Esercizi svolti di Campi elettromagnetici - Anno 2012

12-1) Esercizio n. 1 del 4/7/2012

Un'onda elettromagnetica piana, viaggiante in aria e di frequenza $\nu = 4\ GHz$, attraversa uno strato d'acqua di spessore $d = 1\ cm$ per poi immettersi di nuovo in aria. L'indice di rifrazione dell'acqua relativo alla frequenza data é: $n_r = 8.670$ e $n_i = 0.8406$. Calcolare il coefficiente di riflessione.

(vedi es. n.3 del 4/11/2011)

Il sistema puó essere considerato come una lamina piana assorbente (acqua) posta fra l'aria e il vetro.

Dalla teoria delle lamine piane assorbenti si deduce che il coefficiente di riflessione é:

$$R=\frac{|r_{12}|^2+e^{-\left(4\pi n_i\frac{d}{\lambda_0}\right)}\left[2\Re(r_{12}^*r_{23})\cos\left(4\pi n_r\frac{d}{\lambda_0}\right)-2\Im(r_{12}^*r_{23})\sin\left(4\pi n_r\frac{d}{\lambda_0}\right)\right]+|r_{23}|^2e^{-\left(8\pi n_i\frac{d}{\lambda_0}\right)}}{1+e^{-\left(4\pi n_i\frac{d}{\lambda_0}\right)}\left[2\Re(r_{12}r_{23})\cos\left(4\pi n_r\frac{d}{\lambda_0}\right)-2\Im(r_{12}r_{23})\sin\left(4\pi n_r\frac{d}{\lambda_0}\right)\right]+|r_{12}|^2|r_{23}|^2e^{-\left(8\pi n_i\frac{d}{\lambda_0}\right)}}$$

Cominciamo con il calcolare alcune quantitá che servono per la valutazione dei coefficienti che figurano nella formula della riflettivitá.:

$$(n_1 - n_r) = (1 - 8.670) = -7.670;\ (n_1 + n_r) = (1 + 8.670) = 9.670$$

$$(n_r - n_3) = (8.670 - 1) = 7.670;\ (n_r + n_3) = (8.670 + 1) = 9.670$$

$$\left[(n_1 - n_r)(n_1 + n_r) - n_i^2\right] = -7.670 \cdot 9.670 - (0.8406)^2 = -74.87550836$$

$$\left[(n_r - n_3)(n_r + n_3) + n_i^2\right] = +7.670 \cdot 9.670 + (0.8406)^2 = +74.87550836$$

$$\left[(n_1 + n_r)^2 + n_i^2\right] = (9.670)^2 + (0.8406)^2 = 94.21550836$$

$$\left[(n_1 - n_r)^2 + n_i^2\right] = (-7.670)^2 + (0.8406)^2 = 59.53550836$$

$$\left[(n_r + n_3)^2 + n_i^2\right] = (9.670)^2 + (0.8406)^2 = 94.21550836$$

$$\left[(n_r - n_3)^2 + n_i^2\right] = (7.670)^2 + (0.8406)^2 = 59.53550836$$

$$4n_i^2 n_1 n_3 = 4 \cdot (0.8406)^2 = 2.82643344$$

$$\begin{aligned}\Re(r_{12}^*r_{23}) =& \frac{\left[(n_1-n_r)(n_1+n_r)-n_i^2\right]\left[(n_r-n_3)(n_r+n_3)+n_i^2\right]-4n_i^2n_1n_3}{\left[(n_1+n_r)^2+n_i^2\right]\left[(n_r+n_3)^2+n_i^2\right]} \simeq \\ \simeq& \frac{(-74.87550836)(+74.87550836)-2.82643344}{94.21550836\cdot 94.21550836} \simeq -\frac{5609.16818560}{8876.56201553323} \simeq \\ \simeq& -0.631907733623\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Im(r_{12}^*r_{23}) =& \frac{2n_in_3\left[(n_1-n_r)(n_1+n_r)-n_i^2\right]+2n_in_1\left[(n_r-n_3)(n_r+n_3)+n_i^2\right]}{\left[(n_1+n_r)^2+n_i^2\right]\left[(n_r+n_3)^2+n_i^2\right]} \simeq \\ \simeq& \frac{2\cdot 0.8406\cdot(-74.87550836)+2\cdot 0.8406\cdot(+74.87550836)}{8876.56201553323} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Re(r_{12}r_{23}) =& \frac{\left[(n_1-n_r)(n_1+n_r)-n_i^2\right]\left[(n_r-n_3)(n_r+n_3)+n_i^2\right]+4n_i^2n_1n_3}{\left[(n_1+n_r)^2+n_i^2\right]\left[(n_r+n_3)^2+n_i^2\right]} \simeq \\ \simeq& \frac{(-74.87550836)(+74.87550836)+2.82643344}{8876.56201553323} \simeq -\frac{5603.51531873843}{8876.56201553323} \simeq \\ \simeq& -0.631270902960263\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Im(r_{12}r_{23}) =& \frac{2n_in_3\left[(n_1-n_r)(n_1+n_r)-n_i^2\right]-2n_in_1\left[(n_r-n_3)(n_r+n_3)+n_i^2\right]}{\left[(n_1+n_r)^2+n_i^2\right]\left[(n_r+n_3)^2+n_i^2\right]} \simeq \\ \simeq& \frac{2\cdot 0.8406\cdot(-74.87550836)-2\cdot 0.8406\cdot(+74.87550836)}{8876.56201553323} \simeq \\ \simeq& -\frac{251.761409309664}{8876.56201553323} \simeq -0.0283624908910796\end{aligned}$$

Inoltre:

$$\Re(r_{12}) = \frac{n_1^2-n_r^2-n_i^2}{(n_1+n_r)^2+n_i^2} \simeq \frac{1-(8.670)^2-(0.8406)^2}{94.21550836} \simeq -\frac{74.8755083}{94.21550836} \simeq -0.7947259391$$

$$\Re(r_{23}) = \frac{n_r^2-n_3^2+n_i^2}{(n_r+n_3)^2+n_i^2} \simeq \frac{(8.670)^2-1+(0.8406)^2}{94.21550836} \simeq +\frac{74.8755083}{94.21550836} \simeq +0.7947259391$$

$$\Im(r_{12}) = \frac{-2n_in_1}{(n_1+n_r)^2+n_i^2} \simeq -\frac{2\cdot 0.8406}{94.21550836} \simeq -0.017844196027432$$

$$\Im(r_{23}) = \frac{2n_in_3}{(n_r+n_3)^2+n_i^2} \simeq +\frac{2\cdot 0.8406}{94.21550836} \simeq +0.017844196027432$$

$$|r_{12}|^2 = \frac{(n_1-n_r)^2+n_i^2}{(n_1+n_r)^2+n_i^2} \simeq \frac{59.53550836}{94.21550836} \simeq +0.631907733623993$$

$$|r_{23}|^2 = \frac{(n_r-n_3)^2+n_i^2}{(n_r+n_3)^2+n_i^2} \simeq \frac{59.53550836}{94.21550836} \simeq +0.631907733623993$$

$$\frac{d}{\lambda_0} = \frac{d\nu}{c} = \frac{10^{-2}\cdot 4\cdot 10^9}{3\cdot 10^8} = 0.133333333333333$$

$$\sin\left(4\pi n_r\frac{d}{\lambda_0}\right) = \sin\left(4\pi\cdot 8.670\cdot 0.133333333333333\right) \simeq +0.925077206834472$$

$$\cos\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) = \cos\left(4\pi \cdot 8.670 \cdot 0.133333333333333\right) \simeq -0.379779095521$$

$$\exp\left[-\left(4\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)\right] \simeq \exp\left[-(4\pi \cdot 0.8406 \cdot 0.133333333333333)\right] \simeq$$
$$\simeq \exp(-1.40843881845737) \simeq 0.244524732819467$$

$$\exp\left[-\left(8\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)\right] \simeq \exp\left[-(8\pi \cdot 8.670 \cdot 0.133333333333333)\right] \simeq$$
$$\simeq \exp(-2.81687763691475) \simeq 0.0597923449604312$$

Calcoliamo alcune espressioni parziali contenute nella espressione del coefficiente di riflessione:

$$1)\quad 2\Re(r_{12}^* r_{23}) \cos\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) - 2\Im(r_{12}^* r_{23}) \sin\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) =$$
$$\simeq 2 \cdot (-0.631907733623) \cdot (-0.379779095521) = 0.479970695056136$$

$$2)\quad |r_{23}|^2 e^{-\left(8\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)} = 0.631907733623993 \cdot 0.0597923449604312 = 0.0377832451920101$$

$$3)\quad 2\Re(r_{12} r_{23}) \cos\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) - 2\Im(r_{12} r_{23}) \sin\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) =$$
$$\simeq 2 \cdot (-0.631270902960263) \cdot (-0.379779095521) -$$
$$-2 \cdot (-0.0283624908910796) \cdot 0.925077206834472 \simeq 0.531961972814723$$

$$4)\quad |r_{12}|^2 |r_{23}|^2 e^{-\left(8\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)} =$$
$$(0.631907733623993)^2 \cdot 0.0597923449604312 = 0.0238755248382427$$

Finalmente:

$$R = \frac{0.631907733623993 + 0.244524732819467 \cdot 0.479970695056136 + 0.0377832451920101}{1 + 0.244524732819467 \cdot 0.531961972814723 + 0.0238755248382427} \simeq$$
$$\simeq \frac{0.787055684785779}{1.15395338411088} \simeq \underline{\underline{0.68205 \simeq 68.2\%}}$$

12-2) Esercizio n. 2 del 4/7/2012

Con riferimento al problema precedente si valuti il coefficiente di trasmissione.

