = \frac{n^2 n_z^2 \tan^2\theta}{n_z^2 + n^2\tan^2\theta}$$

da cui:

$$n_z^2\sin^2\theta_0 + n^2\tan^2\theta\sin^2\theta_0 = n^2 n_z^2\tan^2\theta$$

ossia:

$$\tan^2\theta\left(n^2\sin^2\theta_0 - n^2 n_z^2\right) = -n_z^2\sin^2\theta_0$$

$$\tan^2\theta = \frac{n_z^2}{n^2}\frac{\sin^2\theta_0}{n_z^2 - \sin^2\theta_0}$$

In definitiva:

$$\tan\theta_{straord} = \frac{n_z}{n}\frac{\sin\theta_0}{\sqrt{n_z^2 - \sin^2\theta_0}}$$

Quarzo: $\begin{cases} n = 1.544 \\ n_z = 1.553 \end{cases}$

$$\tan\theta_{2straord} = \left(\frac{1.553}{1.544}\right)\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(1.553)^2 - \frac{1}{4}}} = \frac{0.502914}{1.47030} = 0.342046 \Longrightarrow \underline{\underline{\theta_{2straord} = 18^0.88}}$$

Calcite: $\begin{cases} n = 1.658 \\ n_z = 1.486 \end{cases}$

$$\tan\theta_{2straord} = \left(\frac{1.486}{1.658}\right)\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(1.486)^2 - \frac{1}{4}}} = \frac{0.448130}{1.39935} = 0.32024 \Longrightarrow \underline{\underline{\theta_{2straord} = 17^0.7571}}$$

Per il quarzo (**uniassico positivo**) $\theta_{2straord} < \theta_{2ord}$.
Per la calcite (**uniassico negativo**) $\theta_{2straord} > \theta_{2ord}$.

97-3) Esercizio n. 3 del 01/02/1997

Il modello planetario classico dell'atomo non é compatibile con la teoria elettromagnetica secondo la quale un elettrone orbitante su una traiettoria circolare irradia, a spese della sua energia cinetica, collassando quindi sul nucleo. Si assuma che in un atomo di idrogeno l'elettrone si muova non relativisticamente su un'orbita di Bohr di raggio $r_0 = 5.29 \cdot 10^{-11}$ m. La valutazione della potenza irradiata si puó effettuare considerando il moto circolare dell'elettrone come sovrapposizione di due oscillazioni armoniche su traiettorie rettilinee ortogonali, aventi la stessa frequenza e sfasate di $\pi/2$. Calcolare tale potenza.

———————

La potenza irradiata é la somma delle potenze emesse dai due dipoli dove al posto di Il poniamo $-i\omega q_e r_0$; Si ha:

$$P = 2\frac{4}{3}\pi\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\omega^2 q_e^2 r_0^2}{16\pi^2}$$

che deriva dalla formula del singolo dipolo (vedi Appunti Campi e.m.):

$$P_{dipolo} = \frac{4}{3}\pi Z\left[\frac{kIl}{4\pi}\right]^2$$

Posto: $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0\epsilon_0}{\epsilon_0^2}} = \frac{1}{c\epsilon_0}$, si ha:

$$P = 2\frac{4}{3}\pi\frac{\omega^4 q_e^2 r_0^2}{c^3\epsilon_0 16\pi^2}$$

Per valutare la pulsazione ω consideriamo l'equilibrio delle forze sull'orbita dello elettrone:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_e^2}{r_0^2} = m_e\omega^2 r_0 \Longrightarrow \omega^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_e^2}{r_0^2 m_e r_0} = \frac{q_e^2}{4\pi m_e\epsilon_0 r_0^3}$$

Quindi:

$$P = 2\frac{4}{3}\pi\frac{q_e^6 r_0^2}{c^3\epsilon_0 16\pi^2 16\pi^2 m_e^2\epsilon_0^2 r_0^6} = 2\frac{4}{3}\pi\frac{1}{(16\pi^2)^2}\frac{q_e^6}{c^3\epsilon_0^3 m_e^2 r_0^4} = \frac{1}{16\cdot 6\pi^3}\frac{q_e^6}{c^3\epsilon_0^3 m_e^2 r_0^4} =$$
$$= \frac{q_e^6}{96 c^3\epsilon_0^3\pi^3 m_e^2 r_0^4}$$

Sostituendo i valori:

$q_e = 1.6\cdot 10^{-19}$ C; $\quad \epsilon_0 = 8.854\cdot 10^{-12}$ F/m; $\quad m_e = 9.11\cdot 10^{-31}$ Kg; $\quad r_0 = 5.29\cdot 10^{-11}$ m

risulta:

$$P = \frac{1.677\cdot 10^{-113}}{3.625\cdot 10^{-106}} = \underline{\underline{4.62\cdot 10^{-8}\ W}}$$

97-4) Esercizio n. 4 del 01/02/1997

Si abbia un'antenna il cui campo elettrico far field normalizzato non dipende dallo angolo ϕ e dipende dall'angolo θ come segue:

$$E_n = 1 \quad per \quad 0 \leq \theta \leq 30^0 \text{ (lobo principale)}; \quad E_n = 0 \quad per \quad 30^0 \leq \theta \leq 90^0;$$

$$E_n = \frac{1}{3} \quad per \quad 90^0 \leq \theta \leq 180^0; \quad E_n = 0 \quad altrove.$$

Calcolare la direttivitá dell'antenna. Se la corrente di alimentazione é $I_0 = 4\ A$ ed il campo elettrico per $\theta = 0^0$ e ad una distanza di 200 m é 8 V/m, calcolare la resistenza di radiazione.

Si ha:

$$E_n = \frac{E(\theta,\phi)}{E_{max}} \qquad S_r = \frac{1}{2Z}E_{max}^2 E_n^2$$

Ne segue:

$$D = \frac{4\pi r^2 S_{max}}{\displaystyle\int_0^{4\pi} S_r(r,\theta,\phi)\, r^2 d\Omega} = \frac{\frac{1}{2Z}E_{max}^2 4\pi r^2}{\displaystyle\int_0^{4\pi} \frac{1}{2Z}E_{max}^2 E_n^2 r^2 d\Omega} = \frac{4\pi}{\displaystyle\int_0^{4\pi} E_n^2 d\Omega}$$

Tenendo conto che E non dipende da ϕ, si ha: $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$; quindi:

$$\int_0^{4\pi} E_n^2 d\Omega = 2\pi \int_{0^0}^{30^0} \sin\theta d\theta + 2\pi \int_{90^0}^{180^0} \frac{1}{9}\sin\theta d\theta = 2\pi\left[-\cos\theta\right]_{0^0}^{30^0} + \frac{2\pi}{9}\left[-\cos\theta\right]_{90^0}^{180^0} =$$

$$= 2\pi\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right] + \frac{2\pi}{9} = 2\pi\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{1}{9}\right] = 2\pi \cdot 0.245$$

Quindi:

$$D = \frac{2}{0.245} = \underline{\underline{8.16}}$$

Per la resistenza di radiazione, si ha:

$$R_a = \frac{2P}{I_o^2} = \frac{2}{I_0^2}\int_0^{4\pi} \frac{1}{2Z}E_{max}^2 E_n^2 r^2 d\Omega = \frac{1}{I_0^2}\frac{64}{Z}r^2 \int_0^{4\pi} E_n^2 d\Omega =$$

$$= \frac{1}{16}\frac{64}{Z}4\cdot 10^4 \cdot 2\pi \cdot 0.245 = \frac{246293}{Z} = \underline{\underline{653\ \Omega}}$$

in quanto, come é dato nel testo, $E_{max} = 8\ V/m$ e $I_0 = 4\ A$.

97-5) Esercizio n. 1 del 01/03/1997

Si consideri la ionosfera priva di collisioni e senza campo magnetico. Si supponga che la densitá elettronica in essa vari con l'altezza con la seguente legge lineare: $N(z) = a(z-h_0)$ per $z \geq h_0$; sia $h_0 = 50\ Km$ e $N(8h_0) = 10^{12}\ elettroni/m^3$. Una radio trasmittente (T) é posta nell'origine di un sistema di riferimento che ha il piano xz ortogonale alla superficie terrestre supposta piana con l'asse z positivo orientato secondo la verticale verso l'alto. La frequenza irradiata é: $f = 10^7\ Hz$. La direzione di emissione della radiazione giace nel piano xz e forma un angolo $\theta_0 = 30^0$ con la verticale. Calcolare: a) la massima quota raggiunta dal "fascio" irradiato; b) la distanza orizzontale dalla sorgente ad essa corrispondente; c) la distanza sulla superficie terrestre alla quale il segnale irradiato viene rivelato da una stazione ricevente (R). Si risponda ai quesiti secondo l'ordine di presentazione.

Sia $N(z) = a(z - h_0)$ per $z \geq h_0$ ($h_0 = 50000\ m$)
Per trovare la costante a, imponiamo che:

$$N(8h_0) = 10^{12} \quad \text{cosicché} \quad 7ah_0 = 10^{12}, \quad \text{da cui:} \quad a = \frac{10^{12}}{7h_0} = 2.857 \cdot 10^6$$

L'indice di rifrazione é:

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = \sqrt{1 - \frac{KN(z)}{\omega^2}}$$

Essendo $\omega_p^2 = \dfrac{N(z)q_e^2}{m\epsilon_0}$, risulta:

$$K = \frac{q_e^2}{m\epsilon_0} = 3.1738 \cdot 10^3 \qquad (\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12},\ m = 9.11 \cdot 10^{-31},\ q_e = 1.6 \cdot 10^{-19})$$

L'indice di rifrazione si puó ancora scrivere:

$$n = \sqrt{1 - \frac{Ka(z - h_0)}{4\pi^2 f^2}} \Longrightarrow n = \sqrt{1 - \alpha\frac{(z - h_0)}{f^2}} \quad \text{avendo posto } \alpha = \frac{Ka}{4\pi^2} = 2.297 \cdot 10^8$$

essendo $f = 10^7\ Hz$ la frequenza irradiata.

Dalla teoria della propagazione ionosferica sappiamo che:

$$\frac{dz}{dx} = \pm\sqrt{\frac{\cos^2\theta_0 - \alpha\dfrac{(z - h_0)}{f^2}}{\sin^2\theta_0}}$$

La massima quota si ottiene quando $\frac{dz}{dx} = 0$, cioé:

$$\cos^2\theta_0 = \alpha\frac{(z_{max} - h_0)}{f^2}$$

da cui:

$$z_{max} = h_0 + \frac{f^2\cos^2\theta_0}{\alpha} \Longrightarrow 5\cdot 10^4 + 3.26513\cdot 10^5 = \underline{\underline{376513\ m}}$$

Per calcolare l'ascissa ad essa corrispondente bisogna scrivere l'equazione della traiettoria (almeno per il tratto ascendente).

$$\sqrt{\cos^2\theta_0 - \alpha\frac{(z-h_0)}{f^2}} = -\frac{\alpha x}{2f^2\sin\theta_0} + C$$

Poiché la trasmittente é nel punto $x = 0$, la costante C si trova imponendo che per $z = h_0$ risulti $x = h_0\tan\theta_0$. Si ha, quindi:

$$\cos\theta_0 = -\frac{\alpha h_0\tan\theta_0}{2f^2\sin\theta_0} + C \quad \Longrightarrow C = \cos\theta_0 + \frac{\alpha h_0}{2f^2\cos\theta_0}$$

Quindi l'equazione della traiettoria per il tratto ascendente si puó scrivere:

$$x = -\frac{2f^2\sin\theta}{\alpha}\sqrt{\cos^2\theta_0 - \alpha\frac{(z-h_0)}{f^2}} + \frac{2f^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{\alpha} + h_0\tan\theta_0$$

e ancora:

$$x = h_0\tan\theta_0 + \frac{f^2}{\alpha}\sin 2\theta_0 - \frac{2f^2\sin\theta_0}{\alpha}\sqrt{\cos^2\theta_0 - \alpha\frac{(z-h_0)}{f^2}}$$

L'ascissa x_{max} si ottiene sostituendo al posto di z, z_{max}; quindi:

$$x_{max} = h_0\tan\theta_0 + \frac{f^2}{\alpha}\sin 2\theta_0 = 2.8867\cdot 10^4 + 3.7702\cdot 10^5 = \underline{\underline{405892\ m}}$$

É utile osservare che la costante C non si puó trovare imponendo che per $z = 0$ risulti $x = 0$ in quanto l'equazione della traiettoria vale per $z \geq h_0$.

Allo stesso modo é conveniente far vedere che l'equazione per il tratto discendente é diversa da quella ascendente solo per il segno + davanti al termine con la radice quadrata. Infatti in questo caso imponendo che per $z = z_M$ e $x = x_M$ la costante C risulta eguale a quella calcolata per il tratto ascendente e l'equazione sará:

$$x = h_0\tan\theta_0 + \frac{f^2}{\alpha}\sin 2\theta_0 + \frac{2f^2\sin\theta_0}{\alpha}\sqrt{\cos^2\theta_0 - \alpha\frac{(z-h_0)}{f^2}} \quad (h_0 \leq z \leq z_{max})$$

La distanza $\overline{TR}$ é il doppio di x_{max}, cioé:

$$\overline{TR} = 2h_0 \tan\theta_0 + \frac{2f^2}{\alpha}\sin 2\theta_0$$

Tenendo conto che $\sin 2\theta_0 = \dfrac{2\tan\theta_0}{1+\tan^2\theta_0}$, la distanza $\overline{TR}$ risulta espressa come sugli Appunti di Campi e.m. É importante osservare che per $z = z_{max}$ risulta (per $\theta_0 = 30^0$) $n = 0.5$ che proviene dalla condizione di riflessione totale $n = \sin\theta_0$.

In definitiva si ha:

$$\overline{TR} = \underline{\underline{811784\ m}}$$

97-6) Esercizio n. 2 del 01/03/1997

La distanza (TR) di cui al punto c) del primo problema é una funzione dell'angolo θ_0. Dimostrare analiticamente che esiste una condizione sui parametri tale che la curva, fissata (TR), ammette tre soluzioni reali di θ_0, ossia tre traiettorie distinte possibili perché un segnale possa raggiungere la stazione ricevente. Applicare tale condizione al caso specializzato nel primo problema e calcolare graficamente tali angoli.

———————

La curva $\overline{TR}$ in funzione di θ_0, come si deduce meglio dall'espressione negli Appunti di Campi e.m., é una cubica; proviamo a trovare sotto quali condizioni essa ammette tre soluzioni per $\overline{TR}$. Per questo, basta annullare la derivata prima di $\overline{TR}$ rispetto a θ_0 e trovare la condizione perché essa ammetta due soluzioni reali, cioé la curva abbia due estremi, un massimo e un minimo in quanto per $\theta_0 = 0 \Longrightarrow \overline{TR} = 0$ e per $\theta_0 = 90^0 \Longrightarrow \overline{TR} = \infty$.

$$\frac{d\overline{TR}}{d\theta_0} = \frac{2h_0}{\cos^2\theta_0} + 4\frac{f^2}{\alpha}\cos 2\theta_0 = 0$$

ossia:

$$2h_0 + 4\frac{f^2}{\alpha}\cos^2\theta_0\left(2\cos^2\theta_0 - 1\right) = 0$$

$$4\frac{f^2}{\alpha}\cos^4\theta_0 - 2\frac{f^2}{\alpha}\cos^2\theta_0 + h_0 = 0$$

da cui:

$$\cos^2\theta_0 = \frac{\dfrac{f^2}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\dfrac{f^2}{\alpha}\right)^2 - 4\dfrac{f^2}{\alpha}h_0}}{4\dfrac{f^2}{\alpha}}$$

Per avere soluzioni reali occorre che il discriminante Δ sia ≥ 0; cioé:

$$\Delta \geq 0 \qquad se \qquad \frac{f^2}{\alpha} \geq 4h_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{f^2}{\alpha h_0} \geq 4$$

Se tale condizione é verificata la funzione $\overline{TR}(\theta_0)$ ammette due estremi relativi. Nel nostro caso, poiché risulta:

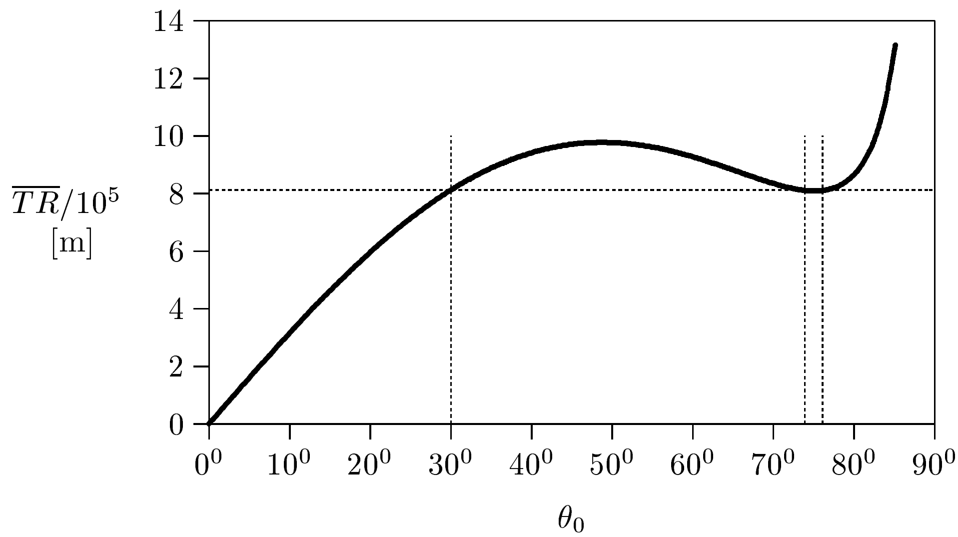
$$\frac{f^2}{\alpha h_0} = \frac{10^{14}}{2.297 \cdot 10^8 \cdot 50000} = 8.707$$

la condizione é verificata.

