Esercizi svolti di Campi elettromagnetici - Anno 1995

95-1) Esercizio n. 1 del 24/6/1995

Un'onda piana polarizzata linearmente incide, dall'aria, su una superficie piana di polistirene considerato come dielettrico perfetto ($\mu_r = 1; \epsilon_r = 2.7$). L'angolo di incidenza é $\theta_0 = 45^0$ e la direzione del vettore campo elettrico incidente forma un angolo di 45^0 con il piano di incidenza. Calcolare: a) il coefficiente di riflessione; b) le caratteristiche dello stato di polarizzazione dell'onda riflessa e dell'onda trasmessa.

———————

$$\theta_0 = 45^0\ ,\ \alpha_i = 45^0\ ,\ \epsilon_{r_1} = 1\ ,\ \epsilon_{r_2} = 2.7$$

$$R = \frac{1}{2}R_\perp + \frac{1}{2}R_\parallel = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2.7-0.5}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2.7-0.5}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{2.7}{\sqrt{2}} - \sqrt{2.7-0.5}}{\frac{2.7}{\sqrt{2}} + \sqrt{2.7-0.5}}\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(0.125 + 0.0157\Big) = 0.07 \Longrightarrow \underline{7\%}$$

Sia l'onda riflessa che l'onda trasmessa sono polarizzate linearmente e per esse si ha:

$$\tan\alpha_r = -\frac{\cos(\theta_0-\theta_2)}{\cos(\theta_0+\theta_2)}\tan\alpha_i \qquad \text{e} \qquad \tan\alpha_t = \cos(\theta_0-\theta_2)\tan\alpha_i$$

Calcoliamo θ_2:

$$\sqrt{\epsilon_{r_2}}\sin\theta_2 = \sqrt{\epsilon_{r_1}}\sin\theta_0$$

$$\sin\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2.7}} = 0.43 \Longrightarrow \theta_2 = 25^0, 47$$

In definitiva:

$$\tan\alpha_r = -\frac{\cos 19^0, 53}{\cos 70^0, 47} = -\frac{0.942466}{0.334300} = -2.8192$$

$$\alpha_r = \underline{\underline{-70^0.47}} \quad \text{(in senso antiorario)}$$

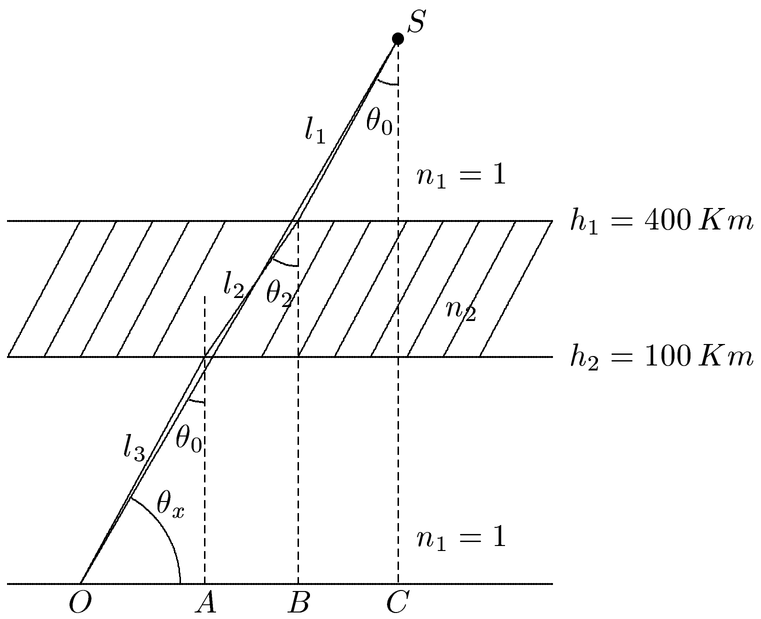
$$\tan\alpha_t = 0.942466$$

$$\alpha_t = \underline{\underline{43^0.3}} \quad \text{(in senso orario)}$$

95-2) Esercizio n. 2 del 24/6/1995

Un satellite in orbita stazionaria si trova ad un'altezza di 1000 Km sopra la superficie terrestre. Un segnale di frequenza $f = 20\ MHz$ viene emesso dal satellite verso la Terra ed esso attraversa uno strato ionosferico omogeneo (privo di collisioni), caratterizzato da una frequenza di plasma $f_p = 11\ MHz$, che si estende da un'altezza $h_1 = 400\ Km$ ad un'altezza $h_2 = 100\ Km$ sopra la superficie terrestre. Se un ricevitore posto al suolo riceve il segnale come se fosse proveniente da una direzione formante un angolo di 60^0 con la superficie terrestre orizzontale, calcolare: a) il "vero" angolo che la congiungente satellite-osservatore forma con il piano orizzontale sul quale é posto il ricevitore; b) il tempo impiegato dal segnale a raggiungere il ricevitore.

———————



Il problema consiste nella valutazione dell'angolo incognito θ_x; si ha:

$$\overline{SC} = \overline{OC} \tan\theta_x$$

Bisogna, quindi, conoscere $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ cioè θ_2. Si ha:

$$n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin 30^0 \Longrightarrow n_2 = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{20}\right)^2} = 0.835$$

$$\theta_2 = 36^0, 798$$

Noto θ_2 si ha:

$\overline{OA} = h_2 \cot 60^0 = 10^5 \cdot 0.577 = 57735\, m$
$\overline{AB} = (h_1 - h_2) \cot(90^0 - \theta_2) = 3 \cdot 10^5 \cot(53^0, 202) = 3 \cdot 10^5 \cdot 0.748 = 224412\, m$
$\overline{BC} = 6 \cdot 10^5 \cot(90^0 - \theta_0) = 6 \cdot 10^5 \cdot 0.577 = 346200\, m$

Segue che:

$$\tan\theta_x = \frac{10^6}{57735 + 224412 + 346200} = 1.591477 \Longrightarrow \theta_x = \underline{57^0, 8569}$$

Il tempo impiegato si calcola valutando i tempi dei diversi percorsi:

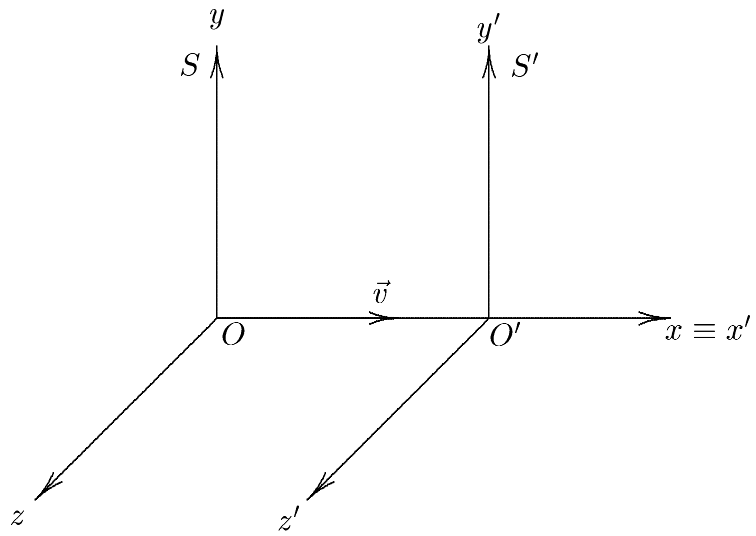
$$t = \frac{l_1}{c} + \frac{l_2}{v_g} + \frac{l_3}{c} = \frac{6 \cdot 10^5}{c \cdot \cos 30^0} + \frac{3 \cdot 10^5}{c \cos\theta_2 \cdot 0.835} + \frac{10^5}{c \cos 30^0} =$$

$$= 2.32 \cdot 10^{-3} + 1.495 \cdot 10^{-3} + 3.84 \cdot 10^{-4} = \underline{\underline{4.189\, ms}}$$

95-3) Esercizio n. 3 del 24/6/1995

Una sorgente di radiazione elettromagnetica si allontana, nel vuoto, da un osservatore ad una velocitá v (relativistica) ed emette un segnale di frequenza f e di densitá di potenza P entrambe misurate nel sistema di riferimento solidale alla sorgente. Calcolare la frequenza e la densitá di potenza misurata dall'osservatore, nell'ipotesi che il segnale emesso sia un'onda elettromagnetica piana.

La situazione è schematizzata in figura



O' emette un'onda elettromagnetica piana che nel sistema S' si scrive, tenendo conto che si propaga lungo l'asse x' negativo:

$$\vec{E}' = \vec{E}_0' e^{-ik'x'} e^{-i\omega' t'}$$

$$\vec{H}' = \vec{H}_0' e^{-ik'x'} e^{-i\omega' t'} = -\frac{k'}{\omega'\mu'}\hat{x}' \times \vec{E}' = -\frac{k'}{\omega'\mu'}\hat{x} \times \vec{E}' = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\hat{x} \times \vec{E}'$$

Inoltre:

$$< \vec{S}' > = \frac{1}{2}\left(\vec{E}' \times \vec{H}'^*\right) = \frac{1}{2}\left[\vec{E}' \times \left(-\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\hat{x} \times \vec{E}'^*\right)\right] = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\left[\vec{E}' \times \left(\widehat{x} \times \vec{E}'^*\right)\right] =$$
$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\left[\widehat{x}\vec{E}' \cdot \vec{E}'^* - \vec{E}'(\vec{E}'^* \cdot \widehat{x})\right] = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}{E_0'}^2\hat{x}$$

essendo $\vec{E}'^* \cdot \widehat{x} = 0$ e $\Im(k') = 0$.

Ora, la formula piú generale di trasformazione del campo elettrico, nel caso cioé di moto traslatorio lungo una direzione qualunque, é:

$$\vec{E}_0' = \gamma\left(\vec{E}_0 + \vec{v} \times \vec{B}_0\right) + (1-\gamma)\frac{\vec{E}_0 \cdot \vec{v}}{v^2}\vec{v}$$

Poichè il campo elettrico anche nel sistema S è trasversale e $\vec{v}$ è diretta lungo l'asse x si ha:

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{v} = 0$$

Quindi, svolgendo il quadrato, si ha:

$$E_0'^{\,2} = \gamma^2 \left(E_0^2 + 2E_0 v B_0 + \mu_0^2 v^2 \frac{1}{Z_0^2} E_0^2\right) = \gamma^2 E_0^2 \left(1 + 2\frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma^2 \left(1 + \frac{v}{c}\right)^2 E_0^2$$

dove l'eguaglianza intermedia è stata ottenuta tenendo presente che:

$$2E_0 v B_0 = 2\frac{\mu_0 E_0^2 v}{Z_0} = 2\frac{\mu_0 E_0^2 v}{\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\epsilon_0}}} = 2\frac{1}{c} v E_0^2$$

Posto $\beta = \dfrac{v}{c}$, e quindi $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, ne segue:

$$< \vec{S}' >= -\frac{1}{2Z_0}\frac{1+\beta^2+2\beta}{1-\beta^2}E_0^2\hat{x} =< \vec{S} > \frac{(1+\beta)^2}{1-\beta^2}$$

In definitiva:

$$< \vec{S} >= \frac{1-\beta^2}{(1+\beta)^2} < \vec{S}' >= \frac{1-\beta}{1+\beta} < \vec{S}' >$$

Mentre per la frequenza si ha:

$$\omega' = \gamma\left(\omega + \frac{v}{c}\omega\right) = \omega\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

da cui

$$\omega = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta}\omega'$$

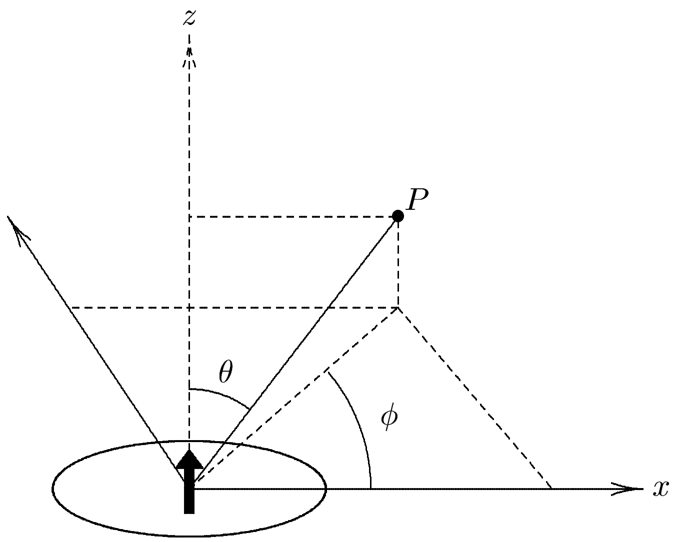
95-4) Esercizio n. 4 del 24/6/1995

Una piccola spira di area A, eccitata con una corrente I_S monocromatica e spazialmente costante giace nel piano xy con il centro coincidente con l'origine delle coordinate. Nello stesso centro esiste un dipolo elettrico hertziano di momento $I_d l$ orientato secondo l'asse $\widehat{z}$. Calcolare il campo far-field irradiato dal sistema. Discutere la polarizzazione del campo elettrico totale nei seguenti casi: a) la corrente nella spira e nel dipolo sono temporalmente sfasate di $\frac{\pi}{2}$; b) le due correnti sono in fase.

Valutare, inoltre, la condizione per cui il campo elettrico irradiato dal sistema é polarizzato circolarmente.

Il campo elettrico irradiato dalla spira è, nella zona far-field:

$$\underset{spira}{\vec{E}(\vec{r})} = \hat{e}_\phi \omega\mu k I_s \pi a^2 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r}\sin\theta \tag{1}$$



Ad esso si sovrappone il campo elettrico irradiato dal dipolo hertziano:

$$\underset{dipolo}{\vec{E}(\vec{r})} = -\hat{e}_\theta i\omega\mu I_d l \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r}\sin\theta$$

che si può scrivere:

$$\underset{dipolo}{\vec{E}(\vec{r})} = \hat{e}_\theta \omega\mu I_d l \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r}\sin\theta e^{-i\frac{\pi}{2}} \tag{2}$$

Ora, se le due correnti sono sfasate di $\frac{\pi}{2}$ nella (2), per esempio, bisogna moltiplicare per il fattore $e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$, ne segue che il campo totale è polarizzato linearmente.

Se le due correnti sono in fase il campo totale è polarizzato ellitticamente.

In tal caso se risulta:

$$kI_sS = I_dl \qquad (S = \pi a^2)$$

il campo totale irradiato risulta polarizzato circolarmente.

95-5) Esercizio n. 1 del 22/7/1995

Un'onda elettromagnetica piana si propaga in un plasma lungo la direzione di un campo magnetico di vettore induzione magnetica $\vec{B}$. Sia ω_{eff} la frequenza delle collisioni nel plasma.

a) Scrivere le espressioni dei coefficienti del tensore dielettrico; b) scrivere le espressioni delle costanti di propagazione delle onde risolte nelle componenti circolarmente polarizzate; c) determinare, in modo esplicito, le espressioni dei coefficienti di attenuazione α competenti alle due onde di polarizzazione circolare destra e sinistra, nonché i coefficienti di propagazione β.

———————

Nel caso in cui $\theta = 0^0$ e non trascurando le collisioni si ha:

$$\epsilon'_{xx} = \epsilon_0 \left\{ 1 - \frac{\omega_p^2(\omega + i\omega_{eff})}{\omega[(\omega + i\omega_{eff})^2 - \omega_g^2]} \right\}$$

$$\epsilon'_{xy} = -i\epsilon_0 \left\{ \frac{\omega_p^2\omega_g}{\omega[(\omega + i\omega_{eff})^2 - \omega_g^2]} \right\}$$

$$\epsilon'_{zz} = \epsilon_0 \left\{ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega[\omega + i\omega_{eff}]} \right\}$$

Ne segue:

$$\left(\frac{v^2}{c^2}\right)_1 = \frac{1}{\dfrac{\epsilon'_{xx}}{\epsilon_0} - i\dfrac{\epsilon'_{xy}}{\epsilon_0}} = \frac{1}{1 - \dfrac{\omega_p^2(\omega + i\omega_{eff})}{\omega[(\omega + i\omega_{eff})^2 - \omega_g^2]} - \dfrac{\omega_p^2\omega_g}{\omega[(\omega + i\omega_{eff})^2 - \omega_g^2]}} =$$

$$= \frac{\omega[(\omega + i\omega_{eff})^2 - \omega_g^2]}{\omega[(\omega + i\omega_{eff})^2 - \omega_g^2] - \omega_p^2[(\omega + i\omega_{eff}) + \omega_g]} =$$

$$= \frac{\omega[(\omega + i\omega_{eff}) - \omega_g]}{\omega[(\omega + i\omega_{eff}) - \omega_g] - \omega_p^2} = \frac{1}{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2\left(1 + i\dfrac{\omega_{eff}}{\omega} - \dfrac{\omega_g}{\omega}\right)}} =$$

$$= \frac{1}{1 - \dfrac{X}{1 + Y + i\dfrac{\omega_{eff}}{\omega}}}$$

Analogamente

$$\left(\frac{v^2}{c^2}\right)_2 = \frac{1}{1 - \dfrac{X}{1 - Y + i\dfrac{\omega_{eff}}{\omega}}}$$

dove $X = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$ e $Y = -\frac{\omega_g}{\omega}$.

Ne segue che posto $Z = \frac{\omega_{eff}}{\omega}$:

$$K'_0 = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{X}{1+Y+iZ}} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{X(1+Y) - iXZ}{(1+Y)^2 + Z^2}}$$

$$K''_0 = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{X}{1-Y+iZ}} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{X(1-Y) - iXZ}{(1-Y)^2 + Z^2}}$$

Ancora:

$$K'_0 = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{X(1+Y)}{(1+Y)^2 + Z^2} + i\frac{XZ}{(1+Y)^2 + Z^2}}$$

$$K''_0 = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{X(1-Y)}{(1-Y)^2 + Z^2} + i\frac{XZ}{(1-Y)^2 + Z^2}}$$

Posto

$$A' = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{X(1+Y)}{(1+Y)^2 + Z^2}\right) \qquad B' = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{XZ}{(1+Y)^2 + Z^2}$$

si ha:

$$K'_0 = \sqrt{A' + iB'} = \beta' + i\alpha' \Longrightarrow \begin{cases} \beta'^2 - \alpha'^2 = A' \\ \\ \alpha'\beta' = \dfrac{1}{2}B' \end{cases}$$

$$\frac{\beta'}{\alpha'} - \frac{\alpha'}{\beta'} = 2\frac{A'}{B'} \Longrightarrow \frac{\beta'^2}{\alpha'^2} - 2\frac{A'}{B'}\frac{\beta'}{\alpha'} - 1 = 0 \Longrightarrow \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{A'}{B'} + \sqrt{\frac{A'^2}{B'^2} + 1}$$

$$\boxed{\beta'^2 = \frac{A'}{2} + \sqrt{\frac{A'^2}{4} + \frac{B'^2}{4}}}$$

$$\alpha'^2 = \frac{\dfrac{B'}{2}}{\dfrac{A'}{B'} + \sqrt{\dfrac{A'^2}{B'^2} + 1}} = \frac{\dfrac{B'}{2}\dfrac{A'}{B'} - \sqrt{\dfrac{A'^2}{4} + \dfrac{B'^2}{4}}}{\dfrac{A'^2}{B'^2} - \dfrac{A'^2}{B'^2} - 1}$$

cioè:

$$\boxed{\alpha'^2 = \sqrt{\frac{A'^2}{4} + \frac{B'^2}{4}} - \frac{A'}{2}}$$

Analoghe formule valgono per α'' e β'' dove, però,

$$A'' = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{X(1-Y)}{(1-Y)^2 + Z^2}\right) \qquad B'' = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{XZ}{(1-Y)^2 + Z^2}$$

95-6) Esercizio n. 2 del 22/7/1995

Con riferimento al problema precedente, valutare i coefficienti α e β per i seguenti parametri: $B_0 = 1000\ G$, $f_p = 1.4\ MHz$, $\omega_{eff} = 2\pi \cdot 10^4$. La frequenza dell'onda elettromagnetica sia $f = 1.5\ MHz$.

Calcolo di α', β' e α'', β'' per i seguenti parametri: $B_0 = 1000\,G = 0.1\,W_b/m^2$, $\omega_g = -\frac{|q|}{m}B_0$, $f_{plasma} = 1.4\,MHz$, $f = 1.5\,MHz$, $\omega_{eff} = 2\pi \cdot 10^4$. Ripetere per $f = 2\,MHz$.

$$\boxed{f = 1.5\,MHz}$$

$$X = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 = 0.8711 \qquad Y = \frac{qB_o}{m2\pi f} = 1863.5 \qquad Z = 6.67 \cdot 10^{-3}$$

$$A' = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{X(1+Y)}{(1+Y)^2 + Z^2}\right) = 9.865 \cdot 10^{-4}$$

$$B' = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{XZ}{(1+Y)^2 + Z^2} = 1.6487 \cdot 10^{-12}$$

$$A'' = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{X(1-Y)}{(1-Y)^2 + Z^2}\right) = 9.8742 \cdot 10^{-4}$$

$$B'' = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{XZ}{(1-Y)^2 + Z^2} = 1.6523 \cdot 10^{-12}$$

Per cui:

$$\alpha' \simeq 0 \qquad \beta' = \underline{\underline{3.1408 \cdot 10^{-2}\,rad/m}}$$

$$\alpha'' \simeq 0 \qquad \beta'' = \underline{\underline{3.1423 \cdot 10^{-2}\,rad/m}}$$

$$\boxed{f = 2\,MHz}$$

$$X = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 = 0.49 \qquad Y = \frac{qB_o}{m2\pi f} = 1397.6 \qquad Z = 5 \cdot 10^{-3}$$

$$A' = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{X(1+Y)}{(1+Y)^2+Z^2}\right) = 1.754 \cdot 10^{-3}$$

$$B' = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{XZ}{(1+Y)^2+Z^2} = 2.1975 \cdot 10^{-12}$$

$$A'' = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{X(1-Y)}{(1-Y)^2+Z^2}\right) = 1.7552 \cdot 10^{-3}$$

$$B'' = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{XZ}{(1-Y)^2+Z^2} = 2.2038 \cdot 10^{-12}$$

Per cui:

$$\alpha' \simeq 0 \qquad \beta' = \underline{\underline{4.1880 \cdot 10^{-2}\, rad/m}}$$

$$\alpha'' \simeq 0 \qquad \beta'' = \underline{\underline{4.1895 \cdot 10^{-2}\, rad/m}}$$

95-7) Esercizio n. 3 del 22/7/1995

Un segnale elettromagnetico viaggia in un mezzo dielettrico perfetto non dispersivo. Esso é costituito dalla sovrapposizione di due onde elettromagnetiche piane armoniche nel tempo che differiscono soltanto in frequenza di una quantitá $\delta\omega$ molto piccola. Si determini l'espressione del segnale, evidenziando la sua ampiezza effettiva. Si dimostri esplicitamente che, in questo caso, la velocitá di gruppo coincide con la velocitá di fase.

Se consideriamo due onde armoniche di frequenze assai poco differente $\delta\omega$, dato che il mezzo è dielettrico perfetto non dispersivo il loro numero d'onda differirà della quantità $\delta k = \dfrac{1}{v_f}\delta\omega$. Pertanto i due segnali sono:

$$\psi_1 = A\cos(kz - \omega t)$$
$$\psi_2 = A\cos[(k+\delta k)z - (\omega + \delta\omega)t]$$

La loro sovrapposizione è:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A\Big\{\cos(kz - \omega t) + \cos[(kz - \omega t) + (\delta kz - \delta\omega t)]\Big\}$$

Si ha:

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \alpha + \beta = kz - \omega t \ , \ \alpha - \beta = (kz - \omega t) + (\delta kz - \delta\omega t) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \alpha = (kz - \omega t) + \frac{1}{2}(\delta kz - \delta\omega t) \ , \ \beta = -\frac{1}{2}(\delta kz - \delta\omega t)$$

Pertanto

$$\psi = 2A\cos\frac{1}{2}(z\delta k - t\delta\omega)\cos\left[\left(k + \frac{\delta k}{2}\right)z - \left(\omega + \frac{\delta\omega}{2}\right)t\right]$$

L'ampiezza effettiva è

$$A_{eff} = 2A\cos\frac{1}{2}(z\delta k - t\delta\omega)$$

essa varia lentamente fra la somma delle ampiezze delle onde componenti $2A$ e lo zero. La distribuzione del campo nel tempo e nello spazio consiste in una serie di gruppi o battimenti che si ripetono periodicamente.

$$v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} = v_f\frac{\delta\omega}{\delta\omega} = v_f = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

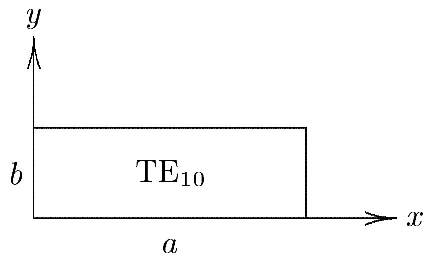
La velocità di fase è:

$$v_f = \frac{\omega + \dfrac{\delta\omega}{2}}{k + \dfrac{\delta k}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

95-8) Esercizio n. 4 del 22/7/1995

Si consideri una guida d'onda rettangolare infinitamente lunga di lato largo $a = 2$ cm. La guida é riempita con dielettrico perfetto, di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 2$, per $z \geq 0$; essa é vuota per $z < 0$. Un modo TE_{10}, di frequenza $\nu = 10\ GHz$, viaggiante nel tratto $z < 0$, incide nel dielettrico in $z = 0$, subendo riflessione. Calcolare il coefficiente di riflessione del campo elettromagnetico sulla suddetta superficie di discontinuitá e confrontarlo con quello competente al caso di propagazione libera.

———————



L'onda incide normalmente sulla superficie del dielettrico ed inoltre trattandosi di modo TE$_{10}$ il campo $\vec{E}$ è perpendicolare al piano d'incidenza. Si deve però usare la formula generale e non quella per dielettrici perfetti.

$$\vec{E}_1 = \frac{\mu_2 k_1 \cos\theta_0 - \mu_1\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2\theta_0}}{\mu_2 k_1 \cos\theta_0 + \mu_1\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2\theta_0}}\vec{E}_0$$

Per $\theta_0 = 0^0$ e $\mu_2 = \mu_1$,

$$R = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2$$

dove $k_1 = \beta_1 = \sqrt{\omega^2\epsilon_0\mu_0 - h_{10}^2}$ e $k_2 = \beta_2 = \sqrt{\omega^2\epsilon_0\mu_0\epsilon_r - h_{10}^2}$, nonchè $h_{10}^2 = \dfrac{\pi^2}{a^2}$.

$$R = \left|\frac{\sqrt{\omega^2\epsilon_0\mu_0 - \frac{\pi^2}{a^2}} - \sqrt{\omega^2\epsilon_0\epsilon_r\mu_0 - \frac{\pi^2}{a^2}}}{\sqrt{\omega^2\epsilon_0\mu_0 - \frac{\pi^2}{a^2}} + \sqrt{\omega^2\epsilon_0\epsilon_r\mu_0 - \frac{\pi^2}{a^2}}}\right|^2 = \left|\frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} - \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_r - \frac{\pi^2}{a^2}}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} + \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_r - \frac{\pi^2}{a^2}}}\right|^2 =$$

$$= \left|\frac{\sqrt{43862 - 24672} - \sqrt{87724 - 24672}}{\sqrt{43862 - 24672} + \sqrt{87724 - 24672}}\right|^2 = \left|\frac{138.53 - 251.10}{138.53 + 251.10}\right|^2 = \left|\frac{-112.57}{389.63}\right|^2 = 0.08 = \underline{\underline{8\%}}$$

$$R_{\text{libera}} = \left|\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}\right|^2 = \frac{0.17}{5.83} = 0.03 = \underline{\underline{3\%}}$$

95-9) Esercizio n. 1 del 9/9/1995

Il campo elettrico di un'onda elettromagnetica piana uniforme é dato da:

$$\vec{E} = 10^{-2}\left[\widehat{x}\sqrt{2} + \widehat{z}\,(1+i)\,e^{i\dfrac{\pi}{4}}\right]e^{-i\beta y}$$

Determinare lo stato di polarizzazione dell'onda e graficare la figura di polarizzazione indicando il verso di rotazione del campo.

———————

Si ha:

$$\vec{E} = 10^{-2}\left[\hat{x}\sqrt{2} + \hat{z}(1+i)e^{i\dfrac{\pi}{4}}\right]e^{-i\beta y}$$

$$E_x = 10^{-2}\sqrt{2}e^{-i\beta y}$$

$$E_z = 10^{-2}(1+i)e^{i\dfrac{\pi}{4}}e^{-i\beta y} = 10^{-2}\left(\cancel{\cos\frac{\pi}{4}} + i\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4} - \cancel{\sin\frac{\pi}{4}}\right)e^{-i\beta y} =$$

$$= 10^{-2}i\sqrt{2}e^{-i\beta y}$$

Poichè $\dfrac{E_x}{E_z} = -i$ l'onda è polarizzata circolarmente.

Per graficare la figura di polarizzazione moltiplichiamo per il fattore temporale $e^{i\omega t}$; si ha:

$$E_x = 10^{-2}\sqrt{2}e^{i(\omega t-\beta y)} \qquad E_z = 10^{-2}\sqrt{2}e^{i(\omega t-\beta y+\pi/2)}$$

Poniamo $y = 0$ e prendiamo le parti reali:

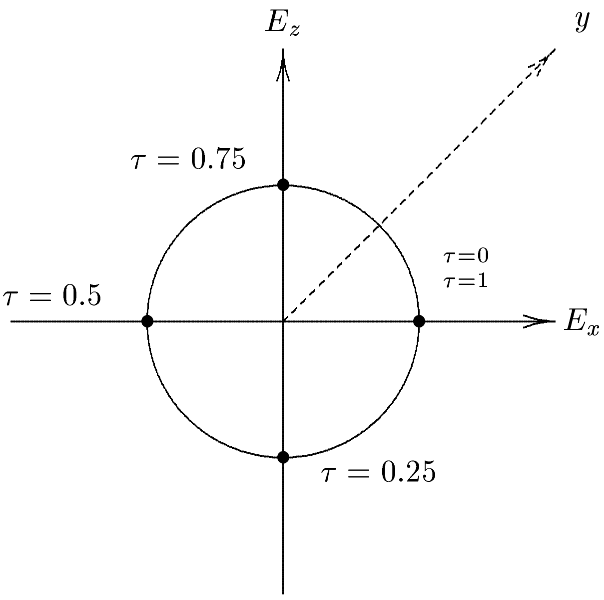
$$\Re(E_x) = 10^{-2}\sqrt{2}\cos\omega t \qquad \Re(E_z) = 10^{-2}\sqrt{2}\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) = -10^{-2}\sqrt{2}\sin\omega t$$

che si possono scrivere:

$$\Re(E_x) = 10^{-2}\sqrt{2}\cos 2\pi\tau \qquad \Re(E_z) = -10^{-2}\sqrt{2}\sin 2\pi\tau$$

con $\tau = \dfrac{t}{T}$.

τ	$\cos 2\pi\tau$	$-\sin 2\pi\tau$
0	1	0
0.1	0.81	-0.59
0.2	0.31	-0.95
0.25	0	-1
0.3	-0.31	-0.95
0.4	-0.81	-0.59
0.5	-1	0
0.6	-0.81	+0.59
0.7	-0.31	+0.95
0.8	0.31	+0.95
0.9	0.81	+0.59
1	1	0



La polarizzazione è levogira

95-10) Esercizio n. 2 del 9/9/1995

Si consideri una spira circolare di raggio a disposta sul piano xy con il centro coincidente con l'origine delle coordinate. In approssimazione "far-field", determinare l'espressione della resistenza di radiazione e del guadagno d'antenna.

——————

I campi "far field" sono:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{e}_\phi \omega\mu k I \pi a^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\sin\theta$$
$$\vec{H}(\vec{r}) = -\hat{e}_\theta k^2 I \pi a^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\sin\theta$$

Tenendo conto che $\hat{e}_\phi \times \hat{e}_\theta = -\hat{e}_r$ si ha:

$$\vec{S}_c = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right) = \hat{e}_r \frac{1}{2}\omega\mu k^3 I^2 \pi^2 a^4 \frac{1}{(4\pi)^2 r^2}\sin^2\theta = \hat{e}_r \frac{1}{32}\frac{\omega\mu}{k} k^4 I^2 a^4 \frac{\sin^2\theta}{r^2} =$$
$$= \hat{e}_r \frac{Z_0}{32} I^2 (2\pi)^4 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 \frac{\sin^2\theta}{r^2}$$

$$P_r = \int_{\text{sfera}} \vec{S}_c \cdot \hat{e}_r r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \frac{Z_0}{32} I^2 (2\pi)^4 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{Z_0}{32} 2^5 \frac{4I^2}{3}\pi^5 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4$$

In definitiva la resistenza di radiazione e il guadagno sono:

$$R_a \simeq 31.42 (2\pi)^5 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 \simeq 307684.43 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 \qquad [\Omega]$$

$$G(\theta,\phi) = \frac{3}{2}\sin^2\theta$$

95-11) Esercizio n. 3 del 9/9/1995

Un'onda elettromagnetica piana, di frequenza $f = 1\ MHz$, il cui campo elettrico incidente ha una ampiezza di $10^{-3}\ V/m$, viaggia nel libero spazio ed incide normalmente sulla superficie terrestre (considerata superficie piana). Assumendo che i parametri costitutivi della terra sono: $\epsilon = 9\epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ e $\sigma = 0.1\ S/m$, valutare il valore del modulo della densitá di corrente di conduzione all'interno della terra e precisamente in un punto dell'interfaccia e in un punto che si trovi ad una distanza da essa pari alla profonditá di penetrazione.

Nel caso di incidenza normale l'onda è omogenea e quindi possiamo calcolare il rapporto $\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}$

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{0.1}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 9 \cdot 2\pi \cdot 10^6} = 199.73 \gg 1$$

che per tale frequenza classifica la terra come buon conduttore. Per il calcolo della corrente di conduzione dobbiamo calcolare il campo elettrico trasmesso. Nel caso di incidenza normale i casi $E_\perp$ e $E_\parallel$ sono indistinguibili. Si ha quindi per $\theta_0 = 0^0$:

$$\vec{E}_2 = \frac{2\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2 + \mu_2 k_1} \vec{E}_0$$

Per $\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$ si ha

$$\vec{E}_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \vec{E}_0$$

L'espressione della densità di corrente di conduzione è:

$$\vec{J}_c = \sigma \vec{E}_2 e^{i\beta_2 z} e^{-\alpha z}$$

Il modulo di $\vec{J}_c$ è

$$|\vec{J}_c| = \sigma |\vec{E}_2| e^{-\alpha z} \qquad (*)$$

A questo punto calcoliamo la quantità $\dfrac{2k_1}{k_1 + k_2}$:

$$\frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2\beta_1}{(\beta_1 + \beta_2) + i\alpha} = \frac{2\beta_1(\beta_1 + \beta_2)}{(\beta_1 + \beta_2)^2 + \alpha^2} - i\frac{2\alpha\beta_1}{\alpha^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2}$$

con

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} = 2.094 \cdot 10^{-2} \qquad \beta_2 = \alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}} = 0.6283$$

ed anche

$$\alpha^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2 = 0.816273$$

Ne segue

$$\frac{2k_1}{k_1 + k_2} = 0.03326 - i0.0322 \Longrightarrow \left| \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \right| = 4.62 \cdot 10^{-2}$$

Pertanto, sostituendo nella $(*)$ si ha:

$$|\vec{J}_c| = 4.63 \cdot 10^{-6} e^{-\alpha z}$$

$$z = 0 \Longrightarrow |J_c|_{z=0} = \underline{\underline{4.63 \cdot 10^{-6}\, \frac{A}{m^2}}}$$

$$z = \delta = \frac{1}{\alpha} \Longrightarrow |J_c|_{z=\delta} = 4.63 \cdot 10^{-6} \frac{1}{e} = 4.63 \cdot 10^{-6} \cdot 3.679 \cdot 10^{-1} = \underline{\underline{1.703\, \frac{\mu A}{m^2}}}$$

95-12) Esercizio n. 4 del 9/9/1995

Una guida d'onda rettangolare vuota, di dimensioni $a = 2.286\ cm$ e $b = 1.016\ cm$, é connessa ad una guida d'onda delle stesse dimensioni riempita di polistirene ($\epsilon_r = 2.56$) considerato come dielettrico perfetto. Per evitare riflessioni si inserisce, fra le due, una terza guida delle stesse dimensioni lunga un quarto di lunghezza d'onda. Supponendo che si propaghi il modo TE_{10} ad una frequenza $f = 10\ GHz$, determinare la lunghezza in cm della guida intermedia nonché il valore della costante dielettrica del mezzo che deve essere usato per riempire la guida a quarto d'onda.

———————

$$\nu_{c_1} = \frac{c}{2a} = 6.56\, GHz$$

$$L = \frac{\lambda_{g_1}}{4} = \frac{2\pi c}{4\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} = \frac{c}{4\sqrt{f^2 - f_c^2}} = \frac{c}{4 \cdot 7.547 \cdot 10^9} = 9.94\, mm = 0.994\, cm$$

La condizione di riflettività nulla si ha per $\beta_2 = \sqrt{\beta_1 \beta_3}$:

$$\beta_1 = \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - h_{10}^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} = \sqrt{4.3862 \cdot 10^4 - 1.9 \cdot 10^4} = 157.67$$

$$\beta_3 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{r_3} - \frac{\pi^2}{a^2}} = 305.47$$

Con $\epsilon_{r_3} = 2.56$ si ha:

$$\beta_2 = 219.45$$

Pertanto

$$(219.45)^2 = \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{r_x} - \frac{\pi^2}{a^2}}\right)^2 = 4.3862 \cdot 10^4 \epsilon_{r_x} - 1.9 \cdot 10^4$$

Dalla quale

$$\epsilon_{r_x} = \frac{(219.45)^2 + 1.9 \cdot 10^4}{4.3862 \cdot 10^4} = \underline{\underline{1.53}}$$

95-13) Esercizio n. 2 del 5/10/1995

Un sistema di antenne dipolari a mezz'onda, composto da 5 elementi, é alimentato in modo da creare radiazione "endfire". Se la distanza fra i singoli elementi é $d = \lambda/8$, calcolare: a) la fase degli elementi perché il fascio irradiato abbia direttivitá massima; b)$K(\phi)$ per $\phi = 0^0$ e $\phi = 180^0$ (le due direzioni endfire) ed effettuarne il rapporto.

———————

Si ha:

$$\gamma = \mp\left(kd + \frac{\pi}{n}\right) = \mp\left(\frac{2\pi}{8} + \frac{\pi}{5}\right) = \mp\frac{18\pi}{40} = \mp 1.41\, radianti = \underline{\underline{80^0, 79}}$$

$$K(0) = \frac{1}{5}\left|\frac{\sin\left[\dfrac{5\left(\frac{2\pi}{8} + 1.41\right)}{2}\right]}{\sin\left[\dfrac{\left(\frac{2\pi}{8} + 1.41\right)}{2}\right]}\right| = \frac{1}{5}\frac{0.71}{0.89} = 0.158$$

$$K(\pi) = \frac{1}{5}\left|\frac{\sin\left[\dfrac{5\left(-\frac{2\pi}{8} + 1.41\right)}{2}\right]}{\sin\left[\dfrac{\left(-\frac{2\pi}{8} + 1.41\right)}{2}\right]}\right| = \frac{1}{5}\frac{1}{0.307} = 0.65$$

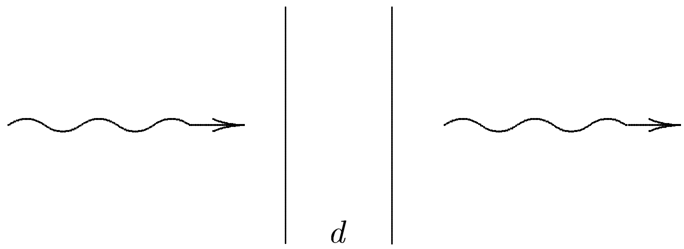
$$\boxed{\frac{K(\pi)}{K(0)} = \frac{0.65}{0.158} = \underline{\underline{4.11}}}$$

95-14) Esercizio n. 3 del 5/10/1995

Un'onda elettromagnetica piana incide, in direzione normale, su un foglio di materiale dielettrico, posto in aria, che ha i seguenti parametri caratteristici: $\epsilon = 4\epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 0$. Se il foglio é spesso 2 cm e l'ampiezza del campo elettrico incidente é 100 mV/m, determinare l'ampiezza del campo elettrico trasmesso se: a) la frequenza é 3000 MHz; b) la frequenza é 30 MHz.

———————

La situazione è schematizzata in figura



$$E_3 = \frac{1}{(1+Z_{12})(1+Z_{23})} \frac{4e^{i(k_2-k_3)d}}{(1+r_{12}r_{23}e^{2ik_2d})} E_0$$

dove

$$k_2 = \beta_2 \ ; \quad k_3 = \beta_3$$

$$r_{12} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r_1}} - \sqrt{\epsilon_{r_2}}}{\sqrt{\epsilon_{r_1}} + \sqrt{\epsilon_{r_2}}} \ ; \quad r_{23} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r_2}} - \sqrt{\epsilon_{r_3}}}{\sqrt{\epsilon_{r_2}} + \sqrt{\epsilon_{r_3}}}$$

$$Z_{12} = \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1} \ ; \quad Z_{23} = \frac{\mu_2 k_3}{\mu_3 k_2}$$

Nel nostro caso: $\epsilon_{r_1} = 1$, $\epsilon_{r_2} = 4$, $\epsilon_{r_3} = 1$, quindi

$$r_{12} = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3} \qquad Z_{12} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r_2}}}{\sqrt{\epsilon_{r_1}}} = 2$$

$$r_{23} = \frac{1}{3} \qquad Z_{23} = \frac{1}{2}$$

Ne segue:

$$E_3 = \frac{1}{(1+2)\left(1+\frac{1}{2}\right)} \frac{4e^{i\frac{\omega}{c}(2-1)d}}{\left(1-\frac{1}{9}e^{2i\frac{\omega}{c}2d}\right)} E_0 = \boxed{\frac{2}{9}\frac{4e^{i\frac{\omega}{c}d}}{\left(1-\frac{1}{9}e^{4i\frac{\omega}{c}d}\right)}E_0} = \qquad (*)$$

$$= \frac{2}{9}\frac{4e^{i\frac{\omega}{c}d}\left(1-\frac{1}{9}e^{-4i\frac{\omega}{c}d}\right)E_0}{\left(1-\frac{1}{9}e^{4i\frac{\omega}{c}d}\right)\left(1-\frac{1}{9}e^{-4i\frac{\omega}{c}d}\right)} = \frac{2}{9}\frac{4e^{i\frac{\omega}{c}d} - \frac{4}{9}e^{-3i\frac{\omega}{c}d}}{1-\frac{1}{9}e^{-i4\frac{\omega}{c}d} - \frac{1}{9}e^{i4\frac{\omega}{c}d} + \frac{1}{81}} E_0 =$$

$$= \frac{2}{9}\frac{4\cos\frac{\omega}{c}d + 4i\sin\frac{\omega}{c}d - \frac{4}{9}\cos 3\frac{\omega}{c}d + \frac{4}{9}i\sin 3\frac{\omega}{c}d}{1-\frac{2}{9}\cos 4\frac{\omega}{c}d + \frac{1}{81}} E_0 =$$

$$= \left(\frac{2}{9}\frac{4\cos\frac{\omega}{c}d - \frac{4}{9}\cos 3\frac{\omega}{c}d}{1-\frac{2}{9}\cos 4\frac{\omega}{c}d + \frac{1}{81}} + i\frac{2}{9}\frac{4\sin\frac{\omega}{c}d + \frac{4}{9}\sin 3\frac{\omega}{c}d}{1-\frac{2}{9}\cos 4\frac{\omega}{c}d + \frac{1}{81}}\right) E_0 \qquad (a)$$

Calcoliamo il modulo direttamente dalla $(*)$:

$$|E| = \sqrt{\frac{64}{81}\frac{1}{1-\frac{2}{9}\cos 4\frac{\omega}{c}d + \frac{1}{81}}}|E_0| = \sqrt{\frac{64}{\cancel{81}}\frac{\cancel{81}}{82 - 18\cos 4\frac{\omega}{c}d}}|E_0| =$$

$$= \sqrt{\frac{64}{82 - 18\cos 4\frac{\omega}{c}d}}|E_0|$$

Per $\nu = 3000\,MHz \Longrightarrow \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\cdot 3\cdot 10^9}{3\cdot 10^8} = 2\pi\cdot 10 \Longrightarrow 4\frac{\omega}{c}d = 16\pi\cdot 10^{-1}$

$$|E|_{\nu=3\,GHz} = \sqrt{\frac{64}{82-18\cos(16\pi\cdot 10^{-1})}}|E_0|$$

$$\cos\left(16\pi\cdot 10^{-1}\right) = 0.308876 \Longrightarrow |E| = \sqrt{\frac{64}{76.44}}|E_0| = 91.5\,\frac{mV}{metro} \qquad (**)$$

Per $\nu = 30\,MHz \Longrightarrow \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\cdot 3\cdot 10^7}{3\cdot 10^8} = 2\pi\cdot 10^{-1} \Longrightarrow 4\frac{\omega}{c}d = 16\pi\cdot 10^{-3}$

$$|E|_{\nu=30\,MHz} = \sqrt{\frac{64}{82-18\cos(16\pi\cdot 10^{-3})}}|E_0|$$

$$\cos\left(16\pi \cdot 10^{-3}\right) = 0.9987 \Longrightarrow |E| = \sqrt{\frac{64}{64.0227}}|E_0| = 99.98\,\frac{mV}{metro} \qquad (***)$$

Del resto dalla (a) si ha:

$$\text{Per}\,\nu = 3000\,MHz:\; E = (0.374 + i0.833)E_0 \Longrightarrow |E|_{3000\,MHz} = 91.31\,\frac{mV}{metro}$$

quasi uguale a $(**)$ e

$$\text{Per}\,\nu = 30\,MHz:\; E = (0.9974 + i0.0187)E_0 \Longrightarrow |E|_{30\,MHz} = 99.71\,\frac{mV}{metro}$$

quasi uguale a $(***)$

95-15) Esercizio n. 1 del 16/12/1995

Un'onda elettromagnetica piana linearmente polarizzata, di frequenza $\nu = 9\ MHz$, incide sulla superficie di separazione aria - plasma senza collisioni in modo che il vettore campo elettrico dell'onda incidente formi un angolo di 45^0 con il piano di incidenza.

Se la uniforme densitá elettronica del plasma é $n = 10^{12}\ elettroni/m^3$, calcolare l'angolo di incidenza per cui l'onda riflessa totalmente é circolarmente polarizzata. Calcolare, altresí, la massima frequenza perché possa esistere un angolo di incidenza tale che la relativa onda riflessa continui ad essere circolarmente polarizzata.

———————

Si ha:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{nq^2}{m\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{10^{12}\cdot(1.6)^2 10^{-38}}{9.11\cdot 10^{-31}\cdot 8.854\cdot 10^{-12}}} = 5.63\cdot 10^7$$

$$\epsilon_{r_{plasma}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0.008717 \qquad \text{per } \nu = 9\,MHz$$

$$n_2 = \sqrt{\epsilon_r} = 0.09336 \qquad \left[\sin\theta_{0L} = \frac{n_2}{n_1} = 0.09336\ ;\ \theta_{0L} = 5^0,357\right]$$

Perchè l'onda riflessa sia circolarmente polarizzata deve essere:

$$\sin^2\theta_0 = \frac{\left[1+\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right] \pm \sqrt{\left[1+\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]^2 - 8\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{4} =$$

$$= \frac{1.0087 \pm \sqrt{1.017508 - 6.97287\cdot 10^{-2}}}{4} = \begin{cases} \dfrac{1.0087 + 9.735\cdot 10^{-1}}{4} = 0.4955 \\ \dfrac{1.0087 - 9.735\cdot 10^{-1}}{4} = 8.8\cdot 10^{-3} \end{cases}$$

Per cui

$$\sin\theta_{01} = \sqrt{0.4955} \Longrightarrow \theta_{01} = 44^0,74$$

$$\sin\theta_{02} = \sqrt{8.8\cdot 10^{-3}} = 9.38\cdot 10^{-2} \Longrightarrow \theta_{02} = 5^0,3827$$

Affinché l'onda incidente sia circolarmente polarizzata occorre:

$$\frac{n_2}{n_1} < 0.414 \Longrightarrow 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} < 0.1714 \Longrightarrow -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} < -0.8286 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\omega_p^2}{\omega^2} > 0.8286 \Longrightarrow \omega^2 < \frac{\omega_p^2}{0.8286} = 3.8253 \cdot 10^{15}$$

$$\omega_{\mathrm{MAX}} = 6.1849 \cdot 10^7 \Longrightarrow \nu_{\mathrm{MAX}} = \underline{\underline{9.84 \cdot 10^6 \, Hz}}$$

95-16) Esercizio n. 2 del 16/12/1995

Un'onda elettromagnetica piana, linearmente polarizzata, di frequenza $\nu = 1\ GHz$ incide sulla superficie di separazione aria - acqua di mare con un angolo di incidenza $\theta_0 = 30^0$. Se i parametri costitutivi dell'acqua di mare, alla frequenza data, sono: $\epsilon_r = 70$, $\mu_r \simeq 1$, $\sigma = 4\ S/m$, calcolare l'indice di rifrazione dell'acqua marina, l'angolo di rifrazione e il coefficiente di riflessione perpendicolare.

———————

Si ha:

$$n_2(\theta_0) = \frac{1}{\beta_1}\sqrt{q^2 + \beta_1^2 \sin^2\theta_0}$$

dove

$$q^2(\theta_0) = \frac{1}{2}\left[\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2\sin^2\theta_0 + \sqrt{4\beta_2^2\alpha_2^2 + \left(\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2\sin^2\theta_0\right)^2}\right]$$

per cui:

$$n_2(\theta_0) = \frac{1}{\beta_1}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\beta_2^2 - \alpha_2^2\right) + \frac{1}{2}\beta_1^2\sin^2\theta_0 + \frac{1}{2}\sqrt{4\beta_2^2\alpha_2^2 + \left(\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2\sin^2\theta_0\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\beta_1}\sqrt{\beta_2^2 - \alpha_2^2 + \beta_1^2\sin^2\theta_0 + \sqrt{4\beta_2^2\alpha_2^2 + \left(\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2\sin^2\theta_0\right)^2}}$$

Del resto

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_r\omega} = 1.0272 \cdot 10^9 \frac{1}{\nu}$$

e per $\nu = 10^9\ Hz$ si ha:

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = 1.027$$

$$\Downarrow$$

$$\beta_2 = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}\right]} = 193.41$$

$$\alpha_2 = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} - 1\right]} = 81.57$$

$$\beta_1 = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1} = 20.94$$

Ne segue

$$n_2(\theta_0) = 3.37 \cdot 10^{-2}\sqrt{7.4848 \cdot 10^4} = \underline{\underline{9.22}}$$

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{9.22 - \sqrt{70}}{9.22} = 0.09 = \underline{\underline{9\%}}$$

L'angolo di rifrazione è:

$$\sin\psi = \frac{\sin\theta_0}{n_2(\theta_0)} = \frac{1}{2 \cdot 9.22} = 5.4229 \cdot 10^{-2} \Longrightarrow \psi = \underline{\underline{3^0, 11}}$$

$$\rho_\perp^2 = \frac{p^2 + (q - \beta_1 \cos\theta_0)^2}{p^2 + (q + \beta_1 \cos\theta_0)^2} \qquad \text{per } \mu_1 = \mu_2$$

Per calcolare p e q sfruttiamo le note relazioni riportate negli Appunti, si ha:

$$p = \frac{\beta_2\alpha_2}{\beta_1 n_2(\theta_0)\cos\psi} = 81.81$$

$$q = \frac{\beta_2\alpha_2}{p} = 192.79$$

In definitiva:

$$\rho_\perp^2 = \frac{6.696 \cdot 10^3 + 2.954 \cdot 10^4}{6.696 \cdot 10^3 + 4.5667 \cdot 10^4} = \frac{3.62 \cdot 10^4}{5.236 \cdot 10^4} = \underline{\underline{0.69 = 69\%}}$$

95-17) Esercizio n. 3 del 16/12/1995

Sia data una estesa rectangular array ($n = m = 50, d_x = d_z = \frac{\lambda}{2}$). Calcolare l'apertura angolare del lobo massimo nel piano $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

———————

Per $\theta = \frac{\pi}{2}$ si ha:

$$U\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) = I_0 m \left| \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)} \right|$$

Il massimo si ha per $\phi = \dfrac{\pi}{2}$; la funzione $U\left(\dfrac{\pi}{2}, \phi\right)$ si annulla per $n\dfrac{\pi}{2}\cos\phi_0 = r\pi$ cioè $\cos\phi_0 = \dfrac{2r}{n}$ $(r \neq 0)$. Detto ϕ_0^* l'angolo di zero più prossimo a quello del massimo principale $\left(\phi_0 = \dfrac{\pi}{2}\right)$ si ha:

$$\cos\phi_0^* = \frac{2}{n}$$

Detto $\Delta\omega$ l'apertura del lobo si ha:

$$\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{\pi}{2} - \phi_0^* \qquad \sin\frac{\Delta\omega}{2} = \cos\phi_0^* = \frac{2}{n}$$

Pertanto:

$$\frac{\Delta\omega}{2} = \arcsin\frac{2}{n} \Longrightarrow \Delta\omega = 2\arcsin\frac{2}{n} = 2 \cdot 2^0, 29 = \underline{\underline{4^0, 58}}$$

95-18) Esercizio n. 4 del 16/12/1995

La conducibilitá statica del rame é $\sigma = 5.8 \cdot 10^7\ S/m$. Nel reticolo cristallino del rame, ogni atomo é ionizzato e libera un elettrone di conduzione. Il peso molecolare del rame é 63 e la sua massa volumica é $\delta = 9 \cdot 10^3\ Kg/m^3$. Calcolare la conducibilitá di tale metallo alla frequenza $\nu = 1\ GHz$ e alla frequenza infrarossa $\nu = 10^{12}\ Hz$.

———————

Il numero di atomi per unità di volume e quindi il numero di elettroni di conduzione per m^3 è:

$$N_a : 63 \cdot 10^{-3} = x : 9 \cdot 10^3$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot N_a}{63 \cdot 10^{-3}} = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{23}}{63 \cdot 10^{-3}} = 8.57 \cdot 10^{28}\, \frac{elettroni}{m^3}$$

La conducibilità è:

$$\sigma' = \frac{N\dfrac{e^2}{m}}{\omega_{eff} - i\omega}$$

Per $\omega = 0$ segue:

$$\sigma'_0 = \frac{Ne^2}{\omega_{eff} m}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_{eff} = \frac{Ne^2}{\sigma'_0 m} = \frac{8.57 \cdot 10^{28}(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{5.8 \cdot 10^7 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}} = 4.15 \cdot 10^{13}$$

Il modulo di σ' è:

$$\sqrt{\frac{N^2\left(\dfrac{e^2}{m}\right)^2}{\omega_{eff}^2 + \omega^2}}$$

Per $\nu = 1\ GHz$, si ha:

$$\sigma' = \sqrt{\frac{5.8 \cdot 10^{42}}{1.7 \cdot 10^{27} + 3.9 \cdot 10^{19}}} = \underline{\underline{5.84 \cdot 10^7\, \frac{S}{m}}}$$

Per $\nu = 10^{12}\ Hz$, si ha:

$$\sigma' = \sqrt{\frac{5.8 \cdot 10^{42}}{1.7 \cdot 10^{27} + 3.947 \cdot 10^{25}}} = \underline{\underline{5.77 \cdot 10^7\, \frac{S}{m}}}$$

Fine Esercizi Campi - 1995