Poiché risulta, in questo caso:

$$\frac{\beta_3 \mu_1}{\beta_1 \mu_3} = \frac{n_3}{n_1}$$

il coefficiente di trasmissione é:

$$T = \frac{\frac{n_3}{n_1}\left[1 + 2\Re(r_{12}) + |r_{12}|^2\right]\left[1 + 2\Re(r_{23}) + |r_{23}|^2\right] e^{-\left(4\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)}}{1 + e^{-\left(4\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)}\left[2\Re(r_{12}r_{23})\cos\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) - 2\Im(r_{12}r_{23})\sin\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right)\right] + |r_{12}|^2|r_{23}|^2 e^{-\left(8\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)}}$$

Poiché il coefficiente di trasmissione ha lo stesso denominatore del coefficiente di riflessione, procediamo al calcolo del solo numeratore. Per questo calcoliamo le espressioni parziali contenute nel numeratore:

$$\left[1 + 2\Re(r_{12}) + |r_{12}|^2\right] = 1 + 2(-0.7947259391) + 0.631907733623993 = 0.042455855423993$$

$$\left[1 + 2\Re(r_{23}) + |r_{23}|^2\right] = 1 + 2(+0.7947259391) + 0.631907733623993 = 3.22135961182399$$

Finalmente:

$$T = \frac{0.042455855423993 \cdot 3.22135961182399 \cdot 0.244524732819467}{1.15395338411088} \simeq$$
$$\simeq \frac{0.0334425664067055}{1.15395338411088} \simeq \underline{\underline{0.02898 \simeq 2.9\%}}$$

12-3) Esercizio n. 1 del 19/7/2012

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 1.2\ MHz$, viaggiante in aria, incide su un terreno i cui parametri costitutivi sono:

$$\epsilon_r = 11, \quad \mu_r \simeq 1, \quad \sigma = 1.3 \cdot 10^{-3}$$

Graficare il coefficiente di riflessione $R_\perp$ in funzione dell'angolo di incidenza.

(vedi es. n.3 del 29/7/2011)

Calcoliamo, relativamente al mezzo conduttore, il rapporto $\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}$:

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{1.3 \cdot 10^{-3}}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 11 \cdot 2\pi \cdot 1.2 \cdot 10^{6}} = 1.7703129044 \Longrightarrow \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 = 3.1340077797$$

da cui:

$$\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} = \sqrt{1 + 3.1340077797} \simeq 2.0332259539$$

$$\begin{aligned}\beta_2 =& \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_r\epsilon_r}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}\right]} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{11}{2}(1 + 2.0332259539)} \simeq \\ \simeq& 4.0844513397\frac{\omega}{c}\ \ (rad/m)\end{aligned}$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_r\epsilon_r}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} - 1\right]} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{11}{2}(2.0332259539 - 1)} \simeq 2.3838504035\frac{\omega}{c}\ \ \left(m^{-1}\right)$$

da cui risulta:

$$\beta_2^2 - \alpha_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\mu_r\epsilon_r}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}\right] - \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\mu_r\epsilon_r}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} - 1\right] = \frac{\omega^2}{c^2}\mu_r\epsilon_r = 11\frac{\omega^2}{c^2}$$

Si ha anche:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} \simeq 0.0251327412\ \ (rad/m)$$

$$\begin{aligned}p^2(\theta_0) =& \frac{1}{2}\left[-\beta_2^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2\sin^2\theta_0 + \sqrt{4\beta_2^2\alpha_2^2 + \left(\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2\sin^2\theta_0\right)^2}\right] \simeq \\ \simeq& \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left\{-11 + \sin^2\theta_0 + \sqrt{379.2149413193 + \left(11 - \sin^2\theta_0\right)^2}\right\}\end{aligned}$$

$$q^2(\theta_0) = \frac{1}{2}\left[\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2\theta_0 + \sqrt{4\beta_2^2\alpha_2^2 + \left(\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2\theta_0\right)^2}\right] \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left\{11 - \sin^2\theta_0 + \sqrt{379.2149413193 + \left(11 - \sin^2\theta_0\right)^2}\right\}$$

Il coefficiente di riflessione $R_\perp$, per $\mu_1 \simeq \mu_2$, é:

$$R_\perp = \rho_\perp^2 = \frac{(q - \beta_1 \cos\theta_0)^2 + p^2}{(q + \beta_1 \cos\theta_0)^2 + p^2}$$

Il coefficiente di riflessione $R_\parallel$, per $\mu_1 \simeq \mu_2$, é:

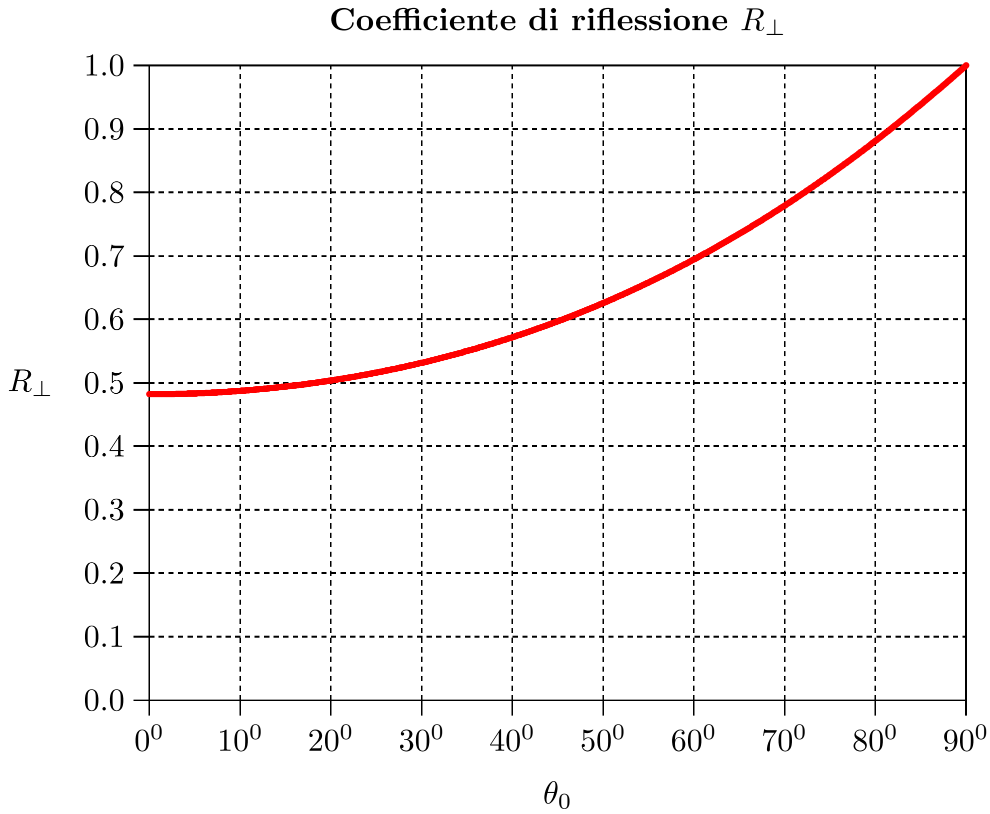
$$R_\parallel = \rho_\parallel^2 = \rho_\perp^2 \frac{(q - \beta_1 \sin\theta_0 \tan\theta_0)^2 + p^2}{(q + \beta_1 \sin\theta_0 \tan\theta_0)^2 + p^2}$$

θ_0	$\frac{p^2c^2}{\omega^2}$	$\frac{qc}{\omega}$	*Num.* $R_\perp$	*Den.* $R_\perp$	$R_\perp$	*Num.* $R_\parallel/\rho_\perp^2$	*Den.* $R_\parallel/\rho_\perp^2$	$R_\parallel$
0^0	5.6827	4.0845	15.197	31.534	0.48191	22.365	22.365	0.48191
5^0	5.6847	4.0838	15.218	31.491	0.48325	22.3	22.424	0.48056
10^0	5.6904	4.0817	15.281	31.36	0.48728	22.102	22.602	0.47651
15^0	5.6998	4.0783	15.387	31.144	0.49405	21.772	22.903	0.46965
20^0	5.7126	4.0738	15.535	30.847	0.50361	21.309	23.338	0.45984
25^0	5.7284	4.0681	15.726	30.474	0.51604	20.714	23.92	0.44686
30^0	5.7468	4.0616	15.959	30.029	0.53145	19.982	24.672	0.43042
35^0	5.7673	4.0544	16.234	29.519	0.54996	19.11	25.624	0.41016
40^0	5.7892	4.0467	16.552	28.952	0.57171	18.091	26.821	0.38561
45^0	5.8119	4.0388	16.912	28.336	0.59685	16.912	228.336	0.35623
50^0	5.8348	4.0309	17.314	27.678	0.62555	15.556	30.276	0.32142
55^0	5.8571	4.0232	17.757	26.987	0.65797	13.999	32.825	0.2806
60^0	5.8782	4.016	18.24	26.272	0.69428	12.208	36.304	0.23347
65^0	5.8973	4.0095	18.763	25.541	0.73462	10.165	41.336	0.18065
70^0	5.9138	4.0039	19.323	24.8	0.77913	7.9361	49.284	0.12546
71^0	5.9168	4.0028	19.439	24.652	0.78854	7.4965	51.464	0.11486
72^0	5.9196	4.0019	19.557	24.504	0.79813	7.0749	53.93	0.1047
73^0	5.9223	4.001	19.676	24.355	0.80788	6.6845	56.744	0.09517
74^0	5.9249	4.0001	19.797	24.207	0.81781	6.3445	59.983	0.086501
75^0	5.9273	3.9993	19.918	24.059	0.82791	6.0829	63.751	0.078996
76^0	5.9296	3.9985	20.042	23.911	0.83818	5.941	68.184	0.073032
77^0	5.9318	3.9978	20.166	23.763	0.84862	5.9813	73.472	0.069087
$77^0.1$	5.932	3.9977	20.179	23.749	0.84968	5.9987	74.056	0.068825
$77^0.2$	5.9322	3.9977	20.191	23.734	0.85073	6.0189	74.653	0.06859
$77^0.3$	5.9324	3.9976	20.204	23.719	0.85179	6.0421	75.261	0.068383
$77^0.4$	5.9326	3.9975	20.216	23.704	0.85285	6.0684	75.881	0.068204

$77^0.5$	5.9328	3.9975	20.229	23.69	0.85391	6.0979	76.514	0.068054
$77^0.6$	5.933	3.9974	20.241	23.675	0.85497	6.1308	77.159	0.067933
$77^0.7$	5.9332	3.9973	20.254	23.66	0.85604	6.1673	77.817	0.067843
$77^0.8$	5.9334	3.9973	20.267	23.646	0.8571	6.2074	78.489	0.067785
$77^0.9$	5.9336	3.9972	20.279	23.631	0.85817	6.2514	79.175	0.067758
78^0	5.9338	3.9971	20.292	23.616	0.85924	6.2994	79.876	0.067764
79^0	5.9356	3.9965	20.419	23.469	0.87003	7.0455	87.775	0.069836
80^0	5.9373	3.9959	20.547	23.323	0.88099	8.4628	97.734	0.076286
81^0	5.9388	3.9954	20.677	23.177	0.89213	10.959	110.62	0.088383
82^0	5.9402	3.9949	20.807	23.031	0.90344	15.25	127.85	0.10777
83^0	5.9415	3.9945	20.939	22.886	0.91492	22.662	151.82	0.13657
84^0	5.9425	3.9942	21.072	22.742	0.92657	35.842	187.02	0.17758
85^0	5.9434	3.9939	21.206	22.598	0.93839	60.595	242.5	0.23448
86^0	5.9442	3.9936	21.341	22.455	0.95038	111.46	339.35	0.31216
87^0	5.9447	3.9934	21.477	22.313	0.96253	232.8	537.17	0.41713
88^0	5.9452	3.9933	21.614	22.171	0.97486	612.36	1069.5	0.55817
89^0	5.9454	3.9932	21.752	22.031	0.98735	2845.6	3760.5	0.74712
90^0	5.9455	3.9932	21.891	21.891	1	∞	∞	1

Per $\theta_0 = 90^0$ $R_\parallel$ é una forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$ che determinata (dividendo numeratore e denominatore per $\tan\theta_0$) risulta 1.