Grafichiamo $\overline{TR}$ in funzione di θ_0

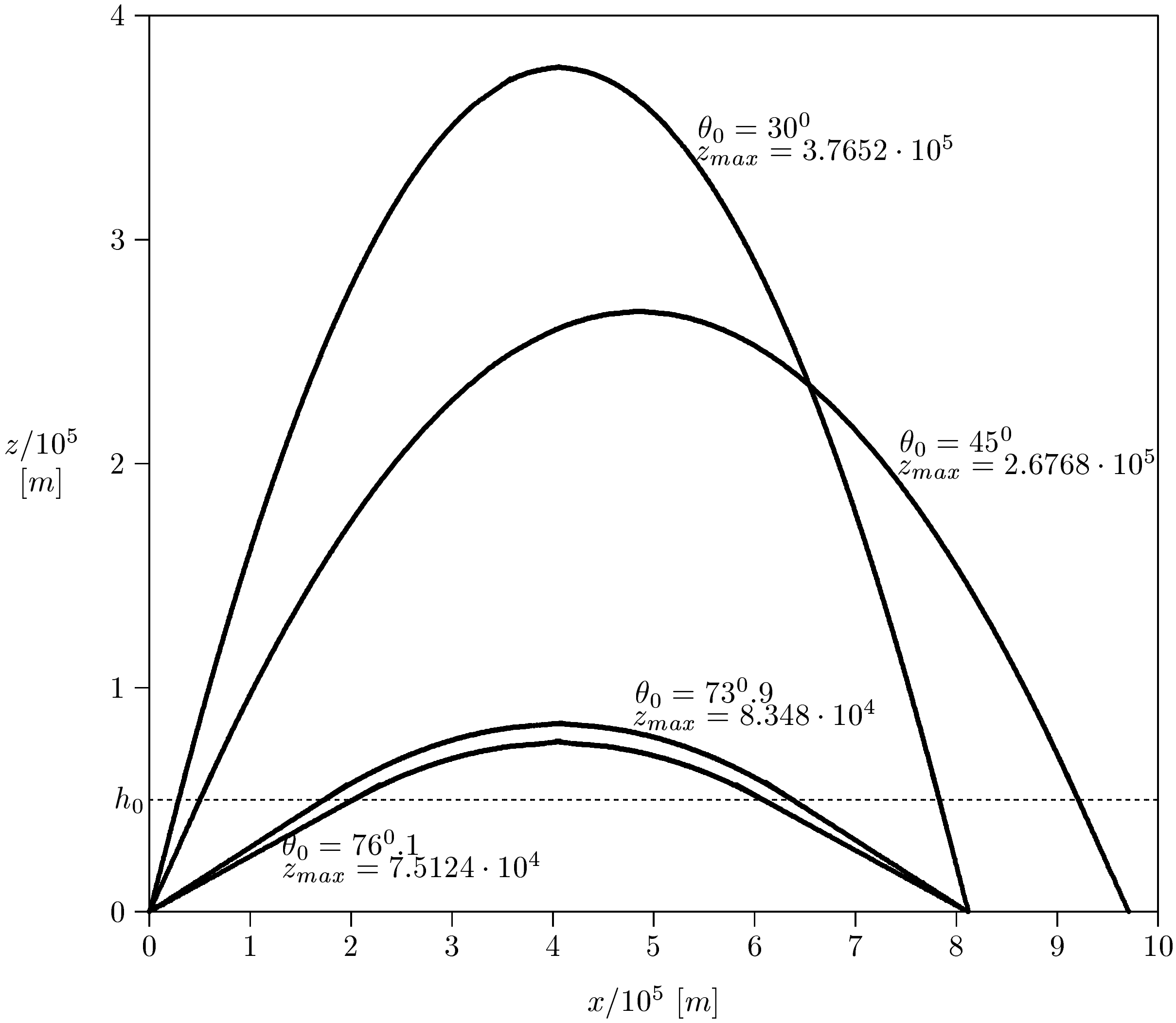
θ_0	0^0	5^0	10^0	15^0	20^0	25^0	30^0	35^0	40^0
$\overline{TR}/10^5$	0	1.599	3.154	4.62	5.96	7.136	8.118	8.88	9.41

θ_0	45^0	50^0	55^0	60^0	65^0	70^0	75^0	80^0	85^0
$\overline{TR}/10^5$	9.707	9.767	9.610	9.27	8.814	8.344	8.085	8.649	12.94



Come si vede dal grafico e dalla tabella dei valori, oltre all'angolo $\theta_0 = 30^0$ esistono altri due valori dell'angolo di elevazione per i quali si ha la stessa distanza $\overline{TR}$. Essi sono: $\theta_0 \simeq 73^0.9$ e $\theta_0 \simeq 76^0.1$.

Per verificare quanto affermato grafichiamo le traiettorie per i seguenti valori di θ_0: 30^0, 45^0, $73^0.9$ e $76^0.1$.



$\theta_0 = 30^0$
$z_{max} = 3.7652 \cdot 10^5$
$\theta_0 = 45^0$
$z_{max} = 2.6768 \cdot 10^5$
$\theta_0 = 73^0.9$
$z_{max} = 8.348 \cdot 10^4$
$\theta_0 = 76^0.1$
$z_{max} = 7.5124 \cdot 10^4$
$z/10^5$ $[m]$
h_0
$x/10^5$ $[m]$
0 1 2 3 4
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

97-7) Esercizio n. 3 del 01/03/1997

Un fascio di luce incide su una superficie di vetro di indice di rifrazione $n = 1.5$ con un angolo di incidenza pari all'angolo di Brewster, per rimuovere dall'onda riflessa la componente del campo parallela al piano di riflessione. Calcolare analiticamente l'intervallo $\Delta\theta_0$, intorno all'angolo di Brewster, entro il quale, approssimativamente, il coefficiente di riflessione per la componente parallela risulti minore dell'1%. Suggerimento: si consideri la formula (3.5.5) e si sviluppi in serie, intorno a θ_{0B}, ciascun termine del coefficiente di Fresnel, trascurando i termini di primo ordine al denominatore.

———————

É conveniente applicare la formula 3.5.5 degli Appunti di Campi e.m.:

$$\vec{H}_1 = \frac{\sin 2\theta_0 - \sin 2\theta_2}{\sin 2\theta_0 + \sin 2\theta_2}\vec{H}_0$$

e sviluppare in serie di Taylor attorno a θ_B ciascun termine del coefficiente di Fresnel. Cioé utilizziamo lo sviluppo:

$$f(x+h) \simeq f(x) + hf\,'(x)$$

In un piccolo intorno di θ_B si ha, quindi:

$$\sin 2\theta_0 \simeq \sin 2\theta_{0B} + 2\cos 2\theta_{0B}\Delta\theta_0$$

$$\sin 2\theta_2 \simeq \sin 2\theta_{2B} + 2\cos 2\theta_{2B}\left(\frac{d\theta_2}{d\theta_0}\right)_{(\theta_0=\theta_{0B})}\Delta\theta_0$$

Calcoliamo $\frac{d\theta_2}{d\theta_0}$, si ha:

$$\sin\theta_0 = n\sin\theta_2 \quad \Longrightarrow \quad \sin\theta_2 = \frac{1}{n}\sin\theta_0 \qquad (n_1 = 1)$$

da cui:

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{1}{n}\sin\theta_0\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\theta_2}{d\theta_0} = \frac{\frac{1}{n}\cos\theta_0}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin^2\theta_0}} = \frac{\cos\theta_0}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_0}}$$

Per $\theta_0 = \theta_{0B}$ si ha:

$$\left(\frac{d\theta_2}{d\theta_0}\right)_{(\theta_0=\theta_{0B})} = \frac{\cos\theta_{0B}}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_{0B}}}$$

Ma:

$$\cos\theta_{0B} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_{0B}}} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \qquad \sin^2\theta_{0B} = \frac{\tan^2\theta_{0B}}{1+\tan^2\theta_{0B}} = \frac{n^2}{1+n^2}$$

avendo posto $\tan\theta_{0B} = n$.

Quindi:

$$\left(\frac{d\theta_2}{d\theta_0}\right)_{(\theta_0=\theta_{0B})} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\frac{1}{\sqrt{n^2 - \dfrac{n^2}{n^2+1}}} = \frac{1}{n^2}$$

Ricordando che: $\theta_{2B} + \theta_{0B} = \dfrac{\pi}{2}$ si ha:

$$\sin 2\theta_{2B} = \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{0B}\right) = \sin 2\theta_{0B}$$

Il coefficiente di Fresnel in un piccolo intorno di θ_{0B} é, quindi:

$$\frac{\sin 2\theta_0 - \sin 2\theta_2}{\sin 2\theta_0 + \sin 2\theta_2} \simeq \frac{\sin 2\theta_{0B} + 2\cos 2\theta_{0B}\Delta\theta_0 - \sin 2\theta_{2B} - 2\cos 2\theta_{2B}\dfrac{\Delta\theta_0}{n^2}}{\sin 2\theta_{0B} + 2\cos 2\theta_{0B}\Delta\theta_0 + \sin 2\theta_{2B} + 2\cos 2\theta_{2B}\dfrac{\Delta\theta_0}{n^2}}$$

Tenendo conto che $\Delta\theta_0$ é piccolo, al denominatore possiamo trascurare i termini contenenti $\Delta\theta_0$. Pertanto, poiché $\cos 2\theta_{2B} = \cos 2\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_{0B}\right) = -\cos 2\theta_{0B}$, si ha:

$$\frac{\sin 2\theta_0 - \sin 2\theta_2}{\sin 2\theta_0 + \sin 2\theta_2} \simeq \frac{2\cos 2\theta_{0B}\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)\Delta\theta_0}{2\sin 2\theta_{0B}} = \frac{\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)\Delta\theta_0}{\tan 2\theta_{0B}}$$

Tenendo conto che $\tan 2\theta_{0B} = \dfrac{2\tan\theta_{0B}}{1 - \tan^2\theta_{0B}} = \dfrac{2n}{1-n^2}$, si ha:

$$\frac{\sin 2\theta_0 - \sin 2\theta_2}{\sin 2\theta_0 + \sin 2\theta_2} \simeq \frac{\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)\left(1-n^2\right)\Delta\theta_0}{2n} = \frac{1-n^4}{2n^3}\Delta\theta_0$$

Il coefficiente di riflessione $R_{\parallel}$ é:

$$R_{\parallel} = \frac{\left(1-n^4\right)^2}{4n^6}\left(\Delta\theta_0\right)^2 = 0.362\left(\Delta\theta_0\right)^2$$

Il coefficiente di riflessione $R_{\parallel}$ risulta < 0.01 per $0.362\left(\Delta\theta_0\right)^2 < 0.01$ ossia per:

$$\Delta\theta_0 < \sqrt{\frac{0.01}{0.362}} = 0.166\ rad = \underline{\underline{9^0.5}}$$

97-8) Esercizio n. 4 del 01/03/1997

Si abbia un fascio laser in cui il vettore campo elettrico, ortogonale alla direzione di propagazione, abbia il modulo di forma gaussiana: $E = E_0 e^{-r^2/r_0^2}$ con $r_0 = 0.3\ mm$. Se la potenza trasportata dal fascio é $5\ mW$, calcolare il valore di E_0.

——————

La potenza trasportata dal fascio si ottiene dalla formula:

$$P = \int_{sezione\ del\ fascio} \vec{S} \cdot \hat{n} da$$

essendo $\vec{S} = \dfrac{1}{2}\dfrac{E^2}{Z}\hat{z}$.

La sezione del fascio é **tutto il piano ortogonale alla direzione di propagazione** perché il profilo gaussiano del fascio matematicamente si estende da $-\infty$ a $+\infty$. É chiaro che dal punto di vista fisico il fascio é gaussiano finito, ma l'errore che si commette nel considerarlo infinitamente esteso é estremamente piccolo. Allora come superficie infinitesima da assumiamo una corona circolare, nel piano ortogonale alla direzione di propagazione, di raggio dr. Si ha:

$$da = 2\pi r dr$$

Quindi:

$$P = \int_{sezione\ del\ fascio} \vec{S} \cdot \hat{n} da = \frac{1}{2Z} \int_0^{+\infty} E_0^2 e^{-2r^2/r_0^2} 2\pi r dr = \frac{\pi E_0^2}{2Z} \int_0^{+\infty} 2r e^{-2r^2/r_0^2} dr =$$
$$= \frac{\pi E_0^2}{2Z} \left[-\frac{r_0^2}{2} e^{-2r^2/r_0^2} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi E_0^2}{2Z} \left(-\frac{r_0^2}{2} \right) (-1) = E_0^2 \frac{\pi r_0^2}{4Z}$$

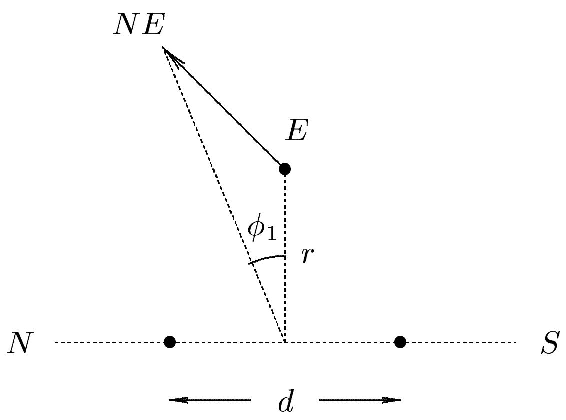
Poiché $P = 5\ mW$, deve essere:

$$E_0^2 \frac{\pi r_0^2}{4Z} = 5 \cdot 10^{-3} \quad \Longrightarrow \quad E_0^2 = \frac{20 \cdot 10^{-3} 377}{\pi \cdot (0.3)^2 \cdot 10^{-6}} = 2.66 \cdot 10^7 \quad \Longrightarrow \quad E_0 = \underline{\underline{5157\ V/m}}$$

97-9) Esercizio n. 1 del 12/04/1997

Due antenne rettilinee a mezz'onda sono separate da una distanza di 20 m lungo la direzione nord - sud; esse sono alimentate in fase e con la stessa frequenza. Una stazione ricevente mobile é situata ad una distanza di 100 Km nella direzione est e riceve un segnale massimo. La stazione ricevente si sposta in direzione nord - est e osserva il successivo massimo dopo aver percorso 2 Km. Qual'é la lunghezza d'onda irradiata?

———————



Sia $r = 100\ Km$. La direzione della corrente é ortogonale al piano della pagina.

La formula generale (nel piano $\theta = 90^0$) per il calcolo dell'array factor di un sistema non uniforme di due antenne percorse da correnti in fase é:

$$A(\phi) = a_1 + a_2 e^{-i(kd\cos\phi)}$$

il cui modulo quadro é dato:

$$|A(\phi)|^2 = \left(a_1 + a_2 e^{-i(kd\cos\phi)}\right)\left(a_1 + a_2 e^{i(kd\cos\phi)}\right) =$$
$$= a_1^2 + a_1 a_2 e^{i(kd\cos\phi)} + a_1 a_2 e^{-i(kd\cos\phi)} + a_2^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(kd\cos\phi)$$

Si noti che a_1 e a_2 sono reali.

$|A(\phi)|$ é massimo quando $kd\cos\phi = 2m\pi$ $(m = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

Il primo massimo ($m = 0$) si ha per $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ cioé nella direzione est come dato nel testo.

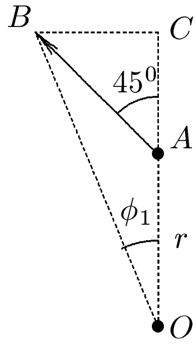
Si deve imporre che il successivo massimo viene ricevuto dalla stazione dopo un percorso di 2 Km nella direzione NE ossia in una direzione che forma un angolo ϕ_1 con l'origine del sistema di antenne, come si vede dalla figura.

Si deve avere, pertanto:

$$kd\cos(90^0 + \phi_1) = -kd\sin\phi_1 = -2\pi \qquad (m = -1)$$

Per calcolare la lunghezza d'onda, come richiesto dal problema, bisogna calcolare $\sin\phi_1$.

Consideriamo la nuova figura:



Dal triangolo OCB si ha;

$$\overline{BC} = \overline{OB}\sin\phi_1 \quad \text{da cui:} \quad \sin\phi_1 = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}}$$

Poiché le grandezze che conosciamo sono le distanze $\overline{OA}$ e $\overline{AB}$, dobbiamo esprimere $\overline{OB}$ e $\overline{BC}$ in funzione di tali grandezze.

Dalla figura si ha:

$$\overline{BC} = \overline{AB}\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \overline{AC} = \overline{AB}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi:

$$\overline{OB} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{OC}^2} = \sqrt{\overline{AB}^2\frac{1}{2} + \left(\overline{OA} + \overline{AB}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\overline{AB}^2 + \overline{OA}^2 + \frac{1}{2}\overline{AB}^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}\overline{OA}\cdot\overline{AB}} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{OA}^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}\overline{OA}\cdot\overline{AB}}$$

Quindi:

$$\sin\phi_1 = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AB}}{\sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{OA}^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}\overline{OA}\cdot\overline{AB}}}$$

Sostituendo $\overline{AB} = 2000$, si ha:

$$\sin\phi_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4 + 10^4 + \frac{400}{\sqrt{2}}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10286.8}} = \frac{\sqrt{2}}{101.42} = 1.39\cdot 10^{-2}$$

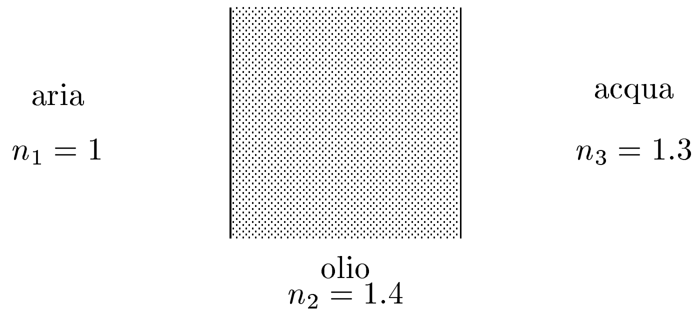
Per calcolare la lunghezza d'onda imponiamo, quindi, che:

$$-2\pi\frac{d}{\lambda}\sin\phi_1 = -2\pi \quad \Longrightarrow \frac{d}{\lambda} = \frac{1}{\sin\phi_1} \quad \text{da cui} \quad \lambda = d\sin\phi_1 = \underline{\underline{0.279\ m}}$$

97-10) Esercizio n. 2 del 12/04/1997

La dimensione delle molecole di olio puó essere stimata misurando lo spessore di una pellicola di olio sull'acqua, assumendo che la pellicola abbia lo spessore di una molecola. Gli indici di rifrazione dell'olio e dell'acqua sono rispettivamente 1.4 e 1.3. Facendo incidere luce monocromatica, polarizzata linearmente con il vettore campo elettrico ortogonale al piano d'incidenza, di lunghezza d'onda $\lambda_0 = .6\mu$ ad un angolo di incidenza $\theta_i = 30^0$, si osserva una riflessione massima. Calcolare il diametro della molecola d'olio. Calcolare, altresí, il coefficiente di riflessione e quello di trasmissione.

