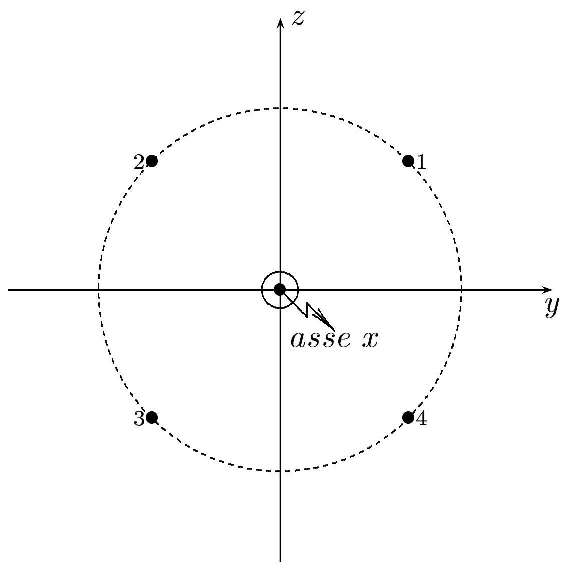
# Esercizi svolti di Campi elettromagnetici - Anno 2010

## 10-1) Esercizio n. 1 del 22/1/2010

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse, orientate secondo la direzione dell'asse $x$, sono posizionate con i centri posti ai vertici di un quadrato circoscritto da una circonferenza di raggio $d$, giacente nel piano $yz$, come in figura. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato.




———————

Siano $O_i \equiv (y_i, z_i)$ (per $i = 1 \div 4$) i punti che individuano le posizioni dei centri delle antenne sul piano $yz$. Si ha:

$$y_1 = +\frac{d}{\sqrt{2}},\ y_2 = -\frac{d}{\sqrt{2}},\ y_3 = -\frac{d}{\sqrt{2}},\ y_4 = +\frac{d}{\sqrt{2}}$$

$$z_1 = +\frac{d}{\sqrt{2}},\ z_2 = +\frac{d}{\sqrt{2}},\ z_3 = -\frac{d}{\sqrt{2}},\ z_4 = -\frac{d}{\sqrt{2}}$$

Le densitá di corrente sull'antenna 1, sull'antenna 2, sull'antenna 3 e sull'antenna 4 sono rispettivamente:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{x} A_1 \delta\left(y - \dfrac{d}{\sqrt{2}}\right) \delta\left(z - \dfrac{d}{\sqrt{2}}\right) \cos kx & -l \le x \le +l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{x} A_2 \delta\left(y + \dfrac{d}{\sqrt{2}}\right) \delta\left(z - \dfrac{d}{\sqrt{2}}\right) \cos kx & -l \le x \le +l \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{x} A_3 \delta\left(y + \dfrac{d}{\sqrt{2}}\right) \delta\left(z + \dfrac{d}{\sqrt{2}}\right) \cos kx & -l \le x \le +l \\ \vec{J}^{(4)} = \widehat{x} A_4 \delta\left(y - \dfrac{d}{\sqrt{2}}\right) \delta\left(z + \dfrac{d}{\sqrt{2}}\right) \cos kx & -l \le x \le +l \end{cases}$$

Posto $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$ per la uniformitá del sistema di antenne, la densitá di corrente risultante é la somma delle quattro:

$$\begin{aligned} \vec{J} =& \widehat{x}\delta\left(y - \frac{d}{\sqrt{2}}\right)\delta\left(z - \frac{d}{\sqrt{2}}\right)\cos kx + \widehat{x}\delta\left(y + \frac{d}{\sqrt{2}}\right)\delta\left(z - \frac{d}{\sqrt{2}}\right)\cos kx + \\ &+ \widehat{x}\delta\left(y + \frac{d}{\sqrt{2}}\right)\delta\left(z + \frac{d}{\sqrt{2}}\right)\cos kx + \widehat{x}\delta\left(y - \frac{d}{\sqrt{2}}\right)\delta\left(z + \frac{d}{\sqrt{2}}\right)\cos kx \end{aligned}$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta,\phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} \vec{J}(\vec{r}\,')d^3r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x}\sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,' = x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} &\vec{N}(\theta,\phi) = \\ &= \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{x}\delta\left(y\,' - \frac{d}{\sqrt{2}}\right)\delta\left(z\,' - \frac{d}{\sqrt{2}}\right)\cos kx\,'dx\,'dy\,'dz\,' + \\ &+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{x}\delta\left(y\,' + \frac{d}{\sqrt{2}}\right)\delta\left(z\,' - \frac{d}{\sqrt{2}}\right)\cos kx\,'dx\,'dy\,'dz\,' + \\ &+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{x}\delta\left(y\,' + \frac{d}{\sqrt{2}}\right)\delta\left(z\,' + \frac{d}{\sqrt{2}}\right)\cos kx\,'dx\,'dy\,'dz\,' + \\ &+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{x}\delta\left(y\,' - \frac{d}{\sqrt{2}}\right)\delta\left(z\,' + \frac{d}{\sqrt{2}}\right)\cos kx\,'dx\,'dy\,'dz\,' \end{aligned}$$

ossia:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{x} e^{-ik\frac{d}{\sqrt{2}}\sin\theta\sin\phi} e^{-ik\frac{d}{\sqrt{2}}\cos\theta} \int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\cos kx'dx' +$$

$$+ \widehat{x} e^{+ik\frac{d}{\sqrt{2}}\sin\theta\sin\phi} e^{-ik\frac{d}{\sqrt{2}}\cos\theta} \int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\cos kx'dx' +$$

$$+ \widehat{x} e^{+ik\frac{d}{\sqrt{2}}\sin\theta\sin\phi} e^{+ik\frac{d}{\sqrt{2}}\cos\theta} \int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\cos kx'dx' +$$

$$+ \widehat{x} e^{-ik\frac{d}{\sqrt{2}}\sin\theta\sin\phi} e^{+ik\frac{d}{\sqrt{2}}\cos\theta} \int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\cos kx'dx'$$

che si puó scrivere:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{x}\left\{\int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\cos kx'dx'\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{e^{-ik\frac{d}{\sqrt{2}}\cos\theta}\left[e^{-ik\frac{d}{\sqrt{2}}\sin\theta\sin\phi} + e^{+ik\frac{d}{\sqrt{2}}\sin\theta\sin\phi}\right] + \right.$$

$$\left. + e^{+ik\frac{d}{\sqrt{2}}\cos\theta}\left[e^{-ik\frac{d}{\sqrt{2}}\sin\theta\sin\phi} + e^{+ik\frac{d}{\sqrt{2}}\sin\theta\sin\phi}\right]\right\}$$

ossia:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{x}\left\{\int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\cos kx'dx'\right\}\cdot$$

$$\cdot\left[e^{-ik\frac{d}{\sqrt{2}}\sin\theta\sin\phi} + e^{+ik\frac{d}{\sqrt{2}}\sin\theta\sin\phi}\right]\left[e^{-ik\frac{d}{\sqrt{2}}\cos\theta} + e^{+ik\frac{d}{\sqrt{2}}\cos\theta}\right]$$

In definitiva:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{x}4\left[\cos\left(k\frac{d}{\sqrt{2}}\sin\theta\sin\phi\right)\right]\left[\cos\left(k\frac{d}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\right]\int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\cos kx'dx'$$

Si ha:

$$\widehat{x}\cdot\widehat{r} = \cos\psi = \sin\theta\cos\phi$$

essendo $\psi$ l'angolo formato fra l'asse $x$ e la direzione del vettore posizione $\widehat{e}_r$.

Per un'antenna a mezz'onda orientata lungo l'asse $x$ risulta, quindi:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\cos kx'dx' = \int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\cos\psi}\cos kx'dx' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}$$

Pertanto:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{x}4\left[\cos\left(k\frac{d}{\sqrt{2}}\sin\theta\sin\phi\right)\right]\left[\cos\left(k\frac{d}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\right]\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}$$

Poiché:

$$\begin{cases} \widehat{x} = \widehat{e}_r\sin\theta\cos\phi + \widehat{e}_\theta\cos\theta\cos\phi - \widehat{e}_\phi\sin\phi \\ \widehat{y} = \widehat{e}_r\sin\theta\sin\phi + \widehat{e}_\theta\cos\theta\sin\phi + \widehat{e}_\phi\cos\phi \\ \widehat{z} = \widehat{e}_r\cos\theta - \widehat{e}_\theta\sin\theta \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{e}_r\frac{8}{k}\left\{\sin\theta\cos\phi\left[\cos\left(k\frac{d}{\sqrt{2}}\sin\theta\sin\phi\right)\right]\left[\cos\left(k\frac{d}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\right]\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\right\}+ \\ &+\widehat{e}_\theta\frac{8}{k}\left\{\cos\theta\cos\phi\left[\cos\left(k\frac{d}{\sqrt{2}}\sin\theta\sin\phi\right)\right]\left[\cos\left(k\frac{d}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\right]\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\right\}+ \\ &+\widehat{e}_\phi\frac{8}{k}\left\{-\sin\phi\left[\cos\left(k\frac{d}{\sqrt{2}}\sin\theta\sin\phi\right)\right]\left[\cos\left(k\frac{d}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\right]\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\right\} \end{aligned}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(|N_\theta|^2+|N_\phi|^2\right)\widehat{e}_r$$

Si ha, allora:

$$\begin{aligned} &|N_\theta|^2+|N_\phi|^2 = \\ &= \frac{64}{k^2}\left\{\left[\cos\left(k\frac{d}{\sqrt{2}}\sin\theta\sin\phi\right)\right]^2\left[\cos\left(k\frac{d}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\right]^2\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\right]^2\right\}\cdot \\ &\cdot\left[\cos^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\phi\right] \end{aligned}$$

Poiché:

$$\cos^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\phi = \cos^2\phi-\sin^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\phi = 1-\sin^2\theta\cos^2\phi$$

risulta:

$$|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2 =$$

$$= \frac{64}{k^2}\left\{\left[\cos\left(k\frac{d}{\sqrt{2}}\sin\theta\sin\phi\right)\right]^2\left[\cos\left(k\frac{d}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\right]^2\frac{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)\right]^2}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\right\}$$

Quindi:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{2}{\pi r}\right)^2\left\{\left[\cos\left(k\frac{d}{\sqrt{2}}\sin\theta\sin\phi\right)\right]^2\left[\cos\left(k\frac{d}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\right]^2\frac{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)\right]^2}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\right\}\widehat{e}_r$$

**10-2) Esercizio n. 2 del 22/1/2010**

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = 90^0$. Si assuma $d = \dfrac{\lambda}{2}$.

———————

Per $\theta = 90^0$ risulta:

$$\langle \vec{S} \rangle_{(\theta=90^0)} = \frac{1}{2} Z \left( \frac{2}{\pi r} \right)^2 \left\{ \left[ \cos \left( k \frac{d}{\sqrt{2}} \sin \phi \right) \right]^2 \frac{\left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \phi \right) \right]^2}{\sin^2 \phi} \right\} \widehat{e}_r$$

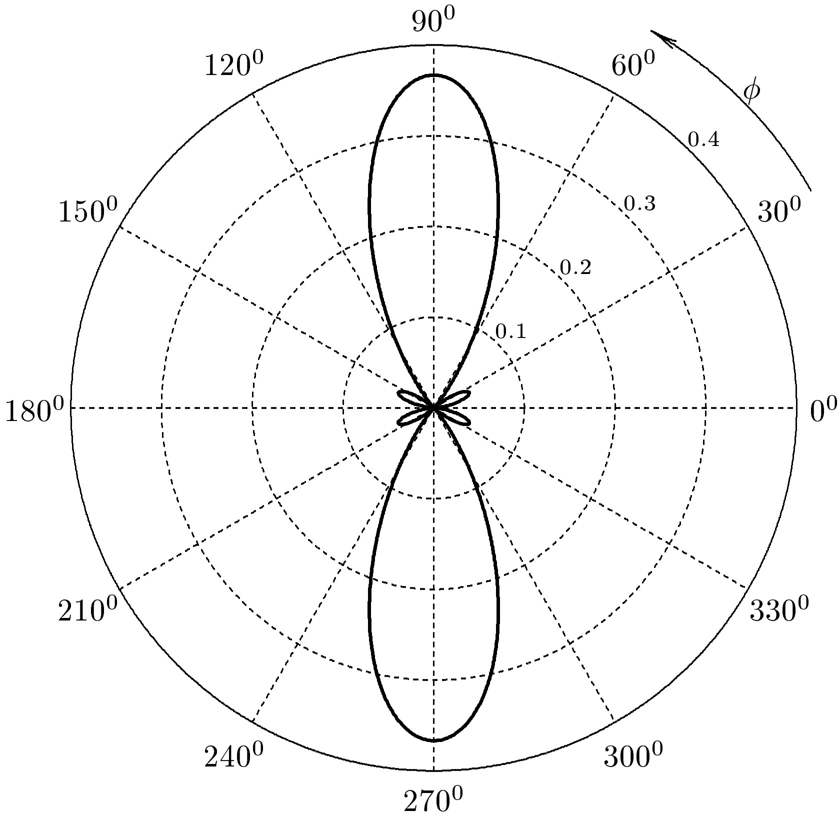
Per $d = \dfrac{\lambda}{2} \Longrightarrow kd = \pi$:

$$\langle \vec{S} \rangle_{(\theta=90^0)} = \frac{1}{2} Z \left( \frac{2}{\pi r} \right)^2 \left\{ \left[ \cos \left( \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sin \phi \right) \right]^2 \frac{\left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \phi \right) \right]^2}{\sin^2 \phi} \right\} \widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\phi) = \left\{ \left[ \cos \left( \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sin \phi \right) \right]^2 \frac{\left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \phi \right) \right]^2}{\sin^2 \phi} \right\}$$

Si osserva subito che il fattore di forma presenta due zeri. Il primo per $\phi = 0^0$ per cui si annulla il secondo fattore ed il secondo per $\sin \phi = 1/\sqrt{2}$ ossia per $\phi = 45^0$ per cui si annulla il primo fattore. É chiaro quindi che fra questi due zeri deve esistere un lobo secondario, ovviamente in tutti quattro i quadranti.



**10-3) Esercizio n. 3 del 22/1/2010**

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 12\ MHz$ si propaga in un plasma la cui pulsazione di plasma é $\omega_p = 2\pi \cdot 9 \cdot 10^6\ rad/s$. Calcolare il tempo necessario impiegato dall'onda a percorrere 1 $Km$. Se la frequenza collisionale degli elettroni é $10^5\ s^{-1}$, calcolare l'ampiezza del campo elettrico dopo il percorso di 1 $Km$ riferita all'ampiezza iniziale del campo.

———————

La velocitá con la quale si propaga un'onda elettromagnetica in un mezzo dispersivo é:

$$v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = c\sqrt{1 - \frac{4\pi^2 \cdot 81 \cdot 10^{12}}{4\pi^2 \cdot 144 \cdot 10^{12}}} = c\sqrt{1 - 0.5625} \simeq 0.66c\ m/s$$

essendo $c$ la velocitá della luce nel vuoto.

Il tempo $\tau$ per percorrere $L = 1\ Km$ é:

$$\tau = \frac{L}{v_g} = \frac{10^3}{0.66 \cdot 3 \cdot 10^9} = 5.05 \cdot 10^{-6}\ s = \underline{\underline{5.05\ \mu s}}$$

Per calcolare il coefficiente di attenuazione $\alpha$, valutiamo la quantitá $\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}$. Si ha:

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \omega_{eff} \omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} = \epsilon_0 \frac{2\pi \cdot 10^5 \cdot 4\pi^2 \cdot 81 \cdot 10^{12}}{4\pi^2 \cdot 144 \cdot 10^{12} + 4\pi^2 \cdot 10^{10}} \simeq 353404\epsilon_0\ S/m$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}\right) = \epsilon_0 \left(1 - \frac{4\pi^2 \cdot 81 \cdot 10^{12}}{4\pi^2 \cdot 144 \cdot 10^{12} + 4\pi^2 \cdot 10^{10}}\right) \simeq 0.4375\epsilon_0\ F/m$$

Quindi:

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{353404}{0.4375 \cdot 2\pi \cdot 12 \cdot 10^6} \simeq 0.0107 << 1$$

Ne segue che:

$$\alpha = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} = \frac{353404\epsilon_0}{2}\sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{0.4375\epsilon_0}} \simeq 8.9 \cdot 10^{-4}\ m^{-1}$$

Pertanto:

$$E = E_0 e^{-\alpha z} = E_0 e^{-8.9 \cdot 10^{-4} z}$$

Per $z = 1\ Km$ risulta:

$$e^{-8.9 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3} \simeq 0.41$$

ossia:

$$\frac{E}{E_0} \simeq \underline{\underline{0.41}}$$

**10-4) Esercizio n. 4 del 22/1/2010**

Un'onda elettromagnetica piana, con le componenti (perpendicolare e parallela al piano di incidenza) eguali, viaggiante in un mezzo dielettrico di costante dielettrica $\epsilon = 6\epsilon_0$ e di permeabilitá magnetica $\mu = \mu_0$, é incidente sulla superficie piana del dielettrico, che lo separa dall'aria, con un angolo di incidenza $\theta$. Verificare che l'onda elettromagnetica riflessa possa essere polarizzata circolarmente. In tal caso calcolare l'angolo $\theta$ affinché ció avvenga.

---

L'angolo limite é:

$$\theta_L = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \simeq \arcsin(0.408) = 24^0.08$$

L'angolo $\theta$ deve necessariamente essere maggiore dell'angolo limite, ossia si é in regime di riflessione totale.

Anzitutto osserviamo che $\dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \simeq 0.408$ risulta inferiore a 0.414 e quindi esiste la possibilitá di polarizzazione circolare dell'onda riflessa. Affinché l'onda riflessa sia circolarmente polarizzata dobbiamo allora imporre che la differenza di fase fra la componente perpendicolare e quella parallela al piano di incidenza del campo elettrico riflesso sia di $90^0$.

Come si conosce dalla teoria tale angolo, ossia quello in corrispondenza del quale risulta $\tan\dfrac{\delta}{2} = 1$, é dato dalla seguente formula:

$$\sin^2\theta_0 = \frac{\left[1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right] \pm \sqrt{\left[1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]^2 - 8\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{4}$$

$$\sin^2\theta_0 = \frac{\left[1 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2\right] \pm \sqrt{\left[1 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2\right]^2 - 8\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}}{4}$$

ossia:

$$\sin^2\theta_0 = \frac{\left[1 + (0.408)^2\right] \pm \sqrt{\left[1 + (0.408)^2\right]^2 - 8(0.408)^2}}{4}$$

e, ancora:

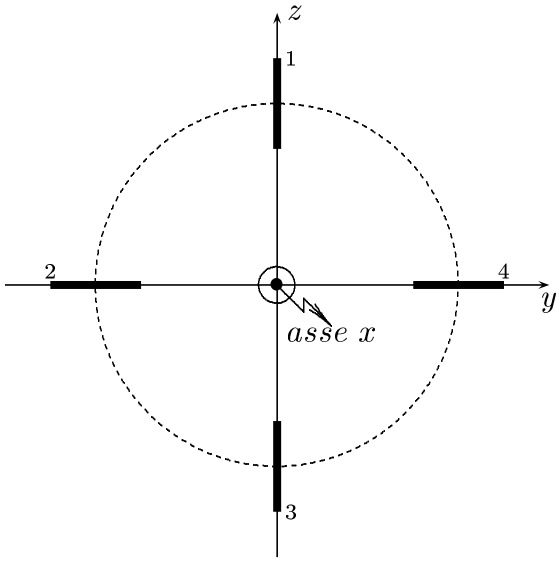
$$\sin^2\theta_0 = \frac{1.166464 \pm \sqrt{1.360638 - 8 \cdot 0.166464}}{4}$$

$$\sin^2\theta_0 = \begin{cases} 0.3341 \\ \\ 0.2481 \end{cases}$$

$$\sin\theta_0 = \begin{cases} 0.5780 \Longrightarrow \theta_0 = \underline{\underline{35^0.31}} \\ \\ 0.4981 \Longrightarrow \theta_0 = \underline{\underline{29^0.87}} \end{cases}$$

**10-5) Esercizio n. 1 del 19/2/2010**

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate con i centri posti nei punti intersezione fra una circonferenza di raggio $d$, giacente nel piano $yz$ e gli assi $y$ e $z$ di un sistema di riferimento $Oxyz$. Esse sono orientate come in figura. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato.




———————

Le densitá di corrente sull'antenna 1, sull'antenna 2, sull'antenna 3 e sull'antenna 4 sono rispettivamente:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{z}A_1\delta(x)\delta(y)\cos k(z-z_1) & z_1 - l \le z \le z_1 + l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{y}A_2\delta(x)\delta(z)\cos k(y-y_2) & y_2 - l \le y \le y_2 + l \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{z}A_3\delta(x)\delta(y)\cos k(z-z_3) & z_3 - l \le z \le z_3 + l \\ \vec{J}^{(4)} = \widehat{y}A_4\delta(x)\delta(z)\cos k(y-y_4) & y_4 - l \le y \le y_4 + l \end{cases}$$

Posto $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$ per la uniformitá del sistema di antenne, la densitá di corrente risultante é la somma delle quattro:

$$\begin{aligned} \vec{J} =& \widehat{z}\delta(x)\delta(y)\cos k(z-z_1) + \widehat{y}\delta(x)\delta(z)\cos k(y-y_2) + \\ &+ \widehat{z}\delta(x)\delta(y)\cos k(z-z_3) + \widehat{y}\delta(x)\delta(z)\cos k(y-y_4) \end{aligned}$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta,\phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'}\vec{J}(\vec{r}\,')d^3r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x}\sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,' = x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}
&\vec{N}(\theta,\phi) = \\
&= \int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)} \widehat{z}\delta(x')\delta(y')\cos k(z'-z_1)dx'dy'dz' + \\
&+ \int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)} \widehat{y}\delta(x')\delta(z')\cos k(y'-y_2)dx'dy'dz' + \\
&+ \int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)} \widehat{z}\delta(x')\delta(y')\cos k(z'-z_3)dx'dy'dz' + \\
&+ \int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)} \widehat{y}\delta(x')\delta(z')\cos k(y'-y_4)dx'dy'dz'
\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) = &\widehat{z}\int_{z_1-l}^{z_1+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_1)dz' + \\
&+\widehat{y}\int_{y_2-l}^{y_2+l} e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y'-y_2)dy' + \\
&+\widehat{z}\int_{z_3-l}^{z_3+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_3)dz' + \\
&+\widehat{y}\int_{y_4-l}^{y_4+l} e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y'-y_4)dy'
\end{aligned}$$

Valutiamo $\displaystyle\int_{z_i-l}^{z_i+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_i)dz'$.

Poniamo $z'-z_i = u \Longrightarrow dz' = du$. Per $z' = z_i - l \Longrightarrow u = -l$. Per $z' = z_i + l \Longrightarrow u = +l$. Si ha, quindi:

$$\begin{aligned}
&\int_{z_i-l}^{z_i+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_i)dz' = e^{-ikz_i\cos\theta}\int_{-l}^{+l} e^{-iku\cos\theta}\cos kudu = \\
&= e^{-ikz_i\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}
\end{aligned}$$

Analogamente valutiamo $\displaystyle\int_{y_i-l}^{y_i+l} e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y'-y_i)dy'$.