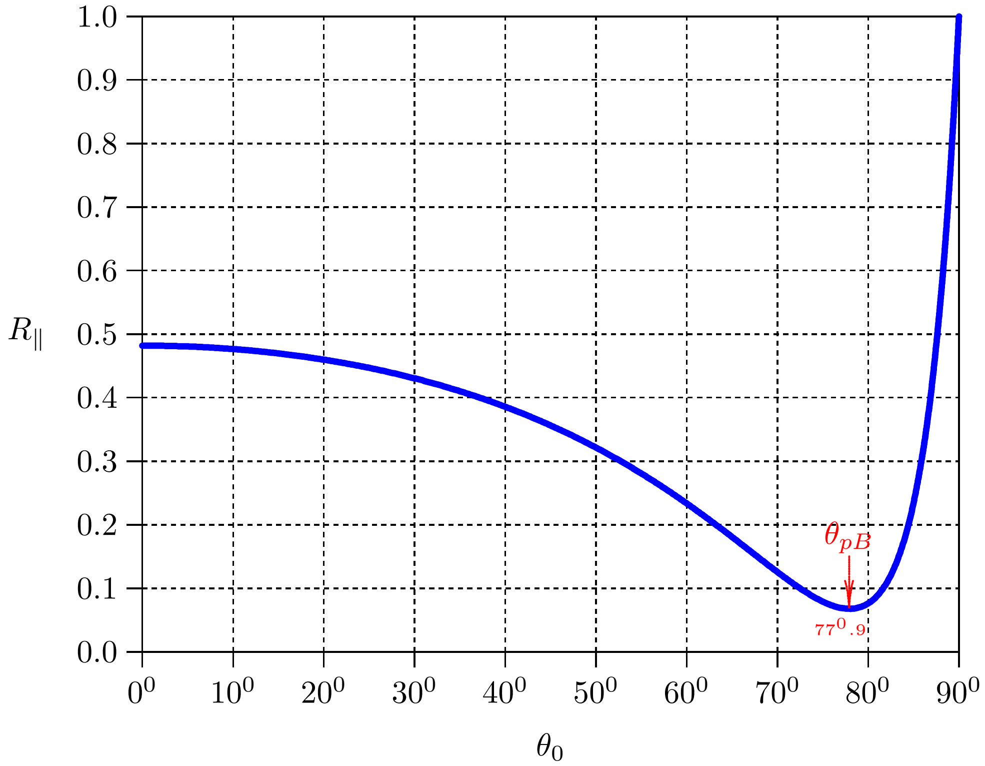
I numeratori ed i denominatori di $R_\perp$ e $R_\parallel$ indicati in tabella sono calcolati a meno di $\dfrac{\omega}{c}$.


Coefficiente di riflessione $R_\perp$
$R_\perp$
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0^0
10^0
20^0
30^0
40^0
50^0
60^0
70^0
80^0
90^0
θ_0

12-4) Esercizio n. 2 del 19/7/2012

Con riferimento al problema precedente si grafichi il coefficiente di riflessione $R_\parallel$ in funzione dell'angolo di incidenza. Si valuti l'angolo pseudoBrewster ed il valore del coefficiente di riflessione ad esso corrispondente.

Coefficiente di riflessione $R_\parallel$



Dalla tabella dell'esercizio precedente e dal grafico di $R_\parallel$ si deduce che **l'angolo pseudoBrewster θ_{pB} vale $77^0.9$ ed il valore minimo del coefficiente di riflessione, in corrispondenza di tale angolo, é** $\simeq 6.78\%$.

12-5) Esercizio n. 1 del 26/7/2012

Un fascio di microonde in banda Ka, viaggiante in aria e di lunghezza d'onda relativa al vuoto $\lambda_0 = 1\ cm$ ($\nu = 30\ GHz$), incide, in direzione della normale, su uno strato di materiale dielettrico, di spessore $d = 1\ mm$ e di indice di rifrazione n_2, posto sulla superficie di un mezzo costituito di paraffina di indice di rifrazione $n_3 = 1.5$. Si grafichi il coefficente di riflessione in funzione di n_2 per valori compresi fra 2 e 10. Si valutino i valori di n_2 per cui si ha un massimo e quelli per cui si ha un minimo del coefficiente di riflessione. Si valutino tali valori massimi e minimi.

Il sistema considerato é una lamina piana dielettrica posta fra due mezzi dielettrici. Dalla teoria sappiamo che la funzione riflettivitá é:

$$R = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\beta_2 d}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\beta_2 d}$$

$$r_{12} = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \qquad r_{23} = \frac{\beta_2 - \beta_3}{\beta_2 + \beta_3} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}$$

$$\beta_2 d = 2\pi\frac{n_2 d}{\lambda_0} \Longrightarrow \sin^2\beta_2 d = \sin^2\frac{2\pi}{\lambda_0}(n_2 d)$$

n_2	r_{12}	r_{23}	$\beta_2 d$	$\sin^2\beta_2 d$	$Num.$	$Den.$	R
2.0	−0.3333	0.1429	1.25663	0.9045	0.2086	1.0793	0.1933
2.1	−0.3548	0.1667	1.3195	0.9382	0.2573	1.1072	0.2324
2.2	−0.3750	0.1892	1.3823	0.9649	0.3084	1.1370	0.2712
2.3	−0.3940	0.2105	1.4451	0.9843	0.3602	1.1675	0.3085
2.4	−0.4118	0.2308	1.5080	0.9961	0.4115	1.1976	0.3436
2.5	−0.4286	0.2500	1.5708	$\simeq 1$	0.4605	1.2258	0.3757
2.6	−0.4444	0.2683	1.6336	0.9961	0.5061	1.2508	0.4046
2.7	−0.4595	0.2857	1.6965	0.9843	0.5471	1.2715	0.4303
2.8	−0.4737	0.3023	1.7593	0.9649	0.5821	1.2868	0.4524
2.9	−0.4872	0.3182	1.8221	0.9382	0.6103	1.2958	0.4710
3.0	−0.5000	0.3333	1.8850	0.9045	0.6307	1.2974	0.4861
3.1	−0.5122	0.3478	1.9478	0.8645	0.6430	1.2915	0.4979
3.2	−0.5238	0.3617	2.0106	0.8187	0.6467	1.2774	0.5063
3.3	−0.5349	0.3750	2.0735	0.7679	0.6417	1.2552	0.5112
3.4	−0.5455	0.3878	2.1363	0.7129	0.6281	1.2249	0.5128
3.5	−0.5556	0.4000	2.1991	0.6545	0.6060	1.1867	0.5107
3.6	−0.5652	0.4118	2.2619	0.5937	0.5763	1.1414	0.5049
3.7	−0.5745	0.4231	2.3248	0.5314	0.5396	1.0896	0.4952
3.8	−0.5833	0.4340	2.3876	0.4686	0.4968	1.0323	0.4813

3.9	−0.5918	0.4444	2.4504	0.4063	0.4491	0.9706	0.4627
4.0	−0.6000	0.4545	2.5133	0.3455	0.3980	0.9058	0.4394
4.1	−0.6078	0.4643	2.5761	0.2871	0.3447	0.8393	0.4107
4.2	−0.6154	0.4737	2.6389	0.2321	0.2907	0.7726	0.3763
4.3	−0.6226	0.4828	2.7018	0.1813	0.2375	0.7072	0.3358
4.4	−0.6296	0.4915	2.7646	0.1355	0.1868	0.6446	0.2898
4.5	−0.6364	0.5000	2.8274	0.0955	0.1402	0.5864	0.2391
4.6	−0.6429	0.5082	2.8903	0.0618	0.0989	0.5341	0.1852
4.7	−0.6491	0.5161	2.9531	0.0351	0.0647	0.4893	0.1322
4.8	−0.6552	0.5238	3.0159	0.0157	0.0388	0.4529	0.0857
4.9	−0.6610	0.5312	3.0788	0.0039	0.0223	0.4265	0.0523
5.0	−0.6667	0.5385	3.1415	0.0000	0.0164	0.4108	0.04
5.1	−0.6721	0.5454	3.2044	0.0039	0.0217	0.4070	0.0533
5.2	−0.6774	0.5522	3.2673	0.0157	0.0392	0.4153	0.0944
5.3	−0.6825	0.5588	3.3301	0.0351	0.0688	0.4362	0.1577
5.4	−0.6875	0.5652	3.3929	0.0618	0.1110	0.4699	0.2362
5.5	−0.6923	0.5714	3.4558	0.0955	0.1657	0.5164	0.3209
5.6	−0.6970	0.5775	3.5186	0.1355	0.2324	0.5751	0.4041
5.7	−0.7015	0.5833	3.5814	0.1812	0.3105	0.6456	0.4809
5.8	−0.7059	0.5890	3.6442	0.2320	0.3995	0.7272	0.5494
5.9	−0.7101	0.5946	3.7071	0.2871	0.4982	0.8190	0.6083
6.0	−0.7143	0.6000	3.7699	0.3455	0.6054	0.9188	0.6589
6.1	−0.7183	0.6053	3.8327	0.4063	0.7194	1.0261	0.7011
6.2	−0.7222	0.6104	3.8956	0.4686	0.8388	1.1390	0.7364
6.3	−0.7260	0.6154	3.9584	0.5314	0.9619	1.2557	0.7660
6.4	−0.7297	0.6202	4.0212	0.5937	1.0867	1.3744	0.7907
6.5	−0.7333	0.6250	4.0841	0.6545	1.2116	1.4933	0.8114
6.6	−0.7368	0.6296	4.1469	0.7129	1.3343	1.6102	0.8286
6.7	−0.7403	0.6341	4.2097	0.7679	1.4532	1.7234	0.8432
6.8	−0.7436	0.6386	4.2726	0.8187	1.5661	1.8308	0.8554
6.9	−0.7468	0.6429	4.3354	0.8645	1.6710	1.9305	0.8656
7.0	−0.7500	0.6471	4.3982	0.9045	1.7665	2.0208	0.8742
7.1	−0.7531	0.6512	4.4611	0.9382	1.8508	2.1001	0.8813
7.2	−0.7561	0.6552	4.5239	0.9649	1.9222	2.1667	0.8872
7.3	−0.7590	0.6591	4.5867	0.9843	1.9796	2.2194	0.8920
7.4	−0.7619	0.6629	4.6496	0.9961	2.0222	2.2573	0.8958
7.5	−0.7647	0.6667	4.7124	$\simeq 1$	2.0489	2.9796	0.8988
7.6	−0.7674	0.6703	4.7752	0.9961	2.0590	2.2853	0.9010
7.7	−0.7701	0.6739	4.8381	0.9843	2.0525	2.2747	0.9023
7.8	−0.7727	0.6774	4.9009	0.9649	2.0293	2.2473	0.9030
7.9	−0.7753	0.6809	4.9637	0.9382	1.9900	2.2040	0.9029
8.0	−0.7778	0.6842	5.0265	0.9045	1.9342	2.1443	0.9020
8.1	−0.7802	0.6875	5.0894	0.8645	1.8634	2.0698	0.9003
8.2	−0.7826	0.6907	5.1522	0.8187	1.7786	1.9813	0.8977