———————



La condizione per ottenere la massima riflessione é:

$$n_2 d \cos\theta_2 = \frac{\lambda_0}{4}$$

essendo d lo spessore dell'olio coincidente con il diametro della singola molecola.

Calcoliamo $\cos\theta_2$. Si ha per la legge di Snell:

$$n_1 \sin\theta_0 = n_2 \sin\theta_2 \quad \text{da cui} \quad \sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_0$$

da cui:

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_0\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1.4}\frac{1}{2}\right)^2} = 0.934$$

Pertanto il diametro della molecola d'olio si calcola:

$$n_2 d \cdot 0.934 = \frac{\lambda_0}{4} \quad \text{da cui} \quad d = \frac{\lambda_0}{4n_2 \cdot 0.934} = \frac{0.6 \cdot 10^6}{4 \cdot 1.4 \cdot 0.934} = \underline{\underline{1.147 \cdot 10^{-7}\ m}}$$

Valutiamo il coefficiente di riflessione:

$$R_{\left(n_2 d = \lambda_0/4\right)} = \left(\frac{n_1 \cos\theta_0 n_3 \cos\theta_3 - n_2^2 \cos^2\theta_2}{n_1 \cos\theta_0 n_3 \cos\theta_3 + n_2^2 \cos^2\theta_2}\right)^2$$

Per la valutazione di $R_{\left(n_2 d=\ \lambda_0/4\right)}$ occorre conoscere $\cos\theta_3$ che calcoliamo dalla legge di Snell applicata alla seconda interfaccia (olio-acqua):

$$n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3 \quad \Longrightarrow \quad \sin\theta_3 = \frac{n_2}{n_3}\sin\theta_2$$

da cui:

$$\cos\theta_3 = \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_3}\right)^2 \sin^2\theta_2} = \sqrt{1 - 1.16 \cdot 0.12755} = 0.923$$

In definitiva:

$$R_{\left(n_2 d=\ \lambda_0/4\right)} = \left(\frac{1.3 \cdot 0.866 \cdot 0.923 - 1.96 \cdot 0.872}{1.3 \cdot 0.866 \cdot 0.923 + 1.96 \cdot 0.872}\right)^2 = \left(\frac{1.039 - 1.709}{1.039 + 1.709}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{-0.67}{2.748}\right)^2 = \underline{\underline{0.0594}} = \underline{\underline{5.94\%}}$$

Calcoliamo, ora, il coefficiente di trasmissione cominciando a valutare i parametri necessari:

$$Z_{12} = \frac{n_2}{n_1}; \quad Z_{23} = \frac{n_3}{n_2}; \quad r_{12} = \frac{1 - \dfrac{n_2}{n_1}}{1 + \dfrac{n_2}{n_1}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}; \quad r_{23} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}$$

e

$$(1 + Z_{12})(1 + Z_{23}) = \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)\left(1 + \frac{n_3}{n_2}\right) = \frac{(n_1 + n_2)(n_2 + n_3)}{n_1 n_2}$$

Quindi:

$$|E_3|^2 = \left[\frac{n_1 n_2}{(n_1 + n_2)(n_2 + n_3)}\right]^2 \frac{16}{\left(1 + r_{12} r_{23} e^{-2ik_2 d} + r_{12} r_{23} e^{2ik_2 d} + r_{12}^2 r_{23}^2\right)} |E_0|^2 =$$
$$= \frac{n_1^2 n_2^2}{(n_1 + n_2)^2 (n_2 + n_3)^2} \frac{16}{(1 + r_{12}^2 r_{23}^2 + 2 r_{12} r_{23} \cos 2k_2 d)} |E_0|^2 \quad (\theta_0 = 0)$$

Ma $\cos 2k_2 d = 1 - 2\sin^2 k_2 d$, quindi:

$$|E_3|^2 = \frac{n_1^2 n_2^2}{(n_1 + n_2)^2 (n_2 + n_3)^2} \frac{16}{(1 + r_{12} r_{23})^2 - 4 r_{12} r_{23} \sin^2 \beta_2 d} |E_0|^2 \quad (\theta_0 = 0)$$

Per $\sin^2 \beta_2 d = 1$, si ha:

$$|E_3|^2 = \frac{n_1^2 n_2^2}{(n_1 + n_2)^2 (n_2 + n_3)^2} \frac{16}{(1 - r_{12} r_{23})^2} |E_0|^2 \quad (\theta_0 = 0)$$

dove $r_{12}r_{23} = \left(\dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)\left(\dfrac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}\right)$

Le formule che abbiamo testé scritto valgono per angolo di incidenza di 0^0; per valutare il coefficiente di trasmissione per $\theta_0 = 30^0$ basta sostituire a n_j le quantitá $n_j \cos\theta_j$ che dai calcoli esposti sono:

$$n_1 \cos\theta_0 = 0.866; \quad n_2 \cos\theta_2 = 1.4 \cdot 0.934 = 1.3076; \quad n_3 \cos\theta_3 = 1.2$$

In definitiva:

$$|E_3|^2 = \frac{(0.866 \cdot 1.3076)^2}{4.7245 \cdot 6.288} \frac{16}{\left(1 - \dfrac{-0.4416}{2.1736}\dfrac{0.1076}{2.5076}\right)^2} |E_0|^2 =$$

$$= \frac{1.28}{29.7} \frac{16}{\left(1 + \dfrac{0.0475}{5.451}\right)^2} |E_0|^2 = \frac{0.69}{1.075} |E_0|^2 = 0.678\, |E_0|^2 \qquad (\theta_0 = 30^0)$$

Quindi:

$$T = \frac{n_3 \cos\theta_3}{n_1 \cos\theta_0} 0.678 = \frac{1.2}{0.866} 0.678 = \underline{\underline{0.9395}} = \underline{\underline{93.95\%}}$$

É utile osservare che:

$$R + T \simeq 0.9989 \qquad ossia \qquad R + T = 1$$

97-11) Esercizio n. 3 del 12/04/1997

Un'onda elettromagnetica attraversa uno strato di plasma di spessore $d = .5\ m$. Alla frequenza di 10 GHz essa subisce un'attenuazione di 50 dB, mentre alla frequenza di 20 GHz subisce un'attenuazione di 30 dB. Calcolare la frequenza di collisione e la densitá elettronica del plasma nonché il coefficiente di riflessione competente a ciascuna frequenza. Si trascurino le riflessioni multiple.

———————

Per definizione di attenuazione in dB (riferita, cioé, ad una potenza di riferimento $P_0 = 1\ W$), si ha:

$$10 \log_{10} P = -50 \quad \Longrightarrow \quad \log_{10} P = -5 \quad \Longrightarrow \quad P = 10^{-5}\ W \quad (\nu = 10\ GHz)$$

$$10 \log_{10} P = -30 \quad \Longrightarrow \quad \log_{10} P = -3 \quad \Longrightarrow \quad P = 10^{-3}\ W \quad (\nu = 20\ GHz)$$

Il coefficiente di attenuazione α espresso in m^{-1} per le due frequenze si calcola, allora, nella seguente maniera:

$$P = P_0 e^{-2\alpha z} \Longrightarrow 10^{-5} = e^{-2\alpha z^*} \Longrightarrow -5 \ln 10 = -2\alpha \frac{1}{2} \Longrightarrow \alpha = 11.51\ m^{-1} \quad (\nu = 10\ GHz)$$

$$P = P_0 e^{-2\alpha z} \Longrightarrow 10^{-3} = e^{-2\alpha z^*} \Longrightarrow -3 \ln 10 = -2\alpha \frac{1}{2} \Longrightarrow \alpha = 6.9\ m^{-1} \quad (\nu = 20\ GHz)$$

Per valutare i parametri del plasma scriviamo le espressioni del coefficiente di attenuazione competente alle due frequenze e le eguagliamo ai valori calcolati di α. Utilizziamo, naturalmente, le formule date negli Appunti di Campi e.m. con la ulteriore approssimazione $\omega^2 + \omega_{eff}^2 >> \omega_p^2$. Queste approssimazioni sono necessarie per poter risolvere facilmente le equazioni altrimenti molto complicate da risolvere. Si ha, allora:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\omega_{eff}\omega_p^2}{2c\left(\omega_1^2 + \omega_{eff}^2\right)} \\ \alpha_2 = \dfrac{\omega_{eff}\omega_p^2}{2c\left(\omega_2^2 + \omega_{eff}^2\right)} \end{cases}$$

dove al posto di α_1 e α_2 vanno sostituiti i valori numerici calcolati competenti alle frequenza assegnate ω_1 e ω_2.

Abbiamo ottenuto, quindi, un sistema di due equazioni nelle due incognite ω_p^2 e ω_{eff}.

Dividendo membro a membro le due equazioni, si ha:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\omega_2^2 + \omega_{eff}^2}{\omega_1^2 + \omega_{eff}^2} \Longrightarrow \alpha_1\omega_1^2 + \alpha_1\omega_{eff}^2 = \alpha_2\omega_2^2 + \alpha_2\omega_{eff}^2 \Longrightarrow \omega_{eff}^2\left(\alpha_1 - \alpha_2\right) = \alpha_2\omega_2^2 - \alpha_1\omega_1^2$$

da cui:

$$\omega_{eff}^2 = \frac{\alpha_2\omega_2^2 - \alpha_1\omega_1^2}{\alpha_1 - \alpha_2} = 4\pi^2 10^{18}\frac{6.9 \cdot 20^2 - 11.51 \cdot 10^2}{11.51 - 6.9} =$$
$$= 4\pi^2 10^{18}\frac{2760 - 1151}{4.61} = 349 \cdot 4\pi^2 10^{18} = \underline{\underline{1.38 \cdot 10^{22}}} \quad (rad/s)^2$$

Dalla prima delle due equazioni del sistema ricaviamo ω_p^2:

$$\omega_p^2 = \frac{2c\left(\omega_1^2 + \omega_{eff}^2\right)}{\omega_{eff}}\alpha_1 = \frac{2c\alpha_1\left(4\pi^2 \cdot 10^{20} + 1.38 \cdot 10^{22}\right)}{1.17 \cdot 10^{11}} =$$
$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 11.51 \cdot 1.77 \cdot 10^{22}}{1.17 \cdot 10^{11}} = 1.04 \cdot 10^{21} \quad (rad/s)^2$$

Da cui ricaviamo la densitá elettronica del plasma:

$$n = \frac{m\epsilon_0\omega_p^2}{q^2} = \frac{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1.04 \cdot 10^{21}}{(1.6 \cdot 10^{-19})^2} = \underline{\underline{3.27 \cdot 10^{17}\ (m^{-3})}}$$

Per calcolare il coefficiente di riflessione, valutiamo per prima cosa le costanti dielettriche del plasma competenti alle due frequenze:

$$\epsilon = \epsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega^2 eff}\right) = \begin{cases} 0.9414\epsilon_0 & (\nu = 10\ GHz) \\ 0.9648\epsilon_0 & (\nu = 20\ GHz) \end{cases}$$

Per cui:

$$R = \left|\frac{\sqrt{\epsilon_{r2}} - 1}{\sqrt{\epsilon_{r2}} + 1}\right|^2 = \begin{cases} \left|\dfrac{-0.02974}{1.97}\right|^2 = \underline{\underline{2.27 \cdot 10^{-4}}} & (\nu = 10\ GHz) \\ \left|\dfrac{-0.017757}{1.9822}\right|^2 = \underline{\underline{8.02 \cdot 10^{-5}}} & (\nu = 20\ GHz) \end{cases}$$

97-12) Esercizio n. 4 del 12/04/1997

Una spira circolare eccitata da una corrente spazialmente uniforme ha un diametro D. Graficare i diagrammi di radiazione 'far field' per i seguenti tre casi: a) $D = \lambda/3$, b) $D = 0.75\lambda$ e c) $D = 2\lambda$. Calcolare, per ciascun caso, la direttivitá e la resistenza di radiazione.

——————

Le formule per i campi irradiati da una 'piccola' spira percorsa da corrente uniforme sono:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{e}_\phi \omega\mu k I \pi a^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\sin\theta$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\hat{e}_\theta k^2 I \pi a^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\sin\theta$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right) = \hat{e}_r \frac{1}{2}\omega\mu k^3 I^2 \pi^2 \frac{a^4}{16\pi^2 r^2}\sin^2\theta$$

in quanto $\hat{e}_\phi \times \hat{e}_\theta = -\hat{e}_r$.

Sostituendo $\omega = 2\pi\frac{c}{\lambda}$ e $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, si ha:

$$\vec{S} = \hat{e}_r \frac{1}{2} c\mu \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 I^2 \pi^2 \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^4}{16\pi^2 r^2}\sin^2\theta = \hat{e}_r \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\pi^4 \left(\frac{D}{\lambda}\right)^4 I^2 \frac{\sin^2\theta}{16 r^2} =$$
$$= \hat{e}_r \frac{1}{2} Z \pi^4 I^2 \left(\frac{D}{\lambda}\right)^4 \frac{\sin^2\theta}{16 r^2}$$

I diagrammi di radiazione hanno tutti la stessa forma (cioé come $\sin^2\theta$) indipendentemente dal rapporto $\left(\frac{D}{\lambda}\right)$; la ampiezza massima nei tre casi é differente secondo il fattore $\left(\frac{D}{\lambda}\right)^4$.

Calcoliamo la potenza totale irradiata:

$$P = \frac{1}{2} Z\pi^4 I^2 \left(\frac{D}{\lambda}\right)^4 \frac{1}{16}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin^3\theta = \frac{4\cdot 2\cdot\pi}{3\cdot 16\cdot 2} Z\pi^4 I^2 \left(\frac{D}{\lambda}\right)^4 = \frac{1}{2}\frac{Z}{6}\pi^5 I^2 \left(\frac{D}{\lambda}\right)^4$$

La direttivitá é allora:

$$D = \frac{\frac{4}{2\cdot 16} Z\pi^5 I^2 \left(\frac{D}{\lambda}\right)^4}{\frac{1}{2}\frac{Z}{6}\pi^5 I^2 \left(\frac{D}{\lambda}\right)^4} = \frac{6}{4} = \underline{\underline{1.5}}$$

ed é indipendente dal rapporto $\left(\frac{D}{\lambda}\right)$.

Calcoliamo la resistenza di radiazione, applicando la formula:

$$R_a = \frac{2P_r}{I^2} = \frac{Z}{2\cdot 3}\pi^5\left(\frac{D}{\lambda}\right)^4 = 1.9225\cdot 10^4\left(\frac{D}{\lambda}\right)^4$$

$$\begin{cases} \dfrac{D}{\lambda} = \dfrac{1}{3} & \Longrightarrow \qquad R_a = \underline{\underline{237.34}}\ \Omega \\ \dfrac{D}{\lambda} = 0.75 & \Longrightarrow \qquad R_a = \underline{\underline{6.083\cdot 10^3}}\ \Omega \\ \dfrac{D}{\lambda} = 2 & \Longrightarrow \qquad R_a = \underline{\underline{3.076\cdot 10^5}}\ \Omega \end{cases}$$

97-13) Esercizio n. 1 del 28/06/1997

Calcolare la distribuzione delle correnti in un sistema di antenne Dolph - Tchebyscheff costituito da sei elementi, equidistanti $d = \lambda/2$, per i seguenti valori del rapporto massimo principale - massimo secondario: a) $b = 5$; b) $b = 7$; c) $b = 10$. Commentare i risultati ottenuti e graficare il diagramma di radiazione relativo al caso a).

———————

Siano $2n$ antenne con $n = 3$ cosí disposte e alimentate:

•	•	•	•	•	•
a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2
a_2	a_1	a_0	a_0	a_1	a_2

in quanto per un sistema di antenne Tchebyscheff dispari risulta:

$$a_{-n} = a_{n-1}; \quad a_{-n+1} = a_{n-2} \cdots\cdots \text{ecc.}$$

L'array factor risulta, allora:

$$|A(\psi)| = 2\left|a_0 \cos\frac{\alpha}{2} + a_1 \cos\frac{3}{2}\alpha + a_2 \cos\frac{5}{2}\alpha\right|$$

Ma:

$$\cos\frac{3}{2}\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{2} - 3\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$\cos\frac{5}{2}\alpha = 16\cos^5\frac{\alpha}{2} - 20\cos^3\frac{\alpha}{2} + 5\cos\frac{\alpha}{2}$$

Quindi:

$$|A(\psi)| = 2\left|a_0\cos\frac{\alpha}{2} + 4a_1\cos^3\frac{\alpha}{2} - 3a_1\cos\frac{\alpha}{2} + 16a_2\cos^5\frac{\alpha}{2} - 20a_2\cos^3\frac{\alpha}{2} + 5a_2\cos\frac{\alpha}{2}\right|$$

Ordinando ed eguagliando al polinomio di Tchebyscheff di grado 5 si ha:

$$\begin{aligned}|A(\psi)| =&2\left|16a_2\cos^5\frac{\alpha}{2} + (4a_1 - 20a_2)\cos^3\frac{\alpha}{2} + (a_0 - 3a_1 + 5a_2)\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \\ =&K\left(16x_0^5\cos^5\frac{\alpha}{2} - 20x_0^3\cos^3\frac{\alpha}{2} + 5x_0\cos\frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned}$$

Perché l'eguaglianza sia soddisfatta occorre che:

$$\begin{cases} 32a_2 = K16x_0^5 \\ \\ 8a_1 - 40a_2 = -20Kx_0^3 \\ \\ 2a_0 - 6a_1 + 10a_2 = 5Kx_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_2 = \dfrac{1}{2}Kx_0^5 \\ \\ 8a_1 = 20Kx_0^5 - 20Kx_0^3 \\ \\ 2a_0 = 5Kx_0 + 6a_1 - 10a_2 \end{cases}$$

Quindi:

$$a_2 = \frac{1}{2}Kx_0^5; \quad a_1 = \frac{5}{2}K\left(x_0^5 - x_0^3\right); \quad a_0 = 2.5Kx_0 + \frac{15}{2}Kx_0^5 - \frac{15}{2}Kx_0^3 - \frac{5}{2}Kx_0^5 = $$
$$= 5Kx_0^5 - \frac{15}{2}Kx_0^3 + 2.5Kx_0$$

Per conoscere le ampiezze bisogna calcolare x_0:

$$x_0 = \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{b^2-1}\right)^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\left(b - \sqrt{b^2-1}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Per $b = 5$:

$$x_0 = 0.790839 + 0.31611 = 1.106959$$

Per $b = 7$:

$$x_0 = 0.846738 + 0.2952507 = 1.141988$$

Per $b = 10$:

$$x_0 = 0.909825 + 0.27477 = 1.184603$$

Corrispondentemente, si ha:
Per $b = 5$:

$$a_2 = K0.83105; \quad a_1 = K0.764201; \quad a_0 = K(8.3105 - 10.1731 + 2.7674) = K0.90479$$

Scegliendo K perché a_0 sia 1, risulta: $K = \dfrac{1}{0.90479}$ e quindi si ha:

$$a_2 = \frac{0.83105}{0.90479} = \underline{\underline{0.9185}}; \quad a_1 = \frac{0.764201}{0.90479} = \underline{\underline{0.8446}}; \quad a_0 = \underline{\underline{1}}$$

Per $b = 7$:

$$a_2 = K0.971131; \quad a_1 = K1.1324; \quad a_0 = K(9.7113 - 11.17 + 2.855) = K1.39627$$

Scegliendo K perché a_0 sia 1, risulta: $K = \dfrac{1}{1.39627}$ e quindi si ha:

$$a_2 = \frac{0.971131}{1.39627} = \underline{\underline{0.6955}}; \quad a_1 = \frac{1.1324}{1.39627} = \underline{\underline{0.8110}}; \quad a_0 = \underline{\underline{1}}$$

Per $b = 10$:

$$a_2 = K1.16636; \quad a_1 = K1.67598; \quad a_0 = K(11.664 - 12.467 + 2.9615) = K2.158$$

Scegliendo K perché a_0 sia 1, risulta: $K = \dfrac{1}{2.158}$ e quindi si ha:

$$a_2 = \frac{1.16636}{2.158} = \underline{\underline{0.5405}}; \quad a_1 = \frac{1.67598}{2.158} = \underline{\underline{0.7766}}; \quad a_0 = \underline{\underline{1}}$$

All'aumentare di b le intensitá di corrente diminuiscono e le correnti sulle antenne interne diventano via via piú intense rispetto a quelle esterne. É importante osservare che si poteva normalizzare in modo diverso, ponendo, per esempio, $K = 1$.