Poniamo $y' - y_i = u \Longrightarrow dy' = du$. Per $y' = y_i - l \Longrightarrow u = -l$. Per $y' = y_i + l \Longrightarrow u = +l$. Si ha, quindi:

$$\int_{y_i-l}^{y_i+l} e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y'-y_i)dy' =$$

$$= e^{-iky_i\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-iku\sin\theta\sin\phi}\cos ku du = e^{-iky_i\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}$$

avendo calcolato:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-iku\sin\theta\sin\phi}\cos ku du = \int_{-l}^{+l} e^{-iku\cos\chi}\cos ku du = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}$$

in quanto:

$$\widehat{y}\cdot\widehat{r} = \cos\chi = \sin\theta\sin\phi$$

essendo $\chi$ l'angolo formato fra l'asse $y$ e la direzione del vettore posizione $\widehat{e}_r$.

Si ha, pertanto:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{z}e^{-ikz_1\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+\\ &+\widehat{y}e^{-iky_2\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}+\\ &+\widehat{z}e^{-ikz_3\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+\\ &+\widehat{y}e^{-iky_4\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\end{aligned}$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{z}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\left[e^{-ikz_1\cos\theta}+e^{-ikz_3\cos\theta}\right]+\\ &+\widehat{y}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\left[e^{-iky_2\sin\theta\sin\phi}+e^{-iky_4\sin\theta\sin\phi}\right]\end{aligned}$$

Si ponga:

$$z_1 = +d,\; z_3 = -d,\; y_2 = -d,\; y_4 = +d$$

Quindi:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \hat{z}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\left[e^{-ikd\cos\theta}+e^{+ikd\cos\theta}\right]+ \\ +\hat{y}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\left[e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}+e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\right]$$

ossia:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \hat{z}\frac{4}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\cos(kd\cos\theta)+ \\ +\hat{y}\frac{4}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\cos(kd\sin\theta\sin\phi)$$

Poiché:

$$\begin{cases} \hat{x} = \hat{e}_r\sin\theta\cos\phi+\hat{e}_\theta\cos\theta\cos\phi-\hat{e}_\phi\sin\phi \\ \hat{y} = \hat{e}_r\sin\theta\sin\phi+\hat{e}_\theta\cos\theta\sin\phi+\hat{e}_\phi\cos\phi \\ \hat{z} = \hat{e}_r\cos\theta-\hat{e}_\theta\sin\theta \end{cases}$$

si ha:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \hat{e}_r\frac{4}{k}\left\{\sin\theta\sin\phi\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\cos(kd\sin\theta\sin\phi)+ \right. \\ \left. +\cos\theta\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\cos(kd\cos\theta)\right\}+ \\ +\hat{e}_\theta\frac{4}{k}\left\{\cos\theta\sin\phi\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\cos(kd\sin\theta\sin\phi)- \right. \\ \left. -\sin\theta\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\cos(kd\cos\theta)\right\}+ \\ +\hat{e}_\phi\frac{4}{k}\left\{\cos\phi\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\cos(kd\sin\theta\sin\phi)\right\}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(|N_\theta|^2+|N_\phi|^2\right)\hat{e}_r$$

**10-6) Esercizio n. 2 del 19/2/2010**

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = 90^0$. Si assuma $d = \lambda$.

---

Si ha:

$$N_\theta = \frac{4}{k}\left\{\cos\theta\sin\phi\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\cos(kd\sin\theta\sin\phi) - \sin\theta\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\cos(kd\cos\theta)\right\}$$

$$N_\phi = \frac{4}{k}\left\{\cos\phi\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\cos(kd\sin\theta\sin\phi)\right\}$$

Per $\theta = 90^0$:

$$(N_\theta)_{(\theta=90^0)} = -\frac{4}{k}$$

$$(N_\phi)_{(\theta=90^0)} = \frac{4}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi}\cos(kd\sin\phi)$$

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(|N_\theta|^2+|N_\phi|^2\right)\widehat{e}_r = \frac{1}{2}Z\left(\frac{1}{\pi r}\right)^2\left(1+\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos^2\phi}\cos^2(kd\sin\phi)\right)\widehat{e}_r$$

Per $d = \lambda \Longrightarrow kd = 2\pi$, quindi:

$$\langle\vec{S}\rangle_{(\theta=90^0)} = \frac{1}{2}Z\left(\frac{1}{\pi r}\right)^2\left(1+\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos^2\phi}\cos^2(2\pi\sin\phi)\right)\widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma:

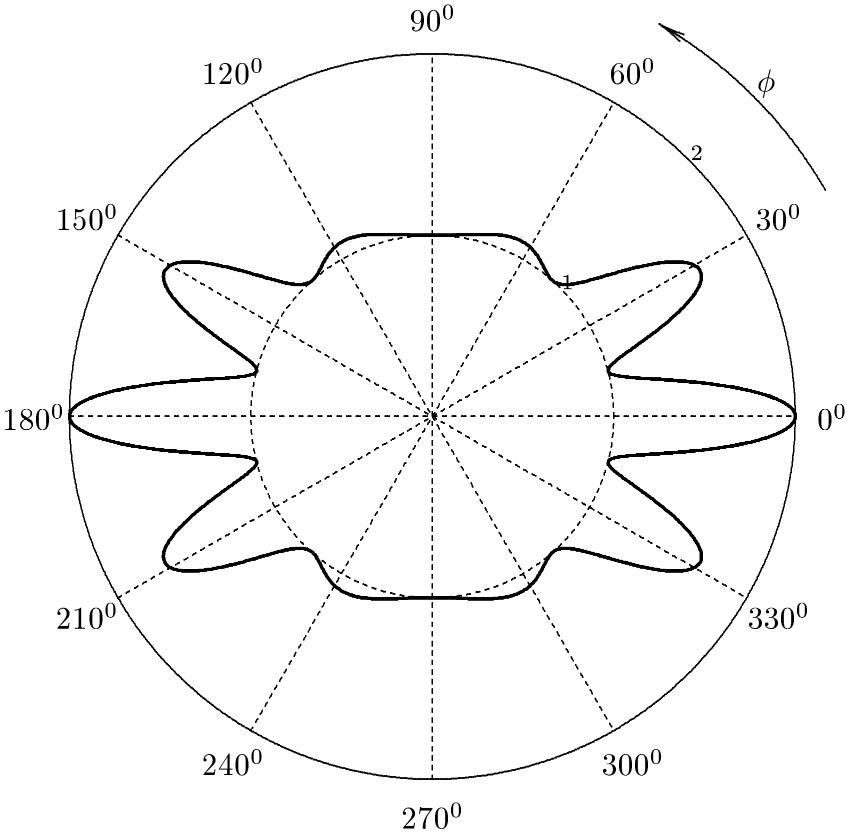
$$F(\phi) = 1+\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos^2\phi}\cos^2(2\pi\sin\phi)$$

Osserviamo che il fattore di forma é a simmetria centrale. Il valore massimo si ha per $\phi = 0^0$ e vale 2. Il valore minimo, che vale 1, si ha quando si annulla il secondo termine. Questo si ha per $\phi_{min} = 90^0$, in quanto $\left(\lim_{\phi\to 90^0}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos^2\phi} = 0\right)$, e per:

$$2\pi\sin\phi_{min} = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin\phi_{min} = \frac{1}{4} \text{ da cui } \phi_{min} = 14^0.478$$

e

$$2\pi \sin\phi_{min} = \frac{3}{2}\pi \Longrightarrow \sin\phi_{min} = \frac{3}{4} \text{ da cui } \phi_{min} = 48^0.59$$




| $\phi$ | $F(\phi)$ | $\phi$ | $F(\phi)$ | $\phi$ | $F(\phi)$ | $\phi$ | $F(\phi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0^0$ | 2 | $1^0$ | 1.9876 | $2^0$ | 1.951 | $3^0$ | 1.8921 |
| $4^0$ | 1.814 | $5^0$ | 1.7208 | $6^0$ | 1.6172 | $7^0$ | 1.5084 |
| $8^0$ | 1.3998 | $9^0$ | 1.2966 | $10^0$ | 1.2037 | $11^0$ | 1.1251 |
| $12^0$ | 1.0641 | $13^0$ | 1.0228 | $14^0$ | 1.0024 | $15^0$ | 1.0028 |
| $16^0$ | 1.0229 | $17^0$ | 1.0608 | $18^0$ | 1.1136 | $19^0$ | 1.1778 |
| $20^0$ | 1.2496 | $21^0$ | 1.3252 | $22^0$ | 1.4004 | $23^0$ | 1.4718 |
| $24^0$ | 1.536 | $25^0$ | 1.5904 | $26^0$ | 1.6328 | $27^0$ | 1.662 |
| $28^0$ | 1.6772 | $29^0$ | 1.6786 | $30^0$ | 1.6667 | $31^0$ | 1.6426 |
| $32^0$ | 1.608 | $33^0$ | 1.5646 | $34^0$ | 1.5147 | $35^0$ | 1.4602 |
| $36^0$ | 1.4602 | $37^0$ | 1.3459 | $38^0$ | 1.2899 | $39^0$ | 1.2368 |
| $40^0$ | 1.1878 | $41^0$ | 1.1439 | $42^0$ | 1.1057 | $43^0$ | 1.0737 |
| $44^0$ | 1.0478 | $45^0$ | 1.028 | $46^0$ | 1.0138 | $47^0$ | 1.0049 |
| $48^0$ | 1.0006 | $49^0$ | 1.0003 | $50^0$ | 1.0032 | $51^0$ | 1.0086 |
| $52^0$ | 1.0158 | $53^0$ | 1.0242 | $54^0$ | 1.0332 | $55^0$ | 1.0423 |
| $56^0$ | 1.0511 | $57^0$ | 1.0592 | $58^0$ | 1.0665 | $59^0$ | 1.0726 |
| $60^0$ | 1.0775 | $61^0$ | 1.0811 | $62^0$ | 1.0811 | $63^0$ | 1.0845 |
| $64^0$ | 1.0844 | $65^0$ | 1.0833 | $66^0$ | 1.0812 | $67^0$ | 1.0783 |
| $68^0$ | 1.0747 | $69^0$ | 1.0706 | $70^0$ | 1.066 | $71^0$ | 1.0612 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $72^0$ | 1.0561 | $73^0$ | 1.051 | $74^0$ | 1.0458 | $75^0$ | 1.0408 |
| $76^0$ | 1.0359 | $77^0$ | 1.0312 | $78^0$ | 1.0267 | $79^0$ | 1.0226 |
| $80^0$ | 1.0187 | $81^0$ | 1.0152 | $82^0$ | 1.012 | $83^0$ | 1.0092 |
| $84^0$ | 1.0068 | $85^0$ | 1.0047 | $86^0$ | 1.003 | $87^0$ | 1.0017 |
| $88^0$ | 1.0008 | $89^0$ | 1.0002 | $90^0$ | 1 | | |

**10-7) Esercizio n. 3 del 19/2/2010**

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza angolare $\omega$, viaggiante in un mezzo di conducibilitá nulla, di permeabilitá elettrica $\epsilon_{r_1} = 1$ e di permeabilitá magnetica $\mu_{r_1} = 1$, incide su un mezzo avente conducibilitá nulla, la stessa permeabilitá elettrica $\epsilon_{r_2} = 1$ ma differente permeabilitá magnetica $\mu_{r_2} = 50$. Determinare le espressioni dei coefficienti di riflessione $R_\perp$ e $R_\parallel$ in funzione dell'angolo di incidenza $\theta_0$. Graficare tali coefficienti in funzione di $\theta_0$ e calcolare esplicitamente l'angolo di Brewster.

————————

In funzione soltanto di $\theta_0$, dalla teoria si ha:

$$\vec{E}_{1_\perp} = \frac{\mu_2 k_1 \cos\theta_0 - \mu_1 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2\theta_0}}{\mu_2 k_1 \cos\theta_0 + \mu_1 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2\theta_0}} \vec{E}_{0_\perp}$$

$$\vec{H}_{1_\perp} = \frac{\mu_1 k_2^2 \cos\theta_0 - \mu_2 k_1 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2\theta_0}}{\mu_1 k_2^2 \cos\theta_0 + \mu_2 k_1 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2\theta_0}} \vec{H}_{0_\perp}$$

Sostituendo in esse le forme esplicite di $k_1 = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1}$ e di $k_2 = \omega\sqrt{\epsilon_2\mu_2}$, si ha:

$$\vec{E}_{1_\perp} = \frac{\mu_2 \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1} \cos\theta_0 - \mu_1 \sqrt{\omega^2\epsilon_2\mu_2 - \omega^2\epsilon_1\mu_1 \sin^2\theta_0}}{\mu_2 \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1} \cos\theta_0 + \mu_1 \sqrt{\omega^2\epsilon_2\mu_2 - \omega^2\epsilon_1\mu_1 \sin^2\theta_0}} \vec{E}_{0_\perp}$$

$$\vec{H}_{1_\perp} = \frac{\mu_1 \omega^2\epsilon_2\mu_2 \cos\theta_0 - \mu_2 \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1} \sqrt{\omega^2\epsilon_2\mu_2 - \omega^2\epsilon_1\mu_1 \sin^2\theta_0}}{\mu_1 \omega^2\epsilon_2\mu_2 \cos\theta_0 + \mu_2 \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1} \sqrt{\omega^2\epsilon_2\mu_2 - \omega^2\epsilon_1\mu_1 \sin^2\theta_0}} \vec{H}_{0_\perp}$$

Posto $\epsilon_1 = \epsilon_2$ e semplificando, le formule diventano:

$$\vec{E}_{1_\perp} = \frac{\mu_2 \sqrt{\mu_1} \cos\theta_0 - \mu_1 \sqrt{\mu_2 - \mu_1 \sin^2\theta_0}}{\mu_2 \sqrt{\mu_1} \cos\theta_0 + \mu_1 \sqrt{\mu_2 - \mu_1 \sin^2\theta_0}} \vec{E}_{0_\perp}$$

$$\vec{H}_{1_\perp} = \frac{\mu_1 \cos\theta_0 - \sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2 - \mu_1 \sin^2\theta_0}}{\mu_1 \cos\theta_0 + \sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2 - \mu_1 \sin^2\theta_0}} \vec{H}_{0_\perp}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore delle due ultime formule per $\sqrt{\mu_1}$ e semplificando, finalmente si ottiene:

$$\vec{E}_{1_\perp} = \frac{\mu_2 \cos\theta_0 - \sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2 - \mu_1 \sin^2\theta_0}}{\mu_2 \cos\theta_0 + \sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2 - \mu_1 \sin^2\theta_0}} \vec{E}_{0_\perp}$$

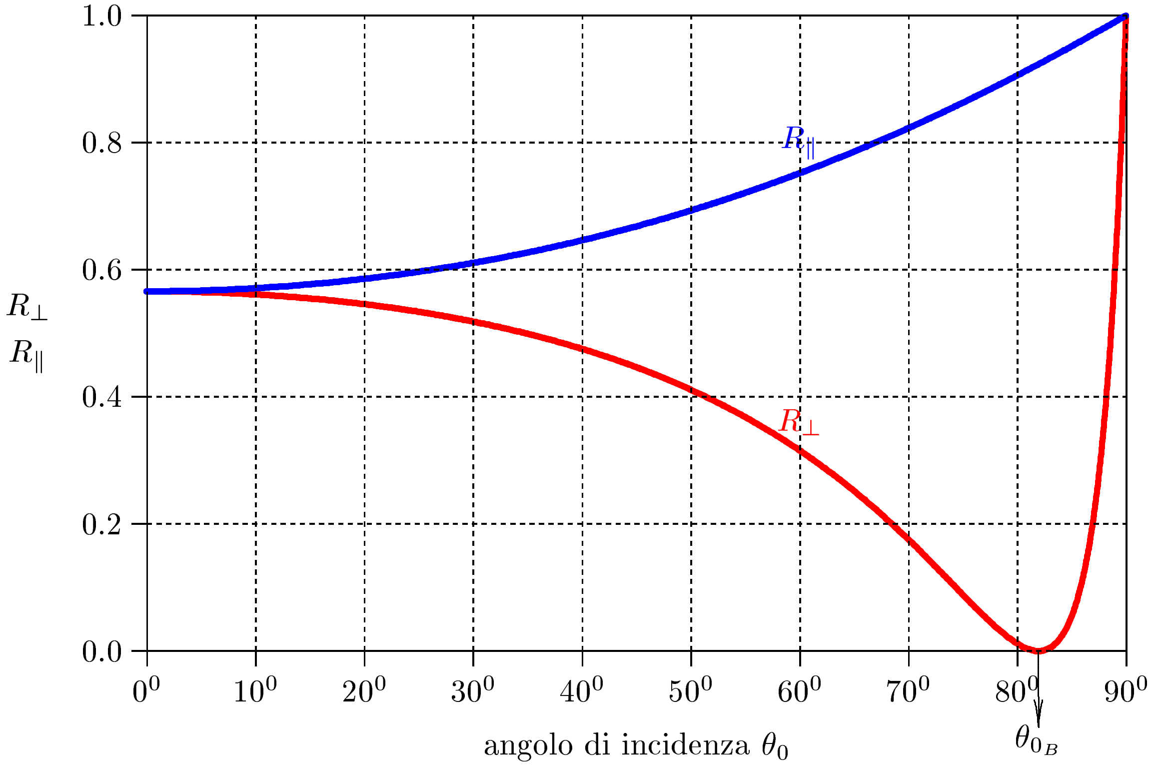
$$\vec{H}_{1_\perp} = \frac{\sqrt{\mu_1}\cos\theta_0 - \sqrt{\mu_2 - \mu_1 \sin^2\theta_0}}{\sqrt{\mu_1}\cos\theta_0 + \sqrt{\mu_2 - \mu_1 \sin^2\theta_0}} \vec{H}_{0_\perp}$$

Ne segue che:

$$R_\perp = \left| \frac{\mu_2 \cos\theta_0 - \sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2 - \mu_1 \sin^2\theta_0}}{\mu_2 \cos\theta_0 + \sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2 - \mu_1 \sin^2\theta_0}} \right|^2$$

$$R_\parallel = \left| \frac{\sqrt{\mu_1}\cos\theta_0 - \sqrt{\mu_2 - \mu_1 \sin^2\theta_0}}{\sqrt{\mu_1}\cos\theta_0 + \sqrt{\mu_2 - \mu_1 \sin^2\theta_0}} \right|^2$$

**Coefficienti di riflessione $R_\perp$, $R_\parallel$: $\epsilon_{r_1} = \epsilon_{r_2} = 1$, $\mu_{r_1} = 1$, $\mu_{r_2} = 50$**




Come si evince dal grafico, $R_\perp$ ha l'andamento di $R_\parallel$ competente a due mezzi dielettrici non magnetici cosí come $R_\parallel$ ha l'andamento di $R_\perp$ competente a due mezzi dielettrici non magnetici. Pertanto l'angolo di Brewster in questo caso compete alla componente perpendicolare. Per calcolarlo annulliamo il numeratore del coefficiente di riflessione $R_\perp$:

$$\mu_2^2 \cos^2\theta_{0_B} = \mu_1(\mu_2 - \mu_1 \sin^2\theta_{0_B})$$

$$\mu_2^2 - \mu_2^2 \sin^2\theta_{0_B} + \mu_1^2 \sin^2\theta_{0_B} - \mu_1\mu_2 = 0$$

$$(\mu_1^2 - \mu_2^2)\sin^2\theta_{0_B} = \mu_2(\mu_1 - \mu_2)$$

da cui:

$$\sin^2\theta_{0_B} = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{50}{51} \Longrightarrow \sin\theta_{0_B} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{51}} \Longrightarrow \theta_{0_B} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{51}}\right) = \underline{\underline{81^0.951}}$$

| $\theta_0$ | $R_\perp$ | $R_\parallel$ | $\theta_0$ | $R_\perp$ | $R_\parallel$ | $\theta_0$ | $R_\perp$ | $R_\parallel$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0^0$ | 0.5658 | 0.5658 | $10^0$ | 0.5609 | 0.5707 | $20^0$ | 0.5456 | 0.5855 |
| $30^0$ | 0.5182 | 0.6104 | $40^0$ | 0.4753 | 0.6461 | $50^0$ | 0.4110 | 0.6930 |
| $60^0$ | 0.3154 | 0.7517 | $70^0$ | 0.1752 | 0.8225 | $80^0$ | 0.0115 | 0.9055 |
| $81^0.951$ | 0.0000 | 0.9231 | $85^0$ | 0.0541 | 0.9541 | $90^0$ | 1 | 1 |

**10-8) Esercizio n. 4 del 19/2/2010**

Un'onda elettromagnetica piana, di frequenza $\nu = 30\ MHz$, viene lanciata in un plasma, supposto indefinito ed uniforme, che presenta le seguenti caratteristiche:

$$N = 5 \cdot 10^{12}\ (elettroni/m^3);\ \nu_{eff} = 10^7\ s^{-1}$$

Calcolare la conducibilitá $\sigma$, la costante dielettrica relativa $\epsilon_r$, nonché il coefficiente di attenuazione dell'onda e la distanza alla quale l'ampiezza del campo elettrico si é ridotta ad un decimo del suo valore all'ingresso del plasma.

————————

(vedi es. n.3 del 23/1/2009)
La frequenza angolare di plasma é:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} = \frac{5 \cdot 10^{12} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}} = 1.5869 \cdot 10^{16}\,(rad/s)^2$$

$$\Longrightarrow \omega_p = 1.2597 \cdot 10^8\,rad/s \Longrightarrow \nu_p = 20.049 \cdot 10^6\ Hz = 20.049\ MHz$$

Prima di calcolare i parametri costitutivi della ionosfera calcoliamo la quantitá sempre ricorrente:

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} = \frac{1.5869 \cdot 10^{16}}{4\pi^2 \cdot 9 \cdot 10^{14} + 4\pi^2 \cdot 10^{14}} = 0.40197$$

La conducibilitá é:

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \omega_{eff} \omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2\pi \cdot 10^7 \cdot 0.40197 = \underline{\underline{2.2362 \cdot 10^{-4}}}\ S/m$$

La costante dielettrica relativa é:

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} = 1 - 0.40197 = \underline{\underline{0.59803}}$$

Calcoliamo il rapporto:

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{2.2362 \cdot 10^{-4}}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 0.59803 \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 10^7} = 0.22405 \Longrightarrow \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 \simeq 0.0502 \ll 1$$

Quindi:

$$\alpha \simeq \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_r}} = \frac{2.2362 \cdot 10^{-4}}{2}\frac{377}{\sqrt{0.59803}} = \underline{\underline{0.0545\ m^{-1}}}$$

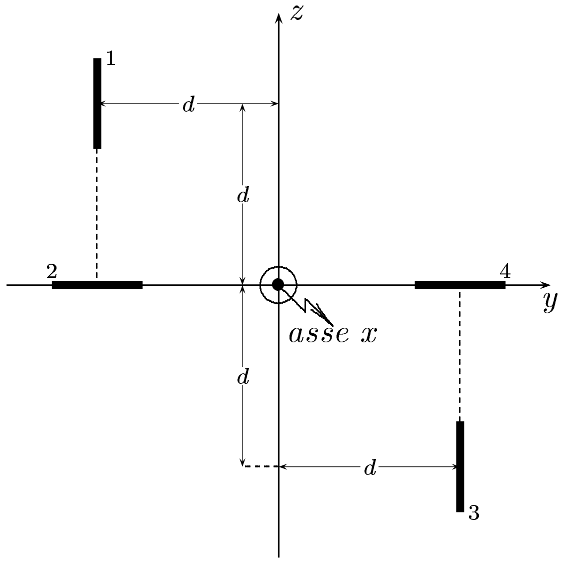
L'ampiezza del campo elettrico diminuisce con legge esponenziale:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\alpha z} \Longrightarrow e^{-\alpha z^*} = 0.1 \Longrightarrow -\alpha z^* = -\ln 10 \Longrightarrow$$

$$z^* = \frac{\ln 10}{\alpha} = \frac{2.3026}{0.0545} \simeq \underline{\underline{42.25\ m}}$$

**10-9) Esercizio n. 1 del 23/4/2010**

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato far field.