8.3	−0.7849	0.6939	5.2150	0.7680	1.6814	1.8805	0.8941
8.4	−0.7872	0.6970	5.2779	0.7129	1.5727	1.7683	0.8894
8.5	−0.7895	0.7000	5.3407	0.6545	1.4548	1.6470	0.8833
8.6	−0.7917	0.7030	5.4035	0.5937	1.3296	1.5184	0.8757
8.7	−0.7938	0.7059	5.4664	0.5114	1.1988	1.3844	0.8659
8.8	−0.7959	0.7087	5.5292	0.4686	1.0649	1.2473	0.8538
8.9	−0.7980	0.7115	5.5920	0.4063	0.9302	1.1096	0.8383
9.0	−0.8000	0.7143	5.6549	0.3455	0.7971	0.9734	0.8189
9.1	−0.8020	0.7170	5.7177	0.2871	0.6676	0.8410	0.7938
9.2	−0.8039	0.7196	5.7805	0.2321	0.5442	0.7147	0.7614
9.3	−0.8058	0.7222	5.8434	0.1813	0.4290	0.5968	0.7188
9.4	−0.8077	0.7248	5.9062	0.1355	0.3242	0.4892	0.6627
9.5	−0.8095	0.7273	5.9690	0.0955	0.2317	0.3940	0.5881
9.6	−0.8113	0.7297	6.0319	0.0618	0.1530	0.3128	0.4891
9.7	−0.8131	0.7321	6.0947	0.0351	0.0901	0.2474	0.3642
9.8	−0.8148	0.7345	6.1575	0.0157	0.0440	0.1988	0.2213
9.9	−0.8165	0.7368	6.2204	0.0039	0.0157	0.1681	0.0934
10	−0.8182	0.7391	6.2831	0.0000	0.0063	0.1562	0.04

I valori massimi si hanno per:

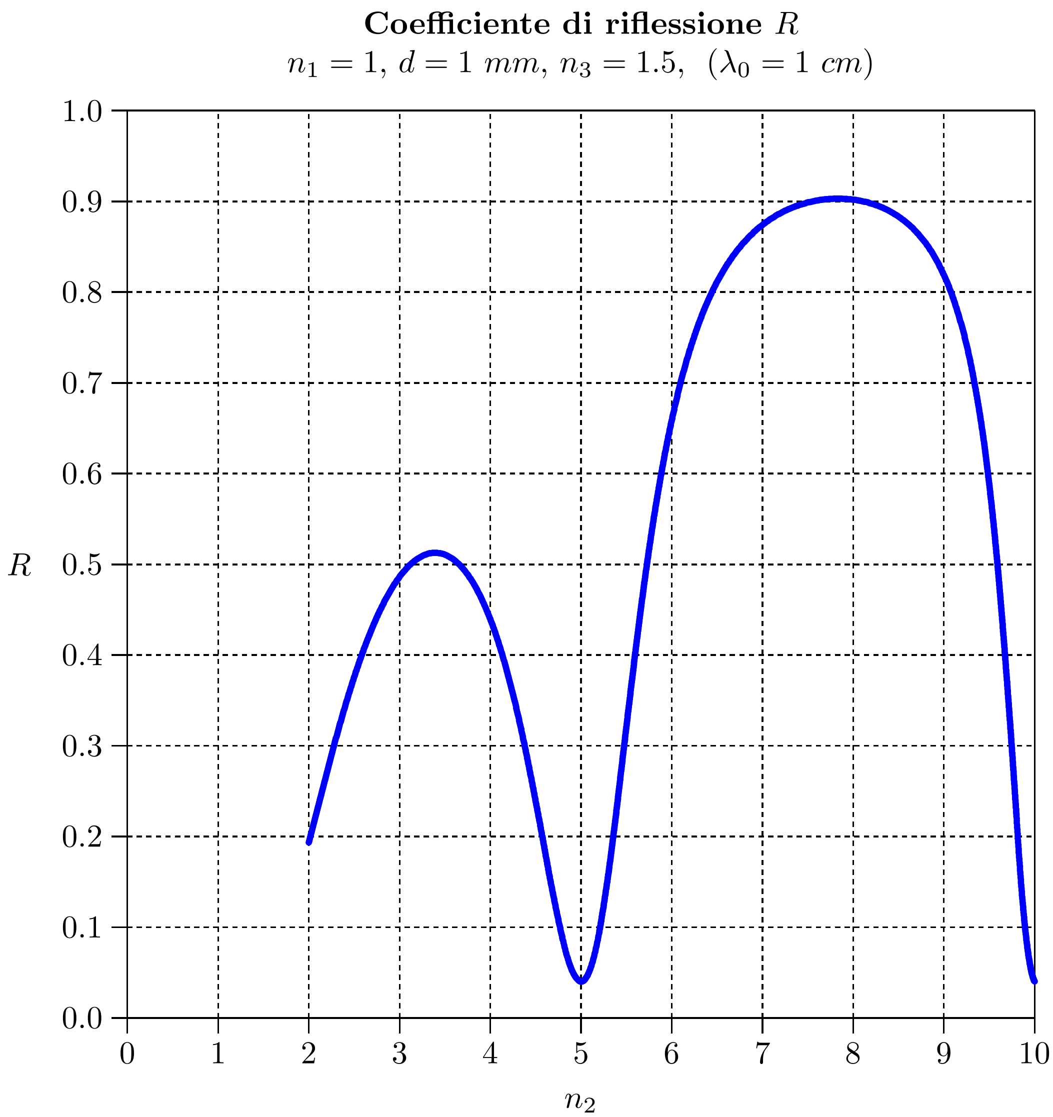
$$1)\quad (n_2)_{1_{max}} \simeq 3.4 \Longrightarrow (R)_{1_{max}} = 0.5128$$

$$2)\quad (n_2)_{2_{max}} \simeq 7.8 \Longrightarrow (R)_{2_{max}} = 0.9030$$

I valori minimi si hanno per:

$$1)\quad (n_2)_{1_{max}} \simeq 5 \Longrightarrow (R)_{1_{min}} = 0.04$$

$$2)\quad (n_2)_{2_{min}} \simeq 10 \Longrightarrow (R)_{2_{min}} = 0.04$$


Coefficiente di riflessione R
$n_1 = 1$, $d = 1\ mm$, $n_3 = 1.5$, $(\lambda_0 = 1\ cm)$
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
R
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
n_2

12-6) Esercizio n. 1 del 17/9/2012

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 6\ GHz$, viaggiante in aria, incide sulla superficie di un mezzo conduttore i cui parametri costitutivi sono:

$$\epsilon_{r_2} = 2.56, \quad \mu_{r_2} \simeq 1, \quad \sigma_2 = 0.92\ S/m$$

Calcolare e graficare l'angolo di rifrazione in funzione dell'angolo di incidenza.

Indicando con ψ l'angolo di rifrazione e con θ_0 l'angolo di incidenza, dalla teoria si ha:

$$\boxed{\tan\psi = \frac{\beta_1 \sin\theta_0}{q}}$$

essendo:

$$q^2(\theta_0) = \frac{1}{2}\left[\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2\sin^2\theta_0 + \sqrt{4\beta_2^2\alpha_2^2 + \left(\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2\sin^2\theta_0\right)^2}\right]$$

dove:

$$\begin{cases} \beta_1 = \dfrac{\omega}{c} \quad (rad/m) \\ \beta_2 = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{\dfrac{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \dfrac{\sigma_2^2}{\epsilon_{r_2}^2\omega^2}}\right]} \quad (rad/m) \\ \alpha_2 = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{\dfrac{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}{2}\left[\sqrt{1 + \dfrac{\sigma_2^2}{\epsilon_{r_2}^2\omega^2}} - 1\right]} \quad \left(m^{-1}\right) \end{cases}$$

da cui:

$$\beta_2^2 - \alpha_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma_2^2}{\epsilon_{r_2}^2\omega^2}}\right] - \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma_2^2}{\epsilon_{r_2}^2\omega^2}} - 1\right] = \frac{\omega^2}{c^2}\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}$$

Calcoliamo, allora, relativamente al mezzo conduttore, il rapporto $\dfrac{\sigma_2}{\epsilon_{r_2}\omega}$:

$$\frac{\sigma_2}{\epsilon_{r_2}\omega} = \frac{0.92}{8.854\cdot 10^{-12}\cdot 2.56\cdot 2\pi\cdot 6\cdot 10^9} \simeq 1.076657 \Longrightarrow \left(\frac{\sigma_2}{\epsilon_{r_2}\omega}\right)^2 \simeq 1.15919$$

da cui:

$$\sqrt{1 + \frac{\sigma_2^2}{\epsilon_{r_2}^2\omega^2}} = \sqrt{1 + 1.15919} \simeq 1.469418$$

$$\beta_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}{2}\left[1+\sqrt{1+\frac{{\sigma_2}^2}{{\epsilon_{r_2}}^2\omega^2}}\right]} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{2.56}{2}(1+1.469418)} \simeq$$

$$\simeq 1.777879\frac{\omega}{c} \ \ (rad/m)$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma_2^2}{\epsilon_{r_2}^2\omega^2}}-1\right]} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{2.56}{2}(1.469418-1)} \simeq$$

$$\simeq 0.775148\frac{\omega}{c} \ \ (m^{-1})$$

da cui risulta:

$$\beta_2^2-\alpha_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}{2}\left[1+\sqrt{1+\frac{{\sigma_2}^2}{{\epsilon_{r_2}}^2\omega^2}}\right] - \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}{2}\left[\sqrt{1+\frac{{\sigma_2}^2}{{\epsilon_{r_2}}^2\omega^2}}-1\right] =$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2}\mu_{r_2}\epsilon_{r_2} = 2.56\frac{\omega^2}{c^2}$$