Per ottenere l'array factor basta sostituire ad a_o, a_1 e a_2 i valori trovati e sostituire ad α la sua espressione. Si ha, quindi, per $b = 5$:

$$|A(\psi)| = 2\left|1 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} + 0.8446 \cdot \cos\frac{3}{2}\alpha + 0.9185\cos\frac{5}{2}\alpha\right|$$

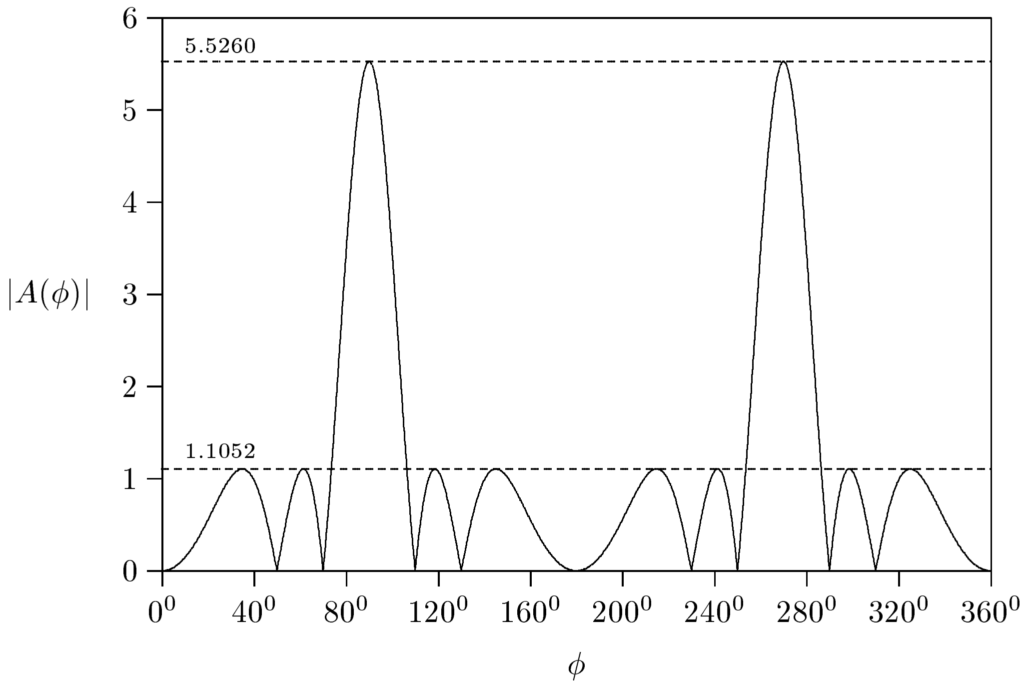
dove, ipotizzando tutte le antenne in fase, α é:

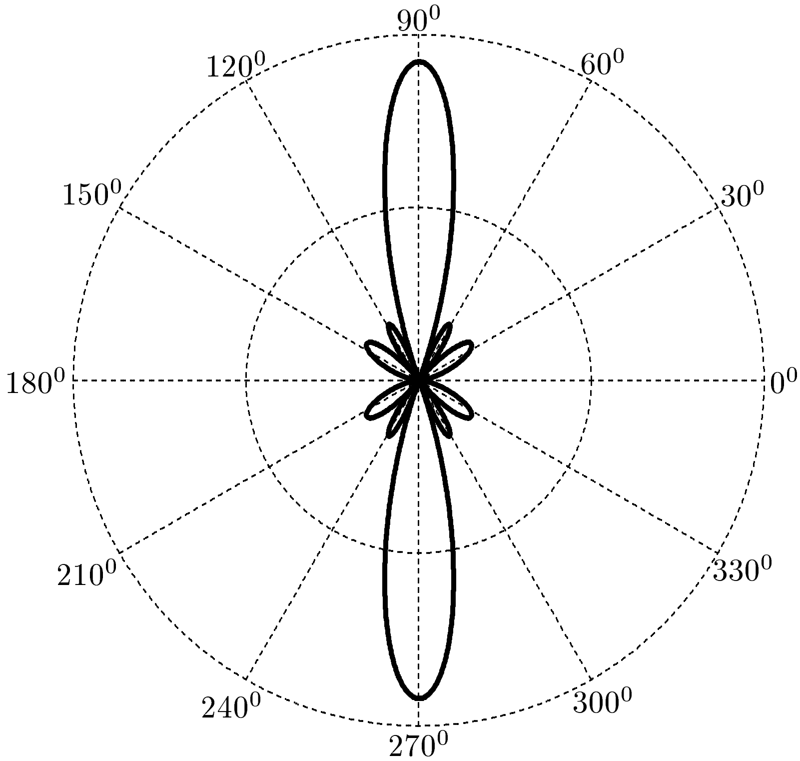
$$\alpha = -kd\cos\psi = -\pi\cos\psi \qquad (d = \frac{\lambda}{2})$$

Grafichiamo il diagramma di radiazione per $b = 5$, $\theta = 90^0$ e $d = \dfrac{\lambda}{2}$ cioé la funzione:

$$|A(\psi)| = 2\left|1 \cdot \cos\left(-\frac{\pi\cos\phi}{2}\right) + 0.8446 \cdot \cos\frac{3}{2}(-\pi\cos\phi) + 0.9185\cos\frac{5}{2}(-\pi\cos\phi)\right|$$

Il valore massimo si ha per $\phi = 90^0$ e vale 5.5260; il valore massimo comune dei lobi secondari vale 1.1052. Si verifica che il rapporto fra i due massimi é effettivamente 5.

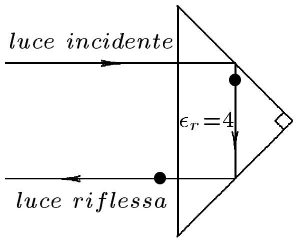




90^0
120^0
60^0
150^0
30^0
180^0
0^0
210^0
330^0
240^0
300^0
270^0

97-14) Esercizio n. 2 del 28/06/1997

Un fascio di luce polarizzata linearmente, incide, in direzione della normale, sulla superficie di un prisma retto di vetro ($\epsilon_r = 4$) la cui sezione é un triangolo rettangolo isoscele. Trascurando le riflessioni multiple, calcolare la percentuale della potenza incidente che viene riflessa dal prisma.



Se il campo elettrico della luce incidente forma un angolo di 45^0 con il piano di incidenza, determinare lo stato di polarizzazione della radiazione nei due punti segnati in figura, valutandone i parametri che lo caratterizzano. Si tracci la corrispondente figura di polarizzazione.

——————

Calcoliamo subito l'angolo limite per la riflessione interna. Per $n = 2$ risulta $\theta_L = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30^0$, conseguentemente é verificata la condizione per la riflessione totale, in quanto a causa della geometria del prisma, l'angolo di incidenza interna é 45^0.

Indichiamo con P la densitá di potenza incidente sulla prima interfaccia (per $\theta = 0$); se T é il coefficiente di trasmissione, la densitá di potenza che effettivamente entra nel prisma é TP. Successivamente la luce subisce riflessione totale sul primo cateto dove incide con un angolo di incidenza $\theta_0 = 45^0$ e ancora sul secondo cateto dove incide con lo stesso angolo. Quindi la densitá di potenza che esce effettivamente dal prisma é $T \cdot (TP)$ essendo il coefficiente di trasmissione dal prisma all'aria eguale a quello dall'aria al prisma. Si ha, allora:

$$T = \frac{4n}{(1+n)^2} = 0.89$$

Quindi la potenza riflessa dal prisma (cioé quella in uscita) é:

$$P_r = \underline{\underline{0.79}}P$$

Subito dopo ciascuna riflessione totale l'onda elettromagnetica subisce lo sfasamento fra le componenti (parellela e perpendicolare) del campo che calcoliamo:

$$\tan\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\theta_0\sqrt{\sin^2\theta_0 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}}{\sin^2\theta_0}$$

essendo θ_0 l'angolo di incidenza che nel nostro caso é lo stesso per tutte e due le interfacce interne.

$$\text{Per } \theta_0 = 45^0 \quad \Longrightarrow \tan\frac{\delta}{2} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}}}{\dfrac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

da cui:

$$\frac{\delta}{2} = \arctan 0.707 = 35^0.265 \quad \Longrightarrow \delta = \underline{\underline{70^0.53}}$$

Subito dopo la prima riflessione totale l'onda, che ha entrambe le componenti (parallela e perpendicolare) eguali in ampiezza in quanto l'azimut é 45^0, é **polarizzata ellitticamente**.

Calcoliamo l'ellitticitá e l'orientazione dell'ellisse di polarizzazione; si ha:

$$\sin 2\chi = \frac{2a_1 b_1}{a_1^2 + b_1^2}\sin\delta = \sin\delta \quad \text{in quanto } a_1 = b_1 \quad \Longrightarrow \quad \chi = \frac{\delta}{2}$$

Pertanto l'ellitticitá $\dfrac{b}{a}$ é

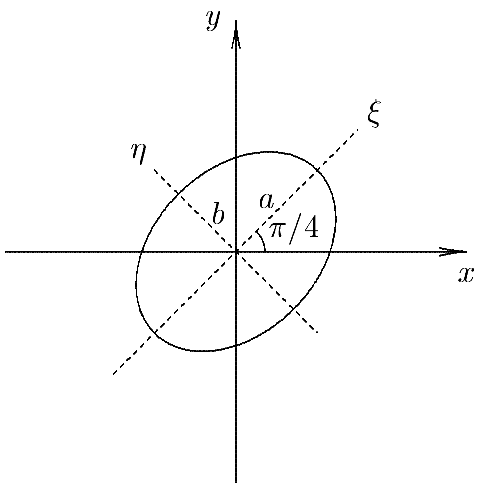
$$\frac{b}{a} = \tan\chi = \tan\frac{\delta}{2} = \tan 35^0.26 = \underline{\underline{0.707}}$$

Si ha d'altra parte:

$$\tan 2\Psi = \frac{2a_1 b_1}{a_1^2 - b_1^2}\cos\delta$$

e poiché $a_1 = b_1$ e $cos\delta > 0$ risulta:

$$\tan 2\Psi = +\infty \quad \Longrightarrow \underline{\underline{\Psi = \frac{\pi}{4}}}$$



Dopo la riflessione sulla seconda interfaccia l'onda subisce un ulteriore sfasamento (eguale a quello subito sulla prima interfaccia) che conserva anche dopo l'uscita dal prisma.

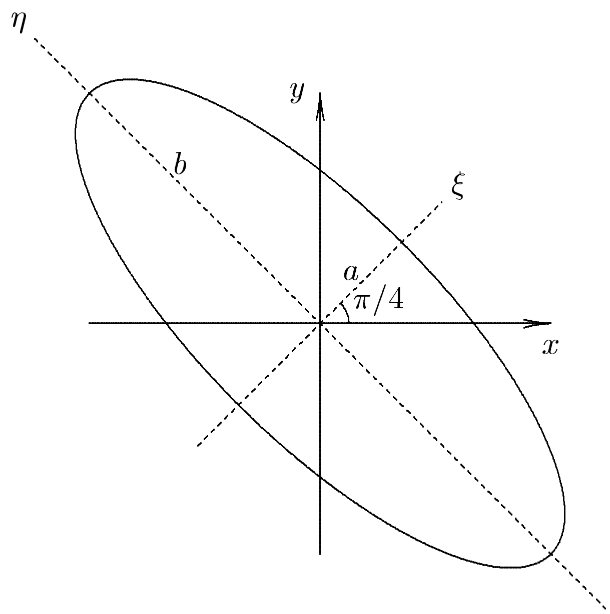
Si ha allora:

$$\delta_{totale} = 141^0$$

$$\frac{b}{a} = \tan\frac{\delta_{totale}}{2} = \tan 70^0.53 = \underline{\underline{2.83}}$$

Analogamente, poiché $\cos\delta_{totale} < 0$ e $b > a$, si ha:

$$\tan 2\Psi = \infty \quad \Longrightarrow \underline{\underline{\Psi = \frac{\pi}{4}}}$$



97-15) Esercizio n. 3 del 28/06/1997

Un radar Doppler é utilizzato per determinare la velocitá di un veicolo in moto misurando lo shift in frequenza dell'onda elettromagnetica riflessa dal veicolo. Assumendo che il veicolo si muova nella stessa direzione dell'onda incidente, calcolare la velocitá in Km/h se $\Delta f = 2.33\ KHz$ con $f = 10.5\ GHz$.

———————

Sia $\omega = 2\pi \cdot 10.5\ GHz$ la frequenza (angolare) emessa dalla sorgente in quiete S.

La frequenza osservata da un osservatore solidale ad un sistema di riferimento $S\ '$ in moto rispetto al sistema S, in generale, é data:

$$\omega\ ' = \gamma(\omega - \vec{v} \cdot \vec{k}) \tag{1}$$

Nel nostro caso la frequenza osservata da un osservatore solidale con il veicolo in avvicinamento ($\vec{v} \cdot \vec{k} = vk \cos 180^0 = -vk,\ \ \gamma = 1$) é:

$$\omega\ ' = \omega + vk = \omega + v\frac{\omega}{c} = \omega\left(1 + \frac{v}{c}\right) \tag{2}$$

essendo v la velocitá del veicolo.

Tale frequenza é quella dell'onda riflessa dal veicolo.

L'osservatore solidale al sistema S rivela l'onda riflessa dal veicolo e sia ω'' la frequenza (angolare) misurata. Per calcolare tale frequenza dobbiamo invertire la formula (1) in quanto dobbiamo calcolare la frequenza relativa ad un sistema in quiete in funzione della frequenza relativa ad un sistema in moto. Si ha, quindi:

$$\omega = \gamma(\omega\ ' + \vec{v} \cdot \vec{k}\ ')$$

che nel nostro caso diventa:

$$\omega'' = \omega\ ' + vk\ ' = \omega\ ' + v\frac{\omega\ '}{c} = \omega\ '\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

in quanto questa volta $\vec{v}$ e $\vec{k}\ '$ sono paralleli.

Sostituendo ad $\omega\ '$ la sua espressione in funzione di ω data dalla (2), si ha:

$$\omega'' = \omega\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2 \tag{3}$$

Poiché certamente $v << c$, la (3) si puó scrivere:

$$\omega'' \simeq \omega \left(1 + 2\frac{v}{c}\right) = \omega + 2\omega\frac{v}{c}$$

ossia:

$$f'' - f = 2f\frac{v}{c}$$

da cui:

$$v = \frac{f'' - f}{2f}c = \frac{2.33 \cdot 10^3}{2 \cdot 10.5 \cdot 10^9} 3 \cdot 10^8 = \underline{\underline{33.28\ m/s = 119.8\ Km/h}}$$

97-16) Esercizio n. 4 del 28/06/1997

Sia dato un campo elettrostatico uniforme. Si introducano in esso una sfera di materiale perfettamente conduttore ed una sfera di materiale perfettamente dielettrico dello stesso raggio e di costante dielettrica $\epsilon_r = 2$. Si calcoli il rapporto fra i moduli dei momenti di dipolo delle sfere, indotti dal campo. Quanto deve essere la costante dielettrica della seconda sfera perché tale rapporto sia 1? Si trascuri l'interazione fra le due sfere.

Dagli Appunti di Campi e.m. si ha che le espressioni dei potenziali di dipolo indotti sulle sfere quando esse sono immerse in un campo elettrostatico uniforme sono:

$$\text{Sfera perfettamente conduttrice} \quad \Longrightarrow \Phi_{dip} = E_0 a^3 r^{-2} \cos\theta$$

$$\text{Sfera perfettamente dielettrica} \quad \Longrightarrow \Phi_{dip} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 a^3 r^{-2} \cos\theta$$

Il momento di dipolo indotto si ottiene eguagliando i due potenziali a quello caratteristico di un generico dipolo:

$$\Phi_{dip} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \cos\theta$$

Quindi:

$$E_0 a^3 r^{-2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \cos\theta \quad \Longrightarrow \quad p_{conduttore} = 4\pi\epsilon_0 E_0 a^3$$

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 a^3 r^{-2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \cos\theta \quad \Longrightarrow \quad p_{dielettrico} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 a^3$$

Il rapporto fra i moduli dei momenti di dipolo indotti per $\epsilon_r = 2$ é:

$$\frac{p_{conduttore}}{p_{dielettrico}} = \frac{\epsilon_r + 2}{\epsilon_r - 1} = 4$$

Per essere $\dfrac{p_{conduttore}}{p_{dielettrico}} \longrightarrow 1$ occorre che: $\epsilon_r \longrightarrow +\infty$

97-17) Esercizio n. 1 del 19/07/1997

Si consideri un rombo di Fresnel di indice di rifrazione $n = 1.6$. Calcolare gli angoli di incidenza interna per cui le due componenti del campo elettromagnetico riflesso totalmente risultano sfasate di $\pi/4$. Valutare di quanto varia la differenza di fase in conseguenza di piccole (eventuali) variazioni di ciascuno dei due angoli di incidenza. In questo modo si spiega il motivo per cui si utilizza un rombo con l'angolo al vertice piú grande.