Indichiamo con $C_i \equiv (y_i, z_i)$ le coordinate dei centri delle quattro antenne nel piano $yz$.

Le densitá di corrente sull'antenna 1, sull'antenna 2, sull'antenna 3 e sull'antenna 4 sono rispettivamente:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{z}A_1\delta(x)\delta(y-y_1)\cos k(z-z_1) & z_1 - l \le z \le z_1 + l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{y}A_2\delta(x)\delta(z)\cos k(y-y_2) & y_2 - l \le y \le y_2 + l \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{z}A_3\delta(x)\delta(y-y_3)\cos k(z-z_3) & z_3 - l \le z \le z_3 + l \\ \vec{J}^{(4)} = \widehat{y}A_4\delta(x)\delta(z)\cos k(y-y_4) & y_4 - l \le y \le y_4 + l \end{cases}$$

Posto $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$ per la uniformitá del sistema di antenne, la densitá di corrente risultante é la somma delle quattro:

$$\begin{aligned} \vec{J} =& \widehat{z}\delta(x)\delta(y-y_1)\cos k(z-z_1) + \widehat{y}\delta(x)\delta(z)\cos k(y-y_2) + \\ &+ \widehat{z}\delta(x)\delta(y-y_3)\cos k(z-z_3) + \widehat{y}\delta(x)\delta(z)\cos k(y-y_4) \end{aligned}$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta, \phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta, \phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} \vec{J}(\vec{r}\,') d^3r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x}\sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,' = x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}
&\vec{N}(\theta,\phi) = \\
&= \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,'-y_1)\cos k(z\,'-z_1)dx\,'dy\,'dz\,' + \\
&+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{y}\delta(x\,')\delta(z\,')\cos k(y\,'-y_2)dx\,'dy\,'dz\,' + \\
&+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,'-y_2)\cos k(z\,'-z_3)dx\,'dy\,'dz\,' + \\
&+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{y}\delta(x\,')\delta(z\,')\cos k(y\,'-y_4)dx\,'dy\,'dz\,'
\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{z}e^{-iky_1\sin\theta\sin\phi}\int_{z_1-l}^{z_1+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_1)dz\,' + \\
&+ \widehat{y}\int_{y_2-l}^{y_2+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y\,'-y_2)dy\,' + \\
&+ \widehat{z}e^{-iky_3\sin\theta\sin\phi}\int_{z_3-l}^{z_3+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_3)dz\,' + \\
&+ \widehat{y}\int_{y_4-l}^{y_4+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y\,'-y_4)dy\,'
\end{aligned}$$

Valutiamo $\displaystyle\int_{z_i-l}^{z_i+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_i)dz\,'$.

Poniamo $z\,'-z_i = u \Longrightarrow dz\,' = du$. Per $z\,' = z_i - l \Longrightarrow u = -l$. Per $z\,' = z_i + l \Longrightarrow u = +l$. Si ha, quindi:

$$\begin{aligned}
&\int_{z_i-l}^{z_i+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_i)dz\,' = e^{-ikz_i\cos\theta}\int_{-l}^{+l} e^{-iku\cos\theta}\cos ku du = \\
&= e^{-ikz_i\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}
\end{aligned}$$

Analogamente valutiamo $\displaystyle\int_{y_i-l}^{y_i+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y\,'-y_i)dy\,'$.

Poniamo $y' - y_i = u \Longrightarrow dy' = du$. Per $y' = y_i - l \Longrightarrow u = -l$. Per $y' = y_i + l \Longrightarrow u = +l$. Si ha, quindi:

$$\int_{y_i-l}^{y_i+l} e^{-iky'\sin\theta\sin\phi} \cos k(y' - y_i)dy' =$$
$$= e^{-iky_i\sin\theta\sin\phi} \int_{-l}^{+l} e^{-iku\sin\theta\sin\phi} \cos kudu = e^{-iky_i\sin\theta\sin\phi} \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}$$

avendo calcolato:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-iku\sin\theta\sin\phi} \cos kudu = \int_{-l}^{+l} e^{-iku\cos\chi} \cos kudu = \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}$$

in quanto:

$$\widehat{y} \cdot \widehat{r} = \cos\chi = \sin\theta\sin\phi$$

essendo $\chi$ l'angolo formato fra l'asse $y$ e la direzione del vettore posizione $\widehat{e}_r$.

Si ha, pertanto:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{z} e^{-iky_1\sin\theta\sin\phi} e^{-ikz_1\cos\theta} \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \\ &+ \widehat{y} e^{-iky_2\sin\theta\sin\phi} \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} + \\ &+ \widehat{z} e^{-iky_3\sin\theta\sin\phi} e^{-ikz_3\cos\theta} \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \\ &+ \widehat{y} e^{-iky_4\sin\theta\sin\phi} \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\end{aligned}$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{z} \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \left[ e^{-iky_1\sin\theta\sin\phi} e^{-ikz_1\cos\theta} + e^{-iky_3\sin\theta\sin\phi} e^{-ikz_3\cos\theta} \right] + \\ &+ \widehat{y} \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} \left[ e^{-iky_2\sin\theta\sin\phi} + e^{-iky_4\sin\theta\sin\phi} \right]\end{aligned}$$

Si ponga:

$$z_1 = +d, \;\; z_3 = -d, \;\; y_2 = -d, \;\; y_4 = +d$$

Quindi:

$$\vec{N}(\theta,\phi)=\widehat{z}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\left[e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}e^{-ikd\cos\theta}+e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}e^{+ikd\cos\theta}\right]+$$
$$+\widehat{y}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\left[e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}+e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\right]$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
&\left[e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}e^{-ikd\cos\theta}+e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}e^{+ikd\cos\theta}\right]=\\
&=\left[\cos(kd\sin\theta\sin\phi)+i\sin(kd\sin\theta\sin\phi)\right]\left[\cos(kd\cos\theta)-i\sin(kd\cos\theta)\right]+\\
&+\left[\cos(kd\sin\theta\sin\phi)-i\sin(kd\sin\theta\sin\phi)\right]\left[\cos(kd\cos\theta)+i\sin(kd\cos\theta)\right]=\\
&=\left[\cos(kd\sin\theta\sin\phi)\right]\cos(kd\cos\theta)-i\underline{\left[\cos(kd\sin\theta\sin\phi)\right]\sin(kd\cos\theta)}+\\
&+i\underline{\underline{\left[\sin(kd\sin\theta\sin\phi)\right]\cos(kd\cos\theta)}}+\left[\sin(kd\sin\theta\sin\phi)\right]\sin(kd\cos\theta)+\\
&+\left[\cos(kd\sin\theta\sin\phi)\right]\cos(kd\cos\theta)+i\underline{\left[\cos(kd\sin\theta\sin\phi)\right]\sin(kd\cos\theta)}-\\
&-i\underline{\underline{\left[\sin(kd\sin\theta\sin\phi)\right]\cos(kd\cos\theta)}}+\left[\sin(kd\sin\theta\sin\phi)\right]\sin(kd\cos\theta)=\\
&=2\left[\cos(kd\sin\theta\sin\phi)\right]\cos(kd\cos\theta)+2\left[\sin(kd\sin\theta\sin\phi)\right]\sin(kd\cos\theta)
\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi)=&\,\widehat{z}\frac{4}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\Big\{\left[\cos(kd\sin\theta\sin\phi)\right]\cos(kd\cos\theta)+\\
&+\left[\sin(kd\sin\theta\sin\phi)\right]\sin(kd\cos\theta)\Big\}+\\
&+\widehat{y}\frac{4}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\cos(kd\sin\theta\sin\phi)
\end{aligned}$$

Poiché:

$$\begin{cases}
\widehat{x}=\widehat{e}_r\sin\theta\cos\phi+\widehat{e}_\theta\cos\theta\cos\phi-\widehat{e}_\phi\sin\phi\\[2mm]
\widehat{y}=\widehat{e}_r\sin\theta\sin\phi+\widehat{e}_\theta\cos\theta\sin\phi+\widehat{e}_\phi\cos\phi\\[2mm]
\widehat{z}=\widehat{e}_r\cos\theta-\widehat{e}_\theta\sin\theta
\end{cases}$$

si ha:

$$\vec{N}(\theta,\phi)=\widehat{e}_r\frac{4}{k}\left\{\cos\theta\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\left\{[\cos(kd\sin\theta\sin\phi)]\cos(kd\cos\theta)+\right.\right.$$

$$\left.+[\sin(kd\sin\theta\sin\phi)]\sin(kd\cos\theta)\right\}+$$

$$\left.+\sin\theta\sin\phi\frac{4}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\cos(kd\sin\theta\sin\phi)\right\}+$$

$$+\widehat{e}_\theta\frac{4}{k}\left\{\cos\theta\sin\phi\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\cos(kd\sin\theta\sin\phi)-\right.$$

$$-\sin\theta\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\left\{[\cos(kd\sin\theta\sin\phi)]\cos(kd\cos\theta)+\right.$$

$$\left.\left.+[\sin(kd\sin\theta\sin\phi)]\sin(kd\cos\theta)\right\}\right\}+$$

$$+\widehat{e}_\phi\frac{4}{k}\left\{\cos\phi\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\cos(kd\sin\theta\sin\phi)\right\}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle=\frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(|N_\theta|^2+|N_\phi|^2\right)\widehat{e}_r$$

ossia:

$$\langle\vec{S}\rangle=\frac{1}{2}Z\left(\frac{1}{\pi r}\right)^2\left[\left\{\cos\theta\sin\phi\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\cos(kd\sin\theta\sin\phi)-\right.\right.$$

$$-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\left\{[\cos(kd\sin\theta\sin\phi)]\cos(kd\cos\theta)+\right.$$

$$\left.\left.\left.+[\sin(kd\sin\theta\sin\phi)]\sin(kd\cos\theta)\right\}\right\}^2+\left\{\cos\phi\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\cos(kd\sin\theta\sin\phi)\right\}^2\right]\widehat{e}_r$$

**10-10) Esercizio n. 2 del 23/4/2010**

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = 90^0$. Si assuma $d = \lambda$.

———————

Per $\theta = 90^0$, il vettore di Poynting risulta:

$$\langle \vec{S} \rangle_{(\theta=90^0)} = \frac{1}{2} Z \left( \frac{1}{\pi r} \right)^2 \left[ \left\{ -\left[ \cos(kd \sin\phi) \right] \right\}^2 + \left\{ \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} \cos(kd\sin\phi) \right\}^2 \right] \widehat{e}_r$$

ossia:

$$\langle \vec{S} \rangle_{(\theta=90^0)} = \frac{1}{2} Z \left( \frac{1}{\pi r} \right)^2 \cos^2(kd\sin\phi) \left[ 1 + \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos^2\phi} \right] \widehat{e}_r$$

Per $d = \lambda \Longrightarrow kd = 2\pi$, quindi:

$$\langle \vec{S} \rangle_{(\theta=90^0)} = \frac{1}{2} Z \left( \frac{1}{\pi r} \right)^2 \cos^2(2\pi\sin\phi) \left[ 1 + \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos^2\phi} \right] \widehat{e}_r$$

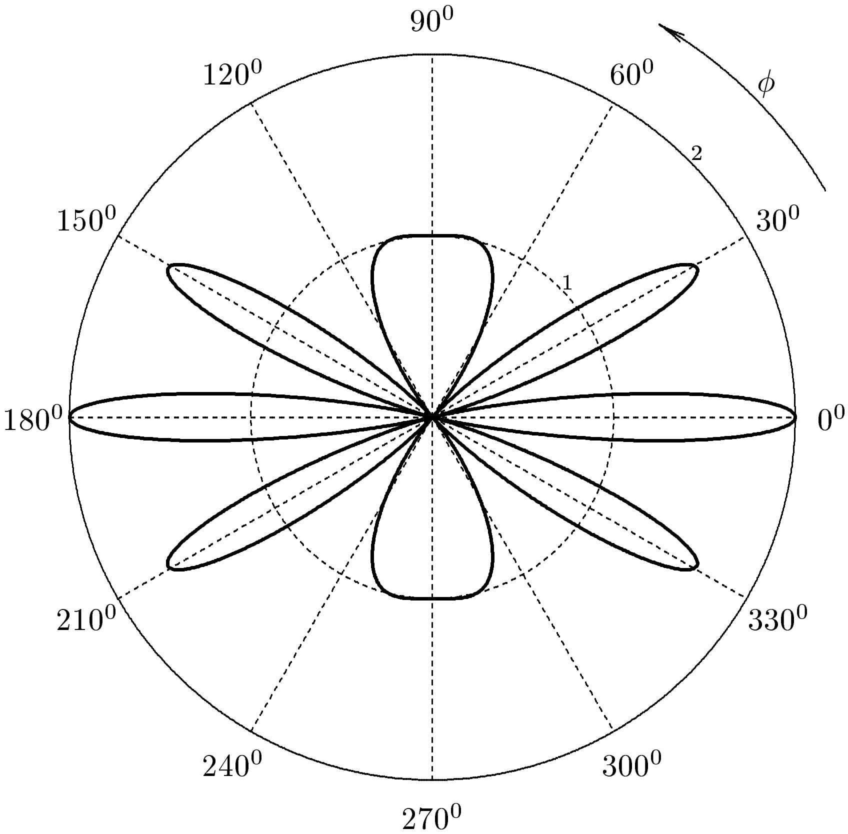
Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\phi) = \cos^2(2\pi\sin\phi) \left[ 1 + \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos^2\phi} \right]$$

Esso si annulla, nel primo quadrante, per:

$$2\pi\sin\phi_1 = \frac{\pi}{2} \text{ e } 2\pi\sin\phi_2 = \frac{3}{2}\pi \Longrightarrow \sin\phi_1 = \frac{1}{4} \text{ e} \Longrightarrow \sin\phi_2 = \frac{3}{4} \text{ ossia:}$$

$$\phi_1 = 14^0.478 \text{ e } \phi_2 = 48^0.59$$




| $\phi$ | $F(\phi)$ | $\phi$ | $F(\phi)$ | $\phi$ | $F(\phi)$ | $\phi$ | $F(\phi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0^0$ | 2 | $1^0$ | 1.9756 | $2^0$ | 1.9037 | $3^0$ | 1.7878 |
| $4^0$ | 1.6339 | $5^0$ | 1.4497 | $6^0$ | 1.2424 | $7^0$ | 1.0281 |
| $8^0$ | 0.81123 | $9^0$ | 0.60423 | $10^0$ | 0.41672 | $11^0$ | 0.25715 |
| $12^0$ | 0.13237 | $13^0$ | 0.047345 | $14^0$ | 0.0049318 | $14^0.478$ | 0.0000 |
| $15^0$ | 0.0059408 | $16^0$ | 0.048663 | $17^0$ | 0.13004 | $18^0$ | 0.24489 |
| $20^0$ | 0.54831 | $21^0$ | 0.72142 | $22^0$ | 0.89797 | $23^0$ | 1.07000 |
| $24^0$ | 1.2302 | $25^0$ | 1.3720 | $26^0$ | 1.4902 | $27^0$ | 1.5807 |
| $28^0$ | 1.6409 | $29^0$ | 1.6695 | $30^0$ | 1.6667 | $31^0$ | 1.6337 |
| $32^0$ | 1.5731 | $33^0$ | 1.4880 | $34^0$ | 1.3826 | $35^0$ | 1.2613 |
| $36^0$ | 1.1287 | $37^0$ | 0.98953 | $38^0$ | 0.84843 | $39^0$ | 0.70964 |
| $40^0$ | 0.57695 | $41^0$ | 0.45365 | $42^0$ | 0.34244 | $43^0$ | 0.24537 |
| $44^0$ | 0.16390 | $45^0$ | 0.0988451.028 | $46^0$ | 0.050486 | $47^0$ | 0.018591 |
| $48^0$ | 0.0024924 | $48^0.59$ | 0.0000 | $50^0$ | 0.013293 | $51^0$ | 0.037367 |
| $52^0$ | 0.071738 | $53^0$ | 0.114690 | $54^0$ | 0.16451 | $55^0$ | 0.21951 |
| $56^0$ | 0.27811 | $57^0$ | 0.33883 | $58^0$ | 0.40033 | $59^0$ | 0.46146 |
| $60^0$ | 0.52118 | $61^0$ | 0.57867 | $62^0$ | 0.63325 | $63^0$ | 0.68438 |
| $64^0$ | 0.73170 | $65^0$ | 0.77495 | $66^0$ | 0.81402 | $67^0$ | 0.84888 |
| $68^0$ | 0.87959 | $69^0$ | 0.90629 | $70^0$ | 0.92918 | $71^0$ | 0.94849 |
| $72^0$ | 0.96449 | $73^0$ | 0.97748 | $74^0$ | 0.98777 | $75^0$ | 0.99566 |
| $76^0$ | 1.0015 | $77^0$ | 1.0055 | $78^0$ | 1.0080 | $79^0$ | 1.0093 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $80^0$ | 1.0096 | $81^0$ | 1.0092 | $82^0$ | 1.0083 | $83^0$ | 1.0070 |
| $84^0$ | 1.0056 | $85^0$ | 1.0041 | $86^0$ | 1.0028 | $87^0$ | 1.0016 |
| $88^0$ | 1.0027 | $89^0$ | 1.0002 | $90^0$ | 1 | | |

**10-11) Esercizio n. 3 del 23/4/2010**

L'acqua é un mezzo fortemente dispersivo. Il suo indice di rifrazione complesso $n$ dipende dalla frequenza dell'onda elettromagnetica che in essa si propaga. In particolare riportiamo i valori sperimentali di $n$ competenti ad un valore relativo alla bassa radiofrequenza, alla alta radiofrequenza, dove c'é un forte assorbimento della radiazione, ed alla luce. Per $\nu = 30\ MHz$, $n = 8.849 + i6.931 \cdot 10^{-3}$. Per $\nu = 30\ GHz$, $n = 5.879 + i2.830$. Per $\nu = 6 \cdot 10^{14}\ Hz$ (catastrofe ottica), $n = 1.339 + i9.243 \cdot 10^{-10}$. Un'onda elettromagnetica piana si propaga in acqua lungo la direzione dell'asse $z$ di un sistema di riferimento.

Calcolare la costante di propagazione $\beta$ ed il coefficiente di attenuazione $\alpha$ per ciascuna delle frequenze sopra riportate. Se la densitá di potenza dell'onda, mediata in un periodo, nel piano $z = 0$ é $\mathscr{P} = 1000\ W/m^2$, calcolare la densitá di potenza, mediata in un periodo, dopo un percorso di 100 $m$.

———————

**Nel caso di $\nu = 30\ MHz$, si ha:**

$$\beta = \frac{\omega}{c}\Re(n) = \frac{2\pi \cdot 30 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} 8.849 \simeq 0.62832 \cdot 8.849 \simeq \underline{\underline{5.56\ rad/m}}$$

$$\alpha = \frac{\omega}{c}\Im(n) = \frac{2\pi \cdot 30 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} 6.931 \cdot 10^{-3} \simeq 0.62832 \cdot 6.931 \cdot 10^{-3} \simeq \underline{\underline{0.004355\ m^{-1}}}$$

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_0 e^{-2\alpha z} \simeq 1000 e^{-2 \cdot 0.004355 \cdot 100} \simeq 1000 e^{-0.871} \simeq 1000 \cdot 0.41853 \simeq \underline{\underline{418.43\ W/m^2}}$$

**Nel caso di $\nu = 30\ GHz$, si ha:**

$$\beta = \frac{\omega}{c}\Re(n) = \frac{2\pi \cdot 30 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} 5.879 \simeq 628.32 \cdot 5.879 \simeq \underline{\underline{3693.9\ rad/m}}$$

$$\alpha = \frac{\omega}{c}\Im(n) = \frac{2\pi \cdot 30 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} 2.830 \simeq 628.32 \cdot 2.830 \simeq \underline{\underline{1778.1\ m^{-1}}}$$

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_0 e^{-2\alpha z} \simeq 1000 e^{-2 \cdot 1778.1 \cdot 100} \simeq 1000 e^{-355620} \simeq 1000 \cdot 0 \simeq \underline{\underline{0\ W/m^2}}$$

**Nel caso della luce, $\nu = 6 \cdot 10^{14}\ Hz$, si ha:**

$$\beta = \frac{\omega}{c}\Re(n) = \frac{2\pi \cdot 6 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 10^8} 1.339 \simeq 1.2566 \cdot 10^7 \cdot 1.339 \simeq \underline{\underline{1.6826 \cdot 10^7\ rad/m}}$$

$$\alpha = \frac{\omega}{c}\Im(n) = \frac{2\pi \cdot 6 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 10^8} 9.243 \cdot 10^{-10} \simeq 1.2566 \cdot 10^7 \cdot 9.243 \cdot 10^{-10} \simeq \underline{\underline{0.011615\ m^{-1}}}$$

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_0 e^{-2\alpha z} \simeq 1000 e^{-2 \cdot 0.011615 \cdot 100} \simeq 1000 e^{-2.323} \simeq 1000 \cdot 0.09798 \simeq \underline{\underline{97.98\ W/m^2}}$$

**10-12) Esercizio n. 4 del 23/4/2010**

Con riferimento al problema precedente, calcolare i coefficienti di riflessione, per incidenza normale, competenti alle frequenze indicate, se l'onda elettromagnetica incidente in acqua proviene dall'aria. Se la densitá di potenza dell'onda in aria, mediata in un periodo, é $\mathscr{P} = 1000\ W/m^2$, calcolare la densitá di potenza, mediata in un periodo, dopo un percorso di 100 $m$ in acqua.

---

Applicando le formule generali della riflessione, per $\theta_0 = 0^0$ e per $\mu_1 \simeq \mu_2$, si ha:

$$R = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2 = \left|\frac{\beta_1 - \beta_2 - i\alpha_2}{\beta_1 + \beta_2 + i\alpha_2}\right|^2 = \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2 + \alpha_2^2}{(\beta_1 + \beta_2)^2 + \alpha_2^2}$$

Poiché:

$$\beta = \frac{\omega}{c}\Re(n) \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{\omega}{c}\Im(n)$$

e, poiché

$$\Re(n_1) = 1 \quad \text{e} \quad \Im(n_1) = 0$$

la formula del coefficiente di riflessione diventa:

$$R = \frac{[1 - \Re(n_2)]^2 + [\Im(n_2)]^2}{[1 + \Re(n_2)]^2 + [\Im(n_2)]^2}$$

Per quanto riguarda la densitá di potenza trasmessa e viaggiante in acqua, si ha:

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_0(1 - R)e^{-2\alpha z}$$

**Nel caso di $\nu = 30\ MHz$ ($n = 8.849 + i6.931 \cdot 10^{-3}$), si ha:**

$$R = \frac{[1 - 8.849]^2 + \left[6.931 \cdot 10^{-3}\right]^2}{[1 + 8.849]^2 + [6.931 \cdot 10^{-3}]^2} \simeq \underline{\underline{0.6351 = 63.51\%}}$$

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_0(1 - R) \cdot 0.41853 \simeq 1000(1 - 0.6351) \cdot 0.41853 \simeq \underline{\underline{152.72\ W/m^2}}$$

**Nel caso di $\nu = 30\ GHz$ ($n = 5.879 + i2.830$), si ha:**

$$R = \frac{[1 - 5.879]^2 + [2.830]^2}{[1 + 5.879]^2 + [2.830]^2} \simeq \underline{\underline{0.57498 = 57.498\%}}$$

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_0(1 - R) \cdot 0 \simeq \underline{\underline{0\ W/m^2}}$$

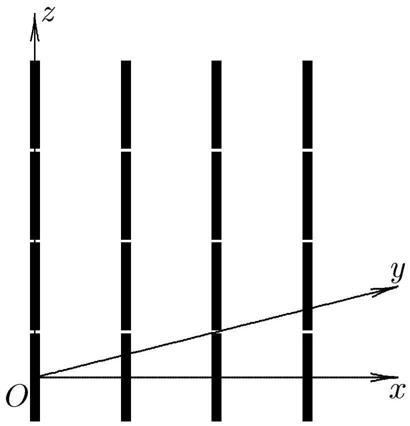
**Nel caso di $\nu = 6 \cdot 10^{14}\ Hz$ (catastrofe ottica) ($n = 1.339 + i9.243 \cdot 10^{-10}$), si ha:**

$$R = \frac{[1 - 1.339]^2 + \left[9.243 \cdot 10^{-10}\right]^2}{[1 - 1.339]^2 + [9.243 \cdot 10^{-10}]^2} \simeq \underline{\underline{0.0210 = 2.1\%}}$$

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_0(1 - R) \cdot 0.09798 \simeq 1000(1 - 0.0210) \cdot 0.09798 \simeq \underline{\underline{95.922\ W/m^2}}$$

**10-13) Esercizio n. 1 del 25/6/2010**

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura, ossia formano un rectangular array 4×4. Il sistema é un reticolo periodico di passo $d$ sia nella direzione dell'asse $x$ e sia nella direzione dell'asse $z$. Determinare l'espressione della funzione $U(\theta, \phi)$.