Quindi:

$$q^2(\theta_0) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left[2.56-\sin^2\theta_0+\sqrt{7.596851+\left(2.56-\sin^2\theta_0\right)^2}\right]$$

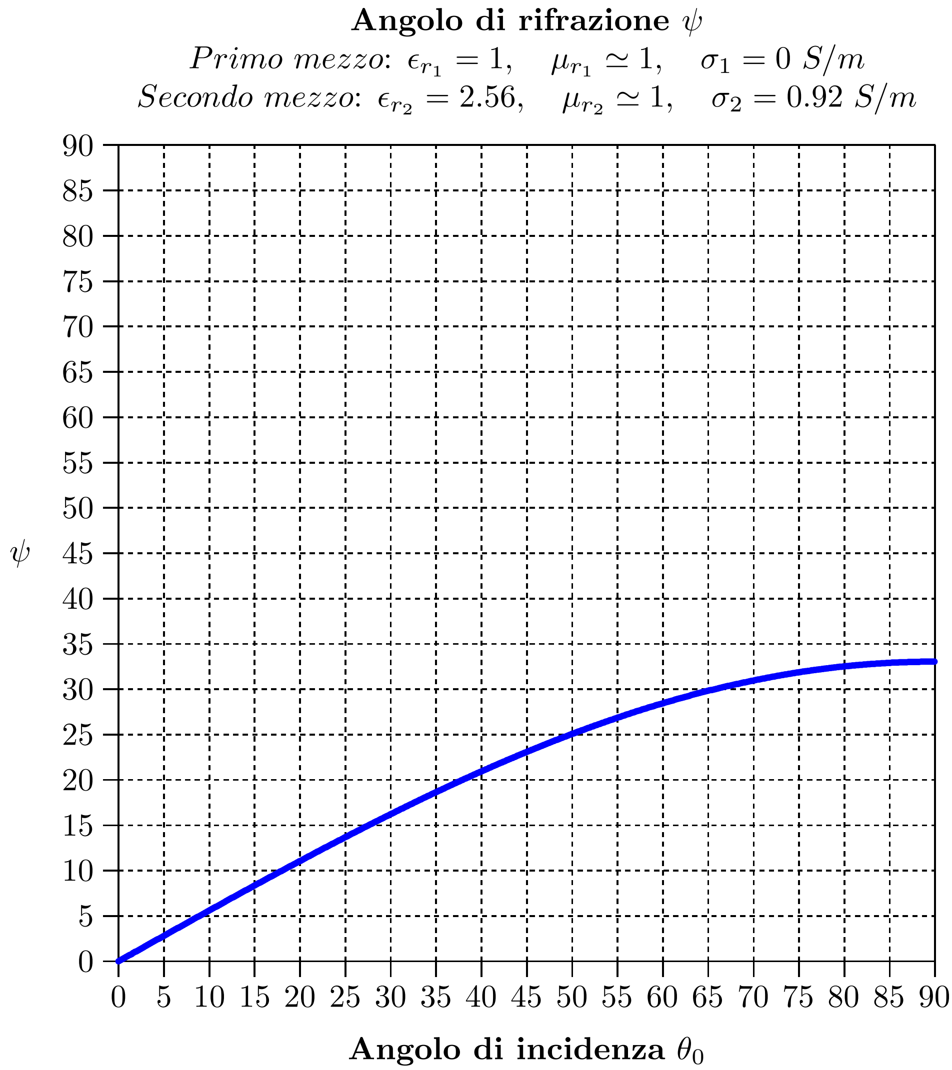
da cui:

$$q(\theta_0) = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\left[2.56-\sin^2\theta_0+\sqrt{7.596851+\left(2.56-\sin^2\theta_0\right)^2}\right]}{2}}$$

Ne segue che:

$$\boxed{\tan\psi = \frac{\sin\theta_0}{\sqrt{\frac{\left[2.56-\sin^2\theta_0+\sqrt{7.596851+\left(2.56-\sin^2\theta_0\right)^2}\right]}{2}}}}$$

θ_0	qc/ω	$\tan\psi$	ψ
0^0	1.7778	0	0^0
5^0	1.7761	0.049	$2^0.8052$
10^0	1.7707	0.098	$5^0.5971$
15^0	1.7620	0.1469	$8^0.357$
20^0	1.75016	0.1954	$11^0.056$
25^0	1.7355	0.2435	$13^0.685$
30^0	1.7184	0.29096	$16^0.22$
35^0	1.6996	0.3375	$18^0.65$
40^0	1.6794	0.3827	$20^0.94$
45^0	1.6585	0.4264	$23^0.093$
50^0	1.6375	0.4678	$25^0.070$
$52^0.5$	1.6272	0.4876	$25^0.99$
55^0	1.6172	0.5065	$26^0.86$
$57^0.5$	1.6074	0.5247	$27^0.69$
60^0	1.5980	0.5419	$28^0.45$
65^0	1.5807	0.5733	$29^0.83$
70^0	1.5658	0.600	$30^0.96$
75^0	1.5536	0.6217	$31^0.87$
80^0	1.5447	0.6375	$32^0.52$
85^0	1.5392	0.6472	$32^0.91$
90^0	1.5374	0.6504	$33^0.04$


Angolo di rifrazione ψ
Primo mezzo: $\epsilon_{r_1} = 1, \quad \mu_{r_1} \simeq 1, \quad \sigma_1 = 0 \ S/m$
Secondo mezzo: $\epsilon_{r_2} = 2.56, \quad \mu_{r_2} \simeq 1, \quad \sigma_2 = 0.92 \ S/m$
ψ
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90
Angolo di incidenza θ_0

12-7) Esercizio n. 2 del 17/9/2012

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 6\ GHz$, viaggiante in un mezzo dielettrico perfetto, incide sulla superficie di un mezzo conduttore. I parametri costitutivi dei due mezzi sono:

$$\begin{cases} \textbf{Mezzo dielettrico}: \epsilon_{r_1} = 10, \quad \mu_{r_1} \simeq 1, \quad \sigma_1 = 0 \\ \\ \textbf{Mezzo conduttore}: \epsilon_{r_2} = 2.56, \quad \mu_{r_2} \simeq 1, \quad \sigma_2 = 0.92\ S/m \end{cases}$$

Calcolare e graficare l'angolo di rifrazione in funzione dell'angolo di incidenza.

Indicando con ψ l'angolo di rifrazione e con θ_0 l'angolo di incidenza, dalla teoria si ha:

$$\boxed{\tan\psi = \frac{\beta_1 \sin\theta_0}{q}}$$

essendo:

$$q^2(\theta_0) = \frac{1}{2}\left[\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2\theta_0 + \sqrt{4\beta_2^2\alpha_2^2 + \left(\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2\theta_0\right)^2}\right]$$

dove:

$$\begin{cases} \beta_1 = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_{r_1}} \ \ (rad/m) \\ \beta_2 = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{\dfrac{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \dfrac{\sigma_2^2}{\epsilon_{r_2}^2\omega^2}}\right]} \ \ (rad/m) \\ \alpha_2 = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{\dfrac{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}{2}\left[\sqrt{1 + \dfrac{\sigma_2^2}{\epsilon_{r_2}^2\omega^2}} - 1\right]} \ \ \left(m^{-1}\right) \end{cases}$$

da cui:

$$\beta_2^2 - \alpha_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma_2^2}{\epsilon_{r_2}^2\omega^2}}\right] - \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma_2^2}{\epsilon_{r_2}^2\omega^2}} - 1\right] = \frac{\omega^2}{c^2}\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}$$

Calcoliamo, allora, relativamente al mezzo conduttore, il rapporto $\dfrac{\sigma_2}{\epsilon_{r_2}\omega}$:

$$\frac{\sigma_2}{\epsilon_{r_2}\omega} = \frac{0.92}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2.56 \cdot 2\pi \cdot 6 \cdot 10^9} \simeq 1.076657 \Longrightarrow \left(\frac{\sigma_2}{\epsilon_{r_2}\omega}\right)^2 \simeq 1.15919$$

da cui:

$$\sqrt{1+\frac{\sigma_2^2}{\epsilon_{r_2}^2\omega^2}} = \sqrt{1+1.15919} \simeq 1.469418$$

$$\beta_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}{2}\left[1+\sqrt{1+\frac{{\sigma_2}^2}{{\epsilon_{r_2}}^2\omega^2}}\right]} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{2.56}{2}(1+1.469418)} \simeq$$
$$\simeq 1.777879\frac{\omega}{c} \ \ (rad/m)$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma_2^2}{\epsilon_{r_2}^2\omega^2}}-1\right]} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{2.56}{2}(1.469418-1)} \simeq$$
$$\simeq 0.775148\frac{\omega}{c} \ \ \left(m^{-1}\right)$$

da cui risulta:

$$\beta_2^2-\alpha_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}{2}\left[1+\sqrt{1+\frac{{\sigma_2}^2}{{\epsilon_{r_2}}^2\omega^2}}\right] - \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}{2}\left[\sqrt{1+\frac{{\sigma_2}^2}{{\epsilon_{r_2}}^2\omega^2}}-1\right] =$$
$$= \frac{\omega^2}{c^2}\mu_{r_2}\epsilon_{r_2} = 2.56\frac{\omega^2}{c^2}$$

Inoltre:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_{r_1}} = \frac{\omega}{c}\sqrt{10} \ \ (rad/m)$$

Quindi:

$$q^2(\theta_0) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left[2.56-10\sin^2\theta_0+\sqrt{7.596851+\left(2.56-10\sin^2\theta_0\right)^2}\right]$$