———————

Consideriamo un rombo di Fresnel con $n = 1.6$. Per avere una differenza di fase di 45^0 dopo la riflessione totale bisogna imporre che l'angolo θ_0 soddisfi alla seguente relazione:

$$\frac{\cos\theta_0\sqrt{\sin^2\theta_0 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}}{\sin^2\theta_0} = \tan\frac{45^0}{2} = 0.4142 = a$$

Elevando al quadrato, si ha:

$$\cos^2\theta\left[\sin^2\theta_0 - \left(\frac{1}{n}\right)^2\right] - a^2\sin^4\theta_0 = 0$$

$$\sin^2\theta_0 - \sin^4\theta_0 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\sin^2\theta_0 - a^2\sin^4\theta_0 = 0$$

$$-\left(1 + a^2\right)\sin^4\theta_0 + \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\sin^2\theta_0 - \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\sin^2\theta_0 = \frac{-\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2 - \frac{4}{n^2}\left(1 + a^2\right)}}{-2\left(1 + a^2\right)}$$

$$\sin^2\theta_{01} = \frac{-\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2 - \frac{4}{n^2}\left(1 + a^2\right)}}{-2\left(1 + a^2\right)}$$

$$\sin^2\theta_{02} = \frac{-\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2 - \frac{4}{n^2}\left(1 + a^2\right)}}{-2\left(1 + a^2\right)}$$

Per $n = 1.6$ si ha:

$$\begin{cases} \sin^2\theta_{01} = 0.4563 \quad \Longrightarrow \quad \theta_{01} = 42^0.5 \\ \\ \sin^2\theta_{02} = 0.7306 \quad \Longrightarrow \quad \theta_{02} = 58^0.73 \end{cases}$$

Valutiamo la variazione della differenza di fase:

$$\frac{d}{d\theta_0}\left(\tan\frac{\delta}{2}\right) = \frac{d}{d\dfrac{\delta}{2}}\left(\tan\frac{\delta}{2}\right)\frac{d}{d\theta_0}\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\dfrac{\delta}{2}}\frac{d}{d\theta_0}\left(\frac{\delta}{2}\right) = \left(1+\tan^2\frac{\delta}{2}\right)\frac{d}{d\theta_0}\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

che (vedi Appunti di Campi e.m.) deve essere eguale a:

$$\frac{2\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 - \sin^2\theta_0\left[1+\left(\dfrac{1}{n}\right)^2\right]}{\sin^3\theta_0\sqrt{\sin^2\theta_0-\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}}$$

Per cui:

$$\frac{d}{d\theta_0}\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{1}{\left(1+\tan^2\dfrac{\delta}{2}\right)}\left\{\frac{2\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 - \sin^2\theta_0\left[1+\left(\dfrac{1}{n}\right)^2\right]}{\sin^3\theta_0\sqrt{\sin^2\theta_0-\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}}\right\}$$

$$\frac{d}{d\theta_0}\left(\frac{\delta}{2}\right)_{(\theta_0=42^0.5)} = \frac{1}{1+0.17}\,\frac{0.78-0.4563\cdot 1.39}{0.308\sqrt{0.4563-0.39}} = 0.8547\frac{0.1457}{0.079} = \underline{\underline{1.57}}$$

$$\frac{d}{d\theta_0}\left(\frac{\delta}{2}\right)_{(\theta_0=58.73)} = \frac{1}{1+0.17}\,\frac{0.78-0.7306\cdot 1.39}{0.6244\sqrt{0.7306-0.39}} = 0.8547\frac{-0.2355}{0.3644} = \underline{\underline{-0.55}}$$

Da ció si deduce che un piccolo errore dell'angolo di incidenza piú grande si ripercuote meno sulla differenza di fase. Questo é il motivo perché nel rombo di Fresnel si utilizza l'angolo maggiore.

97-18) Esercizio n. 2 del 19/07/1997

Si abbia una lastra di alluminio illuminata da luce la cui lunghezza d'onda relativa al vuoto é $\lambda = 500\ nm$. L'indice di rifrazione complesso dell'alluminio competente alla data lunghezza d'onda é $n = 1.5 + i3.2$. Calcolare e graficare il coefficiente di riflessione ($\perp$ e $\|$) in funzione dell'angolo di incidenza, valutando l'angolo pseudo-Brewster.

———————

Sappiamo che:

$$n = \frac{c}{\omega} k = \frac{c}{\omega}(\beta_2 + i\alpha_2) \qquad e \qquad \beta_1 = \frac{\omega}{c}$$

da cui:

$$\Re(n) = \frac{c}{\omega}\beta_2 \quad e \quad \Im(n) = \frac{c}{\omega}\alpha_2 \quad \Longrightarrow \quad \beta_2 = \frac{\omega}{c}\Re(n) \quad e \quad \alpha_2 = \frac{\omega}{c}\Im(n)$$

Per valutare i coefficienti di riflessione occorre conoscere i parametri p e q che riportiamo.

$$p^2 = \frac{1}{2}\left[-\beta_2^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 \sin^2\theta_0 + \sqrt{4\alpha_2^2\beta_2^2 + \left(\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2\theta_0\right)^2}\right]$$

$$q^2 = \frac{1}{2}\left[\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2\theta_0 + \sqrt{4\alpha_2^2\beta_2^2 + \left(\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2\theta_0\right)^2}\right]$$

Sostituendo:

$$p^2 = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left[-(\Re(n))^2 + (\Im(n))^2 + \sin^2\theta_0 + \sqrt{4\,(\Re(n))^2(\Im(n))^2 + \left((\Re(n))^2 - (\Im(n))^2 - \sin^2\theta_0\right)^2}\right]$$

$$q^2 = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left[(\Re(n))^2 - (\Im(n))^2 - \sin^2\theta_0 + \sqrt{4\,(\Re(n))^2(\Im(n))^2 + \left((\Re(n))^2 - (\Im(n))^2 - \sin^2\theta_0\right)^2}\right]$$

Scriviamo, ora, le formule per la riflettivitá (Appunti Campi e.m. - Cap.4, par.4.6):

$$\rho_\perp^2 = \frac{(q - \beta_1\cos\theta_0)^2 + p^2}{(q + \beta_1\cos\theta_0)^2 + p^2}$$

$$\rho_\|^2 = \rho_\perp^2 \frac{(q - \beta_1\sin\theta_0\tan\theta_0)^2 + p^2}{(q + \beta_1\sin\theta_0\tan\theta_0)^2 + p^2}$$

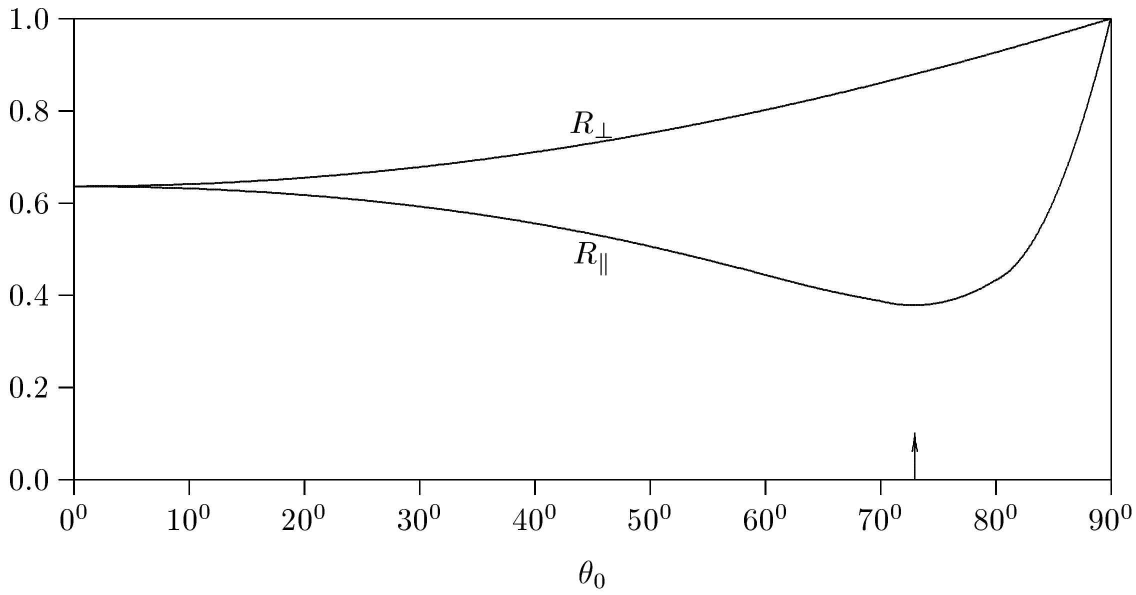
Dividendo numeratore e denominatore per $\beta_1^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$ e indicando con p^* e q^* i valori di p e q calcolati a meno di $\dfrac{\omega^2}{c^2}$, le formule per le riflettivitá diventano:

$$\rho_\perp^2 = \frac{(q^* - \cos\theta_0)^2 + p^{*2}}{(q^* + \cos\theta_0)^2 + p^{*2}}$$

$$\rho_{\parallel}^2 = \rho_{\perp}^2 \frac{(q^* - \sin\theta_0 \tan\theta_0)^2 + p^{*2}}{(q^* + \sin\theta_0 \tan\theta_0)^2 + p^{*2}}$$

Nella tabella riportiamo i valori di p^{*2}, q^{*2}, $\rho_{\perp}^2$ e $\rho_{\parallel}^2$ per $\Re(n) = 1.5$ e $\Im(n) = 3.2$

θ_0	p^{*2}	q^{*2}	ρ_{perp}^2	$\rho_{\parallel}^2$
0^0	10.2400	2.2500	0.6361	0.6361
5^0	10.2462	2.2486	0.6373	0.6350
10^0	10.2647	2.2446	0.6408	0.6315
15^0	10.2950	2.2380	0.6466	0.6256
20^0	10.3361	2.2291	0.6547	0.6172
25^0	10.3868	2.2182	0.6652	0.6062
30^0	10.4457	2.2057	0.6779	0.5924
35^0	10.5110	2.1920	0.6930	0.5757
40^0	10.5807	2.1775	0.7103	0.5558
45^0	10.6528	2.1628	0.7298	0.5326
50^0	10.7251	2.1482	0.7516	0.5060
55^0	10.7953	2.1343	0.7756	0.4763
60^0	10.8613	2.1213	0.8017	0.4443
65^0	10.9211	2.1097	0.8299	0.4126
70^0	10.9728	2.0997	0.8602	0.3873
75^0	11.0148	2.0917	0.8925	0.3829
80^0	11.0457	2.0859	0.9266	0.4321
85^0	11.0647	2.0823	0.9625	0.6024
90^0	11.0711	2.0811	1	1



L'angolo pseudo-Brewster vale circa 73^0

97-19) Esercizio n. 3 del 19/07/1997

Graficare le figure di polarizzazione e il verso di rotazione del vettore campo elettrico rappresentato dall'espressione

$$\vec{E} = E_0(\widehat{x} + \widehat{y}be^{i\phi})e^{i(kz - \omega t)}$$

nei seguenti casi: a) $\phi = 0,\ b = 1$; b) $\phi = 0,\ b = 2$; c) $\phi = \pi/2,\ b = -1$; d) $\phi = \pi/4,\ b = 1$.

Verificare analiticamente i parametri di polarizzazione. Si scrivano, inoltre, per ciascun caso, i parametri di Stokes e si indichino gli stati di polarizzazione corrispondenti sulla sfera di Poincaré.

———————

Valutiamo le componenti del campo elettrico dato per $z = 0$:

$$E_x = E_0 e^{-i\omega t}; \quad E_y = bE_0 e^{-i\,(\omega t - \phi)}$$

le cui parti reali sono:

$$E_x = E_0 \cos\omega t; \quad E_y = bE_0 \cos\,(\omega t - \phi)$$

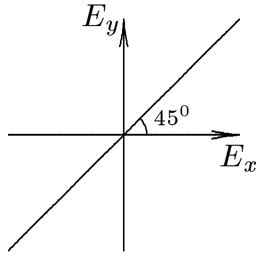
Posto $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ e $\tau = \dfrac{t}{T}$ $(0 \le \tau \le 1)$, le componenti del campo elettrico si scrivono:

$$E_x = E_0 \cos 2\pi\tau; \quad E_y = bE_0 \cos\,(2\pi\tau - \phi)$$

a) $\phi = 0,\ b = 1 \Longrightarrow E_x = E_0 cos 2\pi\tau,\ E_y = E_0 \cos 2\pi\tau$

$$\frac{E_y}{E_x} = 1$$

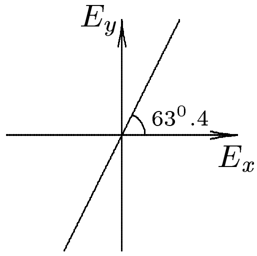
La polarizzazione é rettilinea:



b) $\phi = 0,\ b = 2 \Longrightarrow E_x = E_0 cos 2\pi\tau,\ E_y = 2E_0 \cos 2\pi\tau$

$$\frac{E_y}{E_x} = 2$$

La polarizzazione é rettilinea:

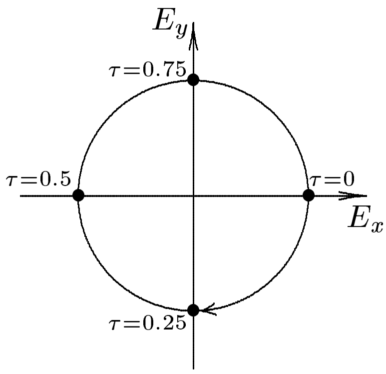


c) $\phi = \frac{\pi}{2}$, $b = -1$. Quindi:

$$E_x = E_0 cos 2\pi\tau, \quad E_y = -E_0 \cos\left(2\pi\tau - \frac{\pi}{2}\right) = E_0 \cos\left[\left(2\pi\tau - \frac{\pi}{2}\right) + \pi\right] = E_0 \cos\left(2\pi\tau + \frac{\pi}{2}\right)$$

Ne segue che le due componenti hanno la stessa ampiezza e sono sfasate di $\frac{\pi}{2}$; conseguentemente l'onda é polarizzata **circolarmente** e poiché risulta $\sin\delta = \sin\frac{\pi}{2} > 0$ essa é **destrogira**. Per verificare quanto affermato, grafichiamo la figura di polarizzazione:

τ	E_x/E_0	E_y/E_0
0	1	0
0.1	0.81	-0.588
0.2	0.31	-0.951
0.25	0	-1
0.3	-0.31	-0.951
0.4	-0.81	-0.588
0.5	-1	0
0.6	-0.81	+0.588
0.7	-0.31	+0.951
0.75	0	1
0.8	0.31	+0.951
0.9	0.81	+0.588
1	1	0

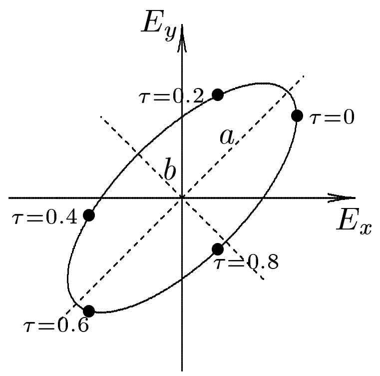


d) $\phi = \frac{\pi}{4}$, $b=1$. Quindi:

$$E_x = E_0 cos 2\pi\tau, \quad E_y = E_0 \cos\left(2\pi\tau - \frac{\pi}{4}\right)$$

Ne segue che le due componenti hanno la stessa ampiezza e sono sfasate di $-\frac{\pi}{4}$; conseguentemente l'onda é polarizzata **ellitticamente** e poiché risulta $\sin\delta = \sin -\frac{\pi}{4} < 0$ essa é **levogira**. Per verificare quanto affermato, grafichiamo la figura di polarizzazione:

τ	E_x/E_0	E_y/E_0
0	1	0.707
0.1	0.81	0.9877
0.2	0.31	0.89101
0.3	-0.31	0.454
0.4	-0.81	-0.1564
0.5	-1	-0.707
0.6	-0.81	-0.9877
0.7	-0.31	-0.89105
0.8	0.31	-0.454
0.9	0.81	0.1563
1	1	0.707



97-20) Esercizio n. 4 del 19/07/1997

Calcolare la direttivitá di una antenna il cui pattern di radiazione é dato dalla espressione $U = U_m \cos^n \theta$ per $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$; $U = 0$ altrove.

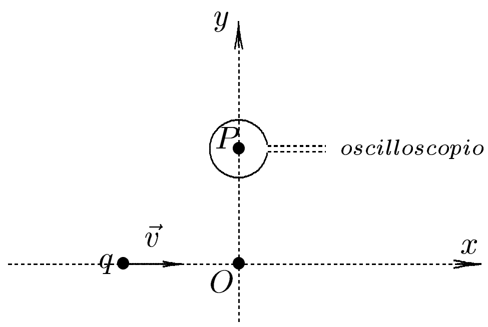
——————

$$D = \frac{4\pi r^2 \left(S_r\right)_{max}}{\displaystyle\int_0^{4\pi} S_r r^2 d\Omega} = \frac{4\pi r^2 U_m}{\displaystyle U_m r^2 \int_0^{4\pi} \cos^n \theta d\Omega} = \frac{4\pi}{\displaystyle 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \sin\theta d\theta} =$$

$$= \frac{-2}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d \cos\theta} = \frac{-2}{\displaystyle\frac{1}{n+1}\left[\cos^{(n+1)}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}} = \underline{\underline{2(n+1)}}$$

97-21) Esercizio n. 1 del 6/9/1997

Una particella puntiforme di carica q si muove di moto rettilineo uniforme con velocitá $\vec{v}$ rispetto ad un sistema di riferimento S. Scrivere le espressioni dei campi elettrico e di induzione magnetica generati dalla particella carica, nel punto $P \equiv (0, y, 0)$, in funzione del tempo. Graficare l'andamento temporale di B e calcolare analiticamente la larghezza dell'impulso a metá altezza, verificando graficamente il risultato ottenuto. Si ponga $\gamma = 1.2$, $y = 1\ m$ e si assuma come unitá della scala dei tempi 1 ns.