---

La funzione spaziale che descrive il diagramma di radiazione di un rectangular array uniformemente alimentato e con le correnti in fase fra di loro é:

$$U(\theta,\phi) = I_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \left| \frac{\sin\left[n\left(kd_x \sin\theta\cos\phi\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd_x \sin\theta\cos\phi\right)/2\right]} \frac{\sin\left[m\left(kd_z \cos\theta\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd_z \cos\theta\right)/2\right]} \right|$$

Per $d_x = d_z = d$ e per $n = m = 4$, dopo aver posto $I_0 = 1$, si ha:

$$U(\theta,\phi) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \left| \frac{\sin\left[4\left(kd \sin\theta\cos\phi\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd \sin\theta\cos\phi\right)/2\right]} \frac{\sin\left[4\left(kd \cos\theta\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd \cos\theta\right)/2\right]} \right|$$

**10-14) Esercizio n. 2 del 25/6/2010**

Con riferimento al problema precedente esprimere la funzione $U(\theta, \phi)$ per $\theta = 90^0$ e per $d = \dfrac{\lambda}{2}$. Calcolare analiticamente il suo valore massimo nonché gli zeri nel primo quadrante. Si grafichi la funzione al variare di $\phi$.

---

Per $\theta = \pi/2$ risulta:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} = 1$$

Quindi:

$$U(\pi/2, \phi) = \left| \frac{\sin\left[4\left(kd\cos\phi\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd\cos\phi\right)/2\right]} \frac{\sin\left[4\left(kd\cos\theta\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd\cos\theta\right)/2\right]} \right|$$

Inoltre si ha:

$$\lim_{\theta\to\pi/2} \left\{ \frac{\sin\left[4\left(kd\cos\theta\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd\cos\theta\right)/2\right]} \right\} = 4$$

Ne segue che:

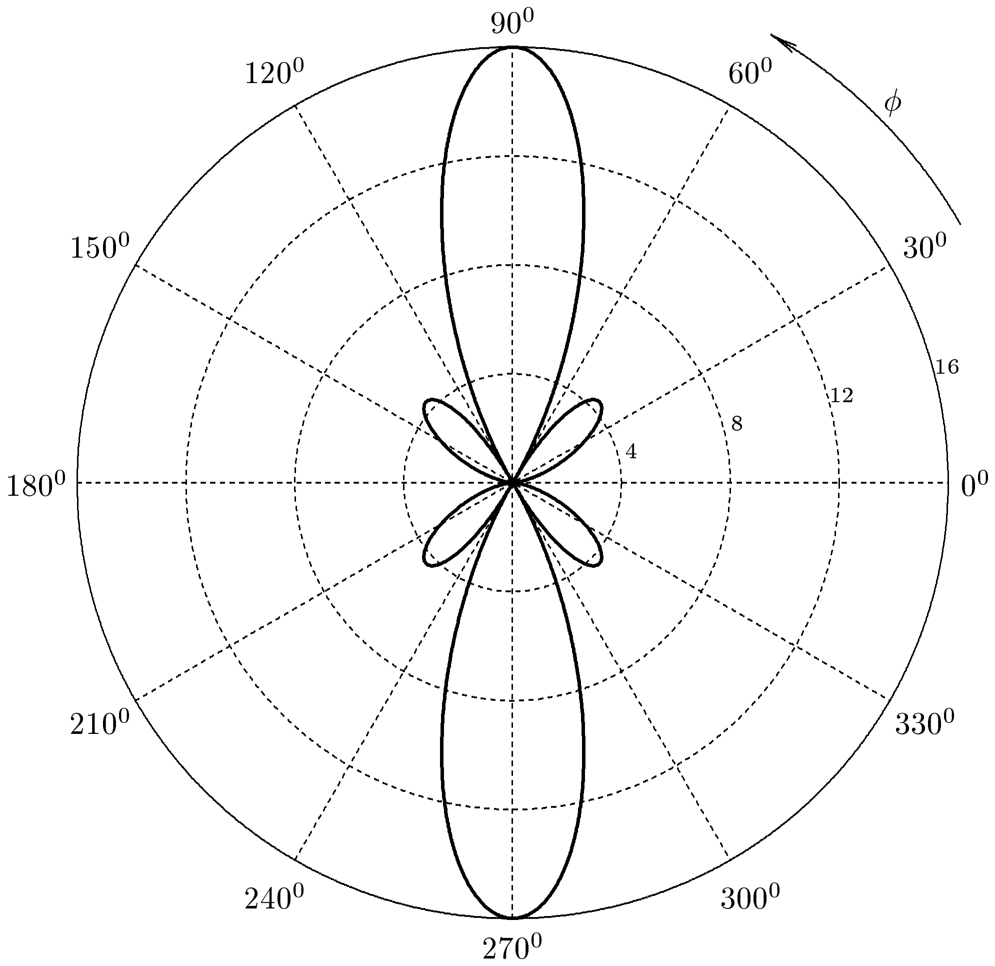
$$U(\pi/2, \phi) = 4 \left| \frac{\sin\left[4\left(kd\cos\phi\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd\cos\phi\right)/2\right]} \right|$$

Per $d = \dfrac{\lambda}{2} \Longrightarrow kd = \pi$, quindi:

$$U(\pi/2, \phi) = 4 \left| \frac{\sin\left[4\left(\pi\cos\phi\right)/2\right]}{\sin\left[\left(\pi\cos\phi\right)/2\right]} \right|$$

Il suo valore massimo é 16 e si ha per $\phi = \pi/2$. Essa si annulla quando si annulla il numeratore ma non il denominatore ossia, nel primo quadrante, per:

$$2\pi\cos\phi^* = \begin{cases} \pi, \text{ ossia per } \cos\phi_1^* = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \underline{\underline{\phi_1^* = \dfrac{\pi}{3} = 60^0}} \\[2ex] 2\pi, \text{ ossia per } \cos\phi_2^* = 1 \Longrightarrow \underline{\underline{\phi_2^* = 0^0}} \end{cases}$$




| $\phi$ | $F(\phi)$ | $\phi$ | $F(\phi)$ | $\phi$ | $F(\phi)$ | $\phi$ | $F(\phi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0^0$ | 0.0000 | $1^0$ | 0.0038 | $2^0$ | 0.01531 | $3^0$ | 0.03444 |
| $4^0$ | 0.06122 | $5^0$ | 0.09563 | $6^0$ | 0.13766 | $7^0$ | 0.18728 |
| $8^0$ | 0.24447 | $9^0$ | 0.309175 | $10^0$ | 0.38135 | $11^0$ | 0.46092 |
| $12^0$ | 0.54781 | $13^0$ | 0.64189 | $14^0$ | 0.74303 | $15^0$ | 0.85107 |
| $16^0$ | 0.96580 | $17^0$ | 1.08699 | $18^0$ | 1.21437 | $19^0$ | 1.3476 |
| $20^0$ | 1.4863 | $21^0$ | 1.6301 | $22^0$ | 1.7785 | $23^0$ | 1.93092 |
| $24^0$ | 2.08676 | $25^0$ | 2.24534 | $26^0$ | 2.40593 | $27^0$ | 2.56769 |
| $28^0$ | 2.72973 | $29^0$ | 2.89106 | $30^0$ | 3.05064 | $31^0$ | 3.20733 |
| $32^0$ | 3.3599 | $33^0$ | 3.5071 | $34^0$ | 3.64755 | $35^0$ | 3.77982 |
| $36^0$ | 3.90242 | $37^0$ | 4.0138 | $38^0$ | 4.11236 | $39^0$ | 4.19646 |
| $40^0$ | 4.26443 | $41^0$ | 4.31457 | $42^0$ | 4.34518 | $43^0$ | 4.35458 |
| $44^0$ | 4.34108 | $45^0$ | 4.30304 | $46^0$ | 4.2389 | $47^0$ | 4.14712 |
| $48^0$ | 4.0263 | $49^0$ | 3.8751 | $50^0$ | 3.6924 | $51^0$ | 3.4771 |
| $52^0$ | 3.22837 | $53^0$ | 2.94551 | $54^0$ | 2.62804 | $55^0$ | 2.27573 |
| $56^0$ | 1.88854 | $57^0$ | 1.46673 | $58^0$ | 1.0108 | $59^0$ | 0.52153 |
| $60^0$ | 0.0000 | $61^0$ | 0.55243 | $62^0$ | 1.1341 | $63^0$ | 1.74305 |
| $64^0$ | 2.37702 | $65^0$ | 3.03349 | $66^0$ | 3.70963 | $67^0$ | 4.4023 |
| $68^0$ | 5.10833 | $69^0$ | 5.82399 | $70^0$ | 6.54558 | $71^0$ | 7.26915 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $72^0$ | 7.99059 | $73^0$ | 8.7057 | $74^0$ | 9.41017 | $75^0$ | 10.0997 |
| $76^0$ | 10.7698 | $77^0$ | 11.4163 | $78^0$ | 12.0349 | $79^0$ | 12.6214 |
| $80^0$ | 13.1719 | $81^0$ | 13.6826 | $82^0$ | 14.1499 | $83^0$ | 14.5704 |
| $84^0$ | 14.94133 | $85^0$ | 15.2598 | $86^0$ | 15.5236 | $87^0$ | 15.7309 |
| $88^0$ | 15.8800 | $89^0$ | 15.9699 | $90^0$ | 16.0000 | | |

Il grafico presenta, quindi, un lobo nella direzione dell'asse $y$.

**10-15) Esercizio n. 3 del 25/6/2010**

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 9\ MHz$, viaggiante in aria, incide con angolo di incidenza $\theta_0 = 50^0$ su un terreno non molto umido di parametri costitutivi $\epsilon_r = 10$, $\sigma = 0.005\, S/m$, $\mu = \mu_0$. Calcolare: a) il coefficiente di riflessione per la componente normale al piano di incidenza del campo elettrico incidente; b) il coefficiente di riflessione per la componente parallela al piano di incidenza del campo elettrico incidente; c) l'angolo di rifrazione.

———————

Calcoliamo, relativamente al mezzo conduttore, il rapporto $\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}$, la costante di propagazione $\beta_2$ e il coefficiente di attenuazione $\alpha_2$.

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{0.005}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 10 \cdot 2\pi \cdot 9 \cdot 10^6} \simeq 0.9986 \Longrightarrow \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 \simeq 0.9972$$

$$\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} = \sqrt{1 + 0.9972} \simeq 1.4132$$

$$\beta_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_r\epsilon_r}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}\right]} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{10}{2}(1 + 1.4132)} \simeq 3.4736\frac{\omega}{c}\ \ (rad/m)$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_r\epsilon_r}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} - 1\right]} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{10}{2}(1.4132 - 1)} \simeq 1.4374\frac{\omega}{c}\ \ \left(m^{-1}\right)$$

da cui risulta:

$$\beta_2^2 - \alpha_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\mu_r\epsilon_r}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}\right] - \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\mu_r\epsilon_r}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} - 1\right] = \frac{\omega^2}{c^2}\mu_r\epsilon_r$$

Si ha anche:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} \simeq 0.1885\ \ (rad/m)$$

$$p^2(\theta_0) = \frac{1}{2}\left[-\beta_2^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2\sin^2\theta_0 + \sqrt{4\beta_2^2\alpha_2^2 + \left(\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2\sin^2\theta_0\right)^2}\right] \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left\{-10 + \sin^2\theta_0 + \sqrt{99.7183 + \left(10 - \sin^2\theta_0\right)^2}\right\}$$

$$q^2(\theta_0) = \frac{1}{2}\left[\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2\sin^2\theta_0 + \sqrt{4\beta_2^2\alpha_2^2 + \left(\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2\sin^2\theta_0\right)^2}\right] \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left\{10 - \sin^2\theta_0 + \sqrt{99.7183 + \left(10 - \sin^2\theta_0\right)^2}\right\}$$

che per $\theta_0 = 50^0$ valgono:

$$p^2\left(50^0\right) \simeq \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left\{ -10 + 0.5868 + 13.7232 \right\} \simeq \frac{1}{2}4.31\frac{\omega^2}{c^2} \Longrightarrow p\left(50^0\right) \simeq 1.468\frac{\omega}{c}$$

$$q^2\left(50^0\right) \simeq \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left\{ 10 - 0.5868 + 13.7232 \right\} \simeq \frac{1}{2}23.1364\frac{\omega^2}{c^2} \Longrightarrow q\left(50^0\right) \simeq 3.4012\frac{\omega}{c}$$

I coefficienti di riflessione, per $\mu_1 \simeq \mu_2$, sono:

$$R_\perp = \rho_\perp^2 = \frac{(q - \beta_1 \cos\theta_0)^2 + p^2}{(q + \beta_1 \cos\theta_0)^2 + p^2} \simeq \frac{(3.4012 - 0.6428)^2 + 2.155}{(3.4012 + 0.6428)^2 + 2.155} \simeq 0.5275 = \underline{\underline{52.75\%}}$$

$$R_\parallel = \rho_\parallel^2 = \rho_\perp^2 \frac{(q - \beta_1 \sin\theta_0 \tan\theta_0)^2 + p^2}{(q + \beta_1 \sin\theta_0 \tan\theta_0)^2 + p^2} \simeq 0.5275 \frac{(3.4012 - 0.766 \cdot 1.1917)^2 + 2.155}{(3.4012 + 0.766 \cdot 1.1917)^2 + 2.155} \simeq$$
$$\simeq 0.5275 \cdot 0.4019 \simeq 0.2120 = \underline{\underline{21.20\%}}$$

L'angolo di rifrazione é:

$$\tan\psi = \frac{\beta_1 \sin\theta_0}{q} \simeq \frac{0.766}{3.4012} \simeq 0.2252 \Longrightarrow \psi = \arctan(0.2252) \simeq \underline{\underline{12^0.69}}$$

**10-16) Esercizio n. 4 del 25/6/2010**

Un'onda elettromagnetica piana si propaga, in aria, lungo l'asse $z$ di un sistema di riferimento. L'ampiezza massima del vettore campo elettrico é $E_0 = 1\ V/m$. Calcolare: a) la densitá di potenza, mediata in un periodo, convogliata dall'onda; b) la pressione di radiazione che si esercita su una lastra di conduttore perfetto che giace in un piano ortogonale all'asse $z$. Se il conduttore ha la forma di un disco di raggio $a = 1\ mm$, calcolare il modulo della forza che si esercita su di esso.

———————

Si ha:

$$\mathscr{P} = \frac{E_0^2}{2Z} \simeq \frac{1}{2 \cdot 377} \simeq \underline{\underline{1.326 \cdot 10^{-3}\ W/m^2}}$$

Poiché la lastra é un conduttore perfetto, la pressione di radiazione esercitata su di essa é:

$$p = 2\frac{\mathscr{P}}{c} \simeq 2\frac{1.326 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^8} \simeq \underline{\underline{8.84 \cdot 10^{-12}\ N/m^2}}$$

Il modulo della forza che si esercita sul disco metallico é:

$$F = pS$$

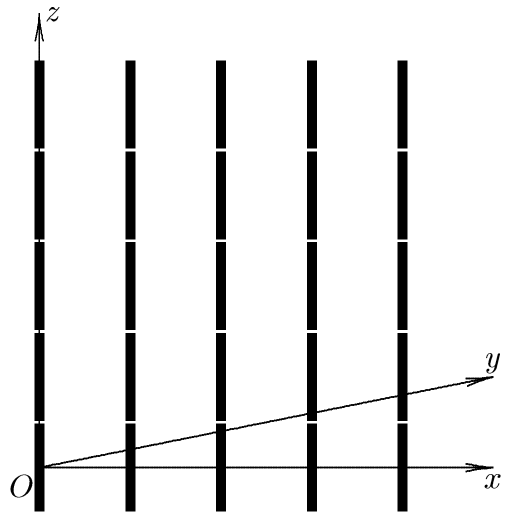
essendo $S = \pi a^2$ l'area della superficie del disco

Quindi:

$$F = 8.84 \cdot 10^{-12} \cdot \pi \cdot 10^{-6} = \underline{\underline{27.77 \cdot 10^{-18}\ N}}$$

**10-17) Esercizio n. 1 del 23/7/2010**

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura, ossia formano un rectangular array 5×5. Il sistema é un reticolo periodico di passo $d$ sia nella direzione dell'asse $x$ e sia nella direzione dell'asse $z$. Determinare l'espressione della funzione $U(\theta, \phi)$.




La funzione spaziale che descrive il diagramma di radiazione di un rectangular array uniformemente alimentato e con le correnti in fase fra di loro é:

$$U(\theta,\phi) = I_0 \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right| \left| \frac{\sin\left[n\left(kd_x \sin\theta\cos\phi\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd_x \sin\theta\cos\phi\right)/2\right]} \frac{\sin\left[m\left(kd_z \cos\theta\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd_z \cos\theta\right)/2\right]} \right|$$

Per $d_x = d_z = d$ e per $n = m = 5$, dopo aver posto $I_0 = 1$, si ha:

$$U(\theta,\phi) = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right| \left| \frac{\sin\left[5\left(kd \sin\theta\cos\phi\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd \sin\theta\cos\phi\right)/2\right]} \frac{\sin\left[5\left(kd \cos\theta\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd \cos\theta\right)/2\right]} \right|$$

**10-18) Esercizio n. 2 del 23/7/2010**

Con riferimento al problema precedente esprimere la funzione $U(\theta, \phi)$ per $\phi = 90^0$ e per $d = \dfrac{\lambda}{2}$. Calcolare analiticamente il suo valore massimo nonché gli zeri nel primo quadrante. Si grafichi la funzione al variare di $\theta$.

————————

Per $\phi = \pi/2$ risulta:

$$\lim_{\phi \to \pi/2} \left\{ \frac{\sin\left[5\left(kd \sin\theta \cos\phi\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd \sin\theta \cos\phi\right)/2\right]} \right\} = 5$$

Quindi:

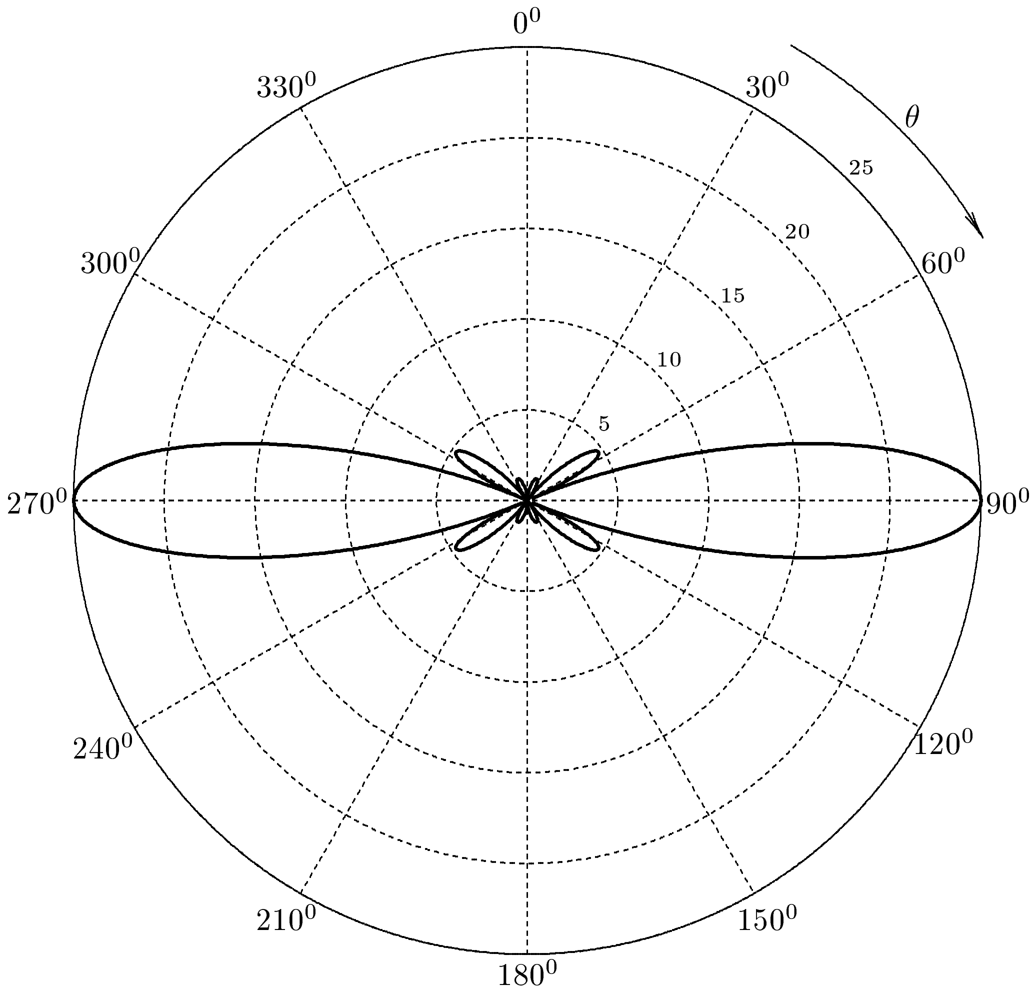
$$U(\theta, \pi/2) = \left| \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right| \left| 5 \frac{\sin\left[5\left(kd\cos\theta\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd\cos\theta\right)/2\right]} \right|$$

Per $d = \dfrac{\lambda}{2} \Longrightarrow kd = \pi$, quindi:

$$U(\theta, \pi/2) = \left| \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right| \left| 5 \frac{\sin\left[5\left(\pi\cos\theta\right)/2\right]}{\sin\left[\left(\pi\cos\theta\right)/2\right]} \right| = F(\theta)$$

Il suo valore massimo é 25 e si ha per $\theta = \pi/2$. Il primo fattore si annulla soltanto per $\theta = 0^0$. Gli altri zeri si ottengono annullando il numeratore ma non il denominatore del secondo fattore, ossia nel primo quadrante, per:

$$\frac{5}{2}\pi\cos\theta^* = \begin{cases} \pi, \text{ ossia per } \cos\theta_1^* = \dfrac{2}{5} \Longrightarrow \underline{\underline{\theta_1^* \simeq 66^0.42}} \\ \\ 2\pi, \text{ ossia per } \cos\theta_2^* = \dfrac{4}{5} \Longrightarrow \underline{\underline{\theta_2^* \simeq 36^0.87}} \end{cases}$$




| $\theta$ | $F(\theta)$ | $\theta$ | $F(\theta)$ | $\theta$ | $F(\theta)$ | $\theta$ | $F(\theta)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0^0$ | 0.0000 | $1^0$ | 0.0068 | $2^0$ | 0.137 | $3^0$ | 0.205 |
| $4^0$ | 0.274 | $5^0$ | 0.342 | $6^0$ | 0.411 | $7^0$ | 0.479 |
| $8^0$ | 0.547 | $9^0$ | 0.615 | $10^0$ | 0.682 | $11^0$ | 0.748 |
| $12^0$ | 0.813 | $13^0$ | 0.877 | $14^0$ | 0.938 | $15^0$ | 0.998 |
| $16^0$ | 1.054 | $17^0$ | 1.107 | $18^0$ | 1.155 | $19^0$ | 1.198 |
| $20^0$ | 1.236 | $21^0$ | 1.266 | $22^0$ | 1.289 | $23^0$ | 1.303 |
| $24^0$ | 1.307 | $25^0$ | 1.300 | $26^0$ | 1.281 | $27^0$ | 1.248 |
| $28^0$ | 1.200 | $29^0$ | 1.138 | $30^0$ | 1.058 | $31^0$ | 0.961 |
| $32^0$ | 0.845 | $33^0$ | 0.711 | $34^0$ | 0.556 | $35^0$ | 0.381 |
| $36^0$ | 0.186 | $36^0.87$ | $\simeq 0.0$ | $38^0$ | 0.264 | $39^0$ | 0.517 |
| $40^0$ | 0.789 | $41^0$ | 1.076 | $42^0$ | 1.377 | $43^0$ | 1.689 |
| $44^0$ | 2.010 | $45^0$ | 2.335 | $46^0$ | 2.661 | $47^0$ | 2.983 |
| $48^0$ | 3.296 | $49^0$ | 3.594 | $50^0$ | 3.872 | $51^0$ | 4.124 |
| $52^0$ | 4.342 | $53^0$ | 4.520 | $54^0$ | 4.652 | $55^0$ | 4.730 |
| $56^0$ | 4.747 | $57^0$ | 4.697 | $58^0$ | 4.573 | $59^0$ | 4.370 |
| $60^0$ | 4.082 | $61^0$ | 3.705 | $62^0$ | 3.235 | $63^0$ | 2.669 |
| $64^0$ | 2.006 | $65^0$ | 1.246 | $66^0.42$ | $\simeq 0.0$ | $67^0$ | 0.560 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $68^0$ | 1.601 | $69^0$ | 2.726 | $70^0$ | 3.928 | $71^0$ | 5.200 |
| $72^0$ | 6.531 | $73^0$ | 7.910 | $74^0$ | 9.325 | $75^0$ | 10.762 |
| $76^0$ | 12.208 | $77^0$ | 13.646 | $78^0$ | 15.062 | $79^0$ | 16.439 |
| $80^0$ | 17.762 | $81^0$ | 19.015 | $82^0$ | 20.182 | $83^0$ | 21.250 |
| $84^0$ | 22.206 | $85^0$ | 23.036 | $86^0$ | 23.730 | $87^0$ | 24.280 |
| $88^0$ | 24.678 | $89^0$ | 24.919 | $90^0$ | 25.000 | | |

Il grafico presenta, quindi, un lobo principale nella direzione dell'asse $y$.

**10-19) Esercizio n. 3 del 23/7/2010**

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 10\ GHz$, viaggiante in aria, penetra in un plasma in direzione della normale alla superficie di separazione. Il plasma é caratterizzato dai seguenti parametri:

$$N = 10^{12}\ cm^{-3}, \quad \omega_{eff} = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^{9}\ rad/s$$

Calcolare il coefficiente di riflessione.

———————

La frequenza angolare di plasma é:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} = \frac{10^{18} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}} \simeq 3.1738 \cdot 10^{21}\,(rad/s)^2$$
$$\Longrightarrow \omega_p \simeq 5.6336 \cdot 10^{10}\,rad/s \Longrightarrow \nu_p \simeq 8.9662 \cdot 10^{9}\ Hz = 8.9662\ GHz$$

Prima di calcolare i parametri costitutivi del plasma, valutiamo la quantitá sempre ricorrente:

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} \simeq \frac{3.1738 \cdot 10^{21}}{4\pi^2 \cdot 10^{20} + 4\pi^2 \cdot 9 \cdot 10^{18}} \simeq 0.737$$

La conducibilitá é:

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \omega_{eff} \omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} \simeq 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 10^{9} \cdot 0.737 \simeq \underline{\underline{0.123}}\ S/m$$

La costante dielettrica relativa é:

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} = 1 - 0.737 \simeq \underline{\underline{0.263}}$$

Calcoliamo il rapporto:

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{0.123}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 0.263 \cdot 2\pi \cdot 10^{10}} \simeq 0.84 \Longrightarrow \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 \simeq 0.705$$

Allora:

$$\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} = \sqrt{1 + 0.705} \simeq 1.306$$

Quindi, ponendo $\mu_r = 1$, si ha:

$$\beta_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_r\epsilon_r}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}\right]} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{0.263}{2}(1 + 1.306)} \simeq \underline{\underline{0.55\frac{\omega}{c}\ rad/m}}$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_r\epsilon_r}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}-1\right]} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{0.263}{2}(1.306-1)} \simeq \underline{\underline{0.2\frac{\omega}{c}\ m^{-1}}}$$

Utilizzando le formule approssimate risulta

$$\alpha_{approx} \simeq \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_r}} = \frac{0.123}{2}\frac{377}{\sqrt{0.263}} \simeq \underline{\underline{45.21\ m^{-1}}} \simeq \underline{\underline{0.215\frac{\omega}{c}\ m^{-1}}}$$

$$\beta_{approx} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r} = \frac{\omega}{c}\sqrt{0.263} = 0.51\frac{\omega}{c} \simeq \underline{\underline{107.23\ rad/m}}$$

Il coefficiente di riflessione, nell'ipotesi $\mu_{r_1} \simeq \mu_{r_2}$ é:

$$R = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2$$

essendo:

$$k_1 = \beta_1 = \frac{\omega}{c}, \quad k_2 = \beta_2 + i\alpha_2$$

Ne segue:

$$R = \left|\frac{\beta_1 - \beta_2 - i\alpha_2}{\beta_1 + \beta_2 + i\alpha_2}\right|^2 = \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2 + \alpha_2^2}{(\beta_1 + \beta_2) + \alpha_2^2} \simeq \frac{(1-0.55)^2 + (0.2)^2}{(1+0.55)^2 + (0.2)^2} \simeq \frac{0.2425}{2.4425} \simeq \underline{\underline{0.099 = 9.9\%}}$$

Utilizzando le formule approssimate per $\beta_2$ ed $\alpha_2$ si ottiene $\underline{\underline{R = 12.29\%}}$.

**10-20) Esercizio n. 4 del 23/7/2010**

Con riferimento al problema precedente, calcolare il tempo necessario all'onda elettromagnetica per percorrere la distanza di 100 $Km$.

———————

Il tempo impiegato da un'onda elettromagnetica, che viaggia in un mezzo dispersivo, per percorrere una distanza $L$ é:

$$\tau = \frac{L}{v_g}$$

essendo:

$$v_g = \frac{c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}}}{1 - \dfrac{\omega_p^2 \omega_{eff}^2}{(\omega^2 + \omega_{eff}^2)^2}}$$

$$\frac{\omega_p^2 \omega_{eff}^2}{(\omega^2 + \omega_{eff}^2)^2} \simeq \frac{3.1738 \cdot 10^{21} \cdot 4\pi^2 \cdot 9 \cdot 10^{18}}{(4\pi^2 \cdot 10^{20} + 4\pi^2 \cdot 9 \cdot 10^{18})^2} \simeq 0.0609$$

Ne segue:

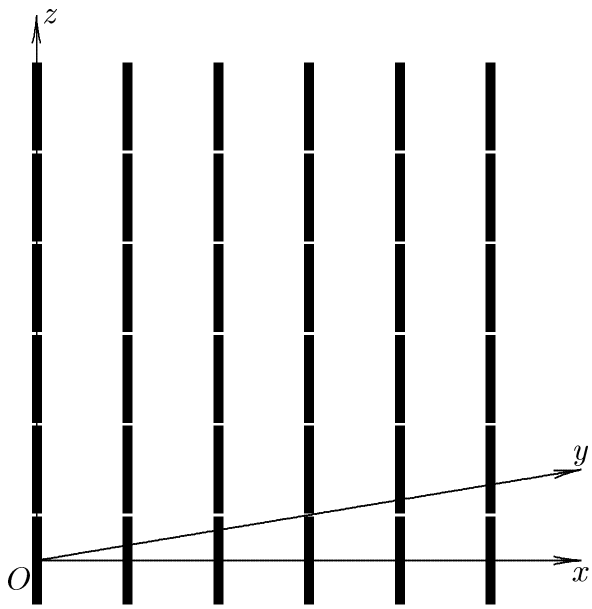
$$v_g = c\frac{\sqrt{0.263}}{1 - 0.0609} \simeq \underline{\underline{0.546c}}$$

Quindi:

$$\tau = \frac{10^5}{0.546c} \simeq \underline{\underline{0.61\ ms}}$$

**10-21) Esercizio n. 1 del 10/9/2010**

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura, ossia formano un rectangular array 6×6. Il sistema é un reticolo periodico di passo $d$ sia nella direzione dell'asse $x$ e sia nella direzione dell'asse $z$. Determinare l'espressione della funzione $U(\theta, \phi)$.




---

La funzione spaziale che descrive il diagramma di radiazione di un rectangular array uniformemente alimentato e con le correnti in fase fra di loro é:

$$U(\theta, \phi) = I_0 \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right| \left| \frac{\sin\left[n\left(kd_x \sin\theta\cos\phi\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd_x \sin\theta\cos\phi\right)/2\right]} \frac{\sin\left[m\left(kd_z \cos\theta\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd_z \cos\theta\right)/2\right]} \right|$$

Per $d_x = d_z = d$ e per $n = m = 6$, dopo aver posto $I_0 = 1$, si ha:

$$U(\theta, \phi) = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right| \left| \frac{\sin\left[6\left(kd \sin\theta\cos\phi\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd \sin\theta\cos\phi\right)/2\right]} \frac{\sin\left[6\left(kd \cos\theta\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd \cos\theta\right)/2\right]} \right|$$

**10-22) Esercizio n. 2 del 10/9/2010**

Con riferimento al problema precedente esprimere la funzione $U(\theta, \phi)$ per $\theta = 90^0$ e per $d = \dfrac{\lambda}{2}$. Calcolare analiticamente il suo valore massimo nonché gli zeri nel primo quadrante. Calcolare, quindi, la larghezza angolare del lobo principale. Si grafichi la funzione al variare di $\phi$.

---

Per $\theta = \pi/2$ risulta:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} = 1$$

Inoltre si ha:

$$\lim_{\theta \to \pi/2} \left\{ \frac{\sin\left[6\left(kd\cos\theta\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd\cos\theta\right)/2\right]} \right\} = 6$$

Ne segue che:

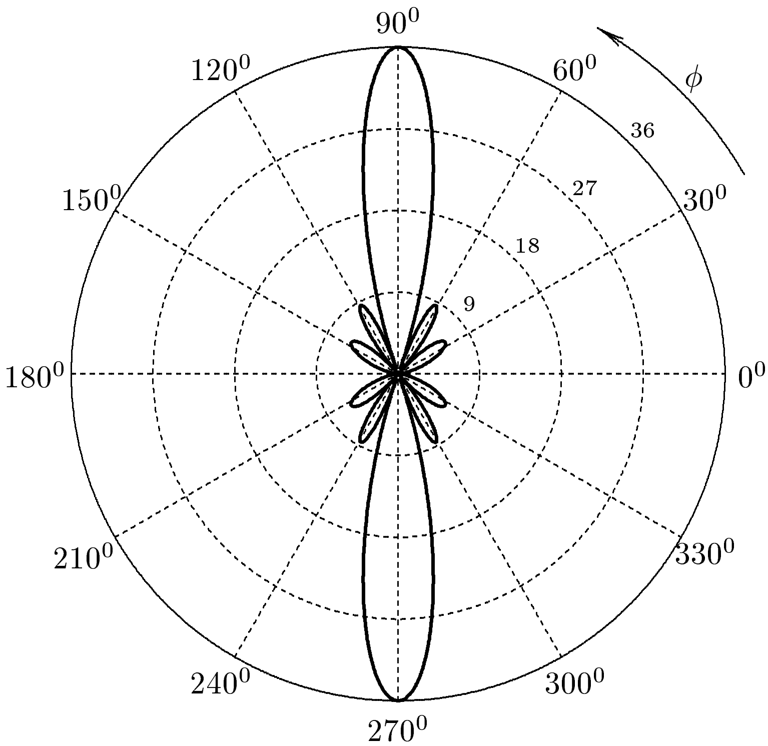
$$U(\pi/2, \phi) = 6 \left| \frac{\sin\left[6\left(kd\cos\phi\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd\cos\phi\right)/2\right]} \right|$$

Per $d = \dfrac{\lambda}{2} \Longrightarrow kd = \pi$, quindi:

$$U(\pi/2, \phi) = 6 \left| \frac{\sin\left[6\left(\pi\cos\phi\right)/2\right]}{\sin\left[\left(\pi\cos\phi\right)/2\right]} \right|$$

Il suo valore massimo é 36 e si ha per $\phi = \pi/2$. Essa si annulla quando si annulla il numeratore ma non il denominatore ossia, nel primo quadrante, per:

$$3\pi\cos\phi^* = \begin{cases} \pi, \text{ ossia per } \cos\phi_1^* = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow \underline{\underline{\phi_1^* = \arccos(1/3) = 70^0.53}} \\ \\ 2\pi, \text{ ossia per } \cos\phi_2^* = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow \underline{\underline{\phi_2^* = \arccos(2/3) = 48^0.19}} \\ \\ 3\pi, \text{ ossia per } \cos\phi_3^* = 1 \Longrightarrow \underline{\underline{\phi_3^* = 0^0}} \end{cases}$$




| $\phi$ | $F(\phi)$ | $\phi$ | $F(\phi)$ | $\phi$ | $F(\phi)$ | $\phi$ | $F(\phi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0^0$ | 0.0000 | $2^0$ | 0.0345 | $4^0$ | 0.13774 | $6^0$ | 0.30965 |
| $8^0$ | 0.54962 | $10^0$ | 0.85641 | $12^0$ | 1.2277 | $14^0$ | 1.6597 |
| $16^0$ | 2.1462 | $18^0$ | 2.6785 | $20^0$ | 3.2442 | $22^0$ | 3.827 |
| $24^0$ | 4.4062 | $26^0$ | 4.9564 | $28^0$ | 5.4477 | $30^0$ | 5.8464 |
| $31^0$ | 5.9996 | $32^0$ | 6.1158 | $33^0$ | 6.1901 | $34^0$ | 6.218 |
| $35^0$ | 6.1948 | $36^0$ | 6.1163 | $37^0$ | 5.9786 | $38^0$ | 5.7783 |
| $39^0$ | 5.5125 | $40^0$ | 5.1792 | $41^0$ | 4.7769 | $42^0$ | 4.3056 |
| $43^0$ | 3.7659 | $44^0$ | 3.1599 | $45^0$ | 2.4909 | $46^0$ | 1.7636 |
| $47^0$ | 0.98423 | $47^0.5$ | 0.57738 | $48^0$ | 0.16052 | $48^0.1$ | 0.076 |
| $48^0.2$ | 0.0087 | $48^0.3$ | 0.094 | $48^0.4$ | 0.1794 | $48^0.5$ | 0.26515 |
| $49^0$ | 0.69831 | $50^0$ | 1.5814 | $51^0$ | 2.4766 | $52^0$ | 3.3702 |
| $53^0$ | 4.2472 | $54^0$ | 5.0915 | $55^0$ | 5.8861 | $56^0$ | 6.6133 |
| $57^0$ | 7.2549 | $58^0$ | 7.7927 | $59^0$ | 8.2086 | $60^0$ | 8.4853 |
| $60^0.5$ | 8.5662 | $61^0$ | 8.6063 | $61^0.5$ | 8.6036 | $62^0$ | 8.5565 |
| $63^0$ | 8.3226 | $64^0$ | 7.8936 | $65^0$ | 7.2609 | $66^0$ | 6.4188 |
| $67^0$ | 5.3647 | $68^0$ | 4.0996 | $69^0$ | 2.6282 | $69^0.5$ | 1.8176 |
| $70^0$ | 0.95879 | $70^0.5$ | 0.053485 | $71^0$ | 0.89644 | $72^0$ | 2.9215 |
| $73^0$ | 5.0966 | $74^0$ | 7.3986 | $76^0$ | 12.275 | $78^0$ | 17.307 |
| $80^0$ | 22.224 | $82^0$ | 27.742 | $84^0$ | 30.59 | $86^0$ | 33.529 |
| $87^0$ | 34.597 | $88^0$ | 35.372 | $89^0$ | 35.842 | $90^0$ | 36 |

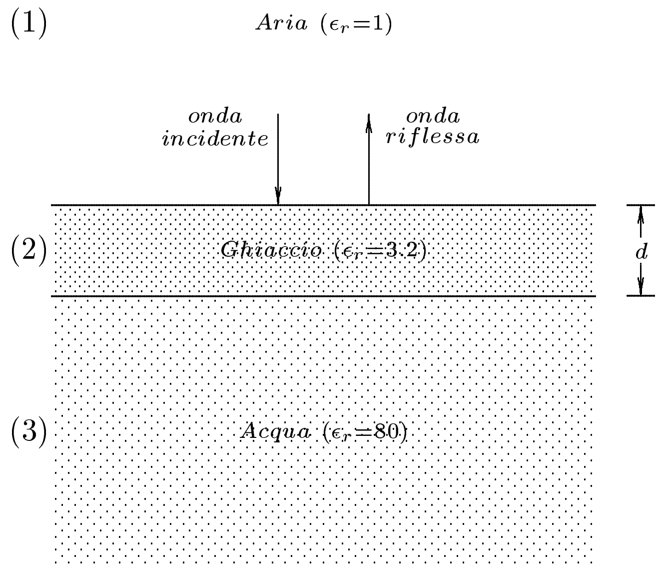
Il grafico presenta, quindi, un lobo nella direzione dell'asse $y$. **La larghezza angolare del lobo principale é** $\Delta\Omega = 2(90^0 - 70.5^0) = 39^0$. É interessante notare che, dalle formule per il calcolo degli zeri, si evince che all'aumentare del numero dei dipoli la larghezza angolare del lobo principale diminuisce.

**10-23) Esercizio n. 3 del 10/9/2010**

La superficie di un lago é ricoperta da uno strato di ghiaccio di spessore sconosciuto. Un'onda elettromagnetica piana lanciata da un elicottero, di frequenza $\nu = 1\ GHz$, incide secondo la verticale sul ghiaccio. Se il coefficiente di riflessione misurato risulta $R = 0.61$, calcolare i primi sette possibili valori dello spessore del ghiaccio. Alla frequenza data é: $\epsilon_{acqua} \simeq 80\epsilon_0$, $\epsilon_{ghiaccio} \simeq 3.2\epsilon_0$.

---

(vedi es. n.4 del 28/6/2000)




Si ha:

$$R = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\beta_2 d}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\beta_2 d}$$

ossia:

$$R\,(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4Rr_{12}r_{23}\sin^2\beta_2 d = (r_{12} + r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\beta_2 d$$

e, ancora:

$$4r_{12}r_{23}\,(1 - R)\sin^2\beta_2 d = (r_{12} + r_{23})^2 - R\,(1 + r_{12}r_{23})^2$$

da cui:

$$\boxed{\sin^2\beta_2 d = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - R\,(1 + r_{12}r_{23})^2}{4r_{12}r_{23}\,(1 - R)}}$$

Si ha:

$$r_{12} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}} - \sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}} + \sqrt{\epsilon_{r2}}} \simeq \frac{1 - 1.7888}{1 + 1.7888} = \frac{-0.7888}{2.7888} \simeq -0.2828$$

$$r_{23} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}} - \sqrt{\epsilon_{r3}}}{\sqrt{\epsilon_{r2}} + \sqrt{\epsilon_{r3}}} \simeq \frac{1.7888 - 8.9443}{1.7888 + 8.9443} = \frac{-7.1555}{10.733} \simeq -0.6667$$

$$(r_{12} + r_{23})^2 = (-0.2828 - 0.6667)^2 \simeq 0.90155$$

$$r_{12} r_{23} \simeq 0.18854$$

$$(1 + r_{12} r_{23})^2 \simeq 1.4126$$

Quindi:

$$\sin^2 \beta_2 d = \frac{0.90155 - 1.4126 R}{4 \cdot 0.18854 (1 - R)}$$

Per R=0.61, risulta:

$$\sin^2 \beta_2 d \simeq 0.13554 \Longrightarrow \sin \beta_2 d \simeq \pm 0.36816$$

La soluzione generale é:

$$\beta_2 d = \begin{cases} \arcsin(\pm 0.36816) + 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2 \ldots) \\ \\ (2k+1)\pi - \arcsin(\pm 0.36816) \quad (k = 0, 1, 2 \ldots) \end{cases}$$

laddove $k$ deve necessariamente essere non negativo per evitare soluzioni negative per $d$ e $\arcsin(\pm 0.36816) = \pm 0.37703$.

Poiché:

$$\beta_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{r_2}} = \frac{2\pi \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} \sqrt{3.2} \simeq 37.466$$

le prime sette soluzioni per lo spessore del ghiaccio sono:

$$\boxed{k = 0}$$

$$(\beta_2 d)_1 \simeq 0.37703 \Longrightarrow \underline{\underline{d_1}} = \frac{0.37703}{37.466} \simeq 0.010063\ m \simeq \underline{\underline{1\ cm}}$$

$$(\beta_2 d)_2 \simeq \pi - 0.37703 \simeq 2.7646 \Longrightarrow \underline{\underline{d_2}} = \frac{2.7646}{37.466} \simeq 0.07379\ m \simeq \underline{\underline{7.38\ cm}}$$

$$(\beta_2 d)_3 \simeq \pi + 0.37703 \simeq 3.5186 \Longrightarrow \underline{\underline{d_3}} = \frac{3.5186}{37.466} \simeq 0.093914\ m \simeq \underline{\underline{9.39\ cm}}$$

$$\boxed{k = 1}$$

$$(\beta_2 d)_4 \simeq 0.37703 + 2\pi \simeq 6.6602 \Longrightarrow \underline{\underline{d_4}} = \frac{6.6602}{37.466} \simeq 0.17777\ m \simeq \underline{\underline{17.78\ cm}}$$

$$(\beta_2 d)_5 \simeq -0.37703 + 2\pi \simeq 5.9062 \Longrightarrow \underline{\underline{d_5}} = \frac{5.9062}{37.466} \simeq 0.15764\ m \simeq \underline{\underline{15.76\ cm}}$$

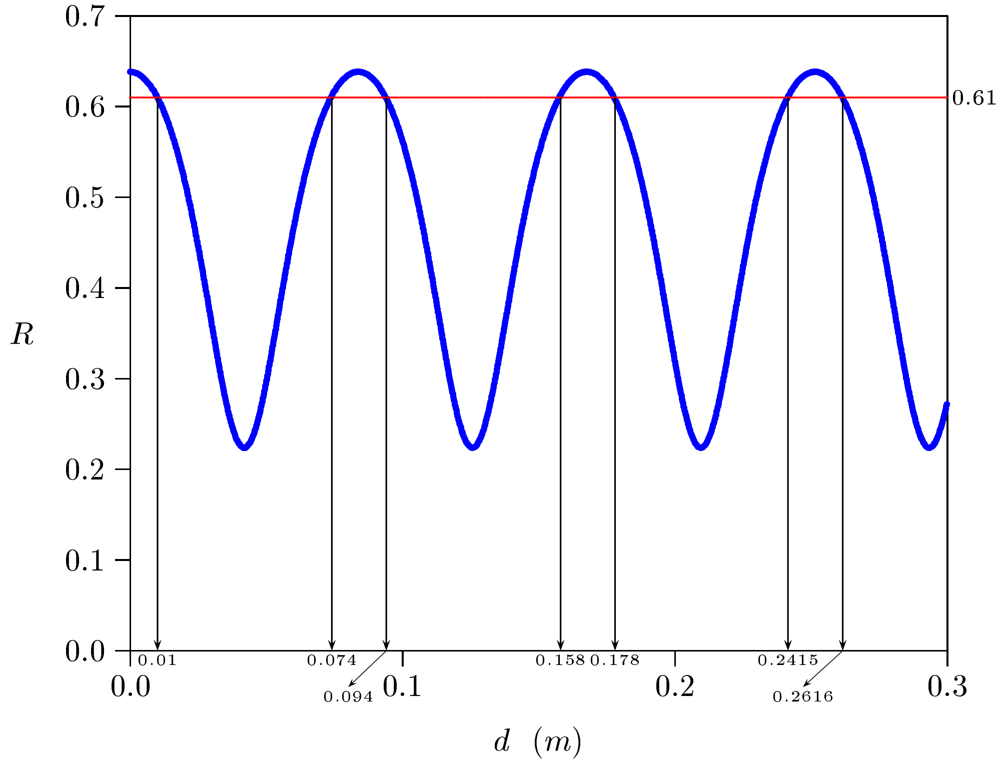
$$(\beta_2 d)_6 \simeq 3\pi - 0.37703 \simeq 9.0477 \Longrightarrow \underline{\underline{d_6}} = \frac{9.0477}{37.466} \simeq 0.24149\ m \simeq \underline{\underline{24.15\ cm}}$$

$$(\beta_2 d)_7 \simeq 3\pi + 0.37703 \simeq 9.8018 \Longrightarrow \underline{\underline{d_7}} = \frac{9.8018}{37.466} \simeq 0.26162\ m \simeq \underline{\underline{26.16\ cm}}$$

É utile verificare i risultati trovati attraverso il grafico del coefficiente di riflessione $R$ in funzione della distanza $d$, ossia il grafico della formula:

$$R = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\beta_2 d}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\beta_2 d}$$

**Coefficiente di riflessione dello strato di ghiaccio in funzione dello spessore**




I risultati graficati coincidono con quelli calcolati.

**10-24) Esercizio n. 4 del 10/9/2010**

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $f = 10\ MHz$ attraversa uno strato ionosferico omogeneo e privo di collisioni ($\omega_p = 2\pi \cdot 8 \cdot 10^6\ rad/s$) spesso 100 $Km$. Calcolare il tempo impiegato dall'onda elettromagnetica ad attraversare tale strato.

———————

(vedi es. n.1 del 15/9/2000)

Indicando con $t$ il tempo impiegato ad attraversare la ionosfera, si ha:

$$t = \frac{L}{v_g}$$

essendo $L$ lo spessore dello strato e $v_g$ la velocitá di gruppo dell'onda elettromagnetica.

Supponendo la ionosfera priva di collisioni, risulta:

$$v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Risulta:

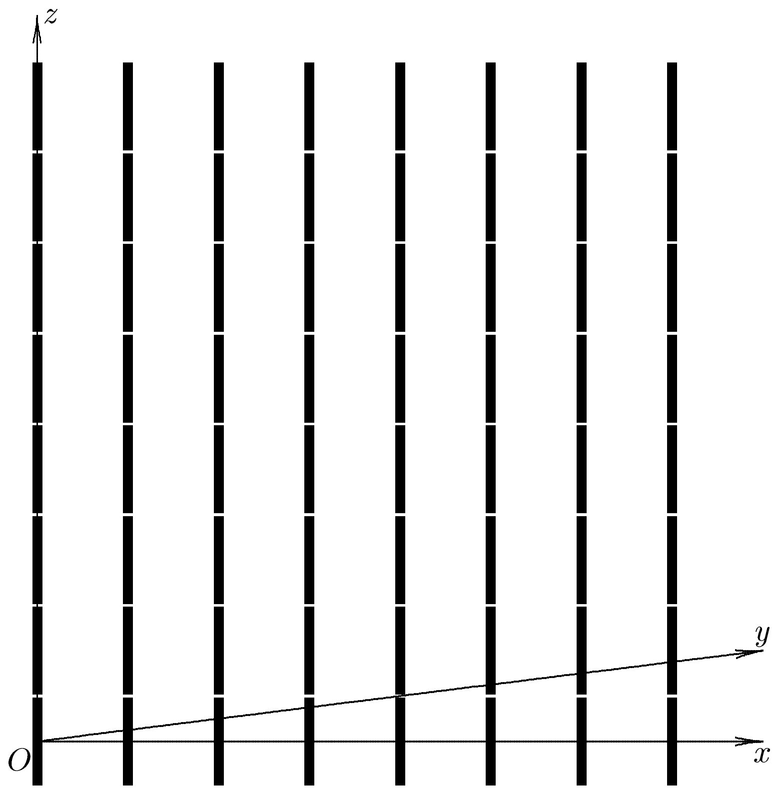
$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 64 \cdot 10^{12}}{4\pi^2 \cdot 100 \cdot 10^{12}} = 0.64$$

Quindi:

$$t = \frac{L}{c\sqrt{1 - 0.64}} = \frac{10^5}{3 \cdot 10^8 \cdot 0.6} \simeq 0.00055556\ s = \underline{\underline{555.56\ \mu s}}$$

**10-25) Esercizio n. 1 del 1/10/2010**

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura, ossia formano un rectangular array 8×8. Il sistema é un reticolo periodico di passo $d$ sia nella direzione dell'asse $x$ e sia nella direzione dell'asse $z$. Determinare l'espressione della funzione $U(\theta, \phi)$.




La funzione spaziale che descrive il diagramma di radiazione di un rectangular array uniformemente alimentato e con le correnti in fase fra di loro é:

$$U(\theta,\phi) = I_0 \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right| \left| \frac{\sin\left[n\left(kd_x \sin\theta\cos\phi\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd_x \sin\theta\cos\phi\right)/2\right]} \frac{\sin\left[m\left(kd_z \cos\theta\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd_z \cos\theta\right)/2\right]} \right|$$

Per $d_x = d_z = d$ e per $n = m = 8$, dopo aver posto $I_0 = 1$, si ha:

$$U(\theta,\phi) = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right| \left| \frac{\sin\left[8\left(kd \sin\theta\cos\phi\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd \sin\theta\cos\phi\right)/2\right]} \frac{\sin\left[8\left(kd \cos\theta\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd \cos\theta\right)/2\right]} \right|$$

**10-26) Esercizio n. 2 del 1/10/2010**

Con riferimento al problema precedente esprimere la funzione $U(\theta, \phi)$ per $\theta = 90^0$ e per $d = \dfrac{\lambda}{2}$. Calcolare analiticamente il suo valore massimo nonché gli zeri nel primo quadrante. Calcolare, quindi, la larghezza angolare del lobo principale. Si grafichi la funzione al variare di $\phi$.

---

Per $\theta = \pi/2$ risulta:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} = 1$$

Inoltre si ha:

$$\lim_{\theta\to\pi/2}\left\{\frac{\sin\left[8\left(kd\cos\theta\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd\cos\theta\right)/2\right]}\right\} = 8$$

Ne segue che:

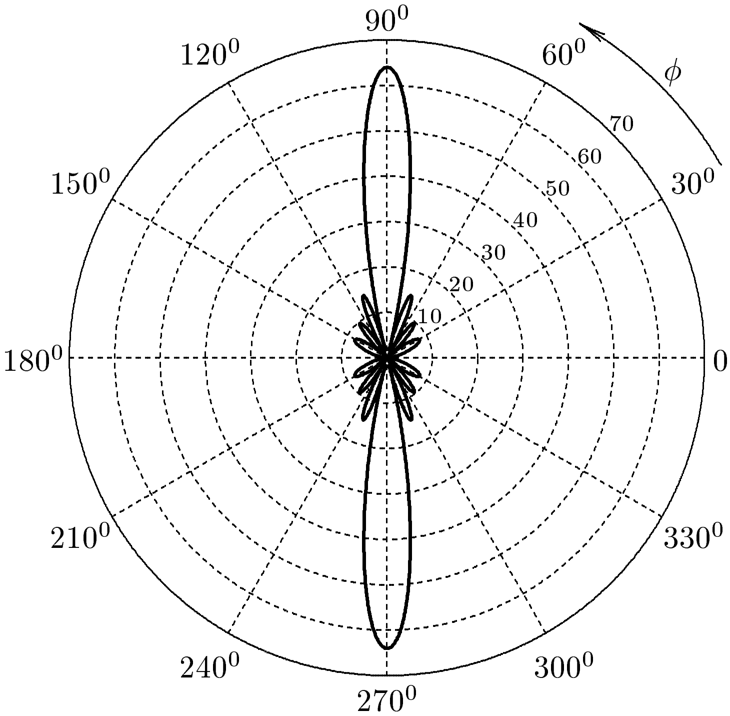
$$U(\pi/2, \phi) = 8\left|\frac{\sin\left[8\left(kd\cos\phi\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd\cos\phi\right)/2\right]}\right|$$

Per $d = \dfrac{\lambda}{2} \Longrightarrow kd = \pi$, quindi:

$$U(\pi/2, \phi) = 8\left|\frac{\sin\left[8\left(\pi\cos\phi\right)/2\right]}{\sin\left[\left(\pi\cos\phi\right)/2\right]}\right|$$

Il suo valore massimo é 64 e si ha per $\phi = \pi/2$. Essa si annulla quando si annulla il numeratore ma non il denominatore ossia, nel primo quadrante, per:

$$4\pi\cos\phi^* = \begin{cases} \pi, \text{ ossia per } \cos\phi_1^* = \dfrac{1}{4} \Longrightarrow \underline{\underline{\phi_1^* = \arccos(1/4) = 75^0.522}} \\[2ex] 2\pi, \text{ ossia per } \cos\phi_2^* = \dfrac{2}{4} \Longrightarrow \underline{\underline{\phi_2^* = \arccos(1/2) = 60^0}} \\[2ex] 3\pi, \text{ ossia per } \cos\phi_3^* = \dfrac{3}{4} \Longrightarrow \underline{\underline{\phi_3^* = 41^0.41}} \\[2ex] 4\pi, \text{ ossia per } \cos\phi_4^* = 1 \Longrightarrow \underline{\underline{\phi_4^* = 0^0}} \end{cases}$$




| $\phi$ | $F(\phi)$ | $\phi$ | $F(\phi)$ | $\phi$ | $F(\phi)$ | $\phi$ | $F(\phi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0^0$ | 0.0000 | $1^0$ | 0.0153 | $2^0$ | 0.0612 | $3^0$ | 0.1378 |
| $4^0$ | 0.2449 | $5^0$ | 0.3824 | $6^0$ | 0.5503 | $7^0$ | 0.7483 |
| $8^0$ | 0.9760 | $9^0$ | 1.233 | $10^0$ | 1.5185 | $11^0$ | 1.8314 |
| $12^0$ | 2.1706 | $13^0$ | 2.5343 | $14^0$ | 2.9205 | $15^0$ | 3.3266 |
| $16^0$ | 3.7493 | $17^0$ | 4.1851 | $18^0$ | 4.6296 | $19^0$ | 5.0777 |
| $20^0$ | 5.5236 | $21^0$ | 5.9609 | $22^0$ | 6.3824 | $23^0$ | 6.7801 |
| $24^0$ | 7.1455 | $25^0$ | 7.4696 | $26^0$ | 7.7427 | $27^0$ | 7.955 |
| $28^0$ | 8.0966 | $29^0$ | 8.1576 | $30^0$ | 8.1285 | $31^0$ | 8.0005 |
| $32^0$ | 7.7657 | $33^0$ | 7.4176 | $34^0$ | 6.9514 | $35^0$ | 6.3645 |
| $36^0$ | 5.6566 | $37^0$ | 4.8302 | $38^0$ | 3.8914 | $39^0$ | 2.8492 |
| $40^0$ | 1.7167 | $41^0$ | 0.5106 | $41^0.41$ | 0.00048 | $42^0$ | 0.7484 |
| $43^0$ | 2.036 | $44^0$ | 3.3245 | $45^0$ | 4.5828 | $46^0$ | 5.7777 |
| $47^0$ | 6.874 | $48^0$ | 7.8357 | $49^0$ | 8.6271 | $50^0$ | 9.2138 |
| $51^0$ | 9.5642 | $52^0$ | 9.651 | $53^0$ | 9.4523 | $54^0$ | 8.9532 |
| $55^0$ | 8.1474 | $56^0$ | 7.0377 | $57^0$ | 5.6377 | $58^0$ | 3.972 |
| $59^0$ | 2.0768 | $60^0$ | 0 | $61^0$ | 2.1997 | $62^0$ | 4.4532 |
| $63^0$ | 6.6829 | $64^0$ | 8.8041 | $65^0$ | 10.728 | $66^0$ | 12.363 |
| $67^0$ | 13.62 | $68^0$ | 14.413 | $69^0$ | 14.665 | $70^0$ | 14.309 |
| $71^0$ | 13.293 | $72^0$ | 11.582 | $73^0$ | 9.1617 | $74^0$ | 6.0371 |
| $75^0$ | 2.2374 | $75^0.522$ | 0 | $76^0$ | 2.1856 | $77^0$ | 7.1575 |
| $78^0$ | 12.583 | $79^0$ | 18.346 | $80^0$ | 24.318 | $81^0$ | 30.354 |
| $82^0$ | 36.304 | $83^0$ | 42.014 | $84^0$ | 47.332 | $85^0$ | 52.113 |
| $86^0$ | 56.225 | $87^0$ | 59.552 | $88^0$ | 61.999 | $89^0$ | 63.496 |
| $90^0$ | 64 | | | | | | |

Il grafico presenta, quindi, un lobo nella direzione dell'asse $y$. **La larghezza angolare del lobo principale é** $\Delta\Omega \simeq 2(90^0 - 75^0.522) = 28^0.956$. É interessante notare che, dalle formule per il calcolo degli zeri, si evince che all'aumentare del numero dei dipoli la larghezza angolare del lobo principale diminuisce.

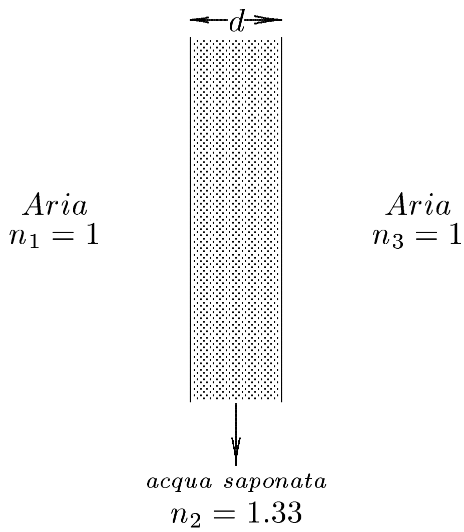
**10-27) Esercizio n. 3 del 1/10/2010**

Un fascetto di luce rossa monocromatica, di lunghezza d'onda relativa al vuoto $\lambda_0 = 6000$ Å, incide normalmente su una sottilissima lamina di acqua saponata di indice di rifrazione $n_2 = 1.33$. Calcolare il minimo spessore della lamina affinché la riflettivitá sia minima nei seguenti due casi: a) la lamina é immersa in aria; b) la lamina é depositata su una superficie di vetro di indice di rifrazione $n_3 = 1.5$ ed il mezzo da cui proviene la luce é l'aria. Valutare, nei due casi, il valore della riflettivitá. Con il valore dello spessore calcolato nel punto a), si determini la riflettivitá nel caso in cui la lamina é depositata sul vetro.

———————

(vedi es. n.1 del 6/5/2000)

a) Lamina immersa in aria.



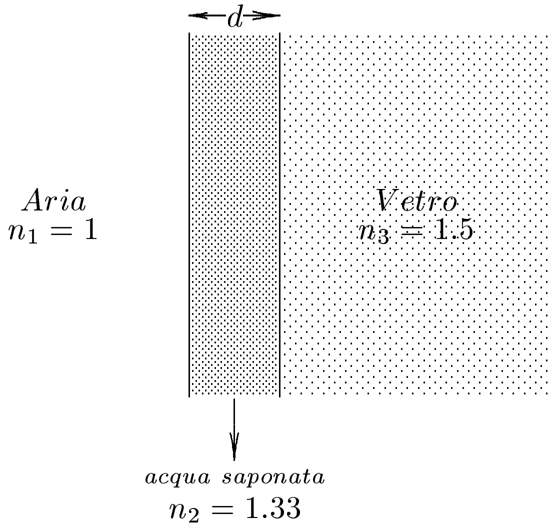

In questo caso la riflettivitá é minima per $n_2 d = m\dfrac{\lambda_0}{4}$ con $m$ pari.

Quindi:

$$d_{min} = m_{pari}\frac{\lambda_0}{4n_2} = m_{pari}\frac{6000}{5.32}. \quad \text{Per } m = 2 \Longrightarrow d_{min} = \frac{6000}{2.66}\ \AA = \underline{\underline{2255.64\ \AA}}$$

Il valore della riflettivitá é zero.

b) Lamina depositata su superficie di vetro.




In questo caso la riflettivitá é minima per $n_2 d = m\dfrac{\lambda_0}{4}$ con $m$ dispari.
Quindi:

$$d_{min} = m_{dispari}\frac{\lambda_0}{4n_2} = m_{dispari}\frac{6000}{5.32}. \quad \text{Per } m = 1 \Longrightarrow d_{min} = \frac{6000}{5.32}\ \mathring{A} = 1127.82\ \mathring{A}$$

Il valore della riflettivitá é:

$$R_{min} = \left(\frac{n_1 n_3 - n_2^2}{n_1 n_3 + n_2^2}\right)^2 = \frac{0.072307}{10.6857} = 0.0067 = \underline{\underline{0.67\%}}$$

Consideriamo, adesso, una lamina di spessore $d = \dfrac{\lambda_0}{2n_2}$, come calcolato nel punto a) e la depositiamo sul vetro. La riflettivitá é:

$$R = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2 \beta_2 d}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2 \beta_2 d}$$

Si ha:

$$\beta_2 d = 2\pi\frac{n_2 d}{\lambda_0} = \pi$$

Quindi la riflettivitá é massima e risulta:

$$R_{max} = \frac{(r_{12} + r_{23})^2}{(1 + r_{12}r_{23})^2}$$

Si ha:

$$r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \qquad r_{23} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}$$

ossia:

$$r_{12} = \frac{1 - 1.33}{1 + 1.33} = -\frac{0.33}{2.33} = -0.141631, \qquad r_{23} = \frac{1.33 - 1.5}{1.33 + 1.5} = -\frac{0.17}{2.83} = -0.060071$$

Quindi:

$$R_{max} = \frac{0.04068}{1.01709} = 0.03999 = \underline{\underline{3.999\%}}$$

**10-28) Esercizio n. 4 del 1/10/2010**

Una sorgente in quiete emette un fascio di microonde, di lunghezza d'onda $\lambda_0 = 12\ cm$, che colpisce un aeroplano in avvicinamento. Le onde riflesse dall'aeroplano vengono rivelate da un ricevitore in quiete posto nelle immediate vicinanze della sorgente e la loro frequenza differisce da quella delle microonde emesse dalla sorgente di una quantitá $\Delta\nu = 990\ Hz$. Calcolare la velocitá di avvicinamento dell'aeroplano. Si assuma $\gamma = 1$.

---

(vedi es. n.3 del 23/2/2000)

Sia $\nu_0 = \dfrac{c}{\lambda_0} = \dfrac{3 \cdot 10^8}{12 \cdot 10^{-2}} = 2.5\ GHz$ la frequenza emessa dalla sorgente in quiete $S$.

La frequenza osservata da un osservatore solidale ad un sistema di riferimento $S\ '$ in moto rispetto al sistema $S$, in generale, é data:

$$\omega\ ' = \gamma(\omega - \vec{v} \cdot \vec{k}) \tag{1}$$

Nel nostro caso la frequenza osservata da un osservatore solidale con l'aereo in avvicinamento ($\vec{v} \cdot \vec{k} = vk \cos 180^0 = -vk,\ \gamma = 1$) é:

$$\omega\ ' = \omega + vk = \omega + v\frac{\omega}{c} = \omega\left(1 + \frac{v}{c}\right) \tag{2}$$

essendo $v$ la velocitá dell'aereo.

**Tale frequenza é quella dell'onda riflessa dall'aereo**.

L'osservatore solidale al sistema $S$ rivela l'onda riflessa dall'aereo e sia $\omega''$ la frequenza (angolare) misurata. Per calcolare tale frequenza dobbiamo invertire la formula (1) in quanto dobbiamo calcolare la frequenza relativa ad un sistema in quiete in funzione della frequenza relativa ad un sistema in moto. Si ha, quindi:

$$\omega = \gamma(\omega\ ' + \vec{v} \cdot \vec{k}\ ')$$

che nel nostro caso diventa:

$$\omega'' = \omega\ ' + vk\ ' = \omega\ ' + v\frac{\omega\ '}{c} = \omega\ '\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

in quanto questa volta $\vec{v}$ e $\vec{k}\ '$ sono paralleli.

Sostituendo ad $\omega\ '$ la sua espressione in funzione di $\omega$ data dalla (2), si ha:

$$\omega'' = \omega\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2 \tag{3}$$

Poiché certamente $v << c$, la (3) puó scriversi:

$$\omega'' \simeq \omega\left(1 + 2\frac{v}{c}\right) = \omega + 2\omega\frac{v}{c}$$

ossia:

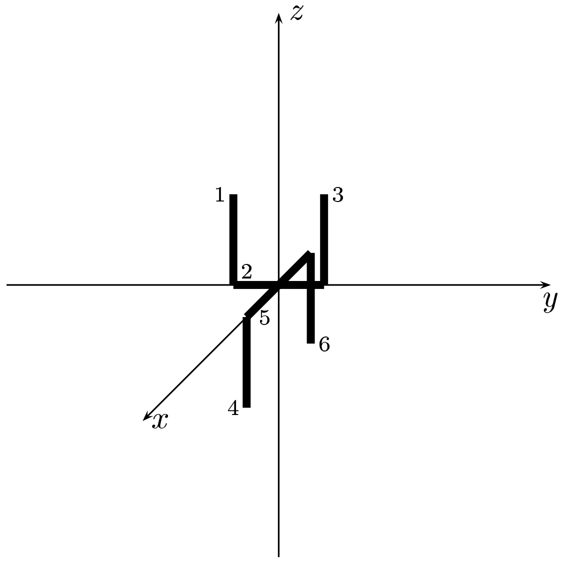
$$\nu'' - \nu = 2\nu \frac{v}{c}$$

da cui:

$$v = \frac{\nu'' - \nu}{2\nu} c = \frac{990}{2 \cdot 2.5 \cdot 10^9} 3 \cdot 10^8 = \underline{\underline{59.4\ m/s = 213.84\ Km/h}}$$

**10-29) Esercizio n. 1 del 5/11/2010**

Sia dato un sistema di 6 antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato.