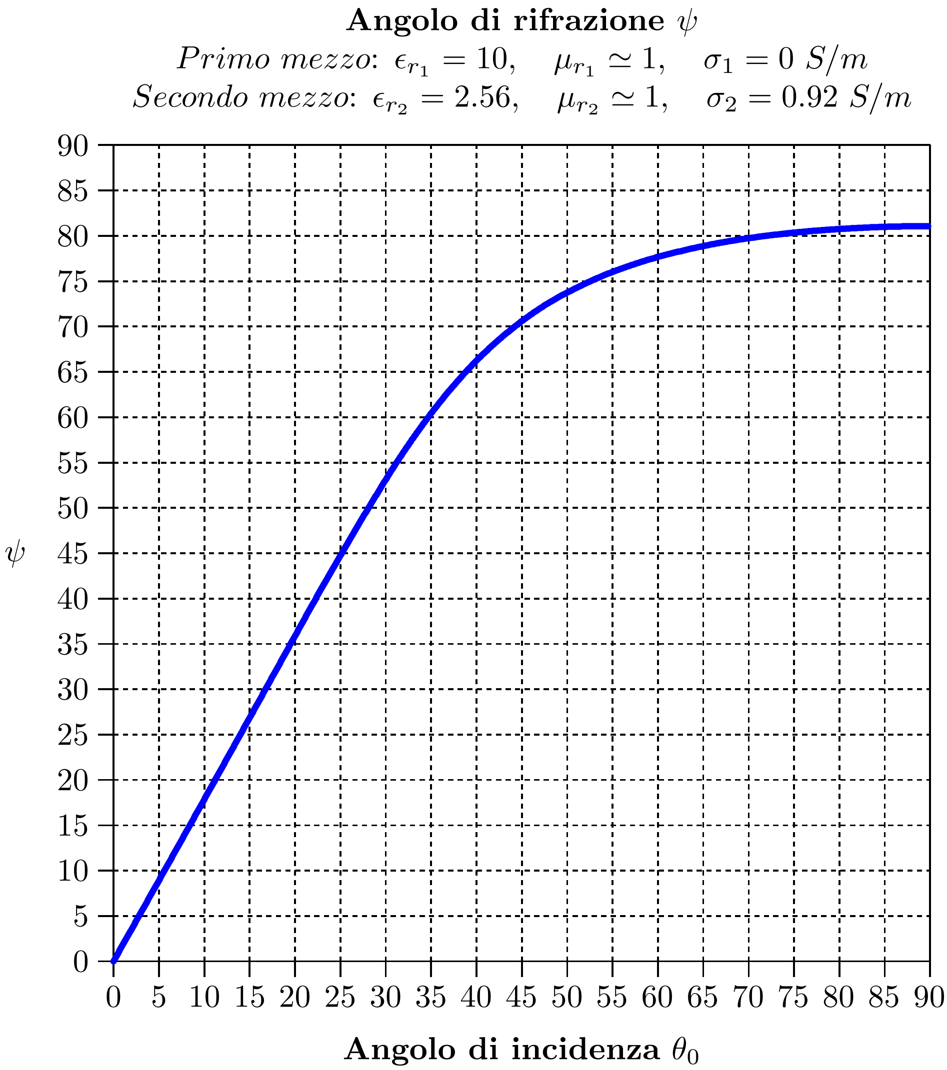
da cui:

$$q(\theta_0) = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\left[2.56-10\sin^2\theta_0+\sqrt{7.596851+\left(2.56-10\sin^2\theta_0\right)^2}\right]}{2}}$$

Ne segue che:

$$\boxed{\tan\psi = \frac{\sqrt{10}\sin\theta_0}{\sqrt{\frac{\left[2.56-10\sin^2\theta_0+\sqrt{7.596851+\left(2.56-10\sin^2\theta_0\right)^2}\right]}{2}}}}$$

θ_0	qc/ω	$\tan\psi$	ψ
0^0	1.7778	0	0^0
5^0	1.7599	0.1566	$8^0.9$
10^0	1.7061	0.3218	$17^0.84$
15^0	1.6174	0.5060	$26^0.84$
20^0	1.4962	0.7229	$35^0.86$
25^0	1.3485	0.9910	$44^0.74$
30^0	1.1868	1.3323	$53^0.11$
35^0	1.0299	1.7612	$60^0.41$
40^0	0.8947	2.2718	$66^0.24$
45^0	0.7877	2.8386	$70^0.59$
50^0	0.7063	3.4298	$73^0.74$
$52^0.5$	0.6734	3.7253	$74^0.97$
55^0	0.6449	4.0165	$76^0.02$
$57^0.5$	0.6202	4.300	$76^0.91$
60^0	0.5987	4.5742	$77^0.67$
65^0	0.5639	5.0821	$78^0.87$
70^0	0.5381	5.5226	$79^0.74$
75^0	0.5194	5.8808	$80^0.35$
80^0	0.5068	6.1453	$80^0.75$
85^0	0.4994	6.3074	$80^0.99$
90^0	0.4971	6.362	$81^0.067$


Angolo di rifrazione ψ
Primo mezzo: $\epsilon_{r_1} = 10, \quad \mu_{r_1} \simeq 1, \quad \sigma_1 = 0\ S/m$
Secondo mezzo: $\epsilon_{r_2} = 2.56, \quad \mu_{r_2} \simeq 1, \quad \sigma_2 = 0.92\ S/m$
ψ
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90
Angolo di incidenza θ_0

12-8) Esercizio n. 1 del 1/10/2012

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 1\ GHz$, viaggiante in aria, incide sulla superficie di una lastra di legno.

La permittivitá elettrica del legno dipende dalla umiditá in esso contenuta, dalla temperatura e dalla sua costituzione fisico-chimica. Per un certo legno, assumiamo che la permettivitá complessa per $\nu = 1\ GHz$, per $T = 20^0 C$, per un legno di densitá di $0.6\ g/cm^3$ (nell'ipotesi di legno secco) e per un contenuto di umiditá $< 30\%$, sia:

$$\epsilon_{r_c} = 3 + i0.4$$

Si ponga, inoltre, $\mu_r \simeq 1$.

Graficare il coefficiente di riflessione $R_\perp$ in funzione dell'angolo di incidenza.

(vedi es. n.1 del 19/7/2012)

La costante di propagazione nel secondo mezzo é:

$$k_2 = (\beta_2 + i\alpha_2) = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_{r_c}\mu_r}$$

Elevando al quadrato e ponendo $\mu_r \simeq 1$, si ha:

$$\beta_2^2 - \alpha_2^2 + 2i\alpha_2\beta_2 = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{r_c}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \beta_2^2 - \alpha_2^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\Re(\epsilon_{r_c}) = \dfrac{\omega^2}{c^2}3 \\ 2\beta_2\alpha_2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\Im(\epsilon_{r_c}) = \dfrac{\omega^2}{c^2}0.4 \end{cases}$$

Si ha anche:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c}\ \ (rad/m)$$

$$p^2(\theta_0) = \frac{1}{2}\left[-\beta_2^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2\sin^2\theta_0 + \sqrt{4\beta_2^2\alpha_2^2 + \left(\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2\sin^2\theta_0\right)^2}\right] \simeq$$
$$\simeq \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left\{-3 + \sin^2\theta_0 + \sqrt{0.16 + \left(3 - \sin^2\theta_0\right)^2}\right\}$$

$$q^2(\theta_0) = \frac{1}{2}\left[\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2\sin^2\theta_0 + \sqrt{4\beta_2^2\alpha_2^2 + \left(\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2\sin^2\theta_0\right)^2}\right] \simeq$$
$$\simeq \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left\{3 - \sin^2\theta_0 + \sqrt{0.16 + \left(3 - \sin^2\theta_0\right)^2}\right\}$$

Il coefficiente di riflessione $R_\perp$, per $\mu_1 \simeq \mu_2$, é:

$$R_\perp = \rho_\perp^2 = \frac{(q - \beta_1 \cos\theta_0)^2 + p^2}{(q + \beta_1 \cos\theta_0)^2 + p^2}$$

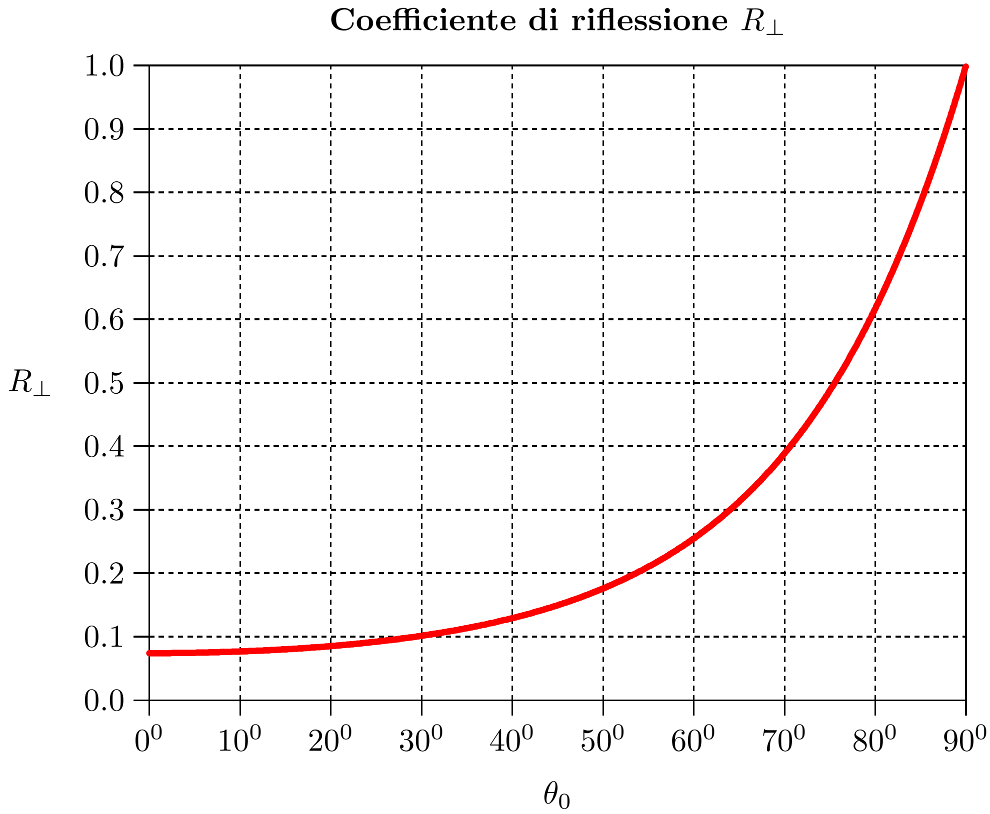
Il coefficiente di riflessione $R_\parallel$, per $\mu_1 \simeq \mu_2$, é:

$$R_\parallel = \rho_\parallel^2 = \rho_\perp^2 \frac{(q - \beta_1 \sin\theta_0 \tan\theta_0)^2 + p^2}{(q + \beta_1 \sin\theta_0 \tan\theta_0)^2 + p^2}$$

θ_0	$\frac{p^2c^2}{\omega^2}$	$\frac{qc}{\omega}$	*Num.* $R_\perp$	*Den.* $R_\perp$	$R_\perp$	*Num.* $R_\parallel/\rho_\perp^2$	*Den.* $R_\parallel/\rho_\perp^2$	$R_\parallel$
0^0	0.0133	1.7359	0.5548	7.4984	0.07399	3.0266	3.0266	0.07399
5^0	0.0133	1.7337	0.5572	7.4656	0.07463	2.9926	3.0455	0.07333
10^0	0.0134	1.7272	0.5645	7.3684	0.07661	2.8918	3.1033	0.07139
15^0	0.0136	1.7166	0.5771	7.2095	0.08004	2.7270	3.2032	0.06814
20^0	0.0138	1.7020	0.5949	6.9923	0.08508	2.5023	3.3498	0.06355
25^0	0.0141	1.6839	0.6187	6.7233	0.09202	2.2248	3.5521	0.05763
30^0	0.0145	1.6627	0.6492	6.4089	0.1013	1.9024	3.8224	0.05042
35^0	0.0149	1.6389	0.6869	6.0569	0.1134	1.5458	4.1786	0.04195
40^0	0.0154	1.6131	0.7329	5.6757	0.1291	1.1683	4.6485	0.03245
45^0	0.0159	1.5862	0.7888	5.2752	0.1495	0.7887	5.2752	0.02235
50^0	0.0165	1.5587	0.8554	4.8630	0.1759	0.4335	6.1255	0.01245
55^0	0.0171	1.5317	0.9351	4.4493	0.2102	0.1480	7.3156	0.00425
60^0	0.0176	1.5059	1.0294	4.0412	0.2547	0.017634	9.0530	0.000
65^0	0.0182	1.4822	1.1409	3.6465	0.3129	0.2311	11.7542	0.0062
70^0	0.0187	1.4614	1.2717	3.2710	0.3888	1.2740	16.3660	0.0303
75^0	0.0192	1.4444	1.4248	2.9202	0.4879	4.6869	25.5144	0.0896
80^0	0.0195	1.4317	1.6022	2.5966	0.6170	17.2704	49.2553	0.2163
85^0	0.0197	1.4238	1.8063	2.3027	0.7844	99.2763	164.1250	0.4745
86^0	0.0198	1.4229	1.8508	2.2478	0.8234	164.9607	246.156	0.5518
87^0	0.0198	1.4222	1.8963	2.1940	0.8643	310.9350	419.335	0.6409
88^0	0.0198	1.4216	1.9427	2.1412	0.9073	739.708	902.446	0.7437
89^0	0.0198	1.4213	1.9906	2.0898	0.9525	3120.35	3446.007	0.8625
90^0	0.0198	1.4212	2.0396	2.0396	1	∞	∞	1

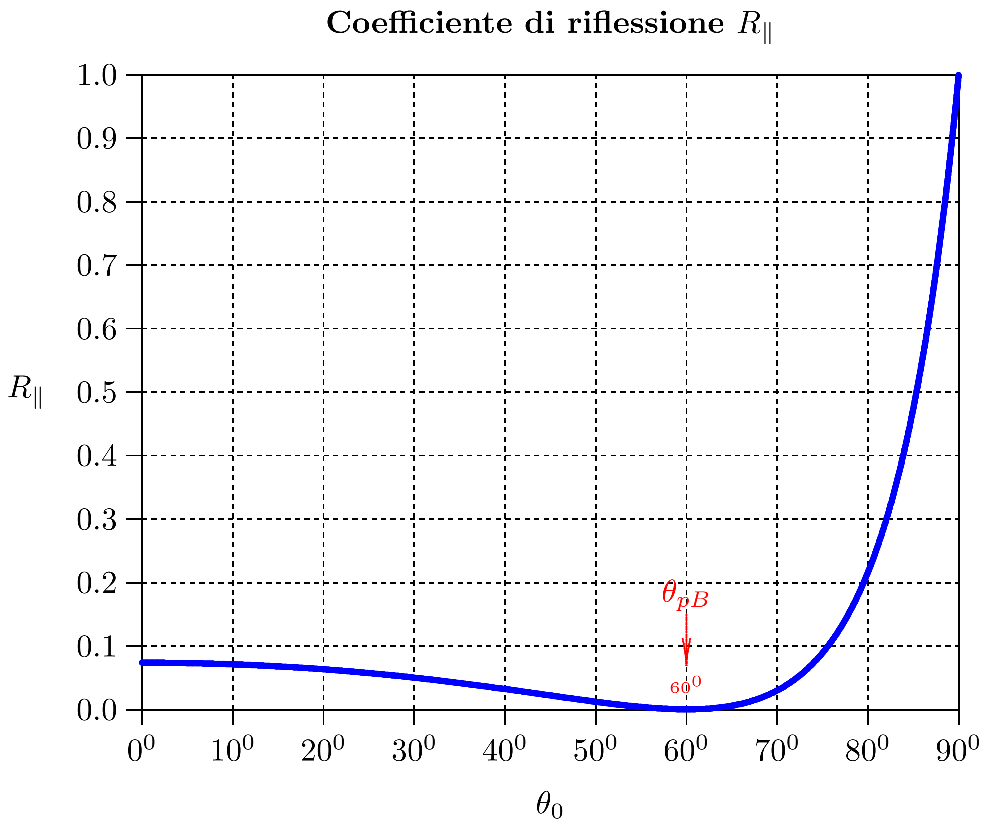
Per $\theta_0 = 90^0$ $R_\parallel$ é una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ che determinata (dividendo numeratore e denominatore per $\tan\theta_0$) risulta 1.

I numeratori ed i denominatori di $R_\perp$ e $R_\parallel$ indicati in tabella sono calcolati a meno di $\frac{\omega}{c}$.


Coefficiente di riflessione $R_\perp$
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
$R_\perp$
0^0
10^0
20^0
30^0
40^0
50^0
60^0
70^0
80^0
90^0
θ_0

12-9) Esercizio n. 2 del 1/10/2012

Con riferimento al problema precedente si grafichi il coefficiente di riflessione $R_{\parallel}$ in funzione dell'angolo di incidenza. Si valuti l'angolo pseudoBrewster ed il valore del coefficiente di riflessione ad esso corrispondente.



Dalla tabella dell'esercizio precedente e dal grafico di $R_{\parallel}$ si deduce che **l'angolo pseudoBrewster θ_{pB} vale 60^0 ed il valore minimo del coefficiente di riflessione, in corrispondenza di tale angolo, é** $\simeq 0\%$. Questo significa che il legno si comporta come un dielettrico perfetto. Questo risultato é importante nel caso di riflessione di segnali radar che, ovviamente, sono piú deboli nel caso di materiale legnoso rispetto a materiale metallico.

12-10) Esercizio n. 1 del 25/10/2012

Il tellururo di cadmio ($CdTe$) é un composto chimico cristallino e stabile formato da cadmio e tellurio, presente nei pannelli solari fotovoltaici. Un fascio di luce viaggiante in aria e di lunghezza d'onda, rispetto al vuoto, $\lambda_0 = 0.5\ \mu m$ incide, in direzione della normale, su uno strato di $CdTe$ di spessore $d = 100\ nanomm$, posto su vetro di indice di rifrazione $n_3 = 1.5$. I parametri costitutivi del $CdTe$ sono:

$$n_r = 3.01 \quad \text{e} \quad n_i = 0.38$$

Calcolare il coefficiente di riflessione.

(vedi es. n.1 del 4/7/2012)

Il sistema puó essere considerato come una lamina piana assorbente ($CdTe$) posta fra l'aria e il vetro.

Dalla teoria delle lamine piane assorbenti si deduce che il coefficiente di riflessione é:

$$R=\frac{|r_{12}|^2+e^{-\left(4\pi n_i\frac{d}{\lambda_0}\right)}\left[2\Re(r_{12}^*r_{23})\cos\left(4\pi n_r\frac{d}{\lambda_0}\right)-2\Im(r_{12}^*r_{23})\sin\left(4\pi n_r\frac{d}{\lambda_0}\right)\right]+|r_{23}|^2e^{-\left(8\pi n_i\frac{d}{\lambda_0}\right)}}{1+e^{-\left(4\pi n_i\frac{d}{\lambda_0}\right)}\left[2\Re(r_{12}r_{23})\cos\left(4\pi n_r\frac{d}{\lambda_0}\right)-2\Im(r_{12}r_{23})\sin\left(4\pi n_r\frac{d}{\lambda_0}\right)\right]+|r_{12}|^2|r_{23}|^2e^{-\left(8\pi n_i\frac{d}{\lambda_0}\right)}}$$