———————

Le formule generali delle componenti del campo elettrico generato da una carica puntiforme in moto rettilineo uniforme lungo l'asse x, in funzione del tempo, si ottengono da quelle valutate per $t = 0$ (Appunti di Campi e.m.) sostituendo al posto di x la quantitá $x - vt$:

$$E_x = Kq\gamma \frac{x - vt}{\left[\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}$$

$$E_y = Kq\gamma \frac{y}{\left[\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}$$

$$E_z = Kq\gamma \frac{z}{\left[\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}$$

Sia $P \equiv (0, y, 0)$ la posizione dell'osservatore; in tale punto si ha:

$$E_x = Kq\gamma \frac{-vt}{(\gamma^2 v^2 t^2 + y^2)^{3/2}}, \qquad E_y = Kq\gamma \frac{y}{(\gamma^2 v^2 t^2 + y^2)^{3/2}}, \qquad E_z = 0$$

Le formule per il campo magnetico (nel punto P) sono:

$$B_x = 0, \qquad B_y = 0, \qquad B_z = \frac{v}{c^2} E_y$$

Quindi:

$$B_z = Kq\gamma \frac{v}{c^2} \frac{y}{(\gamma^2 v^2 t^2 + y^2)^{3/2}}$$

Il valore massimo di B_z si ha, ovviamente, per $t = 0$ e vale: $Max(B_z) = Kq\gamma \frac{v}{c^2}\frac{1}{y^2}$.

Poiché B_z é una funzione simmetrica rispetto all'asse $t = 0$, il valore t^* per cui $B_z(t^*) = \frac{1}{2}Max(B_z)$ si ottiene imponendo:

$$\frac{y}{\left(\gamma^2 v^2 t^{*2} + y^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{y^2}$$

ossia:

$$\frac{1}{\left(\gamma^2 v^2 t^{*2} + y^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{y^3}$$

e ancora:

$$\left(\gamma^2 v^2 t^{*2} + y^2\right)^{3/2} = 2y^3$$

Elevando a $\frac{2}{3}$, si ha:

$$\gamma^2 v^2 t^{*2} + y^2 = 2^{2/3} y^2 \quad \Longrightarrow \quad \gamma^2 v^2 t^{*2} + y^2 = 1.587 y^2$$

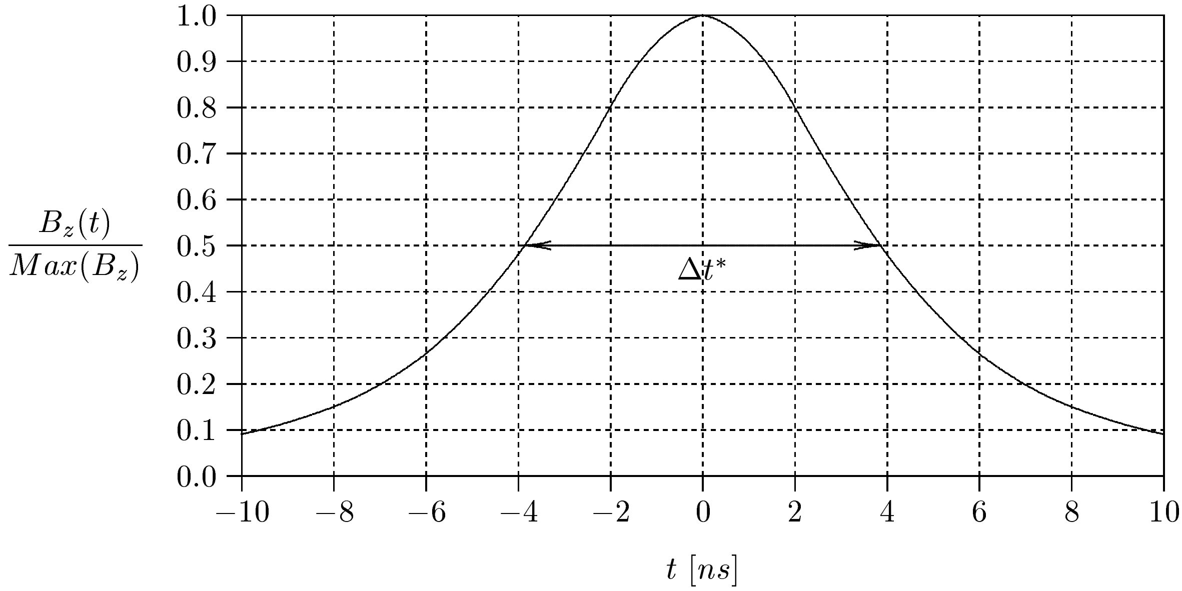
$$\gamma^2 v^2 t^{*2} = 0.587 y^2 \quad \text{da cui} \quad t^* = \pm 0.77 \frac{y}{\gamma v} \quad \Longrightarrow \quad \Delta t^* = 1.54 \frac{y}{\gamma v}$$

Nel nostro caso $\gamma = 1.2$ quindi $1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} \Longrightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$ da cui: $\gamma^2 v^2 = \gamma^2 c^2 - c^2 = c^2(\gamma^2 - 1) = 3.96 \cdot 10^{16} \Longrightarrow \gamma v = 1.99 \cdot 10^8$. Ne segue:

$$\Delta t^* = \underline{\underline{7.74\ ns}}$$

Grafichiamo la funzione $f(t) = \frac{B_z(t)}{Max(B_z)}$:

$t\ [ns]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(t)$	1	0.94	0.80	0.63	0.48	0.36	0.265	0.198	0.15	0.116	0.0905



97-22) Esercizio n. 2 del 6/9/1997

Con riferimento al primo quesito, per rivelare strumentalmente nel punto P la presenza della carica in moto, si ponga una piccola spira di centro P e di area A giacente nel piano xy cioé nel piano contenente il vettore $\vec{v}$ e la direzione congiungente la carica q ed il centro della spira e si misuri la f.e.m. in essa indotta. Determinare l'espressione di tale f.e.m e graficarne l'andamento temporale utilizzando i dati del primo quesito. Valutare analiticamente la durata dell'impulso (distanza temporale fra i due massimi).

Sia A l'area della superficie della spira, allora il flusso di $\vec{B}$ che attraversa la spira é:

$$\Phi(B) = Kq\gamma A \frac{v}{c^2} \frac{y}{\left(\gamma^2 v^2 t^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

L'espressione della forza elettromotrice indotta é:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = Kq\gamma A \frac{v}{c^2} \frac{\frac{3}{2}\left(\gamma^2 v^2 t^2 + y^2\right)^{1/2} 2\gamma^2 v^2 t y}{\left(\gamma^2 v^2 t^2 + y^2\right)^3} =$$

$$= Kq\gamma A \frac{v}{c^2} 3\gamma^2 v^2 y \frac{t}{\left(\gamma^2 v^2 t^2 + y^2\right)^{5/2}} = 3Kq\frac{v^3}{c^2}\gamma^3 y A \frac{t}{\left(\gamma^2 v^2 t^2 + y^2\right)^{5/2}}$$

che presenta due estremi:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{t}{\left(\gamma^2 v^2 t^2 + y^2\right)^{5/2}}\right] = \frac{\left(\gamma^2 v^2 t^2 + y^2\right)^{5/2} - \frac{5}{2}\left(\gamma^2 v^2 t^2 + y^2\right)^{3/2} 2\gamma^2 v^2 t^2}{\left(\gamma^2 v^2 t^2 + y^2\right)^5} =$$

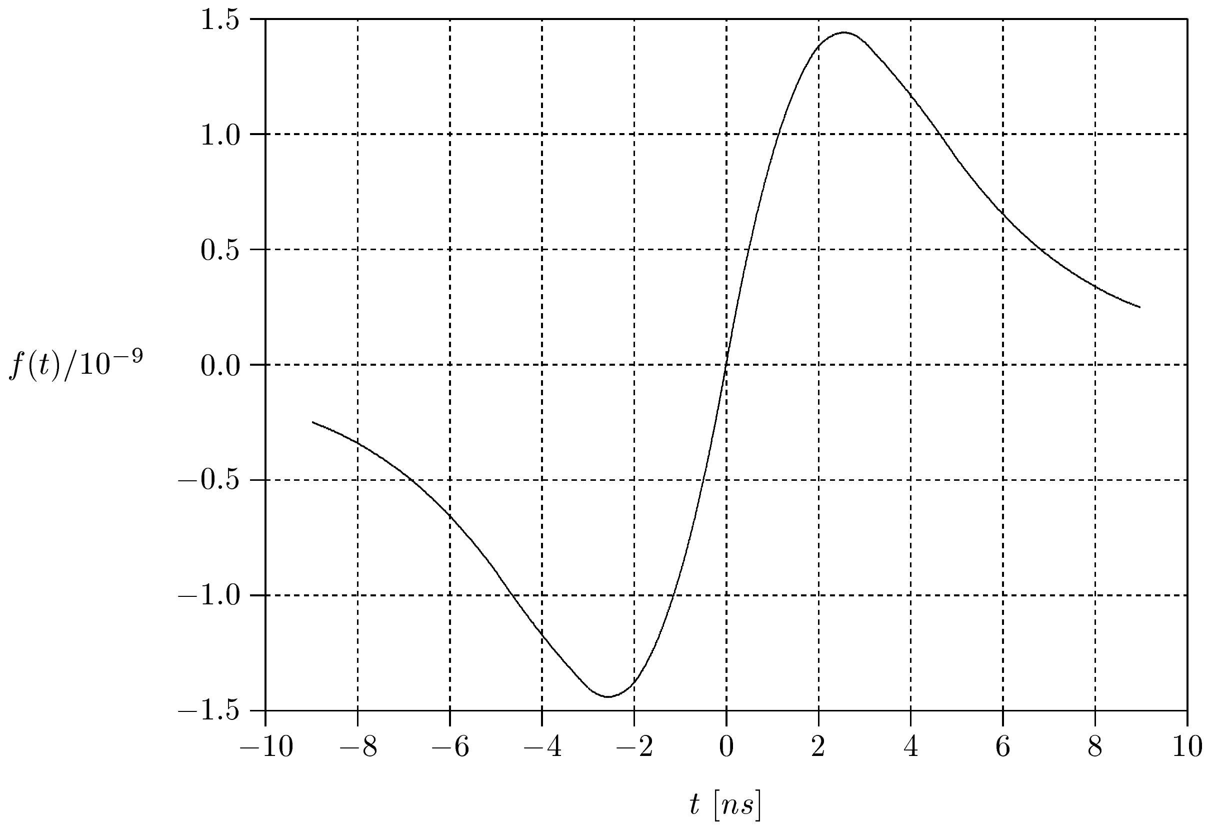
$$= \frac{\gamma^2 v^2 t^2 + y^2 - 5\gamma^2 v^2 t^2}{\left(\gamma^2 v^2 t^2 + y^2\right)^{7/2}}$$

che si annulla per $-4\gamma^2 v^2 t^{*2} = -y^2$ cioé per

$$t^* = \pm \frac{y}{2\gamma v}; \quad \text{nel nostro caso :} \quad t^* = \pm \frac{1}{2 \cdot 1.99 \cdot 10^8} = \underline{\underline{2.5\ ns}}$$

Grafichiamo la forza elettromotrice indotta al variare del tempo e, precisamente, la funzione $f(t) = \dfrac{t}{\left(\gamma^2 v^2 t^2 + y^2\right)^{5/2}}$:

$t\ [ns]$	0	1	2	2.51	3	4	5	6	7	8	9
$f(t)/10^{-9}$	0	0.907	1.38	1.44	1.4	1.17	0.895	0.655	0.472	0.34	0.248



97-23) Esercizio n. 3 del 6/9/1997

Si abbia una lunga antenna ($l/\lambda = 10$) filiforme eccitata con onda viaggiante. Calcolare analiticamente gli zeri del diagramma di radiazione e, in modo approssimato, le direzioni di massima emissione. Graficare il diagramma di radiazione verificando i risultati trovati.

———————

Poiché la lunghezza $2l$ dell'antenna é un numero intero pari di semilunghezze d'onda $\left(2l = 40\dfrac{\lambda}{2}\right)$ cioé $\dfrac{l}{\lambda} = 10$, possiamo applicare la formula:

$$|F(\theta)| = \left| \frac{\sin(20\pi \cos\theta)}{\tan\dfrac{\theta}{2}} \right|$$

Gli zeri si hanno per:

$$20\pi \cos\theta^* = r\pi \qquad \Longrightarrow \cos\theta^* = \frac{r}{20}$$

r	20	19	18	17	16	15	14	13
θ^*	0^0	$\pm 18^0.19$	$\pm 25^0.84$	$\pm 31^0.79$	$\pm 36^0.87$	$\pm 41^0.41$	$\pm 45^0.57$	$\pm 49^0.46$
r	12	11	10	9	8	7	6	5
θ^*	$\pm 53^0.13$	$\pm 56^0.63$	$\pm 60^0$	$\pm 63^0.25$	$\pm 66^0.42$	$\pm 69^0.51$	$\pm 72^0.54$	$\pm 75^0.52$
r	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
θ^*	$\pm 78^0.46$	$\pm 81^0.37$	$\pm 84^0.26$	$\pm 87^0.13$	$\pm 90^0$	$\pm 92^0.86$	$\pm 95^0.74$	$\pm 98^0.63$
r	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11
θ^*	$\pm 101^0.54$	$\pm 104^0.48$	$\pm 107^0.46$	$\pm 110^0.49$	$\pm 113^0.58$	$\pm 116^0.74$	$\pm 120^0$	$\pm 123^0.37$
r	-12	-13	-14	-15	-16	-17	-18	-19
θ^*	$\pm 126^0.87$	$\pm 130^0.54$	$\pm 134^0.43$	$\pm 138^0.59$	$\pm 143^0.13$	$\pm 148^0.21$	$\pm 154^0.16$	$\pm 161^0.8$
r	-20							
θ^*	180^0							

Il diagramma é simmetrico rispetto alla direzione $0^0 - 180^0$ e si hanno complessivamente 80 zeri ossia il doppio del numero di semilunghezze d'onda. Si osservi che l'antenna non irradia lungo la direzione della corrente ($0^0 - 180^0$).

Per quanto riguarda i valori massimi, essi non si possono calcolare in modo semplice; osserviamo, tuttavia che, poiché l'antenna é molto lunga, la rapida variazione del seno comporta che approssimativamente le direzioni di massima emissione si hanno per:

$$|\sin(20\pi cos\theta_{max})| = 1 \Longrightarrow 20\pi\cos\theta_{max} = \frac{m\pi}{2} \text{ con } m \text{ dispari, ossia: } \cos\theta_{max} = \frac{m}{40}$$

m	39	37	35	33	31	29	27	25
θ_{max}	$\pm 12^0.84$	$\pm 22^0.33$	$\pm 28^0.96$	$\pm 34^0.41$	$\pm 39^0.19$	$\pm 43^0.53$	$\pm 47^0.55$	$\pm 51^0.32$
m	23	21	19	17	15	13	11	9
θ_{max}	$\pm 54^0.90$	$\pm 58^0.33$	$\pm 61^0.65$	$\pm 64^0.85$	$\pm 67^0.98$	$\pm 71^0.03$	$74^0.04$	77^0
m	7	5	3	1	-1	-3	-5	-7
θ_{max}	$\pm 79^0.92$	$\pm 82^0.82$	$\pm 85^0.7$	$\pm 88^0.56$	$\pm 91^0.43$	$\pm 94^0.3$	$\pm 97^0.18$	$\pm 100^0.08$
m	-9	-11	-13	-15	-17	-19	-21	-23
θ_{max}	$\pm 103^0$	$\pm 105^0.96$	$\pm 108^0.96$	$\pm 112^0.02$	$\pm 115^0.15$	$\pm 118^0.36$	$\pm 121^0.67$	$\pm 125^0.1$
m	-25	-27	-29	-31	-33	-35	-37	-39
θ_{max}	$\pm 128^0.68$	$\pm 132^0.45$	$\pm 136^0.47$	$\pm 140^0.80$	$\pm 145^0.59$	$\pm 151^0.04$	$\pm 157^0.67$	$\pm 167^0.16$

Questi valori sono chiaramente approssimativi. Il diagramma di radiazione presenta 80 lobi. Il suo grafico é abbastanza chiaro dai valori riportati.

97-24) Esercizio n. 4 del 6/9/1997

Un'onda elettromagnetica piana, viaggiante nel vuoto, incide normalmente sulla superficie di un plasma uniforme infinitamente esteso e senza collisioni. Se ω_p é la frequenza di plasma, calcolare per quale frequenza dell'onda incidente l'onda riflessa risulta sfasata di $\pi/2$ rispetto all'onda incidente.

Applichiamo subito le leggi di Fresnel per $\theta_0 = 0$ nel caso di dielettrici perfetti in quanto il plasma é senza collisioni.

