Esercizi svolti di Campi elettromagnetici - Anno 1993

93-1) Esercizio n. 2 del 30/1/1993

Un'onda piana di frequenza $f = 300\,MHz$ si propaga in un certo materiale. Conoscendo che la lunghezza d'onda nel mezzo è $\lambda = 0.472\,m$, la costante di attenuazione è $\alpha = 1\,Np/m$ e l'impedenza intrinseca del mezzo $Z = 195\,\Omega$, calcolare le costanti μ_r, ϵ_r e σ del materiale.

Ricordiamo che valgono le relazioni:

$$\beta^2 - \alpha^2 = \mu\epsilon\omega^2 \tag{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{\mu\sigma\omega}{2} \tag{b}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \tag{c}$$

Dalla (a) si ha:

$$\epsilon = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\mu\omega^2} \tag{a'}$$

dalla (c) segue che:

$$\mu = \epsilon Z^2 \tag{c'}$$

Sostituendo la (c') nella (a') si ha:

$$\boxed{\epsilon^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{Z^2\omega^2}}$$

Dalla (b) ricaviamo la conducibilità σ; sostituendo la (c') e l'ultima espressione di ϵ, otteniamo:

$$\boxed{\sigma = \frac{2\alpha\beta}{\mu\omega} = \frac{2\alpha\beta Z\omega}{\omega Z^2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} = \frac{2\alpha\beta}{Z\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}}$$

In definitiva, dalle precedenti equazioni, ricordando le note relazioni $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$, $\mu = \mu_0\mu_r$,

si ha:

$$\epsilon_r = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\epsilon_0 \omega Z}$$

$$\mu_r = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r Z^2}{\mu_0}$$

$$\sigma = \frac{2\alpha\beta}{Z\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$$

dove $\beta = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 13.31\,\mathrm{rad/m}$.

Ne segue: $\epsilon_r = 4.078$, $\mu_r = 1.093$ e $\sigma = 0.01028\,\mathrm{S/m}$.

93-2) Esercizio n. 3 del 30/1/1993

Sia data una guida rettangolare di dimensioni $a = 2\,cm$ e $b = 1\,cm$. La guida è eccitata nel modo TE_{10}. Se due segnali di frequenza $10\,GHz$ e $10.06\,GHz$ vengono inviati nella guida, calcolare il ritardo temporale fra i due segnali dopo un percorso $l = 1\,m$.

Il tempo impiegato da un segnale è lo spazio percorso diviso la velocità di gruppo:

$$t_1 = \frac{s}{v_{g1}} \qquad t_2 = \frac{s}{v_{g2}} \tag{a}$$

con $s = 1\,\mathrm{m}$, dove v_{g1} corrisponde a $f = 10\,GHz$ e v_{g2} corrisponde a $f = 10.06\,GHz$.

Si ha:

$$v_g = c\sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}} \tag{b}$$

Nel caso TE_{10}:

$$f_c^2 = \left(\frac{c}{2a}\right)^2 \Longrightarrow f_c = 7.495\,GHz$$

Nota f_c dalla (b) si ricavano le due velocità di gruppo:

$$v_{g1} = 1.9843 \cdot 10^8\,m/s \quad v_{g2} = 1.9994 \cdot 10^8\,m/s$$

Dalle (a) si ha:

$$t_1 = 5.0395 \cdot 10^{-9}\,s \quad t_2 = 5.0014 \cdot 10^{-9}\,s$$

e in definitiva il ritardo temporale richiesto è:

$$\boxed{\Delta t = t_2 - t_1 = -3.81 \cdot 10^{-11}\ s}$$

Il segnale a frequenza piú elevata ha una velocitá di gruppo maggiore e, quindi, impiega un tempo minore.

93-3) Esercizio n. 4 del 30/1/1993

Un sistema uniforme di antenne a mezz'onda è composto da 5 elementi distanziati $d = 0.4\lambda_0$. Calcolare la fase delle correnti di eccitazione affinchè il massimo della radiazione emessa si trovi nella direzione formante un angolo di 45^0 con l'asse del sistema. Tracciare il diagramma di radiazione.

Si ha dalla teoria:

$$K(\psi) = \frac{1}{n} \left| \frac{\sin\left[\dfrac{n(kd\cos\psi + \gamma)}{2}\right]}{\sin\left[\dfrac{(kd\cos\psi + \gamma)}{2}\right]} \right| \tag{a}$$

Il massimo si ha quando $kd\cos\psi + \gamma = 0$, cioè:

$$\gamma = -kd\cos\psi$$

Nel nostro caso:

$$kd = 2\pi \cdot 0,4 = 2,51 < \pi \quad \text{e} \quad \psi = 45^0 \Longrightarrow \gamma = -2\pi \cdot 0,4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -1.77715\,\text{rad.}$$

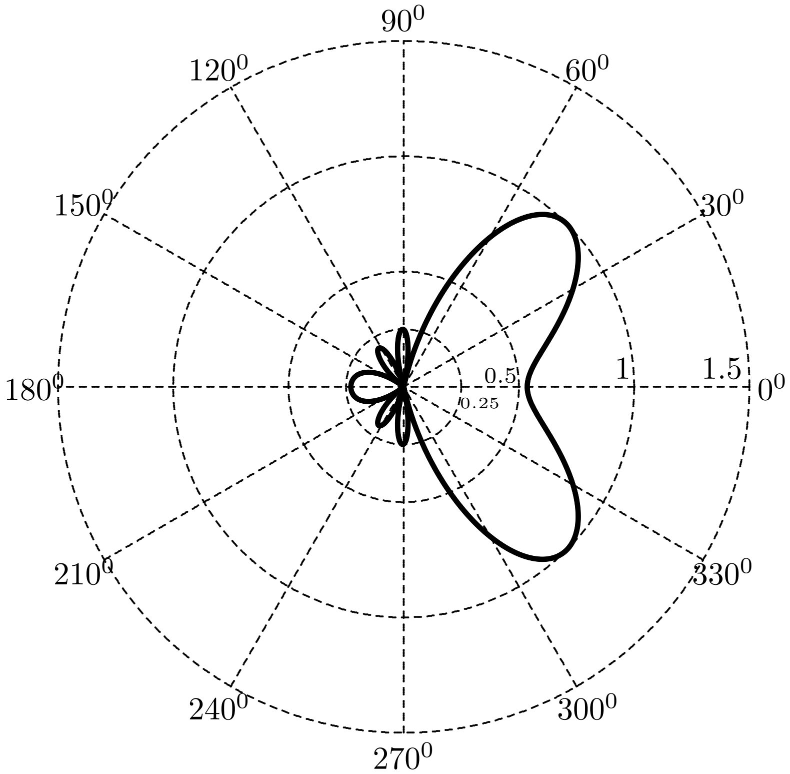
Grafichiamo la (a):

$K(\psi)$	ψ
0.53	0
0.57	10
0.68	20
0.84	30
0.976	40
0.976	50
0.755	60
0.34	70
0.06	80
0.29	90

$K(\psi)$	ψ
0.15	100
0.059	110
0.192	120
0.165	130
0.038	140
0.092	150
0.178	160
0.218	170
0.227	180

$K(\psi)$	ψ
0.218	190
0.179	200
0.093	210
0.038	220
0.165	230
0.192	240
0.059	250
0.155	260
0.248	270

$K(\psi)$	ψ
0.062	280
0.346	290
0.755	300
0.976	310
0.976	320
0.760	330
0.683	340
0.568	350
0.53	360



90^0
120^0
60^0
150^0
30^0
180^0
0.5
0.25
1
1.5
0^0
210^0
330^0
240^0
300^0
270^0

93-4) Esercizio n. 1 del 27/2/1993

Una guida d'onda a sezione rettangolare, di dimensioni $a = 2.25\,cm$ e $b = 1\,cm$, viene eccitata nel modo TE_{10} alla frequenza di 10 GHz. Se la potenza di eccitazione è 1 W, calcolare il massimo valore del campo elettrico all'interno della guida, nell'ipotesi che essa sia vuota.

Per il modo TE in guida rettangolare si ha:

$$H_z = N \cos\frac{p\pi x}{a} \cos\frac{q\pi y}{b}$$

Per il modo TE_{10} risulta

$$H_z = N \cos\frac{\pi x}{a}$$

$$E_z = 0$$

Ne segue:

$$\vec{E}_t = \frac{i\omega\mu}{h^2} N \widehat{z} \times \left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\frac{\pi x}{a}\right)\widehat{x}$$

$$\vec{H}_t = -\frac{i\beta}{h^2} N \left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\frac{\pi x}{a}\right)\widehat{x}$$

In definitiva, effettuando le derivate e ricordando che $\widehat{z} \times \widehat{x} = \widehat{y}$, si ha:

$$\vec{E}_t = -\frac{i\omega\mu}{h^2}\widehat{y} N \frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z}$$

$$\vec{H}_t = \frac{i\beta}{h^2}\widehat{x} N \frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z}$$

A questo punto

$$\left|\vec{E}_t\right|^2_{\mathrm{MAX}} = \frac{\omega^2\mu^2}{h^4}\,\frac{\pi^2}{a^2} N^2$$

si tratta quindi di calcolare N^2 dal valore della potenza di eccitazione. Si ha:

$$\vec{E}_t \times \vec{H}_t^* = \frac{\omega\mu\beta}{h^4} N^2 \frac{\pi^2}{a^2}\sin^2\frac{\pi x}{a}\widehat{z}$$

$$P = \frac{1}{2}\int_\sigma \frac{\omega\mu\beta}{h^4} N^2 \frac{\pi^2}{a^2}\sin^2\frac{\pi x}{a} dx\, dy$$

$$\int_0^a \sin^2\frac{\pi x}{a} dx = \int_0^a \frac{1-\cos\frac{2\pi x}{a}}{2} dx = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\frac{a}{2\pi}\left[\sin\frac{2\pi x}{a}\right]_0^a = \frac{1}{2}a$$

Quindi

$$P = \frac{\pi^2}{2h^4}\frac{\omega\mu_0\beta}{a^2}N^2\frac{1}{2}ab$$

e in definitiva

$$N^2 = \frac{4a^2h^4P}{\pi^2\mu_0\omega\beta ab}$$

Ne segue che

$$\left|\vec{E}_t\right|^2_{\mathrm{MAX}} = \frac{4\omega\mu_0}{\beta ab}P$$

dove $\beta = \sqrt{\omega^2\epsilon_0\mu_0 - h_{10}^2}$ ma $h_{10}^2 = \dfrac{\pi^2}{a^2}$, quindi

$$\left|\vec{E}_t\right|^2_{\mathrm{MAX}} = \frac{4\omega\mu_0}{ab\sqrt{\omega^2\epsilon_0\mu_0 - \frac{\pi^2}{a^2}}}P = \frac{4\omega\mu_0}{ab\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}}P$$

Per $P = 1\,W$, $\omega = 2\pi\cdot 10^{10}\,rad/sec$, $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$, $a = 2.25\,cm$, $b = 1\,cm$ si ha:

$$\beta = 156.1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}} \qquad \left|\vec{E}_t\right|^2_{\mathrm{MAX}} = 9\cdot 10^6 \quad E_{t_{\max}} = 3000\,V/m$$

93-5) Esercizio n. 2 del 27/2/1993

Calcolare l'intensità massima di corrente di eccitazione di un dipolo a mezz'onda perchè la potenza da esso irradiata in tutto lo spazio (vuoto) sia 100 W. Calcolare, altresí, la potenza irradiata da un'antenna rettilinea di lunghezza $2l = \frac{3}{2}\lambda$, se essa viene eccitata con codesta intensità di corrente.

$$P = \int_0^{4\pi} S_r(r,\theta,\phi) r^2 \, d\Omega$$

Dalla teoria si ha:

$$P = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2}{4\pi} \left\{ C + \ln 2kl - C_i 2kl + \frac{\sin 2kl}{2}\Big(S_i 4kl - 2S_i 2kl\Big) + \right.$$
$$\left. + \frac{\cos 2kl}{2}\Big(C + \ln kl + C_i 4kl - 2C_i 2kl\Big)\right\}$$

dove $C = 0.577216$.

Nel caso di dipolo a mezz'onda $kl = \frac{\pi}{2}$, ne segue:

$$P_{\left(kl=\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2}{4\pi} \left\{ 0.577216 + \ln \pi - C_i\pi - \frac{1}{2}\left[0.577216 + \ln\frac{\pi}{2} + C_i 2\pi - 2C_i\pi\right]\right\}$$

Analogamente per $2l = \frac{3}{2}\lambda$ si ha:

$$kl = \frac{2\pi}{\lambda} l = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{3}{4}\lambda = \frac{3}{2}\pi$$

$$P_{\left(kl=\frac{3\pi}{2}\right)} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2}{4\pi} \left\{ 0.577216 + \ln 3\pi - C_i 3\pi - \frac{1}{2}\left[0.577216 + \ln\frac{3}{2}\pi + C_i 6\pi - 2C_i 3\pi\right]\right\}$$

Esplicitiamo il calcolo dei coefficienti $C_i\pi$, $C_i 2\pi$, $C_i 3\pi$, $C_i 6\pi$:

$$\begin{aligned}
C_i\pi &= 1.72194 - 1.64827 = 0.07367 \\
C_i 2\pi &= 1.72194 + 0.693147 - 2.43765 = -0.022563 \\
C_i 3\pi &= 1.72194 + 1.09861 - 2.80993 = 0.01062 \\
C_i 6\pi &= 1.72194 + 1.79176 - 3.51647 = -0.00277
\end{aligned}$$

Quindi:

$$P_{\left(kl=\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\frac{I_0^2}{4\pi}\left\{0.577216 + 1.144729 - 0.07367 - 0.288608 - 0.22579 + \right.$$

$$\left. + 0.0112815 + 0.07367\right\} = \qquad (*)$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\frac{I_0^2}{4\pi}1.22$$

$$P_{\left(kl=\frac{3\pi}{2}\right)} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\frac{I_0^2}{4\pi}\left\{0.577216 + 2.24334 - 0.01062 - \frac{1}{2}\Big(0.577216 + 1.55019 - 0.00277 + \right.$$

$$\left. -0.02124\Big)\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\frac{I_0^2}{4\pi}\left\{2.809936 - \frac{1}{2}2.103396\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\frac{I_0^2}{4\pi}1.758$$

Dalla $(*)$ ricordando che $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377$, si ha:

$$I_0^2 = \frac{4\pi P}{1.22\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} = 2.73 \Longrightarrow I_0 = 1.65\, A$$

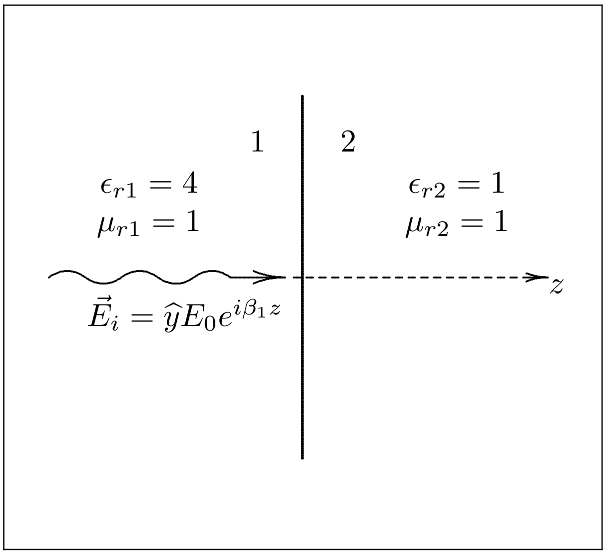
ed anche

$$P_{\left(kl=\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{377 \cdot 2,73 \cdot 1,758}{4\pi} = 144\, Watt$$

93-6) Esercizio n. 3 del 27/2/1993

Un'onda elettromagnetica piana viaggia in un mezzo dielettrico omogeneo la cui costante dielettrica relativa è $\epsilon_r = 4$ e la permeabilità magnetica relativa è $\mu_r = 1$. Essa passa da tale mezzo al libero spazio ($\epsilon_r = 1\,,\ \mu_r = 1$). Se il campo elettrico incidente è dato da $\vec{E}_i = \widehat{y}\, 2\cdot 10^{-3} e^{i\beta z}$ e l'onda incide normalmente alla superficie di separazione, calcolare:
a) il corrispondente campo magnetico incidente;
b) i campi elettrici e magnetici riflessi e trasmessi;
c) le densità di potenze riflesse e trasmesse.

La situazione è quella schematizzata in figura:



dove $E_0 = 2\cdot 10^{-3}\ V/m$; $\beta_1 = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1}$; valgono inoltre le relazioni:

$$\widehat{z}\times\widehat{y} = -\widehat{x}$$
$$\widehat{y}\times\widehat{x} = -\widehat{z}$$

Si ha per il campo magnetico incidente:

$$\vec{H}_i = \frac{\beta_1}{\omega\mu_1}\widehat{z}\times\vec{E}_i = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}\widehat{z}\times\widehat{y}E_0 e^{i\beta_1 z} = -\frac{\sqrt{\epsilon_{r1}}}{Z_0}\widehat{x}E_0 e^{i\beta_1 z} = $$
$$= -\frac{2}{Z_0}\widehat{x}E_0 e^{i\beta_1 z}$$

Calcoliamo la densità di potenza come

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^*$$

si ha:

$$\vec{S}_i \cdot \widehat{n} = \frac{1}{Z_0} E_0^2 = 1.061 \cdot 10^{-8} \ \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2}$$

L'onda trasmessa è:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_t &= \frac{2\beta_1}{\beta_2 + \beta_1} E_0 \widehat{y} e^{i\beta_2 z} = \frac{4}{3} E_0 \widehat{y} e^{i\beta_2 z} \\
\vec{H}_t &= \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \widehat{z} \times \widehat{y} \frac{4}{3} E_0 e^{i\beta_2 z} = -\frac{1}{Z_0} \widehat{x} \frac{4}{3} E_0 e^{i\beta_2 z} \\
\vec{S}_t \cdot \widehat{n} &= \frac{1}{Z_0} \frac{8}{9} E_0^2 = 9.43 \cdot 10^{-9} \ \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2}
\end{aligned}$$

L'onda riflessa è:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_r &= -\frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 + \beta_1} E_0 \widehat{y} e^{-i\beta_1 z} = \frac{1}{3} E_0 \widehat{y} e^{-i\beta_1 z} \\
\vec{H}_r &= -\frac{\beta_1}{\omega \mu_1} \widehat{z} \times \widehat{y} \frac{1}{3} E_0 e^{-i\beta_1 z} = \frac{1}{Z_0} \widehat{x} \frac{1}{3} E_0 e^{-i\beta_1 z} \\
\vec{S}_r \cdot \widehat{n} &= \frac{1}{Z_0} \frac{1}{9} E_0^2 = 1.179 \cdot 10^{-9} \ \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2}
\end{aligned}$$

93-7) Esercizio n. 4 del 27/2/1993

Un'onda elettromagnetica piana polarizzata linearmente, di frequenza $f = 10\,MHz$, si propaga nella ionosfera percorrendo una distanza di $200\,Km$ nella stessa direzione di un campo magnetico uniforme. La densità media degli elettroni è $5 \cdot 10^{10}\,m^{-3}$ e il valore assoluto della frequenza giromagnetica dell'elettrone è $|\omega_g| = 8 \cdot 10^6\,rad/sec.$ Nell'ipotesi di potere trascurare le collisioni, calcolare l'angolo di rotazione del piano di polarizzazione dell'onda all'uscita della ionosfera.

L'angolo di rotazione per un metro percorso è dato da :

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left[\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_g)}} - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_g)}}\right] \qquad (*)$$

$|\omega_g| = 8 \cdot 10^6\,rad/sec.$ Ma ω_g per gli elettroni è negativo, quindi $\omega_g = -8 \cdot 10^6\,rad/sec$, mentre $\omega = 2\pi \cdot 10^7$, per ω_p si ha:

$$\omega_p^2 = \frac{nq^2}{m\epsilon_0} = \frac{5 \cdot 10^{10}(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} = 1,588 \cdot 10^{14}$$

Sostituendo nella $(*)$ si ha:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{2\pi 10^7}{3\,10^8}\left[\sqrt{1 - \frac{1,588 \cdot 10^{14}}{2\pi \cdot 10^7(2\pi \cdot 10^7 + 8 \cdot 10^6)}} - \sqrt{1 - \frac{1,588 \cdot 10^{14}}{2\pi \cdot 10^7(2\pi \cdot 10^7 - 8 \cdot 10^6)}}\right] =$$

$$= 0.1047(0.981996 - 0.97667998) = 5.56587294 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

Dopo un percorso di $200\,Km$ l'angolo di rotazione è

$$\tau l = 5.56587294 \cdot 10^{-4} \cdot 200000 = 111.3175\,\mathrm{rad}$$

$$\tau l_{\mathrm{gradi}} = 111.3175\frac{180}{\pi} = 6378^0.023$$

Il piano di polarizzazione compie $\dfrac{6378.023}{360}$ giri, cioè 17.72 giri ossia 17 giri completi e una rotazione di $0.72 \cdot 360 = 262^0.8$ nel senso orario.

93-8) Esercizio n. 1 del 5/4/1993

Un'antenna rettilinea a mezz'onda, eccitata ad una frequenza di 100 MHz, irradia nello spazio libero una potenza di 100 W. Calcolare il modulo del campo elettrico e del campo magnetico ad una distanza di 300 m in direzione ortogonale alla direzione dell'antenna.

Poichè la lunghezza d'onda è $\lambda = \dfrac{c}{\nu} = \dfrac{3 \cdot 10^8}{100 \cdot 10^6} = 3\,m$ e $2l = \dfrac{\lambda}{2}$ (risonanza a mezz'onda $kl = \pi/2$)=1.5 m, per $R = 300\,m$ si è in condizione di applicare le formule per campi nella "far zone".

Si ha:

$$\vec{E}_{\rm rad} = i\omega\mu \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\Big(\widehat{e}_\theta N_\theta + \widehat{e}_\phi N_\phi\Big)$$

$$\vec{H}_{\rm rad} = \frac{ik}{4\pi r} e^{ikr}\Big(N_\theta \widehat{e}_\phi - N_\phi \widehat{e}_\theta\Big)$$

Nel nostro caso, per $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ e $kl = \dfrac{\pi}{2}$ si ha:

$$E_\theta = -i\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{e^{ikr}}{2\pi r} I_0$$

$$H_\phi = -i\frac{e^{ikr}}{2\pi r} I_0 = E_\theta \left(\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\right)^{-1}$$

ed anche:

$$|E_\theta|^2 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi^2 r^2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$|H_\phi|^2 = \frac{\epsilon}{\mu} E_\theta^2$$

Esprimiamo $|E_\theta|^2$ e $|H_\phi|^2$ in funzione della potenza irradiata. Si ha:

$$P = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi} \cdot 1,22$$

Quindi

$$|E_\theta|^2 = \frac{P}{1,22}\frac{1}{\pi r^2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 98.29\frac{P}{r^2}$$

$$|E_\theta| = 9.9\frac{\sqrt{P}}{r} = 9.9\frac{10}{300} = 3,3 \cdot 10^{-1}\ \frac{\rm V}{\rm m}$$

$$|H_\phi| = \frac{3,3 \cdot 10^{-1}}{376.7} = 8,76 \cdot 10^{-4}\ \frac{\rm A}{\rm m}$$

93-9) Esercizio n. 2 del 5/4/1993

Un'onda elettromagnetica piana incide normalmente su un lamierino di rame di spessore $s = 0.1\,mm$. Se la conduttività del rame è $\sigma = 5.8 \cdot 10^7\,S/m$ e la frequenza dell'onda è $f = 1\,MHz$, calcolare la percentuale dell'effettiva potenza entrante che viene dissipata nel conduttore.

Se P è l'effettiva potenza entrante nel lamierino,

$$\Delta P = P - Pe^{-2\alpha s} = P\Big(1 - e^{-2\alpha s}\Big)$$

è la potenza dissipata nel metallo.

Pertanto:

$$\frac{\Delta P}{P} = \Big(1 - e^{-2\alpha s}\Big)$$

Nel nostro caso, ($\epsilon_{r rame} = 1$), si ha:

$$\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} = 10^{24} \gg 1 \Longrightarrow \alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = 15132\,m^{-1}$$

In definitiva

$$\Big(1 - e^{-2\alpha s}\Big) = 0.9515 \Longrightarrow \underline{\underline{\Delta P = 95.15\% P}}$$

93-10) Esercizio n. 3 del 5/4/1993

Un'onda elettromagnetica piana, di frequenza $f = 10\,MHz$, entra in una atmosfera ionizzata con densità di elettroni di $10^{12}\,\dfrac{\text{elettroni}}{\text{m}^3}$. Trascurando le collisioni fra le particelle, calcolare il tempo impiegato per attraversare $200\,Km$ di atmosfera.

La formula risolutiva è:

$$t = \frac{s}{v_g}$$

Dobbiamo calcolare la velocità di gruppo dell'onda nella ionosfera.

Si ha:

$$\omega_p^2 = \frac{nq^2}{m\epsilon_0} = 3182,97 \cdot n = 3.18 \cdot 10^{15}\,(\text{rad/sec})^2$$

$$\omega_p = 5,64 \cdot 10^7\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$\omega = 2\pi f = 6,28 \cdot 10^7\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

Dal momento che $\omega > \omega_p$ si ha:

$$\omega > \omega_p \Longrightarrow v_f = \frac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = 6,81 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$$

La velocità di gruppo è:

$$v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = 1,32 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$$

Il tempo impiegato per percorrere $200\,Km$ di atmosfera è:

$$\Delta t = \frac{2 \cdot 10^5}{1,32 \cdot 10^8} = \underline{\underline{1.5\ ms}}$$

93-11) Esercizio n. 4 del 5/4/1993

Una guida rettangolare è riempita di materiale dielettrico con $\epsilon_r = 9$. Le dimensioni della guida sono: $a = 7\,cm$ e $b = 3.5\,cm$. Se la guida è eccitata nel modo TE$_{10}$ ad una frequenza di $2\,GHz$, calcolare la frequenza di cutoff, la velocità di fase, la velocità di gruppo e la lunghezza d'onda guidata.

Le formule risolutive per le quattro grandezze richieste sono:

$$\omega_c = h\frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}\sqrt{1-\dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$$

$$v_g = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0/n}{\sqrt{1-\dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$$

Quindi, ricordando che per il modo TE$_{10}$ $h = \dfrac{\pi}{a}$, si ha:

$$\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}} = \sqrt{1-\frac{\pi^2 c^2}{a^2\epsilon_r\omega^2}} = 0.934$$

e in definitiva

$$f_c = \frac{h}{2\pi}\frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} - \frac{c}{2a\sqrt{\epsilon_r}} = \underline{\underline{0.71\,GHz}}$$

$$v_f = \underline{\underline{1,07\cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

$$v_g = \underline{\underline{9,34\cdot 10^7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

$$\lambda_g = \frac{0.15/3}{0.934} = \underline{\underline{0.053\,\text{m}}}$$

93-12) Esercizio n. 1 del 17/4/1993

Una radio ricevente situata su un veicolo mobile si trova all'interno di una lunga galleria rettilinea di sezione circolare. Se il diametro della galleria è $d = 5\,m$, calcolare la minima frequenza che una radio trasmittente, posta all'esterno, deve utilizzare per comunicare con il veicolo, supponendo nulle le attenuazioni. Nell'ipotesi che la radio esterna trasmetta ad una frequenza eguale a quella minima aumentata del 10%, calcolare la costante di propagazione dell'onda e la sua velocità di fase. Se il veicolo si muove verso la sorgente con velocità $v = 100\,Km/h$, valutare la frequenza ricevuta e la costante di propagazione relativa ad un osservatore solidale al veicolo.

Considerando la galleria come una guida d'onda circolare si ha che la minima frequenza che si può propagare è quella immediatamente superiore alla frequenza di cutoff competente al modo dominante TE_{11}. Si ha, pertanto:

$$\nu_{c_{(\mathrm{TE}_{11})}} = \frac{x'_{11}c}{2\pi a} = \frac{1,841 \cdot 3 \cdot 10^8}{2\pi \cdot 2,5} = 35.16\,MHz$$

La frequenza di trasmissione della radio esterna è:

$$\nu = 35,16 \cdot 10^6 + 10\%\, 35,16 \cdot 10^6 = 38.68\,MHz$$

che, lo osserviamo per inciso, è inferiore alla frequenza critica del modo successivo TM_{01}, infatti:

$$\nu_{c_{(\mathrm{TM}_{01})}} = \frac{2,405 \cdot 3 \cdot 10^8}{2\pi \cdot 2,5} = 45.93\,MHz$$

Per $\nu = 38.68\,MHz$ si ha:

$$\beta_{(TE_{11})} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{x'_{11}}{a}\right)^2} = \sqrt{0.6563 - 0.5423} = 0.3376\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

ed anche

$$v_{f_{(TE_{11})}} = \frac{\omega}{\beta} = 7,2 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Se il veicolo si muove verso la sorgente, si utilizza la formula per l'effetto Doppler in avvicinamento, nel caso non relativistico.

$$f' = \left(1 + \frac{v}{v_f}\right) f \Longrightarrow f' - f = \frac{v}{v_f} f = 1.5\,Hz$$

quindi

$$f' = (f + 1.5)\,Hz$$

ed anche

$$\beta' = \left(1 + \frac{v v_f}{c^2}\right)\beta \Longrightarrow \beta' - \beta = 7,5 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

cioè:

$$\beta' = (\beta + 7,5 \cdot 10^{-8})\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

93-13) Esercizio n. 2 del 17/4/1993

Un sistema di antenne Tchebyscheff è costituito da cinque elementi distanziati $d = \lambda/2$. Calcolare le ampiezze delle correnti di eccitazione perchè l'intensità massima dei lobi secondari sia il 10% (20 dB) del massimo principale. Graficare il diagramma di radiazione.

Siamo nelle condizioni di equidistanza degli elementi costituenti il sistema di antenne dunque possiamo porre nel caso di cinque elementi:

$$|A(\psi)| = 2\left|\frac{a_0}{2} + a_1\cos\alpha + a_2\cos 2\alpha\right|$$

dove si è posto $\alpha = -kd\cos\psi - \gamma$.

Scriviamo $|A(\psi)|$ nella seguente maniera:

$$|A(\psi)| = 2\left|\frac{a_0}{2} + a_1\cos 2\frac{\alpha}{2} + a_2\cos 4\frac{\alpha}{2}\right|$$

Si ha:

$$\begin{aligned}|A(\psi)| &= 2\left|\frac{a_0}{2} + a_1\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) + a_2\left(8\cos^4\frac{\alpha}{2} - 8\cos^2\frac{\alpha}{2} + 1\right)\right| = \\ &= 2\left|\frac{a_0}{2} + 2a_1\cos^2\frac{\alpha}{2} - a_1 + 8a_2\cos^4\frac{\alpha}{2} - 8a_2\cos^2\frac{\alpha}{2} + a_2\right| = \\ &= 2\left|8a_2\cos^4\frac{\alpha}{2} + \left(\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)(2a_1 - 8a_2) + \frac{a_0}{2} - a_1 + a_2\right|\end{aligned}$$

Consideriamo il polinomio di Tchebyscheff di grado 4:

$$T_4(x) = 2x(4x^3 - 3x) - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

che si è ottenuto utilizzando la formula ricorrente

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Posto $x = x_0\cos\dfrac{\alpha}{2}$, si ha:

$$T_4(x) = 8x_0^4\cos^4\frac{\alpha}{2} - 8x_0^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 1$$

Imponiamo che

$$|A(\psi)| = |KT_4(x)|$$

e cerchiamo di conseguenza i coefficienti a_0, a_1 e a_2.

Si ha:

$$\begin{cases} 16a_2 = K8x_0^4 \\ 4a_1 - 16a_2 = -8Kx_0^2 \\ a_0 - 2a_1 + 2a_2 = K \end{cases}$$

Dalla teoria si ha che

$$x_0 = \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{b^2-1}\right)^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\left(b - \sqrt{b^2-1}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Per $b = 10$,cioè lobo principale pari a 10 volte i lobi secondari (questi ultimi aventi tutti lo stesso livello) $\Longrightarrow x_0 = 1.2933$

Risolvendo il sistema otteniamo:

$$\begin{cases} a_0 = K2.7 \\ a_1 = K2.25 \\ a_2 = K1.3988 \end{cases}$$

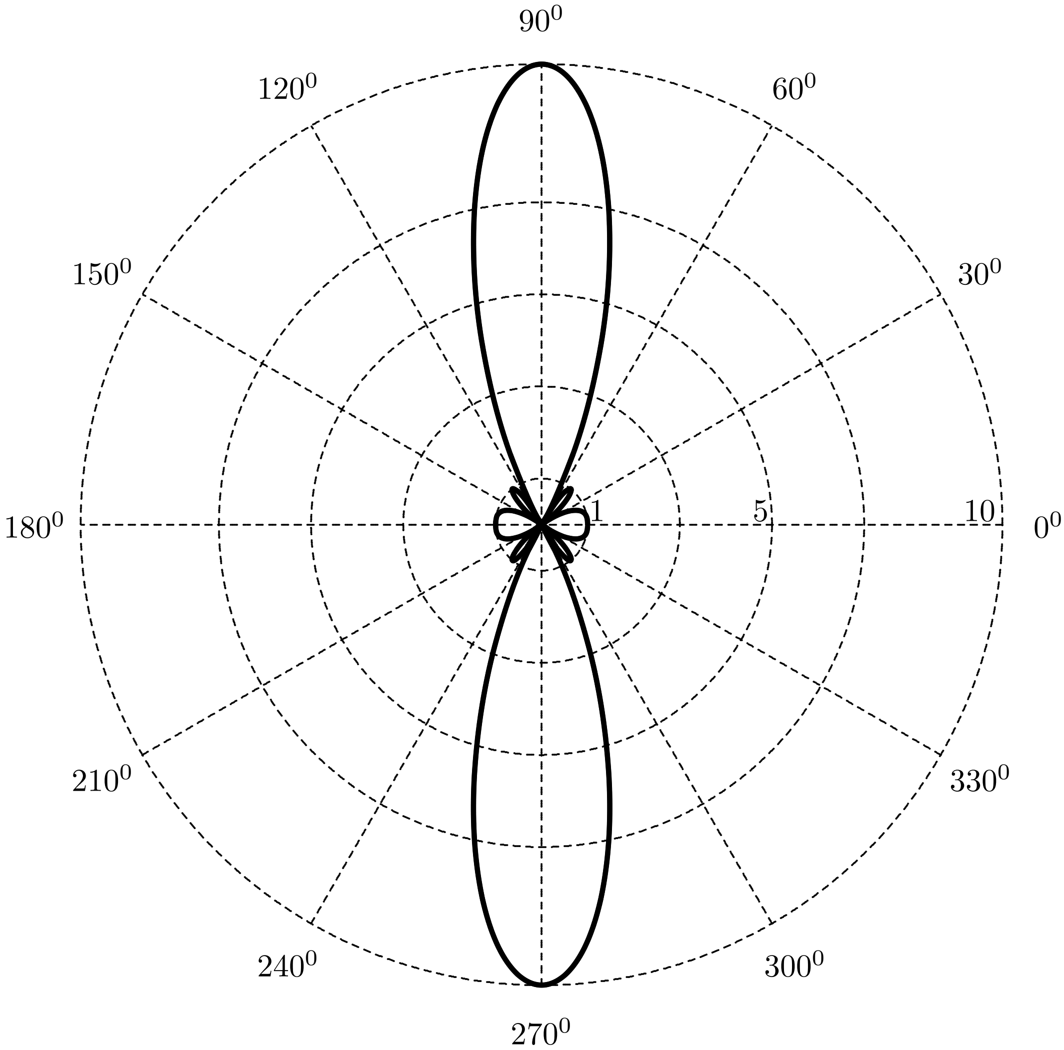
Si ha pure:

$$\frac{a_2}{a_0} = 0.5181 \quad \frac{a_1}{a_0} = 0.8\bar{3}$$

Poniamo $K = 1$, per $d = \dfrac{\lambda}{2}$ e $\gamma = 0$ segue $\alpha = -\pi\cos\psi$ e per $\theta = \pi/2 \Longrightarrow \alpha = -\pi\cos\varphi$, grafichiamo $|A(\varphi)|$:

$A(\varphi)$	φ
0.9976	0
0.9971	5
0.9899	10
0.9595	15
0.8796	20
0.72	25
0.4563	30
0.0846	35
0.3567	40
0.77	45

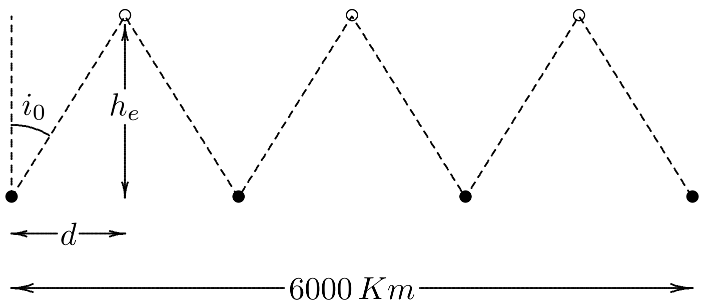
$A(\varphi)$	φ
0.9968	50
0.8348	55
0.0976	60
1.3098	65
3.3139	70
5.6377	75
7.8380	80
9.42	85
9.9976	90


90⁰
120⁰
60⁰
150⁰
30⁰
180⁰
1
5
10
0⁰
210⁰
330⁰
240⁰
300⁰
270⁰

93-14) Esercizio n. 3 del 17/4/1993

Si vuole stabilire una trasmissione ad onde corte, fra due stazioni terrestri distanti $6000\,Km$, attraverso la ionosfera mediante tre riflessioni successive, ciascuna delle quali arriva al suolo ogni $2000\,Km$. Nell'ipotesi che la riflessione avvenga in una zona in cui vi è una densità di elettroni di $5 \cdot 10^{11}\,elettroni/m^3$ e assumendo una altezza equivalente di $250\,Km$, calcolare l'angolo che il fascio di radiazione deve formare con la verticale e la frequenza della trasmittente.

La situazione può essere schematizzata come in figura:



dove $d = 1000\,Km$.

Si ha:

$$\tan i_0 = \frac{d}{h_e} = \frac{10^6}{250 \cdot 10^3} = 4 \Longrightarrow i_0 = 75^o,9637$$

La frequenza della trasmittente si può trovare dalla formula:

$$\sin i_0 = \sqrt{1 - \frac{kN(h)}{\omega^2}}$$

dove $N(h) = 5 \cdot 10^{11}\,\dfrac{\text{elettroni}}{\text{m}^3}$, mentre k è dato da:

$$k = \frac{q^2}{m\epsilon_0} = 3182.67$$

di conseguenza otteniamo:

$$\sin^2 i_0 = \frac{\omega^2 - kN(h)}{\omega^2} \Longrightarrow \omega^2(\sin^2 i_0 - 1) = -kN(h)$$

$$\omega^2 = \frac{-kN(h)}{\sin^2 i_0 - 1} = 2.705 \cdot 10^{16} \Longrightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 26.177\,MHz$$

93-15) Esercizio n. 4 del 17/4/1993

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $f = 1\,MHz$, polarizzata linearmente, incide normalmente alla superficie terrestre (supposta piana). Il modulo del campo elettrico ad essa associato è $E = 10^{-3}\,V/m$. I parametri costitutivi della terra sono: $\epsilon_2 = 9\epsilon_0$, $\mu_2 = \mu_0$ e $\sigma_2 = 10^{-1}\,S/m$. Calcolare:

a) la profondità di penetrazione dell'onda trasmessa nella terra;

b) i coefficienti di riflessione e di trasmissione (relativi alla densità di potenza).

Calcoliamo il rapporto $\dfrac{\sigma_2^2}{\omega^2\epsilon_2^2}$. Si ha:

$$\frac{\sigma_2^2}{\omega^2\epsilon_2^2} = 39891 \gg 1$$

Pertanto $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu_2\sigma_2}} = 1.59\,m$

Per l'onda riflessa si ha:

$$R_\perp = \rho_\perp^2 \quad \text{e} \quad R_\| = \rho_\|^2$$

Se l'incidenza è normale

$$R_\perp = R_\| = R$$

Nel caso $\dfrac{\sigma_2^2}{\omega^2\epsilon_2^2} \gg 1$ e $\mu_2 = \mu_0$ e $\theta_0 = 0$ si ha:

$$\rho_\perp^2 = \rho_\|^2 = \frac{\left[1 - \dfrac{\beta_1}{\beta_2}\right]^2 + 1}{\left[1 + \dfrac{\beta_1}{\beta_2}\right]^2 + 1}$$

dove

$$\begin{array}{l} \beta_1 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \\ \beta_2 = \sqrt{\dfrac{\omega\mu\sigma_2}{2}} \end{array} \Longrightarrow \frac{\beta_1}{\beta_2} = \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma_2}} = 0.033$$

Quindi

$$\rho_\perp^2 = \rho_\|^2 = 0.936$$

Nell'ipotesi di onda parallela: $R = 0.936$ e $T = 0.064$

93-16) Esercizio n. 1 del 10/5/1993

Un'onda elettromagnetica piana, linearmente polarizzata, incide, normalmente, su una superficie piana perfettamente conduttrice. Se la densità di potenza dell'onda (mediata in un periodo) è $10\,W/m^2$, calcolare la pressione meccanica esercitata sul piano.

La pressione di radiazione dovuta ad un'onda elettromagnetica piana è:

$$\langle \vec{t} \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_o^2 \widehat{z}$$

dove $\widehat{z}$ è il versore della direzione di propagazione. Se la superficie è perfettamente conduttrice, bisogna considerare l'onda riflessa la cui pressione di radiazione è la stessa dell'onda incidente, quindi:

$$\langle \vec{t} \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \widehat{z} \quad \text{(superficie perfettamente conduttrice)}$$

Si ha anche che la densità di potenza è:

$$\mathscr{P} = \Big| < \vec{S} > \Big| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2$$

Ne segue:

$$|\langle \vec{t} \rangle| = 2\epsilon_0 \frac{\mathscr{P}}{\sqrt{\dfrac{\epsilon_0}{\mu_0}}} = \frac{2\mathscr{P}}{c} = \frac{20}{3 \cdot 10^8} = 6,7 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

Si può anche verificare che la pressione di radiazione è la variazione nell'unità di tempo della quantità di moto associata all'onda cioè:

$$\vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \vec{g}\, dv$$

dove $\vec{g} = \dfrac{1}{c^2} \vec{E} \times \vec{H}$.
Nell'unità di tempo il volume V è $V = Sc$, quindi nell'unità di tempo:

$$\langle \vec{F} \rangle = \langle \Delta \vec{Q} \rangle = 2\langle \vec{g} \rangle V = 2\frac{1}{2c^2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 Sc\, \widehat{z} \Longrightarrow \left\langle \frac{F}{S} \right\rangle = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \widehat{z} = \underline{\underline{\epsilon_0 E_0^2\, \widehat{z}}}$$

93-17) Esercizio n. 2 del 10/5/1993

Un sottomarino, con la sua antenna posta sul livello del mare ($\epsilon_r = 72$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 4$ S/m), riceve un segnale di frequenza $f = 1\,KHz$ il cui livello di potenza è 100 volte il livello di rumore. Calcolare la massima profondità di immersione perchè il sottomarino possa ancora ricevere il segnale non confuso con il rumore. Se l'antenna ricevente del sottomarino è un dipolo a mezz'onda, calcolare la lunghezza.

$20\,dB$ significa che la potenza sul livello del mare è 100 volte quella di rumore, cioè:

$$\frac{P_{\text{segnale}}}{P_{\text{rumore}}} = 100$$

La quantità $\dfrac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}$ è pari a

$$\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} = \frac{16}{(8,854 \cdot 10^{-12})^2(72)^2(2\pi \cdot 10^3)^2} = 9,97 \cdot 10^{11} \gg 1$$

Pertanto

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4}{2}} = 0.126\ [\text{m}^{-1}]\,,\ [\frac{\text{rad}}{\text{m}}]$$

A questo punto:

$$P_{\text{rumore}} = P_{\text{segnale}} e^{-2\alpha z^*} \Longrightarrow e^{-2\alpha z^*} = \frac{1}{100}$$

$$-2\alpha z^* = -\ln 100 \Longrightarrow z^* = \frac{\ln 100}{2\alpha} = 18.27\,\text{m}$$

Essendo la lunghezza d'onda λ pari a:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 49.87\,\text{m}$$

la lunghezza del dipolo risulta

$$2l = \frac{\lambda}{2} = 24.96\,\text{m}$$

93-18) Esercizio n. 3 del 10/5/1993

Una guida d'onda rettangolare è riempita d'aria. Le sue dimensioni sono: $a = 2.286\,cm$ e $b = 1.016\,cm$. Se la guida è eccitata nel modo TE_{10} ad una frequenza $f = 9\,GHz$, calcolare la massima potenza che può essere sostenuta dal dielettrico. La rigidità dielettrica dell'aria è $3 \cdot 10^6\,V/m$.

Dobbiamo imporre che il massimo campo elettrico nella guida sia uguale al valore della rigidità dielettrica dell'aria cioè $3 \cdot 10^6\,V/m$.

Il modulo del campo elettrico massimo competente al modo TE_{10} è (vedi Esercizio n 1 del 27/2/1993):

$$|E_y|_{\mathrm{MAX}} = \frac{\omega\mu}{h_{10}^2}\frac{\pi}{a}N \qquad h_{10} = \frac{\pi}{a}$$

quindi

$$|E_y|_{\mathrm{MAX}} = \frac{\omega\mu a}{\pi}N = 3 \cdot 10^6\,V/m$$

da cui per N otteniamo:

$$N = \frac{3 \cdot 10^6 \cdot \pi}{\omega\mu a} = 5801.8$$

La massima potenza che può sostenere il dielettrico è:

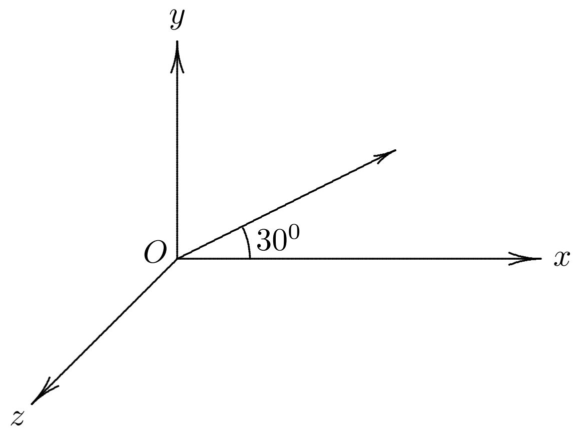
$$P_{\mathrm{MAX}} = \frac{\pi^2}{2h^4}\frac{\omega\mu\beta}{a^2}N^2\frac{1}{2}ab$$

dove $\beta = \sqrt{\omega^2\epsilon_0\mu_0 - h_{10}^2} = 129.2\,rad/m$. In definitiva

$$\underline{\underline{P_{\mathrm{MAX}} = 950.129\,KW}}$$

93-19) Esercizio n. 4 del 10/5/1993

In un sistema di riferimento $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ vi è un campo elettrico di modulo $E = 1000\,V/m$, giacente nel piano xy e formante un angolo di 30^0 con l'asse x. Trovare il modulo e la direzione del campo elettrico in un sistema di riferimento che si muove lungo la direzione positiva dell'asse x con velocità $v = 0.6c$, e che ha gli assi paralleli a quelli del sistema di riferimento $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ con le origini coincidenti all'istante $t = 0$.



Sia E_0 il modulo in S, si ha:

$$\begin{array}{ll} E_x = E_0 \cos 30^0 = 866.025 & B_x = 0 \\ E_y = E_0 \sin 30^0 = 500 & B_y = 0 \\ E_z = 0 & B_z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} E'_x = E_x & E'_x = E_0 \cos 30^0 = 866.025 \\ E'_y = \gamma[E_y - vB_z] & E'_y = \gamma E_0 \sin 30^0 = 625 \\ E'_z = \gamma[E_z + vB_y] & E'_z = 0 \end{array}$$

Il modulo di E'_0 è:

$$E'_0 = \sqrt{E_0^2 \cos^2 30^0 + \gamma^2 E_0^2 \sin^2 30^0} = 1068\,V/m$$

dove $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} = 1.25$. In definitiva:

$$E'_y = E'_x \tan\alpha' \Longrightarrow \tan\alpha' = \frac{E'_y}{E'_x} = 0.721688$$

La direzione del campo elettrico è data da:

$$\underline{\underline{\alpha' = 35^0, 81}}$$

93-20) Esercizio n. 1 del 26/6/1993

Un largo ed uniforme fascio di microonde linearmente polarizzato, viaggiante in aria, avente la densità di potenza di $1\,KW/m^2$ e la frequenza $\nu = 1\,GHz$, incide normalmente su un metro quadrato di lastra di rame ($\epsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 5,7 \cdot 10^7\,S/m$) di 10μ di spessore. Calcolare la potenza emergente dalla lastra.

Calcoliamo, al solito, la quantità $\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}$:

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{5,7 \cdot 10^7}{8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 2\pi \cdot 10^9} \gg 1$$

Supponiamo che la radiazione incidente sia polarizzata parallelamente al piano di incidenza (o indifferentemente ortogonale).