Cominciamo con il calcolare alcune quantitá che servono per la valutazione dei coefficienti che figurano nella formula della riflettivitá.:

$$(n_1 - n_r) = (1 - 3.01) = -2.01;\ (n_1 + n_r) = (1 + 3.01) = 4.01$$

$$(n_r - n_3) = (3.01 - 1.5) = 1.51;\ (n_r + n_3) = (3.01 + 1.5) = 4.51$$

$$\left[(n_1 - n_r)(n_1 + n_r) - n_i^2\right] = -2.01 \cdot 4.01 - (0.38)^2 = -8.2045$$

$$\left[(n_r - n_3)(n_r + n_3) + n_i^2\right] = +1.51 \cdot 4.51 + (0.38)^2 = +6.9545$$

$$\left[(n_1 + n_r)^2 + n_i^2\right] = (4.01)^2 + (0.38)^2 = 16.2245$$

$$\left[(n_1 - n_r)^2 + n_i^2\right] = (-2.01)^2 + (0.38)^2 = 4.1845$$

$$\left[(n_r + n_3)^2 + n_i^2\right] = (4.51)^2 + (0.38)^2 = 20.4845$$

$$\left[(n_r - n_3)^2 + n_i^2\right] = (1.51)^2 + (0.38)^2 = 2.4245$$

$$4n_i^2 n_1 n_3 = 4 \cdot (0.38)^2 \cdot 1.5 = 0.8664$$

$$\begin{aligned}
\Re(r_{12}^* r_{23}) = & \frac{\left[(n_1-n_r)(n_1+n_r)-n_i^2\right]\left[(n_r-n_3)(n_r+n_3)+n_i^2\right]-4n_i^2 n_1 n_3}{\left[(n_1+n_r)^2+n_i^2\right]\left[(n_r+n_3)^2+n_i^2\right]} \simeq \\
& \simeq \frac{(-8.2045)(+6.9545)-0.8664}{16.2245 \cdot 20.4845} \simeq -\frac{57.92459525}{332.35077025} \simeq \\
& \simeq -174.287531232222 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Im(r_{12}^* r_{23}) = & \frac{2n_i n_3\left[(n_1-n_r)(n_1+n_r)-n_i^2\right]+2n_i n_1\left[(n_r-n_3)(n_r+n_3)+n_i^2\right]}{\left[(n_1+n_r)^2+n_i^2\right]\left[(n_r+n_3)^2+n_i^2\right]} \simeq \\
& \simeq \frac{2 \cdot 0.38 \cdot 1.5 \cdot (-8.2045)+2 \cdot 0.38 \cdot (+6.9545)}{332.35077025} = -\frac{4.06771}{332.35077025} \simeq \\
& \simeq -12.2392073800226 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Re(r_{12} r_{23}) = & \frac{\left[(n_1-n_r)(n_1+n_r)-n_i^2\right]\left[(n_r-n_3)(n_r+n_3)+n_i^2\right]+4n_i^2 n_1 n_3}{\left[(n_1+n_r)^2+n_i^2\right]\left[(n_r+n_3)^2+n_i^2\right]} \simeq \\
& \simeq \frac{(-8.2045)(+6.9545)+0.8664}{332.35077025} \simeq -\frac{56.19179525}{332.35077025} \simeq \\
& \simeq -169.073762662658 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Im(r_{12} r_{23}) = & \frac{2n_i n_3\left[(n_1-n_r)(n_1+n_r)-n_i^2\right]-2n_i n_1\left[(n_r-n_3)(n_r+n_3)+n_i^2\right]}{\left[(n_1+n_r)^2+n_i^2\right]\left[(n_r+n_3)^2+n_i^2\right]} \simeq \\
& \simeq \frac{2 \cdot 0.38 \cdot 1.5 \cdot (-8.2045)-2 \cdot 0.38 \cdot (+6.9545)}{332.35077025} \simeq \\
& \simeq -\frac{14.63855}{332.35077025} \simeq -44.0454823949667 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}
\Re(r_{12}) &= \frac{n_1^2-n_r^2-n_i^2}{(n_1+n_r)^2+n_i^2} \simeq \frac{1-(3.01)^2-(0.38)^2}{16.2245} \simeq -\frac{8.2045}{16.2245} \simeq -0.505685845480600 \\
\Re(r_{23}) &= \frac{n_r^2-n_3^2+n_i^2}{(n_r+n_3)^2+n_i^2} \simeq \frac{(3.01)^2-(1.5)^2+(0.38)^2}{20.4845} \simeq \frac{6.9545}{20.4845} \simeq 0.339500598013132 \\
\Im(r_{12}) &= \frac{-2n_i n_1}{(n_1+n_r)^2+n_i^2} \simeq -\frac{2 \cdot 0.38}{16.2245} \simeq -46.8427378347561 \cdot 10^{-3} \\
\Im(r_{23}) &= \frac{2n_i n_3}{(n_r+n_3)^2+n_i^2} \simeq +\frac{2 \cdot 0.38 \cdot 1.5}{20.4845} \simeq 55.6518343137494 \cdot 10^{-3} \\
|r_{12}|^2 &= \frac{(n_1-n_r)^2+n_i^2}{(n_1+n_r)^2+n_i^2} \simeq \frac{4.1845}{16.2245} \simeq 257.912416407285 \cdot 10^{-3} \\
|r_{23}|^2 &= \frac{(n_r-n_3)^2+n_i^2}{(n_r+n_3)^2+n_i^2} \simeq \frac{2.4245}{20.4845} \simeq 118.357782713759 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{\lambda_0} = \frac{100 \cdot 10^{-12}}{0.5 \cdot 10^{-6}} = 200 \cdot 10^{-6}$$

$$\sin\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) = \sin\left(4\pi \cdot 3.01 \cdot 200 \cdot 10^{-6}\right) \simeq 7.56488295482067 \cdot 10^{-3}$$

$$\cos\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) = \cos\left(4\pi \cdot 3.01 \cdot 200 \cdot 10^{-6}\right) \simeq 999.971385863556 \cdot 10^{-3}$$

$$\exp\left[-\left(4\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)\right] \simeq \exp\left[-\left(4\pi \cdot 0.38 \cdot 200 \cdot 10^{-6}\right)\right] \simeq$$
$$\simeq \exp(-955.044166691297 \cdot 10^{-6}) \simeq 999.045411742839 \cdot 10^{-3}$$

$$\exp\left[-\left(8\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)\right] \simeq \exp\left[-\left(8\pi \cdot 0.38 \cdot 200 \cdot 10^{-6}\right)\right] \simeq$$
$$\simeq \exp(-1.91008833338259 \cdot 10^{-3}) \simeq 998.091734724419 \cdot 10^{-3}$$

Calcoliamo alcune espressioni parziali contenute nella espressione del coefficiente di riflessione:

$$1)\quad 2\Re(r_{12}^* r_{23}) \cos\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) - 2\Im(r_{12}^* r_{23}) \sin\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) =$$
$$\simeq 2 \cdot (-174.287531232222 \cdot 10^{-3}) \cdot (999.971385863556 \cdot 10^{-3}) -$$
$$-2 \cdot (-12.2392073800226 \cdot 10^{-3}) \cdot (7.56488295482067 \cdot 10^{-3}) =$$
$$= -348.379911947466 \cdot 10^{-3}$$

$$2)\quad \exp\left[-\left(4\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)\right] \cdot \left[2\Re(r_{12}^* r_{23}) \cos\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) - 2\Im(r_{12}^* r_{23}) \sin\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right)\right] \simeq$$
$$\simeq (999.045411742839 \cdot 10^{-3})(-348.379911947466 \cdot 10^{-3}) \simeq$$
$$\simeq = -348.047352574490 \cdot 10^{-3}$$

$$3)\quad |r_{23}|^2 e^{-\left(8\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)} = 118.357782713759 \cdot 10^{-3} \cdot 998.091734724419 \cdot 10^{-3} =$$
$$= 118.131924666912 \cdot 10^{-3}$$

$$4)\quad 2\Re(r_{12} r_{23}) \cos\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) - 2\Im(r_{12} r_{23}) \sin\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) =$$
$$\simeq 2 \cdot (-169.073762662658 \cdot 10^{-3}) \cdot (999.971385863556 \cdot 10^{-3}) -$$
$$-2 \cdot (-44.0454823949667 \cdot 10^{-3}) \cdot (7.56488295482067 \cdot 10^{-3}) \simeq$$
$$\simeq -337.471451687875 \cdot 10^{-3}$$

$$5)\quad \exp\left[-\left(4\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)\right] \cdot \left[2\Re(r_{12} r_{23}) \cos\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) - 2\Im(r_{12} r_{23}) \sin\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right)\right] =$$
$$= (999.045411742839 \cdot 10^{-3} \cdot (-337.471451687875 \cdot 10^{-3}) \simeq$$
$$\simeq -337.149305402967 \cdot 10^{-3}$$

6) $|r_{12}|^2|r_{23}|^2 e^{-\left(8\pi n_i \dfrac{d}{\lambda_0}\right)} =$

$(257.912416407285 \cdot 10^{-3}) \cdot (118.357782713759 \cdot 10^{-3}) \cdot (998.091734724419 \cdot 10^{-3}) =$
$= 30.4676901456865 \cdot 10^{-3}$

Finalmente:

$$R = \frac{257.912416407285 \cdot 10^{-3} + \left(-348.047352574490 \cdot 10^{-3}\right) + 118.131924666912 \cdot 10^{-3}}{1 + (-337.149305402967 \cdot 10^{-3}) + 30.4676901456865 \cdot 10^{-3}} \simeq$$

$$\simeq \frac{27.9969884997070 \cdot 10^{-3}}{693.318384742719 \cdot 10^{-3}} \simeq \underline{\underline{40.3811425108773 \cdot 10^{-3} \simeq 4.038\%}}$$

12-11) Esercizio n. 2 del 25/10/2012

Con riferimento al problema precedente si valuti il coefficiente di trasmissione.

Poiché risulta, in questo caso:

$$\frac{\beta_3\mu_1}{\beta_1\mu_3} = \frac{n_3}{n_1}$$

il coefficiente di trasmissione é:

$$T=\frac{\dfrac{n_3}{n_1}\left[1+2\Re(r_{12})+|r_{12}|^2\right]\left[1+2\Re(r_{23})+|r_{23}|^2\right]e^{-\left(4\pi n_i\dfrac{d}{\lambda_0}\right)}}{1+e^{-\left(4\pi n_i\dfrac{d}{\lambda_0}\right)}\left[2\Re(r_{12}r_{23})\cos\left(4\pi n_r\dfrac{d}{\lambda_0}\right)-2\Im(r_{12}r_{23})\sin\left(4\pi n_r\dfrac{d}{\lambda_0}\right)\right]+|r_{12}|^2|r_{23}|^2e^{-\left(8\pi n_i\dfrac{d}{\lambda_0}\right)}}$$

Poiché il coefficiente di trasmissione ha lo stesso denominatore del coefficiente di riflessione, procediamo al calcolo del solo numeratore. Per questo calcoliamo le espressioni parziali contenute nel numeratore:

$$\begin{aligned}\left[1+2\Re(r_{12})+|r_{12}|^2\right] =& 1+2(-0.505685845480600)+257.912416407285\cdot 10^{-3}\simeq\\ \simeq& 246.540725446085\cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[1+2\Re(r_{23})+|r_{23}|^2\right] =& 1+2(+0.339500598013132)+118.357782713759\cdot 10^{-3}\simeq\\ \simeq& 1.79735897874002\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}T =& \frac{1.5\cdot 246.540725446085\cdot 10^{-3}\cdot 1.79735897874002\cdot 999.045411742839\cdot 10^{-3}}{693.318384742719\cdot 10^{-3}}\simeq\\ \simeq& \frac{664.048780904810\cdot 10^{-3}}{693.318384742719\cdot 10^{-3}}\simeq \underline{\underline{957.783315022332\cdot 10^{-3}\simeq 95.78\%}}\end{aligned}$$

Fine Esercizi Campi e.m. - 2012