Consideriamo (in quanto é del tutto indifferente) il caso $E_\perp$:

$$E_1 = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}} - \sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}} + \sqrt{\epsilon_{r2}}} E_0 \qquad \text{dove } \epsilon_{r1} = 1$$

Ora, poiché si richiede che l'onda riflessa sia sfasata rispetto all'onda incidente deve necessariamente risultare complesso il coefficiente di Fresnel. Poiché $\epsilon_{r1} = 1$, perché questo succeda deve essere $\sqrt{\epsilon_{r2}}$ complesso. Poiché per un plasma senza collisioni risulta:

$$\sqrt{\epsilon_{r2}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

deve essere $\omega < \omega_p$, quindi;

$$\sqrt{\epsilon_{r2}} = i\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \qquad (\omega < \omega_p)$$

Conseguentemente:

$$E_1 = \frac{1 - i\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}}{1 + i\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}} E_0$$

Il modulo del coefficiente di riflessione é 1 e l'onda viene totalmente riflessa. Seguendo lo stesso procedimento effettuato nel caso della riflessione totale per i mezzi dielettrici, si ha:

$$E_1 = \frac{Ae^{-i\alpha}}{Ae^{i\alpha}} = e^{-i2\alpha} \qquad \text{con} \quad \tan\alpha = \frac{\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}}{1} \quad \text{per } \omega < \omega_p$$

Poiché si richiede che 2α sia $\frac{\pi}{2}$, ne segue: $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Cioé:

$$\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

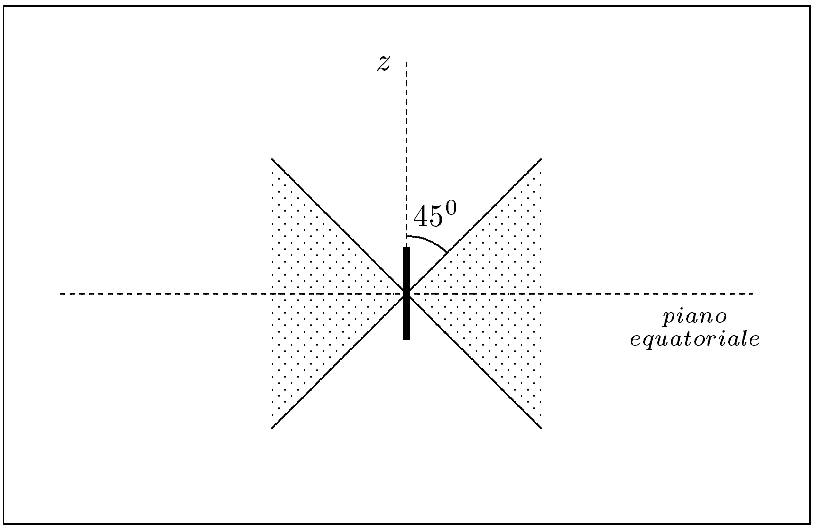
Elevando al quadrato, risulta:

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{\omega_p^2}{2} \quad \Longrightarrow \underline{\underline{\omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}}}$$

97-25) Esercizio n. 1 del 4/10/1997

Si abbia un dipolo hertziano di centro O e orientato lungo l'asse z. Si considerino due coni circolari di vertice O i cui assi sono orientati secondo l'asse z, il primo verso la direzione positiva, l'altro verso quella negativa. La semiapertura di ciascun cono sia di 45^0. Calcolare la frazione della potenza totale emessa dal dipolo immagazzinata nello spazio esterno alla superficie dei coni.

———————



La potenza irradiata da un dipolo hertziano nella zona tratteggiata al di sopra del piano equatoriale, cioé all'interno di un angolo solido di asse $\theta = 90^0$ e di semiapertura generica θ_0 (che nel nostro caso é 45^0), risulta (Appunti Campi e.m.):

$$P_{\theta 0} = \frac{Z}{2}\left(\frac{kIl}{4\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\theta_0}^{90^0} \sin^3\theta d\theta$$

Ma:

$$\int_{\theta_0}^{90^0} \sin^3\theta d\theta = -\int_{\theta_0}^{90^0} \left(1-\cos^2\theta\right) dcos\theta =$$

$$= \int_{90^0}^{\theta_0} d\cos\theta + \int_{\theta_0}^{90^0} \cos^2\theta d\cos\theta = \cos\theta_0 - \frac{1}{3}\cos^3\theta_0 = 0.707 - 0.118 = 0.589$$

dove é stato assunto $\theta_0 = 45^0$

Quindi la potenza irradiata al di sopra e al di sotto del piano equatoriale cioé in tutta la zona tratteggiata é il doppio di quella calcolata.

$$P_{2\theta_0} = \pi Z \left(\frac{kIl}{4\pi}\right)^2 \cdot 0.589 \cdot 2$$

Poiché la potenza totale irradiata é:

$$P_t = \frac{4}{3}\pi Z \left(\frac{kIl}{4\pi}\right)^2$$

si ha:

$$\frac{P_{2\theta_0}}{P_t} = \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot 0.589 = 0.8838 = \underline{\underline{88.38\%}}$$

97-26) Esercizio n. 2 del 4/10/1997

Si consideri un cristallo di calcite tagliato in modo tale che l'asse ottico (orientato lungo l'asse z) é perpendicolare alla superficie. Un fascio di luce incide sulla superficie del cristallo con un angolo di incidenza $\theta_0 = 50^0$. Calcolare gli angoli di rifrazione competenti al raggio ordinario e straordinario rispettivamente nonché i rispettivi coefficienti di riflessione nel caso di polarizzazione ortogonale al piano di incidenza. Per la calcite si ha:

$$\bar{\bar{\epsilon}} \equiv \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \equiv \epsilon_0 \begin{pmatrix} n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix},$$

dove $n = 1.658$, $n_z = 1.486$.

———————

Dall'esercizio n. 2 del Compito di Campi elettromagnetici del 1/2/97 sappiamo che:

$$\tan\theta_{straord} = \frac{n_z}{n}\frac{\sin\theta_0}{\sqrt{n_z^2 - \sin^2\theta_0}}, \qquad \sin\theta_{ord} = \frac{1}{n}\sin\theta_0$$

É utile costruire la seguente tabella, anche se non richiesto espressamente dal problema:

$n = 1.658$, $n_z = 1.486$

θ_0	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80	90^0
$\theta_{straord}$	0^0	$6^0.02$	$11^0.97$	$17^0.76$	$23^0.27$	$28^0.33$	$32^0.73$	$36^0.19$	$38^0.42$	$39^0.19$
θ_{ord}	0^0	6^0	$11^0.9$	$17^0.55$	$22^0.81$	$27^0.52$	$31^0.49$	$34^0.52$	$36^0.44$	$37^0.09$
$\Delta\theta$	0^0	$0^0.02$	$0^0.07$	$0^0.2$	$0^0.46$	$0^0.81$	$1^0.24$	$1^0.67$	$1^0.98$	$2^0.095$

Calcoliamo, ora, i coefficienti di riflessione competenti alle due onde per $\theta_0 = 50^0$ nel caso che l'onda incidente sia polarizzata linearmente con il vettore $\vec{E}$ ortogonale al piano di incidenza. Conviene usare la formula:

$$R_{\perp straord} = \left|\frac{\sin(\theta_2 - \theta_0)}{\sin(\theta_2 + \theta_0)}\right|^2 = \left|\frac{\sin\left(28^0.33 - 50^0\right)}{\sin\left(28^0.33 + 50^0\right)}\right|^2 = \left|\frac{-0.36926}{0.979329}\right|^2 = \underline{\underline{14.21\%}}$$

$$R_{\perp ord} = \left| \frac{\sin\left(27^0.52 - 50^0\right)}{\sin\left(27^0.52 + 50^0\right)} \right|^2 = \left| \frac{-0.38236}{0.97637} \right|^2 = \underline{\underline{15.34\%}}$$

97-27) Esercizio n. 3 del 4/10/1997

Un fascio di luce incide, in direzione della normale, su una lastra di palladio il cui indice di rifrazione relativo alla lunghezza d'onda considerata é: $n = 1.81 + i2.64$.

Calcolare: a) la profonditá di penetrazione; b) il coefficiente di riflessione; c) la variazione di fase subita dall'onda in conseguenza della riflessione.

———————

(vedi Compito Campi e.m. 1/2/97 e 19/7/97)

$$k = \frac{\omega}{c}n \quad \Longrightarrow \quad \beta + i\alpha = \frac{\omega}{c}\Re(n) + i\frac{\omega}{c}\Im(n)$$

da cui:

$$\beta = \frac{\omega}{c}\Re(n) \qquad e \qquad \alpha = \frac{\omega}{c}\Im(n) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Im(n)$$

dove λ_0 é la lunghezza d'onda relativa al vuoto.

Per $n = 1.81 + i2.64$ e $\lambda_0 = 500\ nm$ si ha:

$$\alpha = \frac{2\pi}{500 \cdot 10^{-9}} 2.64 = 3.32 \cdot 10^7\ m^{-1}$$

conseguentemente la profonditá di penetrazione δ é:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = 30.14 \cdot 10^{-9}\ m = \underline{\underline{30.14\ nm}}$$

Per $\theta_0 = 0^0$, si ha:

$$R = R_\perp = R \parallel = \frac{(q - \beta_1)^2 + p^2}{(q + \beta_1)^2 + p^2}$$

Si osservi che si poteva usare direttamente la formula: $\left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2$

Per $\theta_0 = 0 \Longrightarrow q = \beta_2$ e $p = \alpha$.

$$R = \frac{(\beta_2 - \beta_1)^2 + \alpha^2}{(\beta_2 + \beta_1)^2 + \alpha^2} \quad \text{e poiché} \quad \beta_1 = \frac{\omega}{c} \quad \text{si ha:}$$

$$R = \frac{(\Re(n) - 1)^2 + (\Im(n))^2}{(\Re(n) + 1)^2 + (\Im(n))^2} = \frac{7.6257}{14.8657} = 0.5129 \Longrightarrow \underline{\underline{51.29\%}}$$

Per calcolare la fase dell'onda riflessa, scriviamo il coefficiente di Fresnel per $\theta_0^0 = 0$ e $\mu_2 = \mu_1$

$$E_{1\perp} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} E_{0\perp} = \frac{1 - \Re(n) - i\Im(n)}{1 + \Re(n) + i\Im(n)} E_{0\perp} = \frac{[1 - \Re(n) - i\Im(n)]\,[1 + \Re(n) - i\Im(n)]}{[1 + \Re(n)]^2 + [\Im(n)]^2} E_{0\perp} =$$

$$= \frac{1 - [\Re(n)]^2 - [\Im(n)]^2 - 2i\Im(n)}{[1 + \Re(n)]^2 + [\Im(n)]^2} E_{0\perp} \quad \Longrightarrow \quad \tan\delta = \frac{2\Im(n)}{1 - [\Re(n)]^2 - [\Im(n)]^2} =$$

$$= -\frac{5.28}{9.2457} = \underline{\underline{-0.5711}} \quad \text{da cui:} \quad \underline{\underline{\delta = -29^0.73}}$$

97-28) Esercizio n. 4 del 4/10/1997

Un'onda elettromagnetica é la composizione di due onde piane linearmente polarizzate:

$$E_x = 2\cos(kz - \omega t); \qquad E_y = 3\cos(kz - \omega t - 90^0)$$

Determinare analiticamente lo stato di polarizzazione dell'onda nonché i parametri che lo caratterizzano. Verificare i risultati ottenuti, graficando per punti la figura di polarizzazione.

———————

Riscriviamo le espressioni delle componenti del campo elettrico:

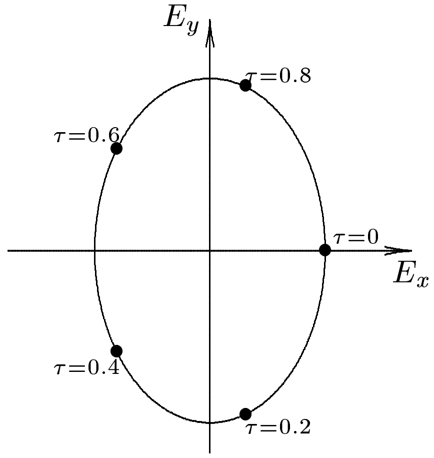
$$E_x = 2\cos\left(kz - \omega t\right); \qquad E_y = 3\cos\left(kz - \omega t - 90^0\right)$$

Posto $\omega t = \dfrac{2\pi}{T} t = 2\pi\tau$ si ha, per z=0:

$$E_x = 2\cos\left(-2\pi\tau\right); \qquad E_y = 3\cos\left(-2\pi\tau - \frac{\pi}{2}\right)$$

Valutiamo E_x e E_y al variare di τ e grafichiamo la figura di polarizzazione:

τ	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
E_x	2	1.62	0.62	−0.62	−1.62	−2	−1.62	−0.62	0.62	1.62	2
E_y	0	−1.76	−2.85	−2.85	−1.76	0	1.76	2.85	2.85	1.76	0



Valutiamo,ora, analiticamente i parametri di polarizzazione.

Osserviamo che gli argomenti delle funzioni coseno che figurano nelle espressioni delle componenti dei campi sono opposti a quelli indicati in teoria in base ai quali abbiamo sviluppato le formule per la valutazione dei parametri, quindi bisogna stare attenti.

Scriviamo, allora, le componenti dei campi in modo diverso:

$$E_x = 2\cos(\omega t - kz)\,; \qquad E_y = 3\cos\left(\omega t - kz + 90^0\right)$$

Ora possiamo applicare le formule studiate in teoria; si ha, quindi:

$$\sin\delta = \sin 90^0 > 0$$

La polarizzazione, pertanto, é **destrogira** come risulta dalla figura. Si ha:

$$\tan 2\Psi = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2\Psi = 180^0 \quad \Longrightarrow \quad \Psi = 90^0$$

$$\sin 2\chi = \frac{2a_1b_1}{a_1^2 + b_1^2}\sin\delta = \frac{12}{13} = 0.9230$$

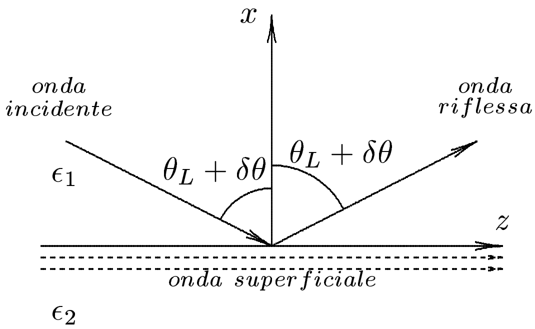
quindi:

$$\tan\chi = 0.67 \quad \text{ossia} \quad \frac{b}{a} = 0.67$$

97-29) Esercizio n. 1 del 22/11/1997

Un'onda elettromagnetica piana viaggiante in un mezzo dielettrico perfetto di indice di rifrazione $n_1 = 1.52$ incide, con un angolo di incidenza maggiore dell'angolo limite, sulla superficie di un altro dielettrico perfetto di indice di rifrazione $n_2 = 1.33$. Si calcoli la distanza alla quale l'ampiezza dell'onda superficiale diventa $1/e$ del suo valore sulla superficie, nel caso che gli angoli di incidenza siano $\theta_L + 2^0$ e $\theta_L + 5^0$ rispettivamente. La lunghezza d'onda della radiazione incidente rispetto al vuoto sia $\lambda = 488\ nm$.

———————



Nel secondo mezzo il campo viaggia lungo l'asse z attenuandosi lungo l'asse x negativo. Il coefficiente di attenuazione é β_1; infatti per la formula (4.2.1) degli Appunti di Campi e.m. l'onda superficiale si scrive:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_2 e^{\beta_1 x + i\alpha z} e^{-i\omega t} \qquad (x < 0) \quad (\theta_0 > \theta_L)$$

La distanza alla quale il campo diventa $\frac{1}{e}$ del suo valore sulla superficie di separazione é: $\delta = \frac{1}{\beta_1}$

Si ha:

$$\beta_1 = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1}\sqrt{\sin^2\theta_0 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

essendo $\omega = 2\pi\frac{c}{\lambda_0}$ dove λ_0 é la lunghezza d'onda riferita al vuoto ($\lambda_0 = 488\ nm$).

Ne segue, nell'ipotesi che $\mu_r = 1$, che:

$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 \sqrt{\sin^2\theta_0 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} \qquad (n_2 = 1.33,\ n_1 = 1.52)$$

Calcoliamo θ_L:

$$\theta_L = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \simeq 61^0$$

Per $\theta_0 = \theta_L + 2^0 = 63^0$ si ha:

$$[\beta_1]_{(\theta_0=63^0)} = 1.957 \cdot 10^7 \sqrt{0.79389 - 0.765625} = 1.957 \cdot 10^7 \cdot 0.16812197 =$$
$$= 3.290147 \cdot 10^6 \quad \Longrightarrow \quad [\delta]_{(\theta_0=63^0)} = 0.304\ \mu = \underline{\underline{304\ nm}}$$

Per $\theta_0 = \theta_L + 5^0 = 66^0$ si ha:

$$[\beta_1]_{(\theta_0=66^0)} = 1.957 \cdot 10^7 \sqrt{0.834565 - 0.765625} = 1.957 \cdot 10^7 \cdot 0.2625648 =$$
$$= 5.13839 \cdot 10^6 \quad \Longrightarrow \quad [\delta]_{(\theta_0=66^0)} = 0.1946\ \mu = \underline{\underline{194.6\ nm}}$$

97-30) Esercizio n. 2 del 22/11/1997

Per un limitato intervallo di lunghezze d'onda, l'indice di rifrazione di certi vetri é dato dalla relazione:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

essendo λ la lunghezza d'onda relativa al vuoto.

Sapendo che per il quarzo a $\lambda_1 = 257nm$ corrisponde un indice di rifrazione $n_1 = 1.50379$ e che a $\lambda_2 = 589.3nm$ corrisponde un indice di rifrazione $n_2 = 1.45848$, calcolare la velocitá di fase e la velocitá di gruppo competente ad un'onda di lunghezza d'onda $\lambda = 404.6nm$.

———————

vedi Compito Campi e.m. del 16/7/94 e del 24/7/96.

Calcoliamo i coefficienti A e B:

$$A + \frac{B}{\lambda_1^2} = n_1 \qquad (\lambda = 257\ nm; n_1 = 1.50379)$$

$$A + \frac{B}{\lambda_2^2} = n_2 \qquad (\lambda = 589.3\ nm; n_2 = 1.45848)$$

da cui:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} n1 & \frac{1}{\lambda_1^2} \\ n2 & \frac{1}{\lambda_2^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda_1^2} \\ 1 & \frac{1}{\lambda_2^2} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{n_1}{\lambda_2^2} - \frac{n_2}{\lambda_1^2}}{\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}} = \frac{n_1\lambda_1^2 - n_2\lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} =$$

$$= \frac{9.932382576 \cdot 10^{-14} - 5.06492898175 \cdot 10^{-13}}{6.6049 \cdot 10^{-14} - 3.4727449 \cdot 10^{-13}} = \frac{4.0717 \cdot 10^{-13}}{2.8122549 \cdot 10^{-13}} = \underline{\underline{1.447838}}$$

$$B = \frac{(n_2 - n_1)\,\lambda_1^2\lambda_2^2}{2.8122549 \cdot 10^{-13}} = \frac{4.531 \cdot 10^{-2} \cdot 2.293713 \cdot 10^{-26}}{2.8122549 \cdot 10^{-13}} = \underline{\underline{3.6955 \cdot 10^{-15}}}$$

Quindi l'indice di rifrazione competente a $\lambda = 404.6\ nm$ é: $n = \underline{\underline{1.47041}}$

Allora, la velocitá di fase é:

$$v_f = \frac{c}{n} = \underline{\underline{2.04 \cdot 10^8\ m/s}}$$

Per quanto riguarda la velocitá di gruppo si ha:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$$

poiché $\beta(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega)$ é una funzione monotona in ω, si ha:

$$v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1} = \left(\frac{n(\omega)}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn(\omega)}{d\omega} \right)^{-1}$$

In funzione di λ, si ha:

$$v_g = \left(\frac{n(\lambda)}{c} + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dn}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\omega} \right)^{-1}$$

Ma $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ e quindi:

$$\frac{d\lambda}{d\omega} = -\frac{2\pi c}{\omega^2} = -\frac{2\pi c}{4\pi^2 c^2} \lambda^2 = -\frac{\lambda^2}{2\pi c}$$

Quindi:

$$v_g = \left(\frac{n(\lambda)}{c} - \frac{\lambda}{c} \frac{dn}{d\lambda} \right)^{-1}$$

D'altra parte:

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3}$$

In definitiva:

$$v_g = \left(\frac{n(\lambda)}{c} + \frac{2B}{\lambda^2 c} \right)^{-1} = \left(4.9 \cdot 10^{-9} + 1.50498 \cdot 10^{-10}\right)^{-1} = \underline{\underline{1.98 \cdot 10^8 \; m/s}}$$

97-31) Esercizio n. 3 del 22/11/1997

Per la riga di risonanza "D" del sodio si hanno i seguenti parametri per la formula di dispersione:

$$\omega_0 = 3 \cdot 10^{15}, \quad \gamma = 2 \cdot 10^{10}, \quad \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} = 10^{23}$$

Graficare l'indice di rifrazione n ed il coefficiente di assorbimento α in funzione della frequenza. Trovare il valore massimo di n e di α nonché la larghezza a metá altezza della riga di assorbimento in unitá di lunghezze d'onda espresse in Å.

———————

Si ha:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left[1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}\right] = \epsilon_0 \left[1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2}\right]$$

Dagli Appunti di Campi e.m., si ha quindi:

$$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2\gamma} \frac{Ne^2}{\epsilon_0 mc} \frac{\omega^2\gamma^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

Il valore massimo di α si ha per $\omega = \omega_0$

$$\alpha_{max} = \frac{1}{2\gamma} \frac{Ne^2}{\epsilon_0 mc} = \frac{10^{23}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{10} \cdot 3 \cdot 10^8} = \underline{\underline{8.3333 \cdot 10^3 \ m^{-1}}}$$

Dimostriamo che la larghezza della riga é $\gamma = 2 \cdot 10^{10} \ rad/s$.
Infatti essa si calcola imponendo che:

$$\frac{\omega^{2*}\gamma^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^{*2}\right)^2 + \omega^{*2}\gamma^2} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1 + \dfrac{\left(\omega_0^2 - \omega^{*2}\right)^2}{\omega^{*2}\gamma^2}} = \frac{1}{2}$$

ossia:

$$\frac{\left(\omega_0^2 - \omega^{*2}\right)^2}{\omega^{*2}\gamma^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \left|\omega_0^2 - \omega^{*2}\right| = \omega^*\gamma$$

Calcoliamo ω^* nel caso $\omega^* < \omega_0$:

$$\omega^{*2} + \omega^*\gamma - \omega_0^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega^* = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

Poiché certamente $4\omega_0^2 >> \gamma^2$, la soluzione dell'equazione (si scarta ovviamente quella negativa) é:

$$\omega^* = -\frac{\gamma}{2} + \omega_0 \quad \Longrightarrow \quad \omega^* - \omega_0 = -\frac{\gamma}{2}$$

quindi la larghezza totale della riga a metá altezza é: $\Gamma = 2|\omega^* - \omega_0| = \gamma$.

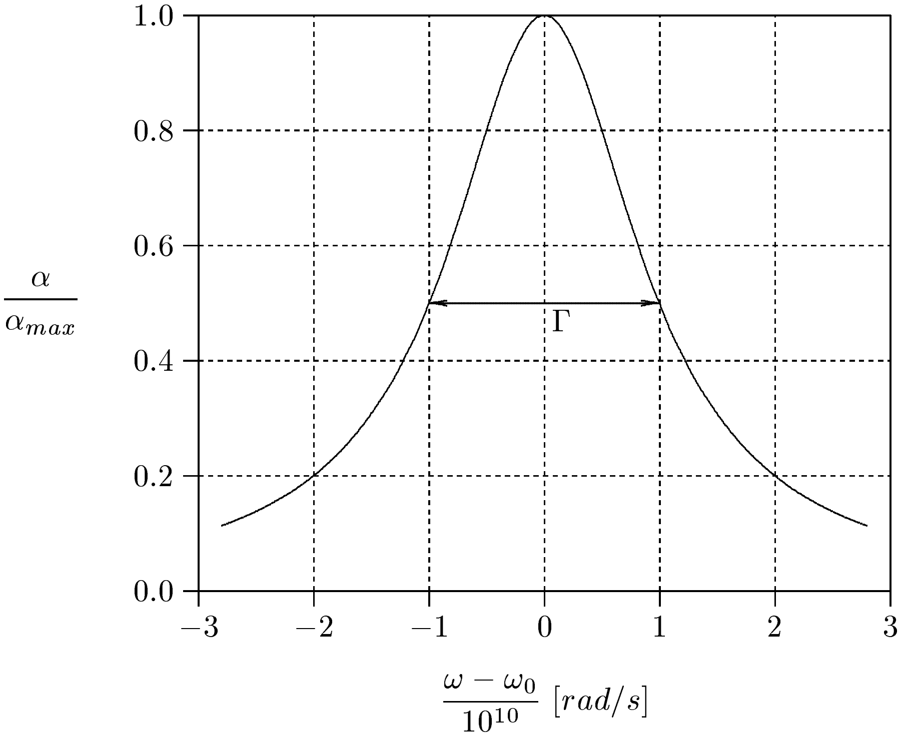
In termini di lunghezza d'onda, si ha:

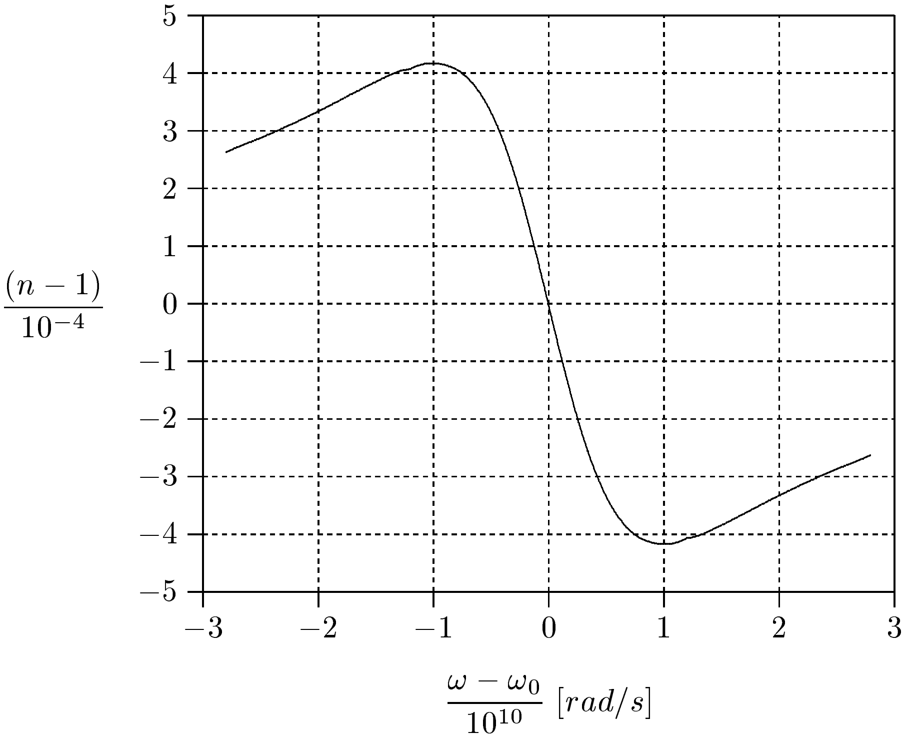
$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \Longrightarrow \Delta\lambda = -\frac{2\pi c}{\omega^2}\Delta\omega; \quad \text{Per } \Delta\omega = \Gamma \Longrightarrow \Delta\lambda = \frac{2\pi c}{\omega^2}\gamma = 0.042 \text{ \AA} = \underline{\underline{0.0042\ nm}}$$

Il valore massimo di n é 1.0004167 in corrispondenza di $\omega^* = \omega_0 - \dfrac{\gamma}{2}$.

Grafichiamo, ora, α e n in funzione di $\omega - \omega_0$.

$\omega_0 - \omega$	$\omega_0^2 - \omega^2$	$\omega^2\gamma^2$	$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2$	$\dfrac{\alpha}{\alpha_{max}}$	$n - 1$
0	0	$3.6 \cdot 10^{51}$	$3.6 \cdot 10^{51}$	1	0
$\pm 0.1 \cdot 10^{10}$	$\pm 6 \cdot 10^{24}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$3.635952 \cdot 10^{51}$	0.99	$\pm 8.25 \cdot 10^{-5}$
$\pm 0.2 \cdot 10^{10}$	$\pm 1.2 \cdot 10^{25}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$3.744 \cdot 10^{51}$	0.96	$\pm 1.6 \cdot 10^{-4}$
$\pm 0.3 \cdot 10^{10}$	$\pm 1.8 \cdot 10^{25}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$3.924 \cdot 10^{51}$	0.917	$\pm 2.2935 \cdot 10^{-4}$
$\pm 0.4 \cdot 10^{10}$	$\pm 2.4 \cdot 10^{25}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$4.176 \cdot 10^{51}$	0.862	$\pm 2.87356 \cdot 10^{-4}$
$\pm 0.5 \cdot 10^{10}$	$\pm 3 \cdot 10^{25}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$4.5 \cdot 10^{51}$	0.8	$\pm 3.3333 \cdot 10^{-4}$
$\pm 0.6 \cdot 10^{10}$	$\pm 3.6 \cdot 10^{25}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$4.896 \cdot 10^{51}$	0.735	$\pm 3.676 \cdot 10^{-4}$
$\pm 0.7 \cdot 10^{10}$	$\pm 4.2 \cdot 10^{25}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$5.363979 \cdot 10^{51}$	0.67	$\pm 3.915 \cdot 10^{-4}$
$\pm 0.8 \cdot 10^{10}$	$\pm 4.8 \cdot 10^{25}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$5.9 \cdot 10^{51}$	0.61	$\pm 4.068 \cdot 10^{-4}$
$\pm 0.9 \cdot 10^{10}$	$\pm 5.4 \cdot 10^{25}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$6.516 \cdot 10^{51}$	0.55	$\pm 4.1436 \cdot 10^{-4}$
$\pm 1.0 \cdot 10^{10}$	$\pm 6 \cdot 10^{25}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$7.2 \cdot 10^{51}$	0.5	$\pm 4.17 \cdot 10^{-4}$
$\pm 1.1 \cdot 10^{10}$	$\pm 6.6 \cdot 10^{25}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$7.955 \cdot 10^{51}$	0.45	$\pm 4.15 \cdot 10^{-4}$
$\pm 1.2 \cdot 10^{10}$	$\pm 7.2 \cdot 10^{25}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$8.784 \cdot 10^{51}$	0.41	$\pm 4.098 \cdot 10^{-4}$
$\pm 1.3 \cdot 10^{10}$	$\pm 7.8 \cdot 10^{25}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$9.684 \cdot 10^{51}$	0.37	$\pm 4.027 \cdot 10^{-4}$
$\pm 1.4 \cdot 10^{10}$	$\pm 8.4 \cdot 10^{25}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$1.0656 \cdot 10^{52}$	0.3378	$\pm 3.941 \cdot 10^{-4}$
$\pm 1.5 \cdot 10^{10}$	$\pm 9 \cdot 10^{25}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$1.17 \cdot 10^{52}$	0.3077	$\pm 3.846 \cdot 10^{-4}$
$\pm 1.6 \cdot 10^{10}$	$\pm 9.6 \cdot 10^{25}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$1.2816 \cdot 10^{52}$	0.2809	$\pm 3.7453 \cdot 10^{-4}$
$\pm 1.7 \cdot 10^{10}$	$\pm 1.02 \cdot 10^{26}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$1.4 \cdot 10^{52}$	0.257	$\pm 3.6428 \cdot 10^{-4}$
$\pm 1.8 \cdot 10^{10}$	$\pm 1.08 \cdot 10^{26}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$1.526 \cdot 10^{52}$	0.236	$\pm 3.53866 \cdot 10^{-4}$
$\pm 1.9 \cdot 10^{10}$	$\pm 1.14 \cdot 10^{26}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$1.6596 \cdot 10^{52}$	0.2169	$\pm 3.434 \cdot 10^{-4}$
$\pm 2.0 \cdot 10^{10}$	$\pm 1.2 \cdot 10^{26}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$1.8 \cdot 10^{52}$	0.2	$\pm 3.3333 \cdot 10^{-4}$
$\pm 2.1 \cdot 10^{10}$	$\pm 1.26 \cdot 10^{26}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$1.9476 \cdot 10^{52}$	0.1848	$\pm 3.2347 \cdot 10^{-4}$
$\pm 2.2 \cdot 10^{10}$	$\pm 1.32 \cdot 10^{26}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$2.1024 \cdot 10^{52}$	0.1712	$\pm 3.13927 \cdot 10^{-4}$
$\pm 2.3 \cdot 10^{10}$	$\pm 1.38 \cdot 10^{26}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$2.2644 \cdot 10^{52}$	0.15898	$\pm 3.04716 \cdot 10^{-4}$
$\pm 2.4 \cdot 10^{10}$	$\pm 1.44 \cdot 10^{26}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$2.43358 \cdot 10^{52}$	0.14793	$\pm 2.9586 \cdot 10^{-4}$
$\pm 2.5 \cdot 10^{10}$	$\pm 1.5 \cdot 10^{26}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$2.61 \cdot 10^{52}$	0.13793	$\pm 2.87356 \cdot 10^{-4}$
$\pm 2.6 \cdot 10^{10}$	$\pm 1.56 \cdot 10^{26}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$2.7935 \cdot 10^{52}$	0.1288	$\pm 2.792196 \cdot 10^{-4}$
$\pm 2.7 \cdot 10^{10}$	$\pm 1.62 \cdot 10^{26}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$2.984 \cdot 10^{52}$	0.1206	$\pm 2.7144 \cdot 10^{-4}$
$\pm 2.8 \cdot 10^{10}$	$\pm 1.67 \cdot 10^{26}$	$\simeq 3.6 \cdot 10^{51}$	$3.182 \cdot 10^{52}$	0.1131	$\pm 2.624136 \cdot 10^{-4}$


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
$\frac{\alpha}{\alpha_{max}}$
Γ
−3
−2
−1
0
1
2
3
$\frac{\omega - \omega_0}{10^{10}}$ [rad/s]


5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
$\frac{(n-1)}{10^{-4}}$
−3
−2
−1
0
1
2
3
$\frac{\omega - \omega_0}{10^{10}}$ [rad/s]

97-32) Esercizio n. 4 del 22/11/1997

Un sistema di cinque antenne a mezz'onda parallele ed equidistanti $d = \lambda/2$ é uniformemente alimentato con tutte le correnti in fase. Calcolare il valore della fase progressiva perché il lobo principale subisca una deviazione angolare di $\pm 30^0$ dalla direzione broadside. Graficare il diagramma di radiazione.

———————

Si ha:

$$K(\phi) = \frac{1}{n}\left|\frac{\sin\left[\frac{n}{2}\left(\pi\cos\phi + \gamma\right)\right]}{\sin\left[\left(\pi\cos\phi + \gamma\right)/2\right]}\right|$$

Per $\gamma = 0$ il diagramma di radiazione presenta un lobo principale in direzione broadside.

Perché il fascio subisca una deviazione di $\pm 30^0$ occorre che ϕ sia 60^0 o 120^0, quindi deve essere:

$$\pi\cos\phi^* + \gamma = 0 \qquad (\alpha \longrightarrow 2m\pi \text{ con } m = 0)$$

ossia:

$$\begin{cases} \pi\cos 60^0 = -\gamma \quad \Longrightarrow \quad \gamma = -\dfrac{\pi}{2} \\ \pi\cos 120^0 = -\gamma \quad \Longrightarrow \quad \gamma = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Diagramma di radiazione per $\gamma = \frac{\pi}{2}$

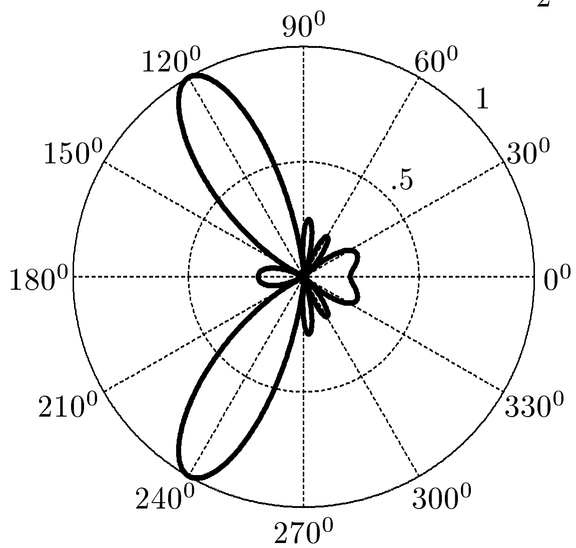
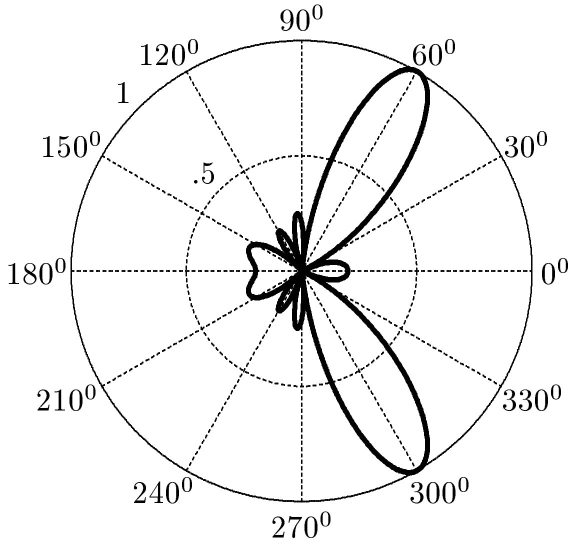


Diagramma di radiazione per $\gamma = -\dfrac{\pi}{2}$



Fine Esercizi Campi e.m. - 1997