La potenza incidente sulla lastra è $P_i = 1\,KW$.

Poichè $\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega} \gg 1$, il coefficiente di riflessione per la potenza si scrive:

$$R_{\|} = \rho_{\|}^2 \simeq 1 - 2x$$

dove

$$x = \frac{\mu_2\beta_1}{\mu_1\beta_2} = \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_1\mu_2}{\mu_1\sigma_2}} \qquad \begin{cases} 1 & 1^o \text{ mezzo (aria)} \\ 2 & 2^o \text{ mezzo (rame)} \end{cases}$$

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot 2\pi \cdot 10^9 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}}{5,7 \cdot 10^7}}$$

Sostituendo nella precedente ricaviamo $R_{\|}$:

$$R_{\|} = 1 - 2 \cdot 4,418 \cdot 10^{-5} = 0.9999116$$

$$P_r = 999.9116\,W \qquad P_i - P_r = 88.4\,mW$$

La potenza emergente è data da:

$$P_e = (P_i - P_r)e^{-2\alpha s}$$

dove s è lo spessore della lastra e α è il coefficiente di attenuazione dato da:

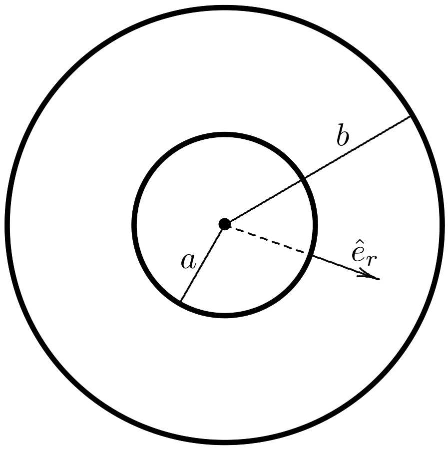
$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,7 \cdot 10^7}{2}} = 4,74 \cdot 10^5\,Np/m$$

Per $s = 10 \cdot 10^{-6}\,m$ si ha:

$$P_e = 6.75\,\mu W$$

93-21) Esercizio n. 2 del 26/6/1993

Un'onda elettromagnetica TEM si propaga in un cavo coassiale. Ricavare l'espressione della densità di carica indotta sulla superficie del conduttore interno e verificare esplicitamente la validità dell'equazione di continuità.



In un cavo coassiale si ha:

$$\vec{E}_t = -\hat{e}_r \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \frac{1}{r} e^{-i\beta z} e^{i\omega t}$$

Per le condizioni al contorno si ha:

$$\eta = D_n = -\epsilon \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \frac{1}{a} e^{-i\beta z} e^{i\omega t} \quad (r = a)$$

D'altra parte sappiamo che:

$$\vec{J}_s = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \frac{\hat{z}}{a} e^{-i\beta z} e^{i\omega t} \quad (r = a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -i\omega\epsilon \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \frac{1}{a} e^{-i\beta z} e^{i\omega t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = i\beta \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \frac{1}{a} e^{-i\beta z} e^{i\omega t}$$

Ma $\beta = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ e quindi $\beta\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \omega\epsilon$. Ne segue:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

93-22) Esercizio n. 3 del 26/6/1993

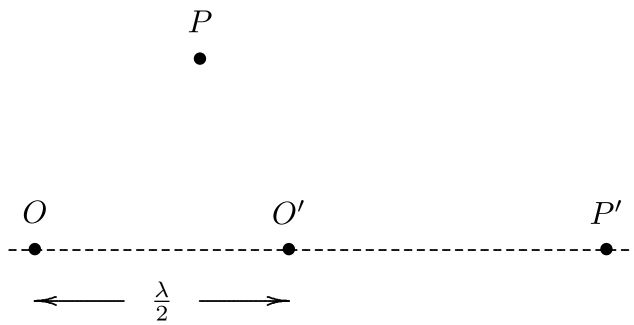
Due dipoli a mezz'onda, paralleli e distanti $\lambda/2$, sono alimentati con correnti uguali in modulo. Graficare i diagrammi di radiazione nel piano ortogonale alla direzione delle correnti e dare una spiegazione fisica dei risultati ottenuti nei seguenti due casi:

a) le correnti sono in fase;

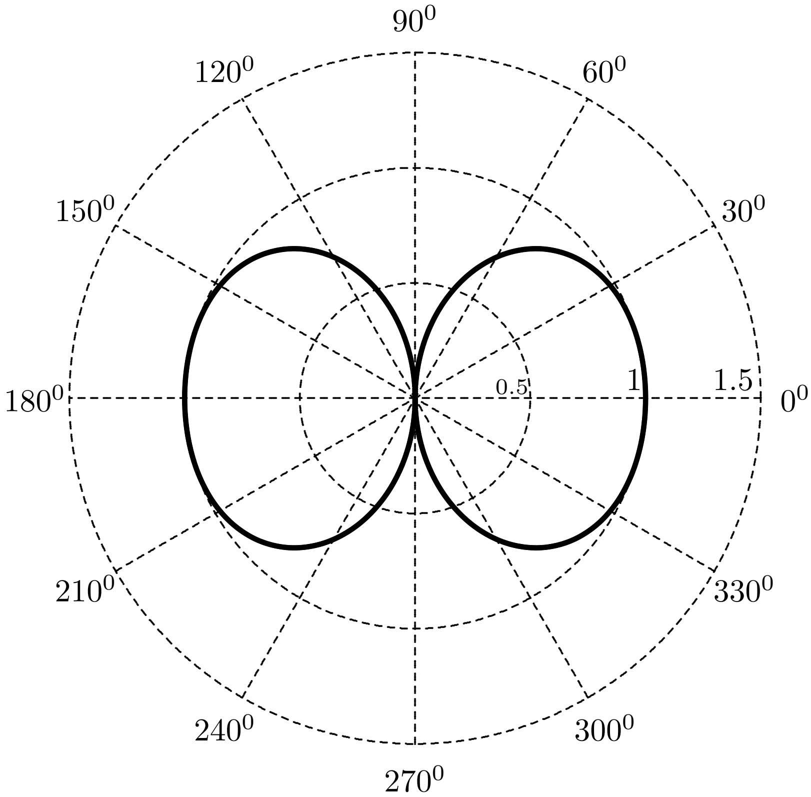
b) le correnti sono opposte in fase; Calcolare, altresì, la direttività del sistema in entrambe le situazioni.

Correnti opposte in fase ($\gamma = \pm\pi \;\; kd = \pi$)

Il diagramma di radiazione è del tipo "bilateral end-fire array" ed è graficato negli appunti.



Siano le direzioni dei dipoli ortogonali al piano della pagina. E' chiaro che in un punto P in direzione ortogonale alla direzione che congiunge i centri dei dipoli, le due onde percorrono uguale cammino, ma sono sfasate di π, pertanto il campo è nullo:



Viceversa in un punto P' sulla retta OO', l'onda emessa da O raggiunge O' dopo avere percorso un cammino uguale a $\lambda/2$, cioè con un ritardo di π, quindi nel punto P' le due onde giungono in fase e si sommano; pertanto in P' si ha un massimo.

Ovviamente succede il contrario se le due sorgenti sono in fase.

Grafico antenne in fase ($\gamma = 0$, $kd = \pi$)

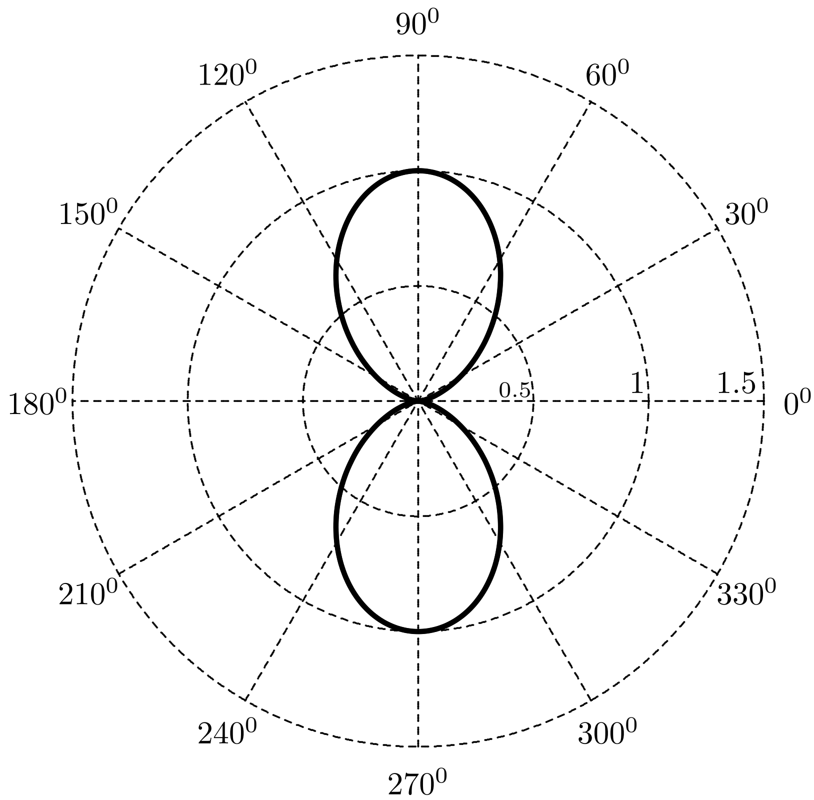
(Broadside array) $\cos\psi = \sin\theta\cos\phi$ per $\theta = 90^0 \Longrightarrow \cos\psi = \cos\phi$.

$$K(\phi) = \frac{1}{n}\left|\frac{\sin[n(kd\cos\phi + \gamma)/2]}{\sin[kd\cos\phi + \gamma]/2}\right|$$

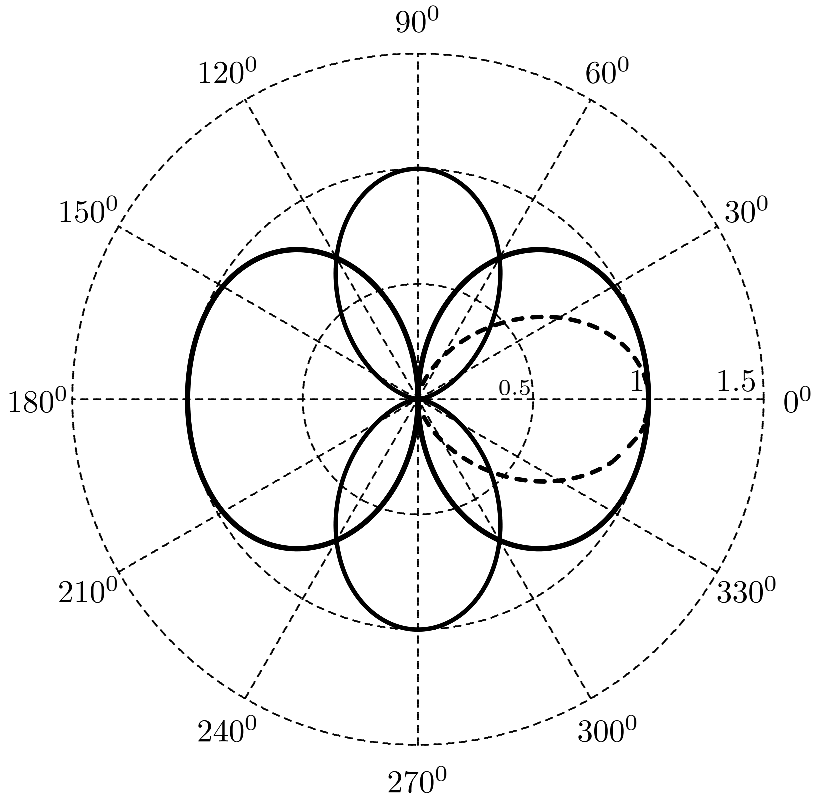
per $n = 2$, $kd = \pi$, $\gamma = 0$ si ha:

$K(\phi)$	ϕ
0	0
0.02386	10
0.09459	20
0.20889	30
0.359	40

$K(\phi)$	ϕ
0.532	50
0.707	60
0.859	70
0.963	80
1	90



In definitiva la situazione è la seguente, in cui tratteggiata è la sovrapposizione del diagramma per $\gamma = 0$:



Calcolo delle direttività

a) Correnti in fase ($\gamma = 0$): Utilizziamo la formula:

$$D = \frac{4\pi n^2}{\dfrac{8\pi n}{3} + 8\pi \displaystyle\sum_{q=1}^{n-1} (n-q)\cos(q\gamma)\left(\frac{\sin u}{u} - \frac{\sin u}{u^3} + \frac{\cos u}{u^2}\right)}$$

dove $u = qkd$.
Per $n = 2$, $\gamma = 0$, $kd = \pi$ e $q = 1$ si ha:

$$D = \frac{16\pi}{\dfrac{16\pi}{3} + 8\pi\left(-\dfrac{1}{\pi^2}\right)} = \underline{\underline{3.537}}$$

b) Correnti in opposizione di fase ($\gamma = \pm\pi$):

$$D = \frac{16\pi}{\dfrac{16\pi}{3} - 8\pi\left(-\dfrac{1}{\pi^2}\right)} = \underline{\underline{2.6}}$$

93-23) Esercizio n. 4 del 26/6/1993

Una guida d'onda rettangolare riempita d'aria, eccitata nel modo TE_{10}, ha dimensioni $a = 10\,cm$ e $b = 5\,cm$. Fissata l'ampiezza massima del campo elettrico, calcolare e graficare l'espressione della potenza trasmessa nella guida in funzione della frequenza, nell'intervallo compreso fra la frequenza di cutoff del modo considerato e quella di cutoff nel modo successivo.

Calcolo delle frequenze di cutoff

$$\nu_{c_{10}} = \frac{c}{2a} = 1,5 \cdot 10^9\,Hz\,; \quad \nu_{c_{01}} = \frac{c}{2b} = 3 \cdot 10^9\,Hz$$

L'espressione della potenza (vedi compito 27/2/1993) è:

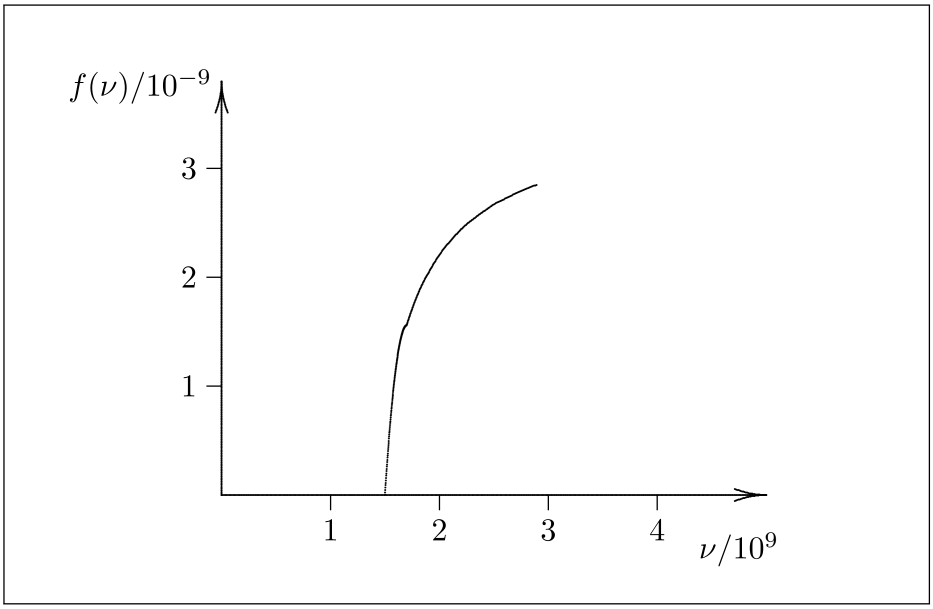
$$P_{10} = |E_t|^2_{\rm MAX}ab\frac{\sqrt{\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\pi^2}{a^2}}}{4\omega\mu_0}$$

La funzione da calcolare e graficare è:

$$\frac{\sqrt{\left(\dfrac{2\pi\nu}{c}\right)^2 - \dfrac{\pi^2}{a^2}}}{2\pi\nu} = \frac{\sqrt{\left(\dfrac{2\nu}{c}\right)^2 - \dfrac{1}{a^2}}}{2\nu} = f(\nu)$$

$\nu/10^9$	$f(\nu)$
1.5	0
1.6	$1.16 \cdot 10^{-9}$
1.7	$1.56 \cdot 10^{-9}$
1.8	$1.84 \cdot 10^{-9}$
1.9	$2.04 \cdot 10^{-9}$
2	$2.205 \cdot 10^{-9}$
2.1	$2.33 \cdot 10^{-9}$
2.2	$2.44 \cdot 10^{-9}$

$\nu/10^9$	$f(\nu)$
2.3	$2.526 \cdot 10^{-9}$
2.4	$2.6 \cdot 10^{-9}$
2.5	$2.67 \cdot 10^{-9}$
2.6	$2.72 \cdot 10^{-9}$
2.7	$2.77 \cdot 10^{-9}$
2.8	$2.815 \cdot 10^{-9}$
2.9	$2.85 \cdot 10^{-9}$
3	$2.88 \cdot 10^{-9}$



$f(\nu)/10^{-9}$
3
2
1
1
2
3
4
$\nu/10^9$

93-24) Esercizio n. 1 del 17/7/1993

Una fibra ottica eccitata con radiazione infrarossa di lunghezza d'onda $\lambda = 1.2\mu$ (nel vuoto) è costituita da un nucleo con indice di rifrazione $n_1 = 1.53$ e da un rivestimento con indice di rifrazione $n_2 = 1.52$. Trovare la dimensione massima del diametro del nucleo perchè si abbia un singolo modo di propagazione.

L'intervallo di frequenza per operazione a singolo modo è dato da:

$$0 < f < \frac{2.405}{2\pi a\sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)\mu_0}}$$

Nel nostro caso si conosce f che è:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,2 \cdot 10^{-6}} = 2,5 \cdot 10^{14}\, Hz \qquad \text{radiazione infrarossa}$$

Pertanto perchè si propaghi singolo modo, si deve avere:

$$a < \frac{2.405}{2\pi 2,5 \cdot 10^{14}\sqrt{(n_1^2 - n_2^2)\epsilon_0\mu_0}}$$

essendo $n_1 = 1.53$ e $n_2 = 1.52$.

Quindi:

$$a < \frac{4,5932 \cdot 10^{-7}}{\sqrt{(n_1^2 - n_2^2)}} = 2.63\mu$$

$$\underline{\underline{d = 2a < 5.26\mu}}$$

93-25) Esercizio n. 2 del 17/7/1993

Un'onda elettromagnetica piana, viaggiante in acqua ($\epsilon_r = 81$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 0$), è incidente sulla superficie di separazione acqua-aria con un angolo di 45^0. Calcolare il rapporto fra i moduli del campo elettrico, in aria, sulla superficie di separazione e ad una distanza di $\frac{\lambda}{4}$ da essa.

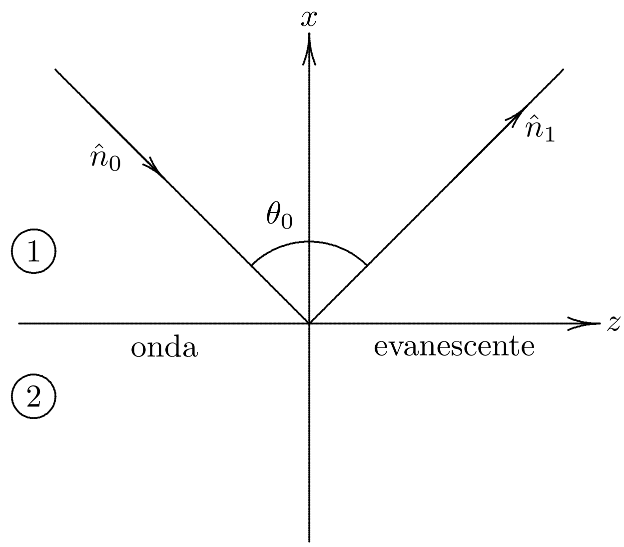
Poichè l'onda passa da un mezzo più rifrangente ad un mezzo meno rifrangente, verifichiamo se l'angolo di incidenza è maggiore o minore dell'angolo limite.

Si ha:

$$\sin\theta_L = \frac{n_2}{n_1} \Longrightarrow \theta_L = \arcsin\frac{n_2}{n_1}$$

Poichè $n_2 = 1$ ed $n_1 = \sqrt{81} = 9$ si ha $\theta_L = 6^0, 38$.

Nel nostro caso $\theta_i = 45^0$ pertanto siamo in presenza di riflessione totale e nel secondo mezzo (aria) avremo "onde evanescenti".



Nel secondo mezzo si ha, quindi:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_2 e^{\beta_1 x} e^{i\alpha z}$$
$$|\vec{E}_t| = |E_2| e^{\beta_1 x}$$

dove $\beta_1 = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1}\sqrt{\sin^2\theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$.

Indicando con λ la lunghezza d'onda in aria si ha:

$$\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda_0} \qquad \text{con} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Pertanto

$$\beta_1 = 2\pi \frac{n_1}{\lambda_0} \sqrt{\sin^2\theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \frac{39.49}{\lambda_0}\, N_p/m$$

Ne segue che:

$$|\vec{E}_t|_{x=0} = |\vec{E}_2|$$

$$|\vec{E}_t|_{x=-\frac{\lambda_0}{4}} = |\vec{E}_2| e^{-\dfrac{39.49}{4}}$$

Il rapporto fra i due campi è:

$$\frac{|\vec{E}_t|_{x=0}}{|\vec{E}_t|_{x=-\frac{\lambda_0}{4}}} = \underline{\underline{19390}}$$

93-26) Esercizio n. 3 del 17/7/1993

Sia dato un sistema piano di antenne molto largo (rectangular array), dotato di riflettore, che abbia un valore di direttività $D = 1000$. La frequenza di eccitazione è $f = 600\,MHz$. Calcolare:

a) l'area della superficie dell'antenna;
b) la lunghezza di ciascuna dimensione, nell'ipotesi che il sistema sia quadrato;
c) il numero di dipoli contenuti nel sistema se i loro centri distano l'un l'altro mezza lunghezza d'onda in entrambe le dimensioni.

Poichè il sistema di antenne è molto largo, possiamo usare la formula (con riflettore)

$$D = 4\pi \frac{A}{\lambda^2} \Longrightarrow A = \frac{\lambda^2 D}{4\pi} = \frac{c^2}{f^2}\frac{D}{4\pi} = 19.89\,m^2$$

Se il sistema è quadrato $L_x = L_z = 4.46\,m$.
Il numero di dipoli è dato da $n \cdot m$.
Si ha $nd_x\, md_z = L_x L_z$.
Nel nostro caso

$$nm\frac{\lambda^2}{4} = L^2 \Longrightarrow nm = \frac{4L^2}{\lambda^2} \simeq 318 \qquad (*)$$

In realtà la $(*)$ si dovrebbe scrivere:

$$(n-1)(m-1) = \frac{4L^2}{\lambda^2}$$

e poichè $n = m$ dalla precedente ottengo:

$$(n-1)^2 = \frac{4L^2}{\lambda^2} = 318 \Longrightarrow n - 1 \simeq 18$$

da cui

$$n = 19 \qquad \text{ed} \qquad \underline{\underline{n^2 = 361}} \text{ (numero di dipoli)}$$

93-27) Esercizio n. 4 del 17/7/1993

Graficare il diagramma di radiazione del sistema di antenne, descritto dal precedente problema, in un piano ortogonale al piano dell'array.

Consideriamo $n = m = 18$; per $\theta = \pi/2$ si ha:

$$U\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) = m \frac{\sin[n(\pi \cos\phi)/2]}{\sin[(\pi \cos\phi)/2]}$$

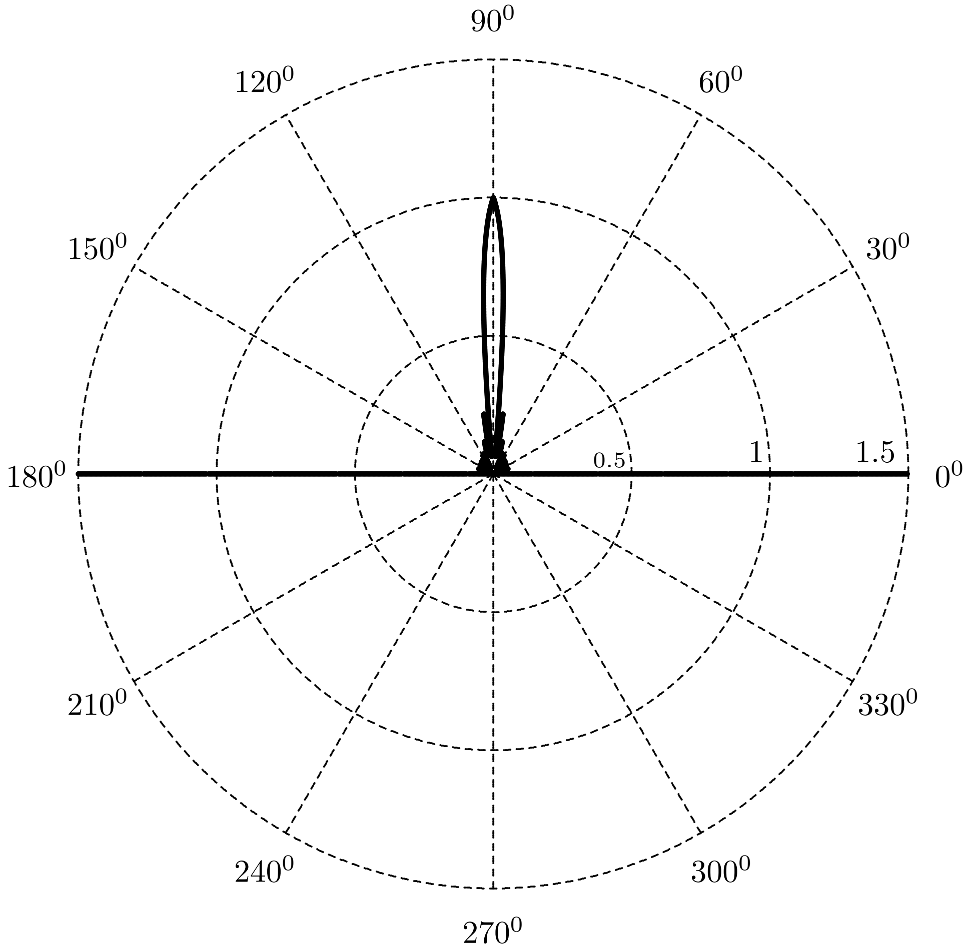
avendo posto $d = \dfrac{\lambda}{2}$ e $I_0 = 1$. Normalizzando a 1 si ha:

$$U\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) = \frac{1}{18} \frac{\sin(9\pi \cos\phi)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\phi\right)}$$

Poiché il sistema é dotato di riflettore, tutto il diagramma é proiettato in avanti ed il fattore di forma deve essere moltiplicato per 2. Essendo interessati al diagramma normalizzato, grafichiamo la funzione $U\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right)$

ϕ	$U(\phi)$
0	0
5	0.005
10	0.02
15	0.045
20	0.05
25	0.026
30	0.034
35	0.05
40	0.019
45	0.056

ϕ	$U(\phi)$
50	0.04
55	0.034
60	0.08
65	0.05
70	0.026
75	0.12
80	0.2
85	0.25
90	1



90^0
120^0
60^0
150^0
30^0
180^0
0.5
1
1.5
0^0
210^0
330^0
240^0
300^0
270^0

93-28) Esercizio n. 1 del 25/9/1993

Un'onda piana polarizzata ellitticamente, in aria, ha le seguenti componenti del campo elettrico:

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z),\ E_y = \sqrt{2} E_0 \cos(\omega t - \beta z - \pi/4),\ E_z = 0$$

Determinare il vettore campo magnetico e l'equazione dell'ellisse di polarizzazione. Graficare l'ellisse per punti e determinare il verso di rotazione del vettore $\vec{E}$.

Il vettore campo magnetico ha le seguenti componenti:

$$H_x = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sqrt{2} E_0 \cos\left(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

$$H_z = 0$$

L'equazione dell'ellisse di polarizzazione è:

$$\frac{E_x^2}{E_0^2} + \frac{E_y^2}{2E_0^2} - \frac{2E_x E_y}{\sqrt{2} E_0^2} \cos\frac{\pi}{4} = \sin^2\frac{\pi}{4}$$

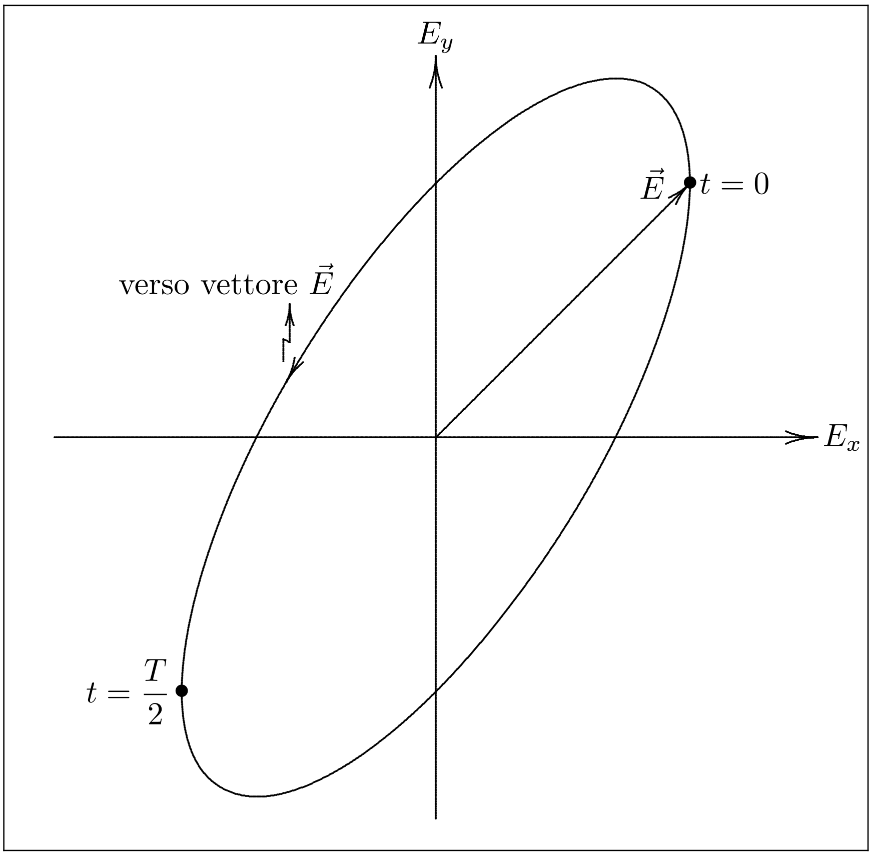
$$\frac{E_x^2}{E_0^2} + \frac{E_y^2}{2E_0^2} - \frac{E_x E_y}{E_0^2} = \frac{1}{2}$$

Grafico di $\vec{E}$ $$\begin{cases} E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z) = E_0 \cos\left(2\pi \frac{t}{T} - \beta z\right) \\ \\ E_y = \sqrt{2} E_0 \cos\left(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} E_0 \cos\left(2\pi \frac{t}{T} - \beta z - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}.$$

Nel piano $z = 0$ poniamo $E_0 = 4$ unità

t/T	E_x	E_y	t/T	E_x	E_y
0	4	4	0.55	-3.8	-5.04
0.05	3.8	5.04	0.6	-3.23	-5.58
0.1	3.236	5.587	0.65	-2.35	-5.587
0.15	2.35	5.58	0.7	-1.23	-5.040
0.2	1.236	5.04	0.75	0	-4
0.25	0	4	0.8	1.23	-2.568
0.3	-1.236	2.568	0.85	2.35	-0.885
0.35	-2.35	0.88	0.9	3.23	0.88
0.4	-3.23	-0.88	0.95	3.80	2.57
0.45	-3.80	-2.57	1	4	4
0.5	-4	-4	◇ ◇	◇ ◇	◇ ◇

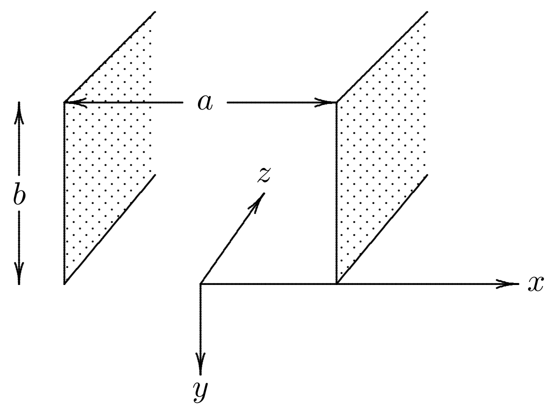
Ellisse di polarizzazione



93-29) Esercizio n. 2 del 25/9/1993

Una guida d'onda costituita da due lastre conduttrici parallele ($x = 0$ e $x = 10\,cm$) è eccitata nel modo TE_1 alla frequenza $f = 2\,GHz$. Se il dielettrico interno è aria, calcolare il valore massimo del campo elettrico se la potenza di eccitazione è $100\,W$ e la larghezza b lungo la direzione $\hat{y}$ è $50\,cm$.

La situazione è quella schematizzata in figura:



I campi trasversali competenti al modo TE sono:

$$\vec{E}_t = -i\frac{\omega\mu}{h^2}\hat{y}D\frac{p\pi}{a}\sin\frac{p\pi}{a}x e^{-i\beta z}$$

$$\vec{H}_t = i\frac{\beta}{h^2}\hat{x}D\frac{p\pi}{a}\sin\frac{p\pi}{a}x e^{-i\beta z}$$

La potenza trasportata nella direzione dell'asse z e confinata fra le lastre è:

$$P = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_S \left(\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*\right)\cdot\hat{z}\,da = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_S \frac{\omega\mu\beta}{h^4}\frac{p^2\pi^2}{a^2}D^2\sin^2\frac{p\pi}{a}x\,da$$

Nel nostro caso $h_1^2 = \dfrac{\pi^2}{a^2}$ e $p = 1$, quindi:

$$P = \frac{1}{2}\int_0^b\int_0^a \frac{\omega\mu\beta a^2}{\pi^2}D^2\sin^2\frac{\pi x}{a}\,dx\,dy$$

dove $\beta = \sqrt{\omega^2\epsilon\mu - \dfrac{\pi^2}{a^2}}$, ne segue:

$$P = \frac{1}{2}\frac{\omega\mu\beta a^2 b}{\pi^2}D^2\int_0^a \sin^2\frac{\pi}{a}x\,dx$$

Dal momento che

$$\int_0^a \sin^2 \frac{\pi}{a} x\, dx = \frac{1}{2} a$$

ne segue:

$$P = \frac{1}{4} \frac{\omega\mu\beta a^3 b}{\pi^2} D^2 \Longrightarrow D^2 = \frac{4\pi^2 P}{\omega\mu\beta a^3 b}$$

Il valore massimo del campo elettrico è:

$$|E|_{\mathrm{MAX}} = \frac{\omega\mu}{h^2} D \frac{\pi}{a} = \frac{\omega\mu}{h^2} \frac{\pi}{a} \frac{2\pi\sqrt{P}}{\sqrt{\omega\mu\beta a^3 b}} = \frac{\omega\mu a^2 2\pi^2 \sqrt{P}}{\pi^2 a^2 \sqrt{\omega\mu\beta a b}} =$$

$$= \frac{2\omega\mu\sqrt{P}}{\sqrt{\omega\mu\beta a b}} = 2\sqrt{\frac{\omega\mu P}{\beta a b}}$$

Il valore di β è:

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \epsilon\mu - \frac{\pi^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} = 27.706 \, \frac{rad}{m}$$

In definitiva il valore richiesto è:

$$|E|_{\mathrm{MAX}} = \underline{\underline{2135.3 \, \frac{V}{m}}}$$

93-30) Esercizio n. 3 del 25/9/1993

La lunghezza di una antenna rettilinea è un numero intero di mezze lunghezze d'onda. Scrivere l'espressione della resistenza di radiazione e calcolare il valore massimo della corrente di eccitazione perchè la potenza irradiata sia $50\,W$ nel caso di $n = 1, 2, 3$. Calcolare, altresì, la direttività dell'antenna nei tre casi.

La resistenza di radiazione è definita da:

$$R_a = \frac{2P_r}{|I|^2}$$

dove P_r è la potenza irradiata dall'antenna.

Sostituendo l'espressione di P_r si ha:

$$R_a = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left\{C + \ln 2kl - C_i 2kl + \frac{\sin 2kl}{2}\Big(S_i 4kl - 2S_i 2kl\Big) + \right.$$
$$\left. + \frac{\cos 2kl}{2}\Big(C + \ln kl + C_i 4kl - 2C_i 2kl\Big)\right\}$$

Poichè $2l = n\lambda$ si ha:

$$kl = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{\lambda}} n \frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{2}} = n\pi \qquad (n = 1, 2, 3)$$

Essendo quindi $\sin 2kl = \sin 2n\pi = 0$ si ha:

$$R_a = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left\{C + \ln 2kl - C_i 2kl + \frac{1}{2}\Big(C + \ln kl + C_i 4kl - 2C_i 2kl\Big)\right\} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left\{\frac{3}{2}C + \frac{3}{2}\ln 2kl - 2C_i 2kl + \frac{1}{2}C_i 4kl - \frac{1}{2}\ln 2\right\}$$

$$R_{a_{(n=1)}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left\{\frac{3}{2}C + \frac{3}{2}\ln 2\pi - 2C_i 2\pi + \frac{1}{2}C_i 4\pi - \frac{1}{2}\ln 2\right\}$$
$$R_{a_{(n=2)}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left\{\frac{3}{2}C + \frac{3}{2}\ln 4\pi - 2C_i 4\pi + \frac{1}{2}C_i 8\pi - \frac{1}{2}\ln 2\right\}$$
$$R_{a_{(n=3)}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left\{\frac{3}{2}C + \frac{3}{2}\ln 6\pi - 2C_i 6\pi + \frac{1}{2}C_i 12\pi - \frac{1}{2}\ln 2\right\}$$

dove $C = 0.577216$.

$$C_i 2\pi = C + \ln\pi + \ln 2 - 2.43765 = 1.72194 + \ln 2 - 2.43765 = -0.02256$$
$$C_i 4\pi = C + \ln\pi + \ln 4 - 3.11435 = 1.72194 + \ln 4 - 3.11435 = -0.00611$$
$$C_i 6\pi = C + \ln\pi + \ln 6 - 3.51647 = 1.72194 + \ln 6 - 3.51647 = -0.00277$$
$$C_i 8\pi = C + \ln\pi + \ln 8 - 3.80295 = 1.72194 + \ln 8 - 3.80295 = -0.001568$$

$C_i 12\pi =$ non c'é nelle tavole, quindi escludiamo $n = 3$.

Quindi nei due casi ($n = 1, 2$) otteniamo per la resistenza di radiazione e per le correnti:

$$R_{a_{(n=1)}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\Big\{3.3181\Big\} = 198.93\Omega$$

$$R_{a_{(n=2)}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\Big\{4.3272\Big\} = 259.43\Omega$$

$$(n=1) \longrightarrow |I|^2 = \frac{2P_r}{R_a} = \frac{100}{259.43} = 0.3854 \Longrightarrow I_{(n=1)} = 0.62\,A$$

$$(n=2) \longrightarrow |I|^2 = \frac{2P_r}{R_a} = \frac{100}{198.93} = 0.50268 \Longrightarrow I_{(n=2)} = 0.71\,A$$

Quanto sopra è stato eseguito, per errore, per il caso $2l = n\lambda$. Lasciamo il calcolo già fatto e deriviamo le formule nel caso dell'esercizio cioè $2l = n\dfrac{\lambda}{2}$.

$$2l = n\frac{\lambda}{2} \Longrightarrow kl = \frac{2\pi}{\cancel{\lambda}}n\frac{\cancel{\lambda}}{4} = n\frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, 3)$$

Poichè, quindi:

$$\sin 2kl = \sin n\pi = 0$$

$$\cos 2kl = \cos n\pi = \begin{cases} -1 & \text{per } n = 1 \\ +1 & \text{per } n = 2 \\ -1 & \text{per } n = 3 \end{cases}$$

si ha:

$$R_a = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left\{C + \ln(n\pi) - C_i n\pi + \frac{\cos n\pi}{2}\left[C + \ln\left(n\frac{\pi}{2}\right) + C_i 2n\pi - 2C_i n\pi\right]\right\}$$

$$R_{a_{(n=1)}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left\{\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\ln\pi + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}C_i 2\pi\right\}$$

$$R_{a_{(n=2)}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left\{\frac{3}{2}C + \frac{3}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln 2 - 2C_i 2\pi + \frac{1}{2}C_i 4\pi\right\}$$

$$R_{a_{(n=3)}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left\{\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\ln 3\pi + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}C_i 6\pi\right\}$$

$$C_i 3\pi = 1.72194 + \ln 3 - 2.80993 = 0.010622$$

Quindi:

$$R_{a_{(n=1)}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\Big\{1.2188\Big\} = 73.07\Omega$$

$$R_{a_{(n=2)}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\Big\{3.3181\Big\} = 198.93\Omega$$

$$R_{a_{(n=3)}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\Big\{1.7582\Big\} = 105.41\Omega$$

$$(n=1) \longrightarrow |I|^2 = \frac{2P_r}{R_a} = \frac{100}{73.07} = 1.368 \Longrightarrow I_{(n=1)} = 1.17\,A$$

$$(n=2) \longrightarrow |I|^2 = \frac{2P_r}{R_a} = \frac{100}{198.93} = 0.5 \Longrightarrow I_{(n=2)} = 0.7\,A$$

$$(n=3) \longrightarrow |I|^2 = \frac{2P_r}{R_a} = \frac{100}{105.41} = 0.95 \Longrightarrow I_{(n=3)} = 0.97\,A$$

La direttività nei tre casi è:

$$D = \frac{4\pi r^2 \big(S_r\big)_{\max}}{P}$$

$$\begin{matrix} n=1 \\ \left(kl = \frac{\pi}{2}\right) \end{matrix} \qquad \Big(S_r\Big)_{\mathrm{MAX}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{8\pi^2 r^2}\,; \quad P = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi}1.2188 \Longrightarrow D = 1.64$$

$$\begin{matrix} n=2 \\ (kl = \pi) \end{matrix} \qquad \Big(S_r\Big)_{\mathrm{MAX}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{8\pi^2 r^2}4\,; \quad P = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi}3.3181 \Longrightarrow D = 2.41$$

$$\begin{matrix} n=3 \\ \left(kl = 3\frac{\pi}{2}\right) \end{matrix} \qquad \Big(S_r\Big)_{\mathrm{MAX}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{8\pi^2 r^2}1.957\,; \quad P = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi}1.7582 \Longrightarrow D = 2.226$$

93-31) Esercizio n. 4 del 25/9/1993

La densità superficiale di potenza, mediata in un periodo, della luce solare sulla superficie terrestre è approssimativamente $1.4 \cdot 10^3\, W/m^2$. In approssimazione di onda piana calcolare i moduli del campo elettrico e del campo magnetico nonchè la pressione di radiazione esercitata sulla superficie terrestre assumendola perfettamente assorbente.

Si ha:

$$\mathscr{P} = \left| < \vec{S} \cdot \hat{n} > \right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \Longrightarrow E_0^2 = 2\mathscr{P}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 2 \cdot 1,4 \cdot 10^3 \cdot 376,7 = 1054760$$

$$|E_0| = 1027\, V/m$$

ed anche

$$H_0 = \frac{E_0}{Z} = 2.7\, A/m$$

Infine

$$\vec{t} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 \widehat{n} \quad \text{(pressione di radiazione, mediata in un periodo, anche se l'onda non è polarizzata)}$$

Ne segue:

$$< t > = \frac{\mathscr{P}}{c} = \underline{\underline{4.67 \cdot 10^{-6}\, N/m^2}}$$

93-32) Esercizio n. 1 del 4/12/1993

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $f = 1.5\,MHz$ si propaga in un gas ionizzato caratterizzato da una frequenza di plasma $\omega_p = 2\pi \cdot 1.4\,MHz$. La frequenza delle collisioni è $\omega_{eff} = 2\pi \cdot 10^4\,Hz$. Descrivendo il mezzo come dielettrico con perdite, calcolare la conducibilità, la costante dielettrica, il coefficiente di attenuazione e la costante di propagazione dell'onda elettromagnetica. Calcolare la frequenza al di sotto della quale l'onda elettromagnetica non si propaga.

Il plasma (ionosfera) è equivalente ad un mezzo con:

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \omega_{eff} \omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} \qquad \epsilon_r = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}\right)$$

$$f = 1.5\,MHz$$

$$\sigma = 4.8459 \cdot 10^{-7}\,S/m \qquad \epsilon_r = 0.128927$$

Poichè $\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega} = 0.045042 \ll 1$ si ha:

$$\alpha = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_r}} = 2.5422 \cdot 10^{-4}\,N_p/m$$
$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon} = 0.011288\,rad/m$$

$$f = 2\,MHz$$

$$\sigma = 2.72586 \cdot 10^{-7}\,S/m \qquad \epsilon_r = 0.51$$

$$\alpha = 7.19 \cdot 10^{-5}\,N_p/m$$
$$\beta = 0.0299\,rad/m$$

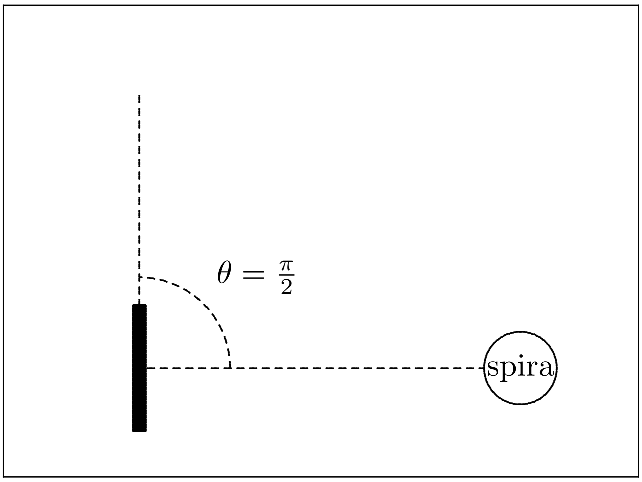
L'onda non si propaga se $\beta = 0$ cioè

$$\epsilon_r = 0 \Longrightarrow \omega^2 = \omega_p^2 - \omega_{eff}^2 = 7.7373 \cdot 10^{13} \Longrightarrow f_c = 1.399964\,MHz$$

ciò dalla formule generale.

93-33) Esercizio n. 2 del 4/12/1993

Un piccolo avvolgimento costituito da $N = 10$ spire di raggio $r_0 = 5\,cm$ viene utilizzato come antenna ricevente. Esso dista $10\,Km$ da un dipolo hertziano ed è orientato in modo tale che il flusso del campo magnetico, generato dal dipolo, attraverso la sua superficie risulti massimo. Calcolare la f.e.m. massima indotta nell'avvolgimento quando la potenza di eccitazione del dipolo è $5\,W$ e la frequenza è $f = 27\,MHz$.



IL campo elettromagnetico generato da un dipolo hertziano è:

$$\vec{E} = -\hat{e}_\theta i\omega\mu Il\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\sin\theta e^{-i\omega t}$$

$$\vec{H} = -\hat{e}_\phi ikIl\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\sin\theta e^{-i\omega t}$$

dove $\hat{e}_\phi$ è uscente dalla pagina. La potenza emessa è

$$P = \frac{4}{3}\pi Z\left\{\frac{kIl}{4\pi}\right\}^2$$

Per essere il flusso massimo deve essere $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. La parte reale di $\vec{H}$ è

$$\text{Re}(\vec{H}) = -\hat{e}_\phi kIl\frac{1}{4\pi r}\sin\theta\sin(\omega t - kr)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = -\hat{e}_\phi\frac{kIl}{4\pi}\mu_0\frac{\sin\theta}{r}\sin(\omega t - kr)$$

Per $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ si ha:

$$\Phi(\vec{B}) = NBS = N\frac{kIl}{4\pi}\mu_0\frac{\pi r_0^2}{r}\sin(\omega t - kr)$$

ed anche

$$f.e.m = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -N\frac{kIl}{4\pi}\mu_0\frac{\pi r_0^2\omega}{r}\cos(\omega t - kr)$$

La formula del flusso è stata ottenuta considerando la spira piccola ($r_0 \ll r$) cioè ritenendo B costante su S.

$$|f.e.m._{\text{MAX}}| = N\frac{kIl}{4\pi}\mu_0\frac{\pi r_0^2\omega}{r}$$

Ma

$$\frac{kIl}{4\pi} = \sqrt{\frac{3P_r}{4\pi Z}}$$

ne segue in definitiva:

$$|f.e.m._{\text{MAX}}| = N\sqrt{\frac{3P_r}{4\pi Z}}\mu_0\frac{\pi r_0^2\omega}{r} = 9.42\cdot 10^{-5}\,V = \underline{\underline{0.094\,mV}}$$

Fine Esercizi Campi e.m. - 1993