---

Le densitá di corrente sull'antenna 1, sull'antenna 2, sull'antenna 3, sull'antenna 4, sull'antenna 5 e sull'antenna 6 sono rispettivamente:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{z}A_1\delta(x)\delta\left(y+\dfrac{\lambda}{4}\right)\cos k(z-z_1) & z_1-l\le z\le z_1+l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{y}A_2\delta(x)\delta(z)\cos ky & -l\le y\le +l \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{z}A_3\delta(x)\delta\left(y-\dfrac{\lambda}{4}\right)\cos k(z-z_3) & z_3-l\le z\le z_3+l \\ \vec{J}^{(4)} = \widehat{z}A_4\delta\left(x-\dfrac{\lambda}{4}\right)\delta(y)\cos k(z-z_4) & z_4-l\le z\le z_4+l \\ \vec{J}^{(5)} = \widehat{x}A_5\delta(y)\delta(z)\cos kx & -l\le x\le +l \\ \vec{J}^{(6)} = \widehat{z}A_6\delta\left(x+\dfrac{\lambda}{4}\right)\delta(y)\cos k(z-z_6) & z_6-l\le z\le z_6+l \end{cases}$$

Posto $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = 1$ per la uniformitá del sistema di antenne, la densitá di corrente risultante é la somma delle sei:

$$\vec{J} = \widehat{z}\delta(x)\delta\left(y+\frac{\lambda}{4}\right)\cos k(z-z_1)+\widehat{y}\delta(x)\delta(z)\cos ky+\widehat{z}\delta(x)\delta\left(y-\frac{\lambda}{4}\right)\cos k(z-z_3)+$$
$$+\widehat{z}\delta\left(x-\frac{\lambda}{4}\right)\delta(y)\cos k(z-z_4)+\widehat{x}\delta(y)\delta(z)\cos kx+\widehat{z}\delta\left(x+\frac{\lambda}{4}\right)\delta(y)\cos k(z-z_6)$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta,\phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta,\phi)=\int_V e^{-ik\widehat{e}_r\cdot\vec{r}\,'}\vec{J}(\vec{r}\,')d^3r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r=\widehat{x}\sin\theta\cos\phi+\widehat{y}\sin\theta\sin\phi+\widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r\cdot\vec{r}\,'=x'\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi+z'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\vec{N}(\theta,\phi)=$$
$$=\int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi+z'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x')\delta\left(y'+\frac{\lambda}{4}\right)\cos k(z'-z_1)dx'dy'dz'+$$
$$+\int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi+z'\cos\theta)}\widehat{y}\delta(x')\delta(z')\cos ky'dx'dy'dz'+$$
$$+\int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi+z'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x')\delta\left(y'-\frac{\lambda}{4}\right)\cos k(z'-z_3)dx'dy'dz'+$$
$$+\int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi+z'\cos\theta)}\widehat{z}\delta\left(x'-\frac{\lambda}{4}\right)\delta(y')\cos k(z'-z_4)dx'dy'dz'+$$
$$+\int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi+z'\cos\theta)}\widehat{x}\delta(y')\delta(z')\cos kx'dx'dy'dz'+$$
$$+\int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi+z'\cos\theta)}\widehat{z}\delta\left(x'+\frac{\lambda}{4}\right)\delta(y')\cos k(z'-z_6)dx'dy'dz'$$

ossia:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =&\widehat{z}e^{+ik\frac{\lambda}{4}\sin\theta\sin\phi}\int_{z_1-l}^{z_1+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_1)dz'+\\&+\widehat{y}\int_{-l}^{+l} e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos ky'dy'+\\&+\widehat{z}e^{-ik\frac{\lambda}{4}\sin\theta\sin\phi}\int_{z_3-l}^{z_3+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_3)dz'+\\&+\widehat{z}e^{-ik\frac{\lambda}{4}\sin\theta\cos\phi}\int_{z_4-l}^{z_4+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_4)dz'+\\&+\widehat{x}\int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\cos kx'dx'+\\&+\widehat{z}e^{+ik\frac{\lambda}{4}\sin\theta\cos\phi}\int_{z_6-l}^{z_6+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_6)dz'\end{aligned}$$

Si ha:

$$\widehat{x}\cdot\widehat{r}=\cos\psi=\sin\theta\cos\phi$$

essendo $\psi$ l'angolo formato fra l'asse $x$ e la direzione del vettore posizione $\widehat{e}_r$.

Inoltre:

$$\widehat{y}\cdot\widehat{r}=\cos\chi=\sin\theta\sin\phi$$

essendo $\chi$ l'angolo formato fra l'asse $y$ e la direzione del vettore posizione $\widehat{e}_r$.

Per un'antenna a mezz'onda risulta, quindi:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos ky'dy' = \int_{-l}^{+l} e^{-iky'\cos\chi}\cos ky'dy' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}$$

e:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\cos kx'dx' = \int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\cos\psi}\cos kx'dx' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}$$

Valutiamo $\displaystyle\int_{z_i-l}^{z_i+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_i)dz'$.

Poniamo $z'-z_i=u \Longrightarrow dz'=du$. Per $z'=z_i-l \Longrightarrow u=-l$. Per $z'=z_i+l \Longrightarrow u=+l$. Si ha, quindi:

$$\begin{aligned}&\int_{z_i-l}^{z_i+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_i)dz' = e^{-ikz_i\cos\theta}\int_{-l}^{+l} e^{-iku\cos\theta}\cos ku du =\\&=e^{-ikz_i\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\end{aligned}$$

Si ponga:

$$z_1 = +\frac{\lambda}{4},\ z_3 = +\frac{\lambda}{4},\ z_4 = -\frac{\lambda}{4},\ z_6 = -\frac{\lambda}{4}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{z} e^{+ik\frac{\lambda}{4}\sin\theta\sin\phi} e^{-ik\frac{\lambda}{4}\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+\\
&+\widehat{y}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}+\\
&+\widehat{z} e^{-ik\frac{\lambda}{4}\sin\theta\sin\phi} e^{-ik\frac{\lambda}{4}\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+\\
&+\widehat{z} e^{-ik\frac{\lambda}{4}\sin\theta\cos\phi} e^{+ik\frac{\lambda}{4}\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+\\
&+\widehat{x}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}+\\
&+\widehat{z} e^{+ik\frac{\lambda}{4}\sin\theta\cos\phi} e^{+ik\frac{\lambda}{4}\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}
\end{aligned}$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{x}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}+\\
&+\widehat{y}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}+\\
&+\widehat{z}\frac{2}{k}e^{-ik\frac{\lambda}{4}\cos\theta}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\left[e^{+ik\frac{\lambda}{4}\sin\theta\sin\phi}+e^{-ik\frac{\lambda}{4}\sin\theta\sin\phi}\right]+\\
&+\widehat{z}\frac{2}{k}e^{+ik\frac{\lambda}{4}\cos\theta}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\left[e^{+ik\frac{\lambda}{4}\sin\theta\cos\phi}+e^{-ik\frac{\lambda}{4}\sin\theta\cos\phi}\right]
\end{aligned}$$

ossia:

$$
\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) = & \widehat{x}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} + \\
& + \widehat{y}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} + \\
& + \widehat{z}\frac{2}{k}e^{-ik\frac{\lambda}{4}\cos\theta}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\left[2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)\right] + \\
& + \widehat{z}\frac{2}{k}e^{+ik\frac{\lambda}{4}\cos\theta}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\left[2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)\right]
\end{aligned}
$$

Poiché:

$$
\begin{cases}
\widehat{x} = \widehat{e}_r\sin\theta\cos\phi + \widehat{e}_\theta\cos\theta\cos\phi - \widehat{e}_\phi\sin\phi \\
\widehat{y} = \widehat{e}_r\sin\theta\sin\phi + \widehat{e}_\theta\cos\theta\sin\phi + \widehat{e}_\phi\cos\phi \\
\widehat{z} = \widehat{e}_r\cos\theta - \widehat{e}_\theta\sin\theta
\end{cases}
$$

si ha:

$$
\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) = & \widehat{e}_r\left\{\sin\theta\cos\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} + \sin\theta\sin\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} + \right. \\
& + \cos\theta\frac{2}{k}e^{-ik\frac{\lambda}{4}\cos\theta}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\left[2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)\right] + \\
& \left. + \cos\theta\frac{2}{k}e^{+ik\frac{\lambda}{4}\cos\theta}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\left[2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)\right]\right\} + \\
& + \widehat{e}_\theta\left\{\cos\theta\cos\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} + \cos\theta\sin\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} - \right. \\
& - \sin\theta\frac{2}{k}e^{-ik\frac{\lambda}{4}\cos\theta}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\left[2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)\right] - \\
& \left. - \sin\theta\frac{2}{k}e^{+ik\frac{\lambda}{4}\cos\theta}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\left[2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)\right]\right\} + \\
& + \widehat{e}_\phi\left\{-\sin\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} + \cos\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\right\}
\end{aligned}
$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left( \frac{k}{4\pi r} \right)^2 \left( |N_\theta|^2 + |N_\phi|^2 \right) \widehat{e}_r$$

**10-30) Esercizio n. 2 del 5/11/2010**

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = 90^0$.

———————

Si ha:

$$N_\theta = \left\{ \cos\theta\cos\phi \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} + \cos\theta\sin\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} - \right.$$

$$- \sin\theta\frac{2}{k}e^{-ik\frac{\lambda}{4}\cos\theta}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\left[2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)\right] -$$

$$\left. - \sin\theta\frac{2}{k}e^{+ik\frac{\lambda}{4}\cos\theta}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\left[2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)\right] \right\}$$

$$N_\phi = \left\{ -\sin\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} + \cos\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} \right\}$$

Per $\theta = 90^0$:

$$(N_\theta)_{(\theta=90^0)} = -\frac{4}{k}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)\right]$$

$$(N_\phi)_{(\theta=90^0)} = -\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi} + \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi}$$

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2\right)\widehat{e}_r =$$

$$= \frac{1}{2}Z\left(\frac{1}{2\pi r}\right)^2\left\{4\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)\right]^2 + \left[-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi} + \right.\right.$$

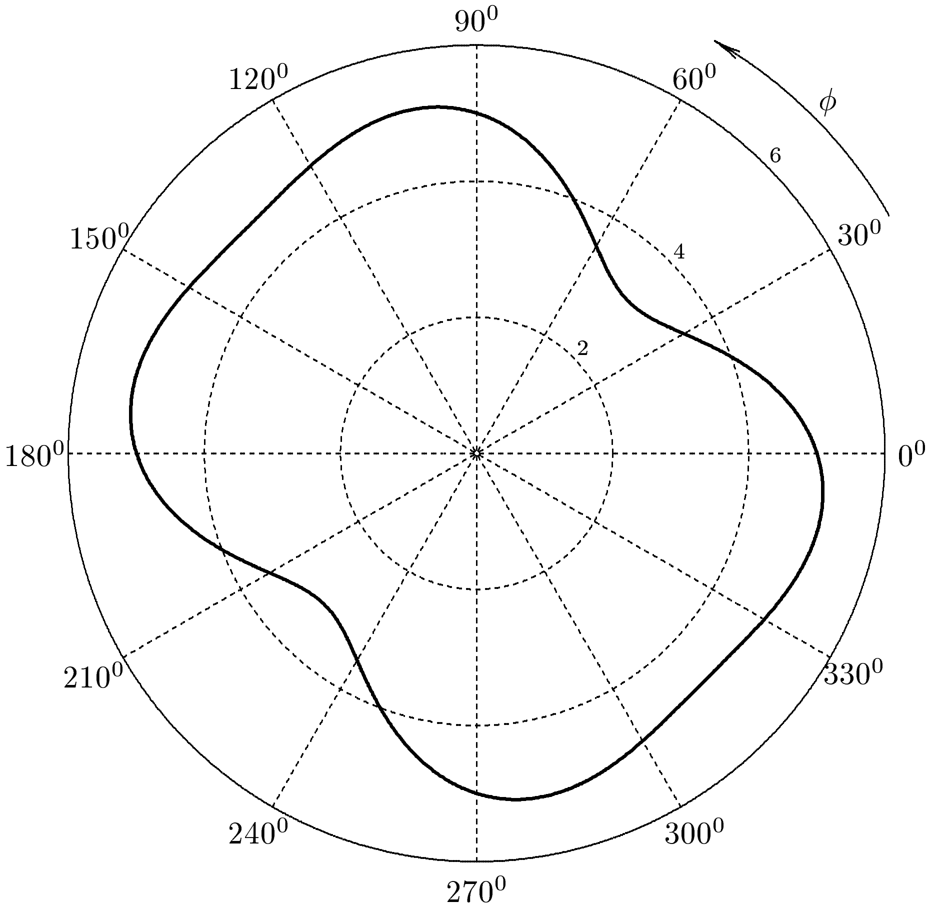
$$\left.\left. + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi}\right]^2\right\}\widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\phi) = \left\{4\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)\right]^2 + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi}\right]^2\right\}$$

Si ha:

$$\lim_{\phi=0^0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi} = 0, \qquad \lim_{\phi=90^0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} = 0$$




| $\phi$ | $F(\phi)$ | $\phi$ | $F(\phi)$ | $\phi$ | $F(\phi)$ | $\phi$ | $F(\phi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0^0$ | 5 | $5^0$ | 4.8302 | $10^0$ | 4.6022 | $15^0$ | 4.3329 |
| $20^0$ | 4.0449 | $25^0$ | 3.764 | $30^0$ | 3.5152 | $35^0$ | 3.3206 |
| $40^0$ | 3.1968 | $45^0$ | 3.1544 | $50^0$ | 3.1968 | $55^0$ | 3.3206 |
| $60^0$ | 3.5152 | $65^0$ | 3.764 | $70^0$ | 4.0449 | $75^0$ | 4.3329 |
| $80^0$ | 4.6022 | $85^0$ | 4.8302 | $90^0$ | 5 | $95^0$ | 5.103 |
| $100^0$ | 5.1397 | $105^0$ | 5.1191 | $110^0$ | 5.0563 | $115^0$ | 4.9702 |
| $120^0$ | 4.8797 | $125^0$ | 4.8019 | $130^0$ | 4.7499 | $135^0$ | 4.7316 |
| $140^0$ | 4.7499 | $145^0$ | 4.8019 | $150^0$ | 4.8797 | $155^0$ | 4.9702 |
| $160^0$ | 5.0563 | $165^0$ | 5.1191 | $170^0$ | 5.1397 | $175^0$ | 5.103 |
| $180^0$ | 5 | $185^0$ | 4.8302 | $190^0$ | 4.6022 | $195^0$ | 4.3329 |
| $200^0$ | 4.0449 | $205^0$ | 3.764 | $210^0$ | 3.5152 | $215^0$ | 3.3206 |
| $220^0$ | 3.1968 | $225^0$ | 3.1544 | $230^0$ | 3.1968 | $235^0$ | 3.3206 |
| $240^0$ | 3.5152 | $245^0$ | 3.764 | $250^0$ | 4.0449 | $255^0$ | 4.3329 |
| $260^0$ | 4.6022 | $265^0$ | 4.8302 | $270^0$ | 5 | $275^0$ | 5.103 |
| $280^0$ | 5.1397 | $285^0$ | 5.1191 | $290^0$ | 5.0563 | $295^0$ | 4.9702 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $300^0$ | 4.8797 | $305^0$ | 4.8019 | $310^0$ | 4.7499 | $315^0$ | 4.7316 |
| $320^0$ | 4.7499 | $325^0$ | 4.8019 | $330^0$ | 4.8797 | $335^0$ | 4.9702 |
| $340^0$ | 5.0563 | $345^0$ | 5.1191 | $350^0$ | 5.1397 | $355^0$ | 5.103 |
| $360^0$ | 5 | | | | | | |

**10-31) Esercizio n. 3 del 5/11/2010**

Una lamina piana d'argento é posta fra l'aria ed il vetro ($n_3 = 1.5$). Un fascetto laser di colore rosso, considerato monocromatico ($\lambda_0 = 0.6328$ $\mu m$), si propaga in aria. L'indice di rifrazione dell'argento competente alla lunghezza d'onda considerata é $n = 0.13455 + i3.98651$. Se lo spessore della lamina d'argento é $d = 0.013$ $\mu m$, calcolare il coefficiente di riflessione $R$.

———————

Dalla teoria delle lamine piane assorbenti si deduce che il coefficiente di riflessione é:

$$R=\frac{|r_{12}|^2+e^{-\left(4\pi n_i\frac{d}{\lambda_0}\right)}\left[2\Re(r_{12}^*r_{23})\cos\left(4\pi n_r\frac{d}{\lambda_0}\right)-2\Im(r_{12}^*r_{23})\sin\left(4\pi n_r\frac{d}{\lambda_0}\right)\right]+|r_{23}|^2e^{-\left(8\pi n_i\frac{d}{\lambda_0}\right)}}{1+e^{-\left(4\pi n_i\frac{d}{\lambda_0}\right)}\left[2\Re(r_{12}r_{23})\cos\left(4\pi n_r\frac{d}{\lambda_0}\right)-2\Im(r_{12}r_{23})\sin\left(4\pi n_r\frac{d}{\lambda_0}\right)\right]+|r_{12}|^2|r_{23}|^2e^{-\left(8\pi n_i\frac{d}{\lambda_0}\right)}}$$

Cominciamo con il calcolare alcune quantitá che servono per la valutazione dei coefficienti che figurano nella formula della riflettivitá:

$$(n_1 - n_r) = (1 - 0.13455) = 0.86545;\ (n_1 + n_r) = (1 + 0.13455) = 1.13455$$

$$(n_r - n_3) = (0.13455 - 1.5) = -1.3655;\ (n_r + n_3) = (0.13455 + 1.5) = 1.63455$$

$$\Re(r_{12}^*r_{23}) = \frac{\left[(n_1 - n_r)(n_r - n_3) - n_i^2\right]\left[(n_1 + n_r)(n_r + n_3) + n_i^2\right] + n_i^2(n_3 - n_1)^2}{\left[(n_1 + n_r)(n_r + n_3) + n_i^2\right]^2 + n_i^2(n_3 - n_1)^2} =$$

$$= \frac{\left[(0.86545)(-1.3655) - 3.98651^2\right]\left[(1.13455)(1.63455) + 3.98651^2\right] + 3.98651^2(0.5)^2}{\left[(1.13455)(1.63455) + 3.98651^2\right]^2 + 3.98651^2(0.5)^2} =$$

$$= \frac{(-17.074)\,(17.747) + 3.9731}{314.95 + 3.9731} = -0.93765$$

$$\Im(r_{12}^*r_{23}) = -\frac{2n_i(n_3 - n_1)(n_1n_3 + n_r^2 + n_i^2)}{\left[(n_1 + n_r)(n_r + n_3) + n_i^2\right]^2 + n_i^2(n_3 - n_1)^2} =$$

$$= -\frac{2 \cdot 3.98651(0.5)(1.5 + 0.13455^2 + 3.98651^2)}{314.95 + 3.9731} = -\frac{69.406}{314.95 + 3.9731} = -0.21763$$

Analogamente:

$$\Re(r_{12}r_{23}) =$$

$$\frac{\left[(n_1 - n_r)(n_r - n_3) + n_i^2\right]\left[(n_1 + n_r)(n_r + n_3) - n_i^2\right] + n_i^2(n_1 - 2n_r + n_3)(n_1 + 2n_r + n_3)}{\left[(n_1 + n_r)(n_r + n_3) - n_i^2\right]^2 + n_i^2(n_1 + 2n_r + n_3)^2} =$$

$$\frac{\left[(0.86545)(-1.3655) + 3.98651^2\right]\left[(1.13455)(1.63455) - 3.98651^2\right] + 3.98651^2(2.2309)(2.7691)}{\left[(1.13455)(1.63455) - 3.98651^2\right]^2 + 3.98651^2(1 + 0.2691 + 1.5)^2} =$$

$$\frac{(14.71049)\,(-14.037783) + 98.1758}{197.06 + 121.86} = -\frac{108.3268}{318.92} = -0.33967$$

$$\Im(r_{12}r_{23}) =$$

$$\frac{n_i(n_1-2n_r+n_3)\left[(n_1+n_r)(n_r+n_3)-n_i^2\right]-n_i(n_1+2n_r+n_3)\left[(n_1-n_r)(n_r-n_3)+n_i^2\right]}{\left[(n_1+n_r)(n_r+n_3)-n_i^2\right]^2+n_i^2(n_1+2n_r+n_3)^2} =$$

$$= \frac{8.8935\left[(1.13455)(1.63455)-3.98651^2\right]-11.039\left[(0.8655)(-1.36545)+3.98651^2\right]}{197.06+121.86} =$$

$$= \frac{-124.8450-162.3888}{197.06+121.86} = -\frac{287.2338}{318.92} = -0.90065$$

Inoltre:

$$\Re(r_{12}) = \frac{n_1^2-n_r^2-n_i^2}{(n_1+n_r)^2+n_i^2} = -\frac{14.91036}{17.1794} = -0.86792$$

$$\Re(r_{23}) = \frac{n_r^2-n_3^2+n_i^2}{(n_r+n_3)^2+n_i^2} = \frac{13.6604}{18.5640} = 0.73585$$

$$\Im(r_{12}) = \frac{-2n_in_1}{(n_1+n_r)^2+n_i^2} = -\frac{7.97302}{17.17946} = -0.4641$$

$$\Im(r_{23}) = \frac{2n_in_3}{(n_r+n_3)^2+n_i^2} = \frac{11.95953}{18.5640} = 0.6442$$

$$|r_{12}|^2 = \frac{(n_1-n_r)^2+n_i^2}{(n_1+n_r)^2+n_i^2} = \frac{16.64126}{17.17946} = 0.96867$$

$$|r_{23}|^2 = \frac{(n_r-n_3)^2+n_i^2}{(n_r+n_3)^2+n_i^2} = \frac{17.7567}{18.5640} = 0.9565$$

$$\sin\left(4\pi n_r\frac{d}{\lambda_0}\right) = \sin\left(4\pi\cdot 0.13455\frac{0.013}{0.6328}\right) = 0.03473$$

$$\cos\left(4\pi n_r\frac{d}{\lambda_0}\right) = \cos\left(4\pi\cdot 0.13455\frac{0.013}{0.6328}\right) = 0.9994$$

$$\exp\left[-\left(4\pi n_i\frac{d}{\lambda_0}\right)\right] = \exp\left[-\left(4\pi\cdot 3.98651\frac{0.013}{0.6328}\right)\right] = \exp(-1.02915) = 0.3573$$

$$\exp\left[-\left(8\pi n_i\frac{d}{\lambda_0}\right)\right] = \exp\left[-\left(8\pi\cdot 3.98651\frac{0.013}{0.6328}\right)\right] = \exp(-2.0583) = 0.1277$$

Quindi:

$$R = \frac{0.96867+0.3573\left[-2\cdot 0.93765\cdot 0.9994+2\cdot 0.21763\cdot 0.03473\right]+0.9565\cdot 0.1277}{1+0.3573\left[-2\cdot 0.33967\cdot 0.9994+2\cdot 0.90065\cdot 0.03473\right]+0.96867\cdot 0.9565\cdot 0.1277} =$$

$$= \frac{0.42657}{0.8981} = \underline{\underline{0.4749}}$$

**10-32) Esercizio n. 4 del 5/11/2010**

Con riferimento al problema precedente, calcolare il coefficiente di trasmissione.

———————

Poiché risulta, in questo caso:

$$\frac{\beta_3\mu_1}{\beta_1\mu_3} = \frac{n_3}{n_1}$$

il coefficiente di trasmissione é:

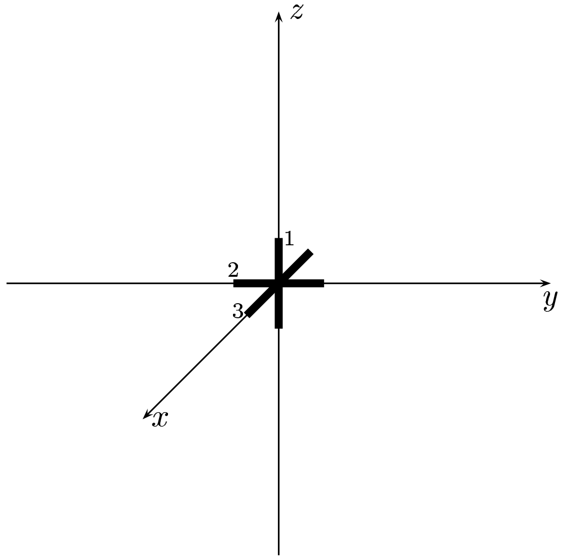
$$T = \frac{\dfrac{n_3}{n_1}\left[1 + 2\Re(r_{12}) + |r_{12}|^2\right]\left[1 + 2\Re(r_{23}) + |r_{23}|^2\right] e^{-\left(4\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)}}{1 + e^{-\left(4\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)}\left[2\Re(r_{12}r_{23})\cos\left(4\pi n_r \dfrac{d}{\lambda_0}\right) - 2\Im(r_{12}r_{23})\sin\left(4\pi n_r \dfrac{d}{\lambda_0}\right)\right] + |r_{12}|^2|r_{23}|^2 e^{-\left(8\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)}}$$

Poiché il coefficiente di trasmissione ha lo stesso denominatore del coefficiente di riflessione, procediamo al calcolo del solo numeratore. Si ha:

$$T = \frac{1.5\,[1 - 2\cdot 0.86792 + 0.96867]\,[1 + 2\cdot 073585 + 0.9565]\,0.3573}{0.8981} = \frac{0.427789}{0.8981} = \underline{\underline{0.4763}}$$

**10-33) Esercizio n. 1 del 17/12/2010**

Sia dato un sistema di 3 antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato.




———————

(vedi es. n.1 del 22/9/2003)

Le densitá di corrente sull'antenna 1, sull'antenna 2 e sull'antenna 3 sono rispettivamente:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \hat{z} A_1 \delta(x)\delta(y)\cos kz & -l \leq z \leq +l \\ \vec{J}^{(2)} = \hat{y} A_2 \delta(x)\delta(z)\cos ky & -l \leq y \leq +l \\ \vec{J}^{(3)} = \hat{x} A_3 \delta(y)\delta(z)\cos kx & -l \leq x \leq +l \end{cases}$$

Posto $A_1 = A_2 = A_3 = 1$ per la uniformitá del sistema di antenne, la densitá di corrente risultante é la somma delle tre:

$$\vec{J} = \hat{z}\delta(x)\delta(y)\cos kz + \hat{y}\delta(x)\delta(z)\cos ky + \hat{x}\delta(y)\delta(z)\cos kx$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta, \phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta, \phi) = \int_V e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} \vec{J}(\vec{r}\,') d^3 r\,'$$

Ora:

$$\hat{e}_r = \hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,' = x\,' \sin\theta\cos\phi + y\,' \sin\theta\sin\phi + z\,' \cos\theta$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}
&\vec{N}(\theta,\phi) = \\
&= \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)} \widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,')\cos kz\,'dx\,'dy\,'dz\,' + \\
&+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)} \widehat{y}\delta(x\,')\delta(z\,')\cos ky\,'dx\,'dy\,'dz\,' + \\
&+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)} \widehat{x}\delta(y\,')\delta(z\,')\cos kx\,'dx\,'dy\,'dz\,'
\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{z}\int_{-l}^{+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos kz\,'dz\,' + \\
&+ \widehat{y}\int_{-l}^{+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi}\cos ky\,'dy\,' + \\
&+ \widehat{x}\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,'
\end{aligned}$$

Si ha:

$$\widehat{x} \cdot \widehat{r} = \cos\psi = \sin\theta\cos\phi$$

essendo $\psi$ l'angolo formato fra l'asse $x$ e la direzione del vettore posizione $\widehat{e}_r$.

Inoltre:

$$\widehat{y} \cdot \widehat{r} = \cos\chi = \sin\theta\sin\phi$$

essendo $\chi$ l'angolo formato fra l'asse $y$ e la direzione del vettore posizione $\widehat{e}_r$.

Per un'antenna a mezz'onda risulta, quindi:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos kz\,'dz\,' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

$$\int_{-l}^{+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi}\cos ky\,'dy\,' = \int_{-l}^{+l} e^{-iky\,'\cos\chi}\cos ky\,'dy\,' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}$$

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,' = \int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\cos\psi}\cos kx\,'dx\,' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}$$

Ne segue:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{z}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \widehat{y}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} + \widehat{x}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}$$

Poiché:

$$\begin{cases} \widehat{x} = \widehat{e}_r\sin\theta\cos\phi + \widehat{e}_\theta\cos\theta\cos\phi - \widehat{e}_\phi\sin\phi \\ \widehat{y} = \widehat{e}_r\sin\theta\sin\phi + \widehat{e}_\theta\cos\theta\sin\phi + \widehat{e}_\phi\cos\phi \\ \widehat{z} = \widehat{e}_r\cos\theta - \widehat{e}_\theta\sin\theta \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) = {} & \widehat{e}_r\left\{\sin\theta\cos\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} + \sin\theta\sin\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} + \right. \\ & \left. + \cos\theta\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\right\} + \\ & + \widehat{e}_\theta\left\{\cos\theta\cos\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} + \cos\theta\sin\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} - \right. \\ & \left. - \sin\theta\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\right\} + \\ & + \widehat{e}_\phi\left\{-\sin\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} + \cos\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\right\}\end{aligned}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2\right)\widehat{e}_r$$

**10-34) Esercizio n. 2 del 17/12/2010**

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = 90^0$.

---

Si ha:

$$N_\theta = \left\{ \cos\theta\cos\phi \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} + \cos\theta\sin\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} - \right.$$

$$\left. -\sin\theta\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\right\}$$

$$N_\phi = \left\{ -\sin\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} + \cos\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\right\}$$

Per $\theta = 90^0$:

$$(N_\theta)_{(\theta=90^0)} = -\frac{2}{k}$$

$$(N_\phi)_{(\theta=90^0)} = -\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi} + \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi}$$

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2\right)\widehat{e}_r =$$

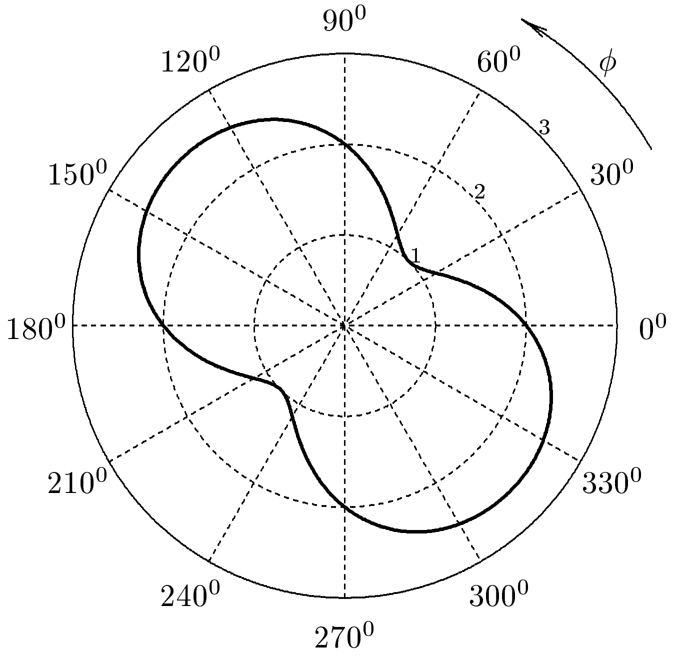
$$= \frac{1}{2}Z\left(\frac{1}{2\pi r}\right)^2\left\{1 + \left[-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi}\right]^2\right\}\widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\phi) = \left\{1 + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi}\right]^2\right\}$$

Si ha:

$$\lim_{\phi=0^0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi} = 0, \qquad \lim_{\phi=90^0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} = 0$$




| $\phi$ | $F(\phi)$ | $\phi$ | $F(\phi)$ | $\phi$ | $F(\phi)$ | $\phi$ | $F(\phi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0^0$ | 2 | $5^0$ | 1.8572 | $10^0$ | 1.7064 | $15^0$ | 1.5538 |
| $20^0$ | 1.4067 | $25^0$ | 1.2726 | $30^0$ | 1.1590 | $35^0$ | 1.0725 |
| $40^0$ | 1.0184 | $45^0$ | 1 | $50^0$ | 1.0184 | $55^0$ | 1.0725 |
| $60^0$ | 1.1590 | $65^0$ | 1.2726 | $70^0$ | 1.4067 | $75^0$ | 1.5538 |
| $80^0$ | 1.7064 | $85^0$ | 1.8572 | $90^0$ | 2 | $95^0$ | 2.1300 |
| $100^0$ | 2.2439 | $105^0$ | 2.3400 | $110^0$ | 2.4180 | $115^0$ | 2.4787 |
| $120^0$ | 2.5235 | $125^0$ | 2.5539 | $130^0$ | 2.5715 | $135^0$ | 2.5772 |
| $140^0$ | 2.5715 | $145^0$ | 2.5539 | $150^0$ | 2.5235 | $155^0$ | 2.4787 |
| $160^0$ | 2.4180 | $165^0$ | 2.3400 | $170^0$ | 2.2438 | $175^0$ | 2.1300 |
| $180^0$ | 2.0000 | $185^0$ | 1.8572 | $190^0$ | 1.7064 | $195^0$ | 1.5538 |
| $200^0$ | 1.40674 | $205^0$ | 1.2726 | $210^0$ | 1.1590 | $215^0$ | 1.0725 |
| $220^0$ | 1.0184 | $225^0$ | 1 | $230^0$ | 1.0184 | $235^0$ | 1.0725 |
| $240^0$ | 1.1590 | $245^0$ | 1.2726 | $250^0$ | 1.4067 | $255^0$ | 1.5538 |
| $260^0$ | 1.7064 | $265^0$ | 1.8572 | $270^0$ | 2 | $275^0$ | 2.1300 |
| $280^0$ | 2.2439 | $285^0$ | 2.3400 | $290^0$ | 2.4180 | $295^0$ | 2.4787 |
| $300^0$ | 2.5235 | $305^0$ | 2.5539 | $310^0$ | 2.5715 | $315^0$ | 2.5772 |
| $320^0$ | 2.5715 | $325^0$ | 2.5539 | $330^0$ | 2.5235 | $335^0$ | 2.4787 |
| $340^0$ | 2.4180 | $345^0$ | 2.3400 | $350^0$ | 2.2439 | $355^0$ | 2.1300 |
| $360^0$ | 2 | | | | | | |

**10-35) Esercizio n. 3 del 17/12/2010**

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 900\ MHz$ (telefonino), viaggiante in aria, attraversa, in direzione della normale, un muro piano fatto di mattoni e cemento e spesso $d = 10\ cm$, oltre al quale c'é l'aria. Assumiamo che i parametri costitutivi di tale muro siano: $\epsilon_r = 7$, $\sigma = 0.011\ S/m$, $\mu = \mu_0$. Calcolare il coefficiente di riflessione e quello di trasmissione.

---

Scriviamo le formule che legano gli indici di rifrazione ai parametri costitutivi dei tre mezzi, attraverso le costanti di propagazione $\beta$ ed i coefficienti di attenuazione $\alpha$ dell'onda elettromagnetica:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} n_1, \quad \beta_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}{2}\left[1+\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon_2^2\omega^2}}\right]} = \frac{\omega}{c} n_r,$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon_2^2\omega^2}}-1\right]} = \frac{\omega}{c} n_i, \quad \beta_3 = \frac{\omega}{c} n_3$$

Poiché il primo ed il terzo mezzo é l'aria, risulta $n_1 = n_3 = 1$. Per il secondo mezzo, si ha:

$$n_r = \sqrt{\frac{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}{2}\left[1+\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon_2^2\omega^2}}\right]}, \qquad n_i = \sqrt{\frac{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon_2^2\omega^2}}-1\right]}$$

Si ha:

$$\frac{\sigma^2}{\epsilon_2^2\omega^2} = \frac{(0.011)^2}{(8.854\cdot 10^{-12}\cdot 7\cdot 2\pi\cdot 9\cdot 10^8)^2} \simeq 9.85066\cdot 10^{-4}$$

per cui

$$\sqrt{1+9.85066\cdot 10^{-4}} \simeq 1.0004924$$

É conveniente continuare ad usare le formule esatte in quanto hanno in evidenza il fattore $\dfrac{\omega}{c}$:

$$n_r = \sqrt{\frac{7}{2}\left[1+1.0004924\right]} \simeq 2.646077, \qquad n_i = \sqrt{\frac{7}{2}\left[1.00004924-1\right]} \simeq 0.041514$$

Dalla teoria delle lamine piane assorbenti si deduce che il coefficiente di riflessione é:

$$R = \frac{|r_{12}|^2 + e^{-\left(4\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)}\left[2\Re(r_{12}^* r_{23})\cos\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) - 2\Im(r_{12}^* r_{23})\sin\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right)\right] + |r_{23}|^2 e^{-\left(8\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)}}{1 + e^{-\left(4\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)}\left[2\Re(r_{12} r_{23})\cos\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) - 2\Im(r_{12} r_{23})\sin\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right)\right] + |r_{12}|^2|r_{23}|^2 e^{-\left(8\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)}}$$

Cominciamo con il calcolare alcune quantitá che servono per la valutazione dei coefficienti che figurano nella formula della riflettivitá, tenendo conto che $n_1 = n_3$:

$$(n_1 - n_r) = (1 - 2.646077) = -1.646077; \; (n_1 + n_r) = (1 + 2.646077) = 3.646077$$

$$(n_r - n_3) = (2.646077 - 1) = 1.646077; \; (n_r + n_3) = (2.646077 + 1) = 3.646077$$

$$\Re(r_{12}^* r_{23}) = \frac{\left[(n_1 - n_r)(n_r - n_3) - n_i^2\right]\left[(n_1 + n_r)(n_r + n_3) + n_i^2\right] + n_i^2(n_3 - n_1)^2}{\left[(n_1 + n_r)(n_r + n_3) + n_i^2\right]^2 + n_i^2(n_3 - n_1)^2} =$$

$$= \frac{\left[(n_1 - n_r)(n_r - n_3) - n_i^2\right]}{\left[(n_1 + n_r)(n_r + n_3) + n_i^2\right]} = \frac{\left[-(1.646077)(1.646077) - 0.041514^2\right]}{\left[(3.646077)(3.646077) + 0.041514^2\right]} = -0.203924$$

$$\Im(r_{12}^* r_{23}) = 0$$

Analogamente:

$$\Re(r_{12} r_{23}) =$$

$$\frac{\left[(n_1 - n_r)(n_r - n_3) + n_i^2\right]\left[(n_1 + n_r)(n_r + n_3) - n_i^2\right] + n_i^2(n_1 - 2n_r + n_3)(n_1 + 2n_r + n_3)}{\left[(n_1 + n_r)(n_r + n_3) - n_i^2\right]^2 + n_i^2(n_1 + 2n_r + n_3)^2} =$$

$$\frac{\left[-(1.646077)^2 + 0.041514^2\right]\left[(3.646077)^2 - 0.041514^2\right] + 0.041514^2(-3.292154)(7.292154)}{\left[(3.646077)^2 - 0.041514^2\right]^2 + 0.041514^2(7.292154)^2} =$$

$$\frac{(-2.707846)\,(13.292154) - 0.041374}{176.68136 + 0.091643} = -\frac{36.03448}{176.773003} = -0.203846$$

$$\Im(r_{12} r_{23}) =$$

$$\frac{n_i(n_1 - 2n_r + n_3)\left[(n_1 + n_r)(n_r + n_3) - n_i^2\right] - n_i(n_1 + 2n_r + n_3)\left[(n_1 - n_r)(n_r - n_3) + n_i^2\right]}{\left[(n_1 + n_r)(n_r + n_3) - n_i^2\right]^2 + n_i^2(n_1 + 2n_r + n_3)^2} =$$

$$= \frac{-(0.136670)\left[(3.646077)^2 - 0.041514^2\right] - (0.3027)\left[-(1.646077)^2 + 0.041514^2\right]}{176.773003} =$$

$$= \frac{-1.816639 + 0.81966}{176.773003} = -\frac{0.996979}{176.773003} = -0.00564$$

Inoltre:

$$\Re(r_{12}) = \frac{n_1^2 - n_r^2 - n_i^2}{(n_1 + n_r)^2 + n_i^2} = -\frac{6.003447}{13.2956} = -0.451536$$

$$\Re(r_{23}) = \frac{n_r^2 - n_3^2 + n_i^2}{(n_r + n_3)^2 + n_i^2} = \frac{6.003447}{13.2956} = +0.451536$$

$$\Im(r_{12}) = \frac{-2n_i n_1}{(n_1 + n_r)^2 + n_i^2} = -\frac{0.083028}{13.2956} = -0.006245$$

$$\Im(r_{23}) = \frac{2n_i n_3}{(n_r + n_3)^2 + n_i^2} = \frac{0.083028}{13.2956} = +0.006245$$

$$|r_{12}|^2 = \frac{(n_1 - n_r)^2 + n_i^2}{(n_1 + n_r)^2 + n_i^2} = \frac{2.711293}{13.2956} = 0.203924$$

$$|r_{23}|^2 = \frac{(n_r - n_3)^2 + n_i^2}{(n_r + n_3)^2 + n_i^2} = \frac{2.711293}{13.2956} = 0.203924$$

$$\sin\left(4\pi n_r\frac{d}{\lambda_0}\right) = \sin\left(4\pi\cdot 2.646077\frac{0.1\cdot 9\cdot 10^8}{3\cdot 10^8}\right) = -0.5232816$$

$$\cos\left(4\pi n_r\frac{d}{\lambda_0}\right) = \cos\left(4\pi\cdot 2.646077\frac{0.1\cdot 9\cdot 10^8}{3\cdot 10^8}\right) = -0.8521598$$

$$\exp\left[-\left(4\pi n_i\frac{d}{\lambda_0}\right)\right] = \exp\left[-\left(4\pi\cdot 0.041514\frac{0.1\cdot 9\cdot 10^8}{3\cdot 10^8}\right)\right] = \exp(-0.1565) = 0.85513$$

$$\exp\left[-\left(8\pi n_i\frac{d}{\lambda_0}\right)\right] = \exp\left[-\left(8\pi\cdot 0.041514\frac{0.1\cdot 9\cdot 10^8}{3\cdot 10^8}\right)\right] = \exp(-0.31301) = 0.73124$$

Quindi:

$$R = \frac{0.203924 + 0.85513\,[2\cdot 0.203924\cdot 0.8521598] + 0.203924\cdot 0.73124}{1 + 0.85513\cdot 0.341516 + (0.203924)^2\cdot 0.73124} =$$
$$= \frac{0.65024}{1.32245} = \underline{\underline{0.49169}}$$

Poiché risulta, in questo caso:

$$\frac{\beta_3\mu_1}{\beta_1\mu_3} = \frac{n_3}{n_1}$$

il coefficiente di trasmissione é:

$$T = \frac{\frac{n_3}{n_1}\left[1 + 2\Re(r_{12}) + |r_{12}|^2\right]\left[1 + 2\Re(r_{23}) + |r_{23}|^2\right] e^{-\left(4\pi n_i\frac{d}{\lambda_0}\right)}}{1 + e^{-\left(4\pi n_i\frac{d}{\lambda_0}\right)}\left[2\Re(r_{12}r_{23})\cos\left(4\pi n_r\frac{d}{\lambda_0}\right) - 2\Im(r_{12}r_{23})\sin\left(4\pi n_r\frac{d}{\lambda_0}\right)\right] + |r_{12}|^2|r_{23}|^2 e^{-\left(8\pi n_i\frac{d}{\lambda_0}\right)}}$$

Poiché il coefficiente di trasmissione ha lo stesso denominatore del coefficiente di riflessione, procediamo al calcolo del solo numeratore. Si ha:

$$T = \frac{[1 - 2\cdot 0.451536 + 0.203924]\,[1 + 2\cdot 0.451536 + 0.203924]\,0.85513}{1.3325} = \frac{0.542062}{1.32245} = \underline{\underline{0.40989}}$$

**10-36) Esercizio n. 4 del 17/12/2010**

Con riferimento al problema precedente, ripetere i calcoli nel caso che il muro abbia uno spessore di 15 *cm*.

———————

Si ha:

$$\sin\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) = \sin\left(4\pi \cdot 2.646077 \frac{0.15 \cdot 9 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8}\right) = 0.677788$$

$$\cos\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) = \cos\left(4\pi \cdot 2.646077 \frac{0.15 \cdot 9 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8}\right) = -0.735257$$

$$\exp\left[-\left(4\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)\right] = \exp\left[-\left(4\pi \cdot 0.041514 \frac{0.15 \cdot 9 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8}\right)\right] = \exp(-0.234756) = 0.79076$$

$$\exp\left[-\left(8\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)\right] = \exp\left[-\left(8\pi \cdot 0.041514 \frac{0.15 \cdot 9 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8}\right)\right] = \exp(-0.4695) = 0.625315$$

Quindi:

$$R = \frac{0.203924 + 0.79076\,[2 \cdot 0.203924 \cdot 0.735257] + 0.203924 \cdot 0.625315}{1 + 0.79076 \cdot 0.307404 + (0.203924)^2 \cdot 0.625315} =$$

$$= \frac{0.568568}{1.2690865} = \underline{\underline{0.4480136}}$$

Poiché risulta, in questo caso:

$$\frac{\beta_3 \mu_1}{\beta_1 \mu_3} = \frac{n_3}{n_1}$$

il coefficiente di trasmissione é:

$$T = \frac{\dfrac{n_3}{n_1}\left[1 + 2\Re(r_{12}) + |r_{12}|^2\right]\left[1 + 2\Re(r_{23}) + |r_{23}|^2\right] e^{-\left(4\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)}}{1 + e^{-\left(4\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)}\left[2\Re(r_{12} r_{23}) \cos\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right) - 2\Im(r_{12} r_{23}) \sin\left(4\pi n_r \frac{d}{\lambda_0}\right)\right] + |r_{12}|^2 |r_{23}|^2 e^{-\left(8\pi n_i \frac{d}{\lambda_0}\right)}}$$

Poiché il coefficiente di trasmissione ha lo stesso denominatore del coefficiente di riflessione, procediamo al calcolo del solo numeratore. Si ha:

$$T = \frac{[1 - 2 \cdot 0.451536 + 0.203924]\,[1 + 2 \cdot 0.451536 + 0.203924]\,0.79076}{1.258374} = \frac{0.501258}{1.2690865} = \underline{\underline{0.39497}}$$

———————

Fine Esercizi Campi e.m. - 2010