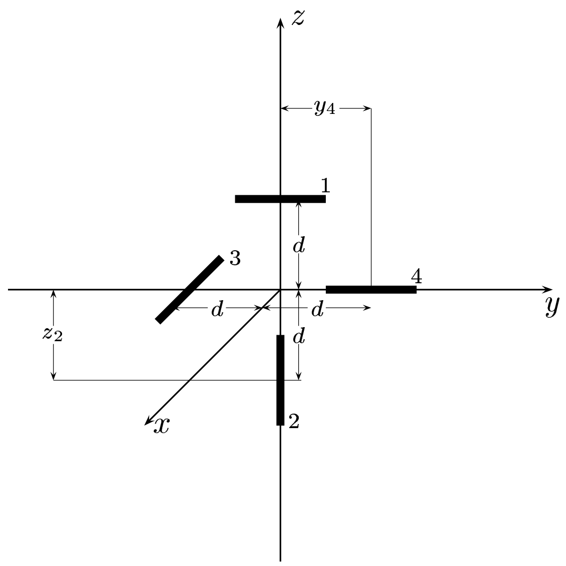
Esercizi svolti di Campi elettromagnetici - Anno 2009

09-1) Esercizio n. 1 del 23/1/2009

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato.



———————

Le densitá di corrente sull'antenna 1, sull'antenna 2, sull'antenna 3, sull'antenna 4 sono rispettivamente:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{y} A_1 \delta(x)\delta(z-d)\cos ky & -l \leq y \leq +l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{z} A_2 \delta(x)\delta(y)\cos k(z-z_2) & z_2 - l \leq z \leq z_2 + l \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{x} A_3 \delta(y+d)\delta(z)\cos kx & -l \leq x \leq +l \\ \vec{J}^{(4)} = \widehat{y} A_4 \delta(x)\delta(z)\cos k(y-y_4) & y_4 - l \leq y \leq y_4 + l \end{cases}$$

Posto $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$ per la uniformitá del sistema di antenne, la densitá di corrente risultante é la somma delle quattro:

$$\begin{aligned} \vec{J} =& \widehat{y}\delta(x)\delta(z-d)\cos ky + \widehat{z}\delta(x)\delta(y)\cos k(z-z_2) + \widehat{x}\delta(y+d)\delta(z)\cos kx + \\ &+ \widehat{y}\delta(x)\delta(z)\cos k(y-y_4) \end{aligned}$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta, \phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta, \phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} \vec{J}(\vec{r}\,')d^3r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x}\sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,' = x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta, \phi) =& \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)} \widehat{y}\delta(x\,')\delta(z\,' - d)\cos ky\,'dx\,'dy\,'dz\,' + \\ &+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)} \widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,')\cos k(z\,' - z_2)dx\,'dy\,'dz\,' + \\ &+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)} \widehat{x}\delta(y\,' + d)\delta(z\,')\cos kx\,'dx\,'dy\,'dz\,' + \\ &+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)} \widehat{y}\delta(x\,')\delta(z\,')\cos k(y\,' - y_4)dx\,'dy\,'dz\,'\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta, \phi) =& \widehat{y}e^{-ikd\cos\theta} \int_{-l}^{+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi} \cos ky\,'dy\,' + \\ &+ \widehat{z}\int_{z_2-l}^{z_2+l} e^{-ikz\,'\cos\theta} \cos k(z\,' - z_2)dz\,' + \\ &+ \widehat{x}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi} \int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi} \cos kx\,'dx\,' + \\ &+ \widehat{y}\int_{y_4-l}^{y_4+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi} \cos k(y\,' - y_4)dy\,'\end{aligned}$$

Si ha:

$$\widehat{x} \cdot \widehat{r} = \cos\psi = \sin\theta\cos\phi$$

essendo ψ l'angolo formato fra l'asse x e la direzione del vettore posizione $\widehat{e}_r$.

Inoltre:

$$\widehat{y} \cdot \widehat{r} = \cos\chi = \sin\theta\sin\phi$$

essendo χ l'angolo formato fra l'asse y e la direzione del vettore posizione $\widehat{e}_r$.

Per un'antenna a mezz'onda risulta, quindi:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi} \cos ky\,'dy\,' = \int_{-l}^{+l} e^{-iky\,'\cos\chi} \cos ky\,'dy\,' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1 - \sin^2\theta\sin^2\phi}$$

e:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\cos kx'dx' = \int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\cos\psi}\cos kx'dx' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}$$

Valutiamo, ora $\int_{z_2-l}^{z_2+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_2)dz'$. Poniamo $z'-z_2 = u \Longrightarrow dz' = du$. Per $z' = z_2 - l \Longrightarrow u = -l$. Per $z' = z_2 + l \Longrightarrow u = +l$. Si ha, quindi:

$$\int_{z_2-l}^{z_2+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_2)dz' = e^{-ikz_2\cos\theta}\int_{-l}^{+l} e^{-iku\cos\theta}\cos kudu =$$

$$= e^{-ikz_2\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

Analogamente valutiamo $\int_{y_4-l}^{y_4+l} e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y'-y_4)dy'$. Poniamo $y'-y_4 = u \Longrightarrow dy' = du$. Per $y' = y_4 - l \Longrightarrow u = -l$. Per $y' = y_4 + l \Longrightarrow u = +l$. Si ha, quindi:

$$\int_{y_4-l}^{y_4+l} e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y'-y_4)dy' =$$

$$= e^{-iky_4\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-iku\sin\theta\sin\phi}\cos kudu = e^{-iky_4\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{y}e^{-ikd\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}+\\ &+\widehat{z}e^{-ikz_2\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+\\ &+\widehat{x}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}+\\ &+\widehat{y}e^{-iky_4\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\end{aligned}$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{x}\frac{2}{k}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}+\\ &+\widehat{y}\frac{2}{k}\left[e^{-ikd\cos\theta}+e^{-iky_4\sin\theta\sin\phi}\right]\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}+\\ &+\widehat{z}\frac{2}{k}e^{-ikz_2\cos\theta}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\end{aligned}$$

Poiché:

$$\begin{cases} \widehat{x} = \widehat{e}_r \sin\theta\cos\phi + \widehat{e}_\theta \cos\theta\cos\phi - \widehat{e}_\phi \sin\phi \\ \widehat{y} = \widehat{e}_r \sin\theta\sin\phi + \widehat{e}_\theta \cos\theta\sin\phi + \widehat{e}_\phi \cos\phi \\ \widehat{z} = \widehat{e}_r \cos\theta - \widehat{e}_\theta \sin\theta \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{e}_r \Bigg[& \sin\theta\cos\phi \frac{2}{k} e^{+ikd\sin\theta\sin\phi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} + \\
& + \sin\theta\sin\phi \frac{2}{k}\left[e^{-ikd\cos\theta} + e^{-iky_4\sin\theta\sin\phi}\right] \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} + \\
& + \cos\theta \frac{2}{k} e^{-ikz_2\cos\theta} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\Bigg] + \\
& + \widehat{e}_\theta \Bigg[\cos\theta\cos\phi \frac{2}{k} e^{+ikd\sin\theta\sin\phi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} + \\
& + \cos\theta\sin\phi \frac{2}{k}\left[e^{-ikd\cos\theta} + e^{-iky_4\sin\theta\sin\phi}\right] \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} - \\
& - \sin\theta \frac{2}{k} e^{-ikz_2\cos\theta} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\Bigg] + \\
& + \widehat{e}_\phi \Bigg[- \sin\phi \frac{2}{k} e^{+ikd\sin\theta\sin\phi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} + \\
& + \cos\phi \frac{2}{k}\left[e^{-ikd\cos\theta} + e^{-iky_4\sin\theta\sin\phi}\right] \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\Bigg]
\end{aligned}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2 \left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2\right) \widehat{e}_r$$

09-02) Esercizio n. 2 del 23/1/2009

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = 90^0$. Si assuma $d = \dfrac{\lambda}{2}$.

————————

Si ha:

$$N_\theta = \left[\cos\theta\cos\phi\frac{2}{k}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} + \right.$$

$$+\cos\theta\sin\phi\frac{2}{k}\left[e^{-ikd\cos\theta}+e^{-iky_4\sin\theta\sin\phi}\right]\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} -$$

$$\left. -\sin\theta\frac{2}{k}e^{-ikz_2\cos\theta}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\right]$$

$$N_\phi = \left[-\sin\phi\frac{2}{k}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} + \right.$$

$$\left. +\cos\phi\frac{2}{k}\left[e^{-ikd\cos\theta}+e^{-iky_4\sin\theta\sin\phi}\right]\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\right]$$

Posto $z_2 = -d$ e $y_4 = +d$, si ha:

$$N_\theta = \left[\cos\theta\cos\phi\frac{2}{k}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} + \right.$$

$$+\cos\theta\sin\phi\frac{2}{k}\left[e^{-ikd\cos\theta}+e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\right]\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} -$$

$$\left. -\sin\theta\frac{2}{k}e^{+ikd\cos\theta}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\right]$$

$$N_\phi = \left[-\sin\phi\frac{2}{k}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} + \right.$$

$$\left. +\cos\phi\frac{2}{k}\left[e^{-ikd\cos\theta}+e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\right]\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\right]$$

$$N_{\theta(\theta=90^0)} = -\frac{2}{k}$$

$$N_{\phi(\theta=90^0)} = \left[-\sin\phi \frac{2}{k} e^{+ikd\sin\phi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{1-\cos^2\phi} + \right.$$

$$\left. + \cos\phi \frac{2}{k}\left(1+e^{-ikd\sin\phi}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{1-\sin^2\phi} \right]$$

ossia:

$$N_{\theta(\theta=90^0)} = -\frac{2}{k}$$

$$N_{\phi(\theta=90^0)} = -\frac{2}{k}\left[e^{+ikd\sin\phi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi} - \left(1+e^{-ikd\sin\phi}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} \right]$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{2\pi r}\right)^2 \left\{ 1 + \left| e^{+ikd\sin\phi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi} - \left(1+e^{-ikd\sin\phi}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} \right|^2 \right\} \widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\phi) = 1 + \left| e^{+ikd\sin\phi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi} - \left(1+e^{-ikd\sin\phi}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} \right|^2$$

Per $d = \frac{\lambda}{2} \Longrightarrow kd = \pi$:

$$F(\phi) = 1 + \left| e^{+i\pi\sin\phi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi} - \left(1+e^{-i\pi\sin\phi}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} \right|^2$$

Si ha:

$$\left| e^{+i\pi\sin\phi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi} - \left(1+e^{-i\pi\sin\phi}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} \right|^2 =$$

$$= \left[e^{+i\pi\sin\phi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi} - \left(1+e^{-i\pi\sin\phi}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[e^{-i\pi\sin\phi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi} - \left(1+e^{+i\pi\sin\phi}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} \right]$$

che risulta:

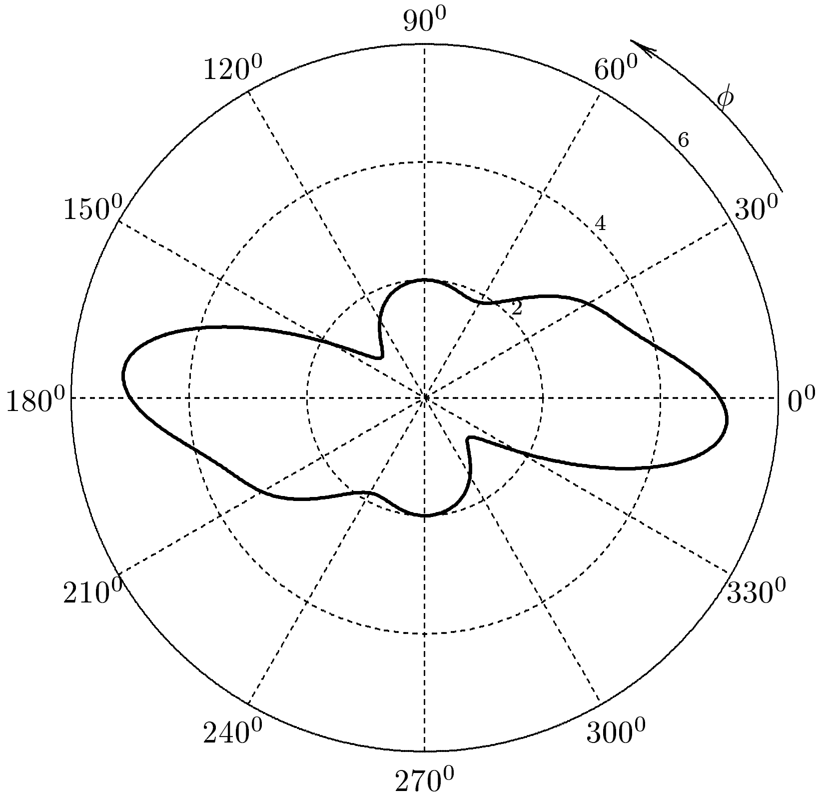
$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin^2\phi} - \left[e^{+i\pi\sin\phi} + e^{+2i\pi\sin\phi}\right]\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} -$$
$$-\left[e^{-i\pi\sin\phi} + e^{-2i\pi\sin\phi}\right]\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} +$$
$$+2[1+\cos(\pi\sin\phi)]\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos^2\phi}$$

ossia:

$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin^2\phi} + 2[1+\cos(\pi\sin\phi)]\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos^2\phi} -$$
$$-2\left[\cos(\pi\sin\phi)+\cos(2\pi\sin\phi)\right]\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi}$$

Il fattore di forma, quindi, é:

$$F(\phi) = 1 + \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin^2\phi} + 2[1+\cos(\pi\sin\phi)]\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos^2\phi} -$$
$$-2\left[\cos(\pi\sin\phi)+\cos(2\pi\sin\phi)\right]\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi}$$



09-03) Esercizio n. 3 del 23/1/2009

Un'onda elettromagnetica piana, di frequenza $\nu = 10\ MHz$, viene lanciata nella ionosfera che, supposta uniforme, presenta le seguenti caratteristiche:

$$N = 5 \cdot 10^{11}\ (elettroni/m^3);\ \nu_{eff} = 10^5\ s^{-1}$$

Calcolare la conducibilitá σ, la costante dielettrica relativa ϵ_r, nonché il coefficiente di attenuazione dell'onda e la distanza alla quale l'ampiezza del campo elettrico si é ridotta ad un decimo del valore all'ingresso della ionosfera.

La frequenza angolare di plasma é:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} = \frac{5 \cdot 10^{11} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}} = 1.5869 \cdot 10^{15}\,(rad/s)^2 \Longrightarrow \omega_p = 3.98359 \cdot 10^7\,rad/s$$

Prima di calcolare i parametri costitutivi della ionosfera calcoliamo la quantitá sempre ricorrente:

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} = \frac{1.5869 \cdot 10^{15}}{4\pi^2 \cdot 10^{14} + 4\pi^2 \cdot 10^{10}} = 401.9263 \cdot 10^{-3} = 0.4019$$

La conducibilitá é:

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \omega_{eff} \omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2\pi \cdot 10^5 \cdot 0.4019 = \underline{\underline{2.2358 \cdot 10^{-6}}}\ S/m$$

La costante dielettrica relativa é:

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} = 1 - 0.4019 = \underline{\underline{0.5981}}$$

Calcoliamo il rapporto:

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{2.2358 \cdot 10^{-6}}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 0.5981 \cdot 2\pi \cdot 10^7} = 6.7195 \cdot 10^{-3} \Longrightarrow \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 = 4.515 \cdot 10^{-5} \ll 1$$

Quindi:

$$\alpha \simeq \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{2.2358 \cdot 10^{-6}}{2} \frac{377}{\sqrt{0.5981}} = \underline{\underline{5.4495 \cdot 10^{-4}\ m^{-1}}}$$

L'ampiezza del campo elettrico diminuisce con legge esponenziale:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\alpha z} \Longrightarrow e^{-\alpha z^*} = 0.1 \Longrightarrow -\alpha z^* = -\ln 10 \Longrightarrow$$

$$z^* = \frac{\ln 10}{\alpha} = \frac{2.3026}{5.4495 \cdot 10^{-4}} = \underline{\underline{4225.3\ m}}$$

09-04) Esercizio n. 4 del 23/1/2009

Si vuole sopprimere la riflessione di onde elettromagnetiche di frequenza pari a $40 MHz$ che, provenendo dal vuoto, entrano in un materiale con costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 6$ con incidenza normale. Per questo si deve rivestire il materiale con uno strato dielettrico di spessore e costante dielettrica relativa opportune. Calcolare tale spessore e tale costante dielettrica relativa. Con i dati cosí trovati, calcolare il coefficiente di riflessione competente ad una frequenza di 30 MHz.

———————

(vedi es. n.3 del 21/6/2002)

Si ha:

$$n_1 = 1; \quad n_3 = \sqrt{6} = 2.4495$$

Poiché $n_1 \neq n_3$, affinché vi sia riflessione nulla, l'indice di rifrazione dello strato n_2 deve essere minore di n_3 (in quanto $n_1 = 1$).

In tal caso la lamina piana di rivestimento deve avere il seguente indice di rifrazione:

$$n_2 = \sqrt{n_1 n_3} = \sqrt{2.4495} = \underline{\underline{1.5651}}$$

Lo spessore minimo ($m = 1$) dello strato deve essere:

$$n_2 d = \frac{\lambda_0}{4} = \frac{c}{4\nu_0} = \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 4 \cdot 10^7} = 1.875 \ m$$

da cui:

$$d = \frac{1.875}{1.5651} = \underline{\underline{1.198 \ m}}$$

Il coefficiente di riflessione é:

$$R = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4 r_{12} r_{23} \sin^2 \beta_2 d}{(1 + r_{12} r_{23})^2 - 4 r_{12} r_{23} \sin^2 \beta_2 d}$$

Per $\nu = 30 \ MHz \Longrightarrow \lambda_0 = \dfrac{c}{\nu} = \dfrac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^7} = 10 \ m$

Si ha:

$$\beta_2 d = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_2 d = \frac{2\pi}{\lambda_0} 1.875 = \frac{2\pi}{10} 1.875 = 1.1781 \ rad \Longrightarrow \sin \beta_2 d \simeq 0.924 \Longrightarrow \sin^2 \beta_2 d \simeq 0.8535$$

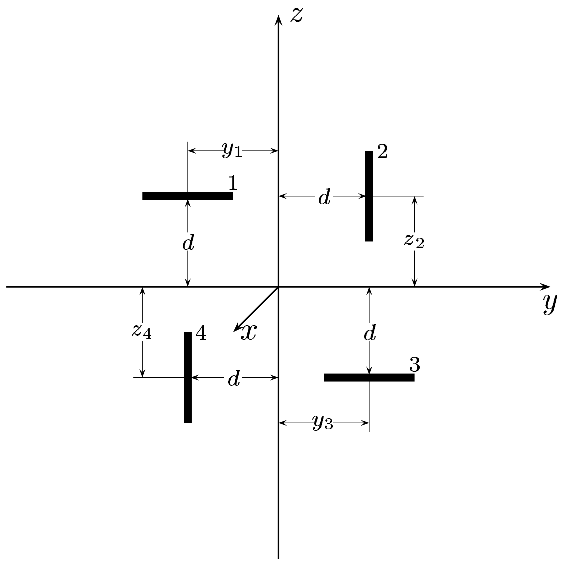
e

$$r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1 - 1.5651}{1 + 1.5651} = -0.22 \qquad r_{23} = \frac{1.5651 - 2.4495}{1.5651 + 2.4495} = -0.22$$

$$R = \frac{(-0.22 - 0.22)^2 - 4 \cdot (0.22)^2 \cdot 0.8535}{[1 + (0.22)^2]^2 - 4 \cdot (0.22)^2 \cdot 0.8535} = \frac{0.1936 - 0.1652}{1.0991 - 0.1652} \simeq \underline{\underline{0.03 = 3\%}}$$

09-05) Esercizio n. 1 del 24/2/2009

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate tutte nel piano yz, come in figura. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato. Si ponga $|y_1| = |y_3| = |z_2| = |z_4| = d$.



———————

Le densitá di corrente sull'antenna 1, sull'antenna 2, sull'antenna 3, sull'antenna 4 sono rispettivamente:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{y} A_1 \delta(x)\delta(z-d)\cos k(y-y_1) & y_1 - l \le y \le y_1 + l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{z} A_2 \delta(x)\delta(y-d)\cos k(z-z_2) & z_2 - l \le z \le z_2 + l \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{y} A_3 \delta(x)\delta(z+d)\cos k(y-y_3) & y_3 - l \le y \le y_3 + l \\ \vec{J}^{(4)} = \widehat{z} A_4 \delta(x)\delta(y+d)\cos k(z-z_4) & z_4 - l \le z \le z_4 + l \end{cases}$$

Posto $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$ per la uniformitá del sistema di antenne, la densitá di corrente risultante é la somma delle quattro:

$$\begin{aligned} \vec{J} =& \widehat{y}\delta(x)\delta(z-d)\cos k(y-y_1) + \widehat{z}\delta(x)\delta(y-d)\cos k(z-z_2) + \\ &+ \widehat{y}\delta(x)\delta(z+d)\cos k(y-y_3) + \widehat{z}\delta(x)\delta(y+d)\cos k(z-z_4) \end{aligned}$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta,\phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} \vec{J}(\vec{r}\,') d^3r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x}\sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,' = x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\vec{N}(\theta,\phi) =$$
$$= \int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)}\widehat{y}\delta(x')\delta(z'-d)\cos k(y'-y_1)dx'dy'dz' +$$
$$+ \int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x')\delta(y'-d)\cos k(z'-z_2)dx'dy'dz' +$$
$$+ \int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)}\widehat{y}\delta(x')\delta(z'+d)\cos k(y'-y_3)dx'dy'dz' +$$
$$+ \int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x')\delta(y'+d)\cos k(z'-z_4)dx'dy'dz'$$

ossia:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{y}e^{-ikd\cos\theta}\int_{y_1-l}^{y_1+l} e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y'-y_1)dy' +\\ &+\widehat{z}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{z_2-l}^{z_2+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_2)dz' +\\ &+\widehat{y}e^{+ikd\cos\theta}\int_{y_3-l}^{y_3+l} e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y'-y_3)dy' +\\ &+\widehat{z}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{z_4-l}^{z_4+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_4)dz'\end{aligned}$$

Valutiamo, ora $\int_{z_2-l}^{z_2+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_2)dz'$. Poniamo $z'-z_2 = u \Longrightarrow dz' = du$. Per $z' = z_2 - l \Longrightarrow u = -l$. Per $z' = z_2 + l \Longrightarrow u = +l$. Si ha, quindi:

$$\int_{z_2-l}^{z_2+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_2)dz' = e^{-ikz_2\cos\theta}\int_{-l}^{+l} e^{-iku\cos\theta}\cos ku du =$$
$$= e^{-ikz_2\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

Analogamente valutiamo $\int_{y_1-l}^{y_1+l} e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y'-y_1)dy'$. Poniamo $y'-y_1 = u \Longrightarrow dy' = du$. Per $y' = y_1 - l \Longrightarrow u = -l$. Per $y' = y_1 + l \Longrightarrow u = +l$. Si ha, quindi:

$$\int_{y_1-l}^{y_1+l} e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y'-y_1)dy' =$$
$$= e^{-iky_1\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-iku\sin\theta\sin\phi}\cos ku du = e^{-iky_1\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}$$

Pertanto:

$$
\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{y}e^{-ikd\cos\theta}e^{-iky_1\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}+\\
&+\widehat{z}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}e^{-ikz_2\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+\\
&+\widehat{y}e^{+ikd\cos\theta}e^{-iky_3\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}+\\
&+\widehat{z}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}e^{-ikz_4\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}
\end{aligned}
$$

ossia:

$$
\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{y}e^{-ikd\cos\theta}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}+\\
&+\widehat{z}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}e^{-ikd\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+\\
&+\widehat{y}e^{+ikd\cos\theta}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}+\\
&+\widehat{z}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}e^{+ikd\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}
\end{aligned}
$$

e, ancora:

$$
\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{y}e^{-ikd(\cos\theta-\sin\theta\sin\phi)}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}+\\
&+\widehat{z}e^{-ikd(\cos\theta+\sin\theta\sin\phi)}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+\\
&+\widehat{y}e^{+ikd(\cos\theta-\sin\theta\sin\phi)}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}+\\
&+\widehat{z}e^{+ikd(\cos\theta+\sin\theta\sin\phi)}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}
\end{aligned}
$$

In definitiva:

$$
\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{y}2\cos\left[kd(\cos\theta-\sin\theta\sin\phi)\right]\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}+\\
&+\widehat{z}2\cos\left[kd(\cos\theta+\sin\theta\sin\phi)\right]\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}
\end{aligned}
$$

Poiché:

$$\begin{cases} \widehat{x} = \widehat{e}_r \sin\theta\cos\phi + \widehat{e}_\theta \cos\theta\cos\phi - \widehat{e}_\phi \sin\phi \\ \widehat{y} = \widehat{e}_r \sin\theta\sin\phi + \widehat{e}_\theta \cos\theta\sin\phi + \widehat{e}_\phi \cos\phi \\ \widehat{z} = \widehat{e}_r \cos\theta - \widehat{e}_\theta \sin\theta \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{e}_r \Bigg[& \sin\theta\sin\phi 2\cos\left[kd(\cos\theta - \sin\theta\sin\phi)\right] \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} + \\
& + \cos\theta 2\cos\left[kd(\cos\theta + \sin\theta\sin\phi)\right] \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\Bigg] + \\
& + \widehat{e}_\theta \Bigg[\cos\theta\sin\phi 2\cos\left[kd(\cos\theta - \sin\theta\sin\phi)\right] \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} - \\
& - \sin\theta 2\cos\left[kd(\cos\theta + \sin\theta\sin\phi)\right] \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\Bigg] + \\
& + \widehat{e}_\phi \Bigg[\cos\phi 2\cos\left[kd(\cos\theta - \sin\theta\sin\phi)\right] \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\Bigg]
\end{aligned}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2 \left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2\right)\widehat{e}_r$$

09-06) Esercizio n. 2 del 24/2/2009

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = 90^0$. Si assuma $d = \dfrac{\lambda}{2}$.

———————

$$N_\theta = \left[\cos\theta \sin\phi 2\cos\left[kd(\cos\theta - \sin\theta\sin\phi)\right] \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} - \right.$$

$$\left. - \sin\theta 2\cos\left[kd(\cos\theta + \sin\theta\sin\phi)\right] \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \right]$$

$$N_\phi = \left[\cos\phi 2\cos\left[kd(\cos\theta - \sin\theta\sin\phi)\right] \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} \right]$$

$$N_{\theta(\theta=90^0)} = -\frac{2}{k} 2\cos\left(kd\sin\phi\right)$$

$$N_{\phi(\theta=90^0)} = \frac{2}{k} 2\cos\left(kd\sin\phi\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

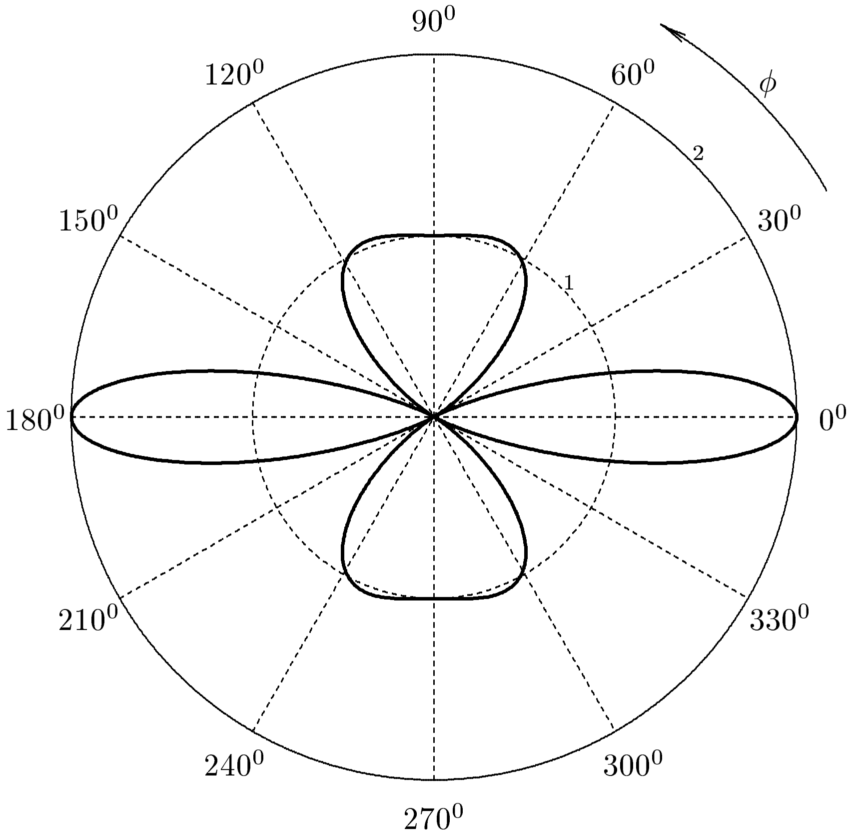
$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{\pi r}\right)^2 \left[\cos\left(kd\sin\phi\right)\right]^2 \left\{ 1 + \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos^2\phi} \right\} \widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\phi) = \left[\cos\left(kd\sin\phi\right)\right]^2 \left\{ 1 + \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos^2\phi} \right\}$$

Per $d = \dfrac{\lambda}{2} \Longrightarrow kd = \pi$:

$$F(\phi) = \left[\cos\left(\pi\sin\phi\right)\right]^2 \left\{ 1 + \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos^2\phi} \right\}$$


90⁰
120⁰
60⁰
φ
2
150⁰
30⁰
1
180⁰
0⁰
210⁰
330⁰
240⁰
300⁰
270⁰

09-07) Esercizio n. 3 del 24/2/2009

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 10\ GHz$, viaggiante in aria, incide con angolo di incidenza $\theta_0 = 30^0$ su un mezzo conduttore di parametri costitutivi $\epsilon_r = 2.6$, $\sigma = 1.5\ S/m$, $\mu = \mu_0$. Calcolare: a) il coefficiente di riflessione per la componente normale al piano di incidenza del campo elettrico incidente; b) il coefficiente di riflessione per la componente parallela al piano di incidenza del campo elettrico incidente; c) l'angolo di rifrazione.

———————

(vedi es. n.3 del 27/6/2008)

Calcoliamo, relativamente al mezzo conduttore, il rapporto $\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}$, la costante di propagazione β e il coefficiente di attenuazione α.

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{1.5}{8.854\cdot 10^{-12}\cdot 2.6\cdot 2\pi\cdot 10^{10}} = 1.0370 \Longrightarrow \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 = 1.0754$$

$$\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} = \sqrt{1+1.0754} = 1.4406$$

$$\beta_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_r\epsilon_r}{2}\left[1+\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}\right]} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{2.6}{2}(1+1.4406)} = 1.7812\frac{\omega}{c}\ \ (rad/m)$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_r\epsilon_r}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}-1\right]} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{2.6}{2}(1.4406-1)} = 0.75682\frac{\omega}{c}\ \ \left(m^{-1}\right)$$

Si ha anche:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} = 209.4395\ \ (rad/m)$$

$$\begin{aligned} p^2(\theta_0) =& \frac{1}{2}\left[-\beta_2^2+\alpha_2^2+\beta_1^2\sin^2\theta_0+\sqrt{4\beta_2^2\alpha_2^2+\left(\beta_2^2-\alpha_2^2-\beta_1^2\sin^2\theta_0\right)^2}\right] = \\ =& \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left\{-2.6+\sin^2\theta_0+\sqrt{7.2689+\left(2.6-\sin^2\theta_0\right)^2}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q^2(\theta_0) =& \frac{1}{2}\left[\beta_2^2-\alpha_2^2-\beta_1^2\sin^2\theta_0+\sqrt{4\beta_2^2\alpha_2^2+\left(\beta_2^2-\alpha_2^2-\beta_1^2\sin^2\theta_0\right)^2}\right] = \\ =& \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left\{2.6-\sin^2\theta_0+\sqrt{7.2689+\left(2.6-\sin^2\theta_0\right)^2}\right\} \end{aligned}$$

che per $\theta_0 = 30^0$ valgono:

$$p^2\left(30^0\right) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left\{-2.6 + 0.25 + 3.5765\right\} = \frac{1}{2}1.2265\frac{\omega^2}{c^2} \Longrightarrow p\left(30^0\right) = 0.7831\frac{\omega}{c}$$

$$q^2\left(30^0\right) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left\{2.6 - 0.25 + 3.5765\right\} = \frac{1}{2}5.9265\frac{\omega^2}{c^2} \Longrightarrow q\left(30^0\right) = 1.7214\frac{\omega}{c}$$

I coefficienti di riflessione, per $\mu_1 \simeq \mu_2$, sono:

$$R_\perp = \rho_\perp^2 = \frac{\left(q - \beta_1\cos\theta_0\right)^2 + p^2}{\left(q + \beta_1\cos\theta_0\right)^2 + p^2} = \frac{\left(1.7214 - 0.866\right)^2 + 0.613}{\left(1.7214 + 0.866\right)^2 + 0.613} = 0.184 = \underline{\underline{18.4\%}}$$

$$R_\parallel = \rho_\parallel^2 = \rho_\perp^2\frac{\left(q - \beta_1\sin\theta_0\tan\theta_0\right)^2 + p^2}{\left(q + \beta_1\sin\theta_0\tan\theta_0\right)^2 + p^2} = 0.184\frac{\left(1.7214 - 0.5\cdot 0.57735\right)^2 + 0.613}{\left(1.7214 + 0.5\cdot 0.57735\right)^2 + 0.613} =$$
$$= 0.184\cdot 0.57285 = 0.1054 = \underline{\underline{10.54\%}}$$

L'angolo di rifrazione é:

$$\tan\psi = \frac{\beta_1\sin\theta_0}{q} = \frac{0.5}{1.7214} = 0.29046 \Longrightarrow \psi = \arctan(0.29046) = \underline{\underline{16^0.1965}}$$

09-08) Esercizio n. 4 del 24/2/2009

La densità superficiale di potenza, mediata in un periodo, della luce solare sulla superficie terrestre è approssimativamente $1.4 \cdot 10^3\, W/m^2$. In approssimazione di onda piana calcolare i moduli del campo elettrico e del campo magnetico nonchè la pressione di radiazione esercitata sulla superficie terrestre assumendola perfettamente assorbente.

———————

(vedi es. n.4 del 25/9/1993)

Si ha:

$$\mathscr{P} = \Big| < \vec{S} \cdot \hat{n} > \Big| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \Longrightarrow E_0^2 = 2\mathscr{P}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 2 \cdot 1,4 \cdot 10^3 \cdot 376,7 = 1054760$$

$$|E_0| = 1027\, V/m$$

ed anche

$$H_0 = \frac{E_0}{Z} = 2.7\, A/m$$

Infine

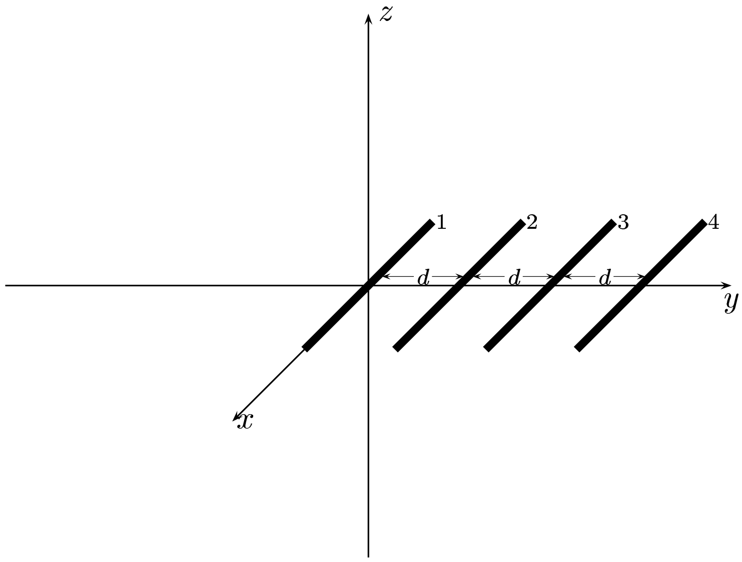
$$\vec{t} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 \widehat{n} \quad \text{(pressione di radiazione, mediata in un periodo, anche se l'onda non è polarizzata)}$$

Ne segue:

$$< t > = \frac{\mathscr{P}}{c} = \underline{\underline{4.67 \cdot 10^{-6}\, N/m^2}}$$

09-09) Esercizio n. 1 del 8/5/2009

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda parallele, uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate tutte nel piano xy e sono equidistanti d, come in figura. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato.



———————

Le densitá di corrente sull'antenna 1, sull'antenna 2, sull'antenna 3, sull'antenna 4 sono rispettivamente:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{x} A_1 \delta(y)\delta(z)\cos kx & -l \le x \le +l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{x} A_2 \delta(y-d)\delta(z)\cos kx & -l \le x \le +l \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{x} A_3 \delta(y-2d)\delta(z)\cos kx & -l \le x \le +l \\ \vec{J}^{(4)} = \widehat{x} A_4 \delta(y-3d)\delta(z)\cos kx & -l \le x \le +l \end{cases}$$

Posto $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$ per la uniformitá del sistema di antenne, la densitá di corrente risultante é la somma delle quattro:

$$\begin{aligned} \vec{J} =& \widehat{x}\delta(y)\delta(z)\cos kx + \widehat{x}\delta(y-d)\delta(z)\cos kx + \\ &+ \widehat{x}\delta(y-2d)\delta(z)\cos kx + \widehat{x}\delta(y-3d)\delta(z)\cos kx \end{aligned}$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta,\phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} \vec{J}(\vec{r}\,') d^3 r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x}\sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,' = x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}
&\vec{N}(\theta,\phi) = \\
&= \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{x}\delta(y\,')\delta(z\,')\cos kx dx\,'dy\,'dz\,' + \\
&+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{x}\delta(y\,'-d)\delta(z\,')\cos kx\,'dx\,'dy\,'dz\,' + \\
&+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{x}\delta(y\,'-2d)\delta(z\,')\cos kx\,'dx\,'dy\,'dz\,' + \\
&+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{x}\delta(y\,'-3d)\delta(z\,')\cos kx\,'dx\,'dy\,'dz\,'
\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{x}\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,' + \\
&+\widehat{x}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,' + \\
&+\widehat{x}e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,' + \\
&+\widehat{x}e^{-3ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,'
\end{aligned}$$

Si ha:

$$\widehat{x}\cdot\widehat{r} = \cos\psi = \sin\theta\cos\phi$$

essendo ψ l'angolo formato fra l'asse x e la direzione del vettore posizione $\widehat{e}_r$.

Per un'antenna a mezz'onda risulta, quindi:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,' = \int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\cos\psi}\cos kx\,'dx\,' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}$$

Pertanto:

$$
\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) =&\widehat{x}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}+\\
&+\widehat{x}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}+\\
&+\widehat{x}e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}+\\
&+\widehat{x}e^{-3ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}
\end{aligned}
$$

ossia:

$$
\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) =&\widehat{x}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\Big[1+e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}+\\
&+e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}+e^{-3ikd\sin\theta\sin\phi}\Big]
\end{aligned}
$$

che si puó scrivere:

$$
\vec{N}(\theta,\phi) =\widehat{x}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\sum_{p=0}^{n-1}e^{-ipkd\sin\theta\sin\phi}
$$

essendo $n=4$ il numero di antenne.

Allora, se introduciamo la variabile complessa ξ definita da:

$$
\xi^p = e^{-ipkd\sin\theta\sin\phi}
$$

si ha:

$$
\sum_{p=0}^{n-1}\xi^p = \frac{\xi^n-1}{\xi-1} = \frac{e^{-inkd\sin\theta\sin\phi}-1}{e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}-1}
$$

Questo ultimo risultato deriva dal fatto che il primo membro rappresenta una progressione geometrica.

$$\frac{e^{-inkd\sin\theta\sin\phi}-1}{e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}-1}=\frac{\dfrac{e^{-in\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}}}{e^{+in\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}}}-1}{\dfrac{e^{-i\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}}}{e^{+i\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}}}-1}=$$

$$\frac{\dfrac{e^{-in\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}}-e^{+in\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}}}{e^{+in\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}}}}{\dfrac{e^{-i\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}}-e^{+i\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}}}{e^{+i\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}}}}=$$

$$=\frac{e^{+i\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}}}{e^{+in\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}}}\,\frac{-2i\sin\left(n\dfrac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}\right)}{-2i\sin\left(\dfrac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}\right)}=$$

$$=\left[e^{-i(n-1)\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}}\right]\frac{\sin\left(n\dfrac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}\right)}$$

$$\vec{N}(\theta,\phi)=\widehat{x}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\left[e^{-i(n-1)\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}}\right]\frac{\sin\left(n\dfrac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}\right)}$$

Poiché:

$$\widehat{x}=\widehat{e}_r\sin\theta\cos\phi+\widehat{e}_\theta\cos\theta\cos\phi-\widehat{e}_\phi\sin\phi$$

si ha:

$$\vec{N}(\theta,\phi)=\widehat{e}_r \sin\theta\cos\phi \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\left[e^{-i(n-1)\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}}\right]\frac{\sin\left(n\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}\right)}+$$

$$+\widehat{e}_\theta \cos\theta\sin\phi \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\left[e^{-i(n-1)\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}}\right]\frac{\sin\left(n\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}\right)}-$$

$$-e_\phi \sin\phi \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\left[e^{-i(n-1)\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}}\right]\frac{\sin\left(n\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}\right)}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(|N_\theta|^2+|N_\phi|^2\right)\widehat{e}_r$$

09-10) Esercizio n. 2 del 8/5/2009

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = 90^0$. Si assuma $d = \dfrac{\lambda}{4}$.

——————

$$N_\theta = \left[\cos\theta\sin\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\left[e^{i(n-1)\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}}\right]\frac{\sin\left(n\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}\right)}\right]$$

$$N_\phi = \left[-\sin\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\left[e^{i(n-1)\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}}\right]\frac{\sin\left(n\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd\sin\theta\sin\phi}{2}\right)}\right]$$

$$N_{\theta(\theta=90^0)} = 0$$

$$N_{\phi(\theta=90^0)} = \left[-\sin\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{1-\cos^2\phi}\left[e^{i(n-1)\frac{kd\sin\phi}{2}}\right]\frac{\sin\left(n\frac{kd\sin\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd\sin\phi}{2}\right)}\right]$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

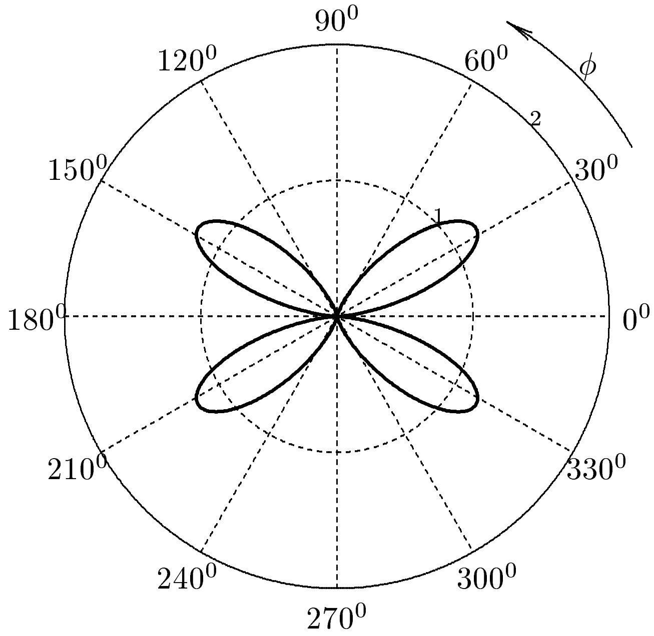
$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{1}{2\pi r}\right)^2\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi}\frac{\sin\left(n\frac{kd\sin\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd\sin\phi}{2}\right)}\right]^2\widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\phi) = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi}\frac{\sin\left(n\frac{kd\sin\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd\sin\phi}{2}\right)}\right]^2$$

Per $d = \dfrac{\lambda}{4} \Longrightarrow kd = \dfrac{\pi}{2}$ e per $n = 4$:

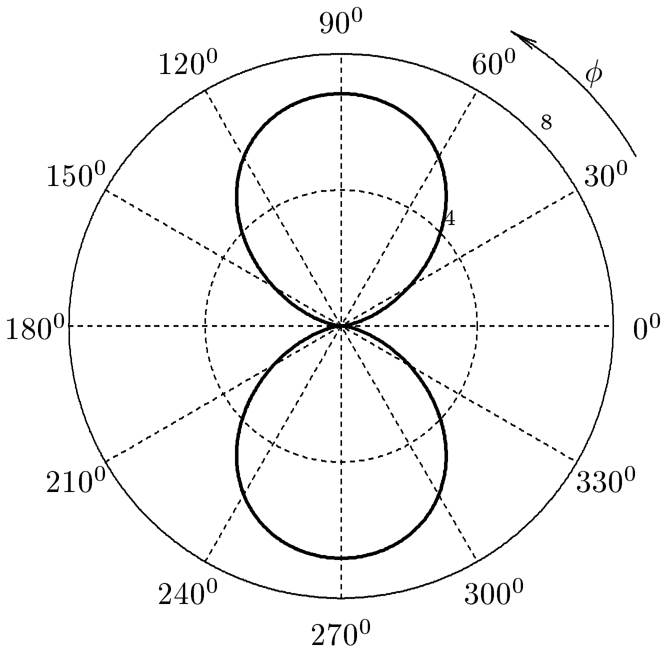
$$F(\phi) = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi}\frac{\sin\left(\pi\sin\phi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\sin\phi\right)}\right]^2$$



É utile illustrare il diagramma di radiazione per $d = \lambda/8$. In questo caso, infatti, il diagramma di radiazione ha il lobo nella direzione avanti, ed il fattore di forma diventa:

Per $d = \dfrac{\lambda}{8} \Longrightarrow kd = \dfrac{\pi}{4}$ e per $n = 4$:

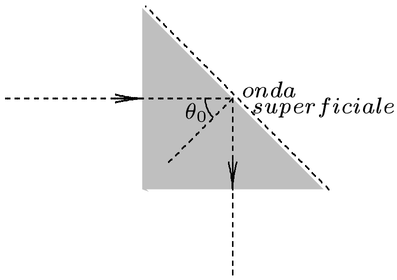
$$F(\phi) = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\sin\phi\right)} \right]^2$$



09-11) Esercizio n. 3 del 8/5/2009

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 10\ GHz$ penetra in un prisma di paraffina circondato dall'aria, avente la sezione di un triangolo rettangolo isoscele, secondo la direzione normale ad uno dei cateti. Dimostrare che l'onda subisce riflessione totale sull'ipotenusa. Calcolare, allora, la distanza (in termini di lunghezza d'onda, relativa al vuoto, della radiazione incidente) alla quale l'ampiezza dell'onda superficiale é un decimo dell'ampiezza massima sull'ipotenusa. I parametri costitutivi della paraffina sono $n = \sqrt{\epsilon_r} = 1.6$, $\mu = \mu_0$ e $\sigma = 0$.

(vedi es. n.2 del 21/7/2000)



L'angolo di incidenza sull'ipotenusa é 45^0 in quanto il triangolo é rettangolo isoscele e, quindi, gli angoli alla base sono di 45^0. D'altra parte l'angolo limite é:

$$\theta_L = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1.6}\right) = 0.67513 = \underline{\underline{38^0.68}}$$

essendo n_1 l'indice di rifrazione della paraffina (primo mezzo).

Quindi risulta $\theta_0 > \theta_L$.

L'onda superficiale é:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_2 e^{\beta_1 x + i\alpha z} e^{-i\omega t} \qquad\qquad (x < 0)$$

essendo:

$$\alpha = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_0}\sin\theta_0 \qquad\qquad (\mu_2 \simeq \mu_1 \simeq \mu_0)$$

la costante di propagazione dell'onda superficiale e

$$\beta_1 = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_0}\sqrt{\sin^2\theta_0 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{\omega}{c}n_1\sqrt{\sin^2\theta_0 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} \qquad\qquad (\mu_2 \simeq \mu_1 \simeq \mu_0)$$

il coefficiente di attenuazione in aria.

Deve essere:

$$e^{\beta_1 x^*} = 0.1 \Longrightarrow \beta_1 x^* = \log 0.1 = -2.3 \Longrightarrow da\ cui\ x^* = -\frac{2.3}{\beta_1}$$

Risulta:

$$\beta_1 = \frac{2\pi \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^8} 1.6 \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2.56}} \simeq 209.439 \cdot 1.6 \cdot 0.33 \simeq 110.58\ m^{-1}$$

Ne segue:

$$x^* \simeq -2.08 \cdot 10^{-2}\ m = -2.08\ cm$$

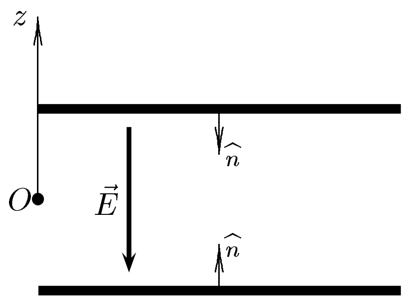
Poiché la lunghezza d'onda competente alla frequenza di 10 GHz é $\lambda_0 = \frac{c}{\nu} = 3 \cdot 10^{-2}\ m = 3\ cm$ risulta:

$$\underline{\underline{x^* \simeq -0.69\lambda_0}}$$

09-12) Esercizio n. 4 del 8/5/2009

Fra le armature di un condensatore a facce piane e parallele vi é un campo elettrico pressocché uniforme e costante nel tempo la cui ampiezza é $10^5\ V/m$. Utilizzando il tensore di Maxwell, calcolare la densitá superficiale di forza che agisce su ciascuna armatura.

———————



Il tensore di Maxwell competente al campo elettrico é:

$$\bar{\bar{S}}^{(e)} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 E_x^2 - \frac{\epsilon_0}{2}E^2 & \epsilon_0 E_x E_y & \epsilon_0 E_x E_z \\ \epsilon_0 E_y E_x & \epsilon_0 E_y^2 - \frac{\epsilon_0}{2}E^2 & \epsilon_0 E_y E_z \\ \epsilon_0 E_z E_x & \epsilon_0 E_z E_y & \epsilon_0 E_z^2 - \frac{\epsilon_0}{2}E^2 \end{pmatrix}$$

Nel caso in cui il campo elettrico é diretto come in figura, ossia $\vec{E} = E_z \widehat{z}$, il tensore si scrive:

$$\bar{\bar{S}}^{(e)} = \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon_0}{2}E_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\epsilon_0}{2}E_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{\epsilon_0}{2}E_z^2 \end{pmatrix}$$

La densitá di forza sulle armature é:

$$\vec{t} = \bar{\bar{S}} \cdot \widehat{n}$$

Sull'armatura superiore si ha:

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon_0}{2}E_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\epsilon_0}{2}E_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{\epsilon_0}{2}E_z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{\epsilon_0}{2}E_z^2 \widehat{z}$$

Sull'armatura inferiore si ha:

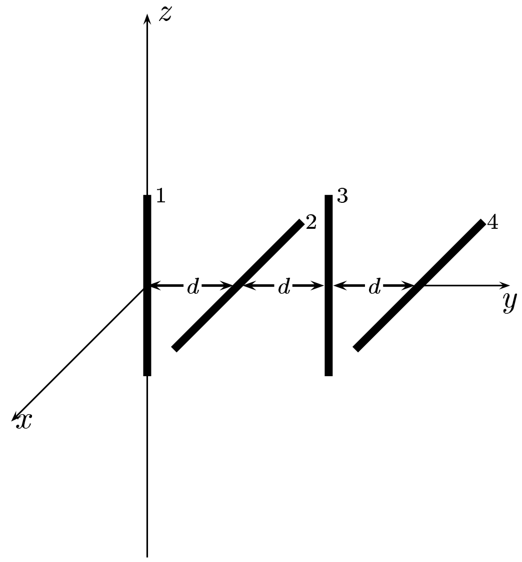
$$\vec{t} = \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon_0}{2}E_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\epsilon_0}{2}E_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{\epsilon_0}{2}E_z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix} = +\frac{\epsilon_0}{2}E_z^2\widehat{z}$$

Su ciascuna armatura agisce una forza che tende ad avvicinare le armature. Il suo modulo é:

$$|\vec{t}| = \frac{\epsilon_0}{2}E_z^2 = \frac{8.854 \cdot 10^{-12}}{2}10^{10} = \underline{\underline{0.044\ N/m^2}}$$

09-13) Esercizio n. 1 del 26/6/2009

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda parallele, uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato.



———————

Le densitá di corrente sull'antenna 1, sull'antenna 2, sull'antenna 3, sull'antenna 4 sono rispettivamente:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{z}A_1\delta(x)\delta(y)\cos kz & -l \le z \le +l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{x}A_2\delta(y-d)\delta(z)\cos kx & -l \le x \le +l \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{z}A_3\delta(x)\delta(y-2d)\cos kz & -l \le z \le +l \\ \vec{J}^{(4)} = \widehat{x}A_4\delta(y-3d)\delta(z)\cos kx & -l \le x \le +l \end{cases}$$

Posto $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$ per la uniformitá del sistema di antenne, la densitá di corrente risultante é la somma delle quattro:

$$\begin{aligned} \vec{J} =& \widehat{z}\delta(x)\delta(y)\cos kz + \widehat{x}\delta(y-d)\delta(z)\cos kx + \\ &+ \widehat{z}\delta(x)\delta(y-2d)\cos kz + \widehat{x}\delta(y-3d)\delta(z)\cos kx \end{aligned}$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta, \phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta, \phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} \vec{J}(\vec{r}\,') d^3r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x}\sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,' = x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}
&\vec{N}(\theta,\phi) = \\
&= \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)} \widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,')\cos kz\,'dx\,'dy\,'dz\,' + \\
&+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)} \widehat{x}\delta(y\,'-d)\delta(z\,')\cos kx\,'dx\,'dy\,'dz\,' + \\
&+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)} \widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,'-2d)\cos kz\,'dx\,'dy\,'dz\,' + \\
&+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)} \widehat{x}\delta(y\,'-3d)\delta(z\,')\cos kx\,'dx\,'dy\,'dz\,'
\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{z}\int_{-l}^{+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos kz\,'dz\,' + \\
&+ \widehat{x}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,' + \\
&+ \widehat{z}e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos kz\,'dz\,' + \\
&+ \widehat{x}e^{-3ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,'
\end{aligned}$$

Si ha:

$$\widehat{x}\cdot\widehat{r} = \cos\psi = \sin\theta\cos\phi$$

essendo ψ l'angolo formato fra l'asse x e la direzione del vettore posizione $\widehat{e}_r$.

Per un'antenna a mezz'onda risulta, quindi:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,' = \int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\cos\psi}\cos kx\,'dx\,' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}$$

e, ovviamente:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos kz\,'dz\,' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =&\widehat{z}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+\\ &+\widehat{x}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}+\\ &+\widehat{z}e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+\\ &+\widehat{x}e^{-3ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =&\widehat{x}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\left[e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}+e^{-3ikd\sin\theta\sin\phi}\right]+\\ &+\widehat{z}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\left[1+e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\right]\end{aligned}$$

Poiché:

$$\begin{cases}\widehat{x}=\widehat{e}_r\sin\theta\cos\phi+\widehat{e}_\theta\cos\theta\cos\phi-\widehat{e}_\phi\sin\phi\\ \\ \widehat{z}=\widehat{e}_r\cos\theta-\widehat{e}_\theta\sin\theta\end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi)=&\widehat{e}_r\Bigg\{\sin\theta\cos\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\left[e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}+e^{-3ikd\sin\theta\sin\phi}\right]+\\ &+\cos\theta\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\left[1+e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\right]\Bigg\}+\\ &+\widehat{e}_\theta\Bigg\{\cos\theta\cos\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\left[e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}+e^{-3ikd\sin\theta\sin\phi}\right]-\\ &-\sin\theta\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\left[1+e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\right]\Bigg\}-\\ &-\widehat{e}_\phi\sin\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\left[e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}+e^{-3ikd\sin\theta\sin\phi}\right]\end{aligned}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle=\frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(|N_\theta|^2+|N_\phi|^2\right)\widehat{e}_r$$

Le componenti lungo θ e lungo ϕ del vettore di radiazione si possono ancora scrivere:

$$
\begin{aligned}
N_\theta =&\frac{2}{k}\left\{ \cos\theta\cos\phi\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\left[1+e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\right]-\right.\\
&\left.-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\left[1+e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\right]\right\}\\
N_\phi =&-\sin\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\left[e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}+e^{-3ikd\sin\theta\sin\phi}\right]
\end{aligned}
$$

ossia:

$$
\begin{aligned}
N_\theta =&\frac{2}{k}\left\{-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}+\cos\theta\cos\phi\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\right\}\cdot\\
&\cdot\left[1+e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\right]\\
N_\phi =&-\sin\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\left[1+e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\right]
\end{aligned}
$$

Ne segue:

$$
\begin{aligned}
|N_\theta|^2 =&\frac{4}{k^2}\left\{-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}+\cos\theta\cos\phi\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\right\}\cdot\\
&\cdot\left\{-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}+\cos\theta\cos\phi\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\right\}\cdot\\
&\cdot\left|1+e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\right|^2\\
|N_\phi|^2 =&\left[\sin\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\right]^2\left|1+e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\right|^2
\end{aligned}
$$

Ora:

$$\left(a+be^{-i\alpha}\right)\left(a+be^{+i\alpha}\right)=a^2+b^2+2abcos\alpha$$

e

$$
\begin{aligned}
&\left|1+e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\right|^2=\\
=&\left(1+e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\right)\left(1+e^{+2ikd\sin\theta\sin\phi}\right)=\\
=&2\left[1+\cos\left(2kd\sin\theta\sin\phi\right)\right]
\end{aligned}
$$

In definitiva:

$$
\begin{aligned}
|N_\theta|^2 =& \frac{8}{k^2}\left\{ \frac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \cos^2\theta\cos^2\phi\frac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{\left(1-\sin^2\theta\cos^2\phi\right)^2} - \right.\\
&\left. -2\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\cos\theta\cos\phi\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right)\right\}\cdot\\
&\cdot\left[1+\cos\left(2kd\sin\theta\sin\phi\right)\right]\\
|N_\phi|^2 =& \frac{8}{k^2}\sin^2\phi\frac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{\left(1-\sin^2\theta\cos^2\phi\right)^2}\left[1+\cos\left(2kd\sin\theta\sin\phi\right)\right]
\end{aligned}
$$

09-14) Esercizio n. 2 del 26/6/2009

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = 90^0$. Si assuma $d = \dfrac{\lambda}{4}$.

———————

$$\left|N_{\theta(\theta=90^0)}\right|^2 = \frac{8}{k^2}\left[1+\cos\left(2kd\sin\phi\right)\right]$$

$$\left|N_{\phi(\theta=90^0)}\right|^2 = \frac{8}{k^2}\sin^2\phi\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\left(1-\cos^2\phi\right)^2}\left[1+\cos\left(2kd\sin\phi\right)\right]$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2\right)\widehat{e}_r$$

ossia:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\frac{8}{k^2}\left[1+\cos\left(2kd\sin\phi\right)\right]\left\{1+\sin^2\phi\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\left(1-\cos^2\phi\right)^2}\right\}\widehat{e}_r$$

In definitiva:

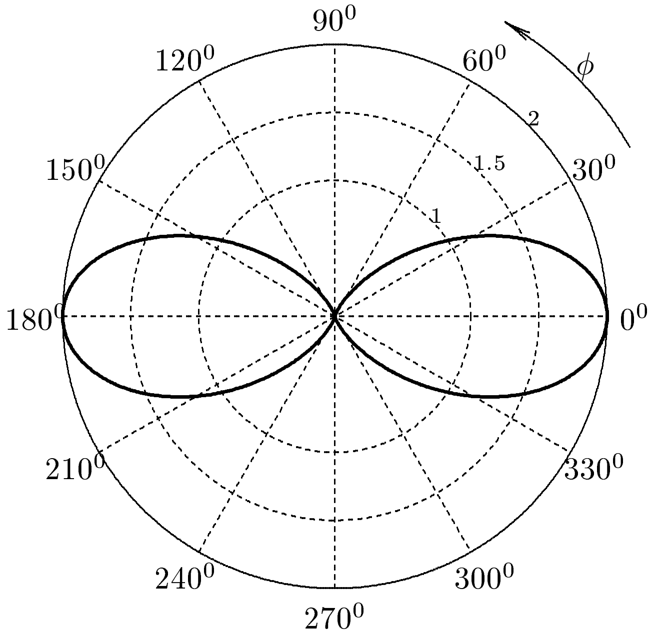
$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{4}Z\left(\frac{1}{\pi r}\right)^2\left[1+\cos\left(2kd\sin\phi\right)\right]\left\{1+\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin^2\phi}\right\}\widehat{e}_r$$

Per $d = \dfrac{\lambda}{4} \Longrightarrow kd = \dfrac{\pi}{2}$, quindi:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{4}Z\left(\frac{1}{\pi r}\right)^2\left[1+\cos\left(\pi\sin\phi\right)\right]\left\{1+\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin^2\phi}\right\}\widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma:

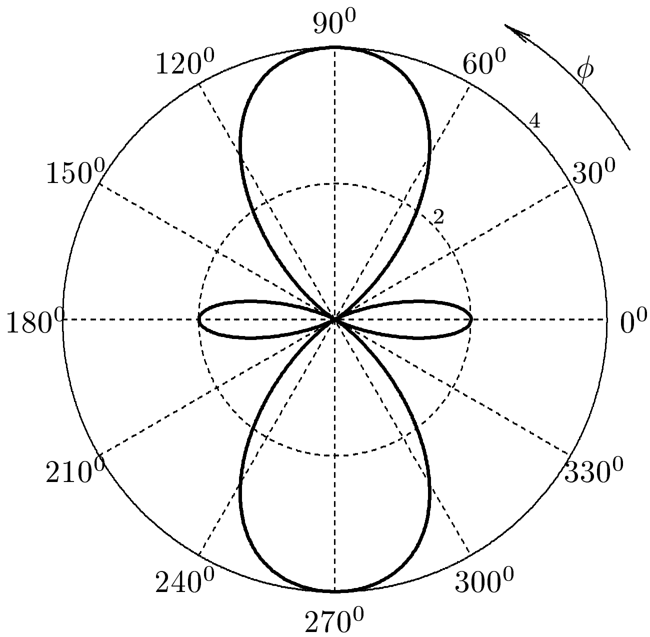
$$F(\phi) = \left[1+\cos\left(\pi\sin\phi\right)\right]\left\{1+\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin^2\phi}\right\}$$



É utile illustrare il diagramma di radiazione per $d = \lambda/2$. In questo caso, infatti, il diagramma di radiazione ha il lobo principale nella direzione avanti, ed il fattore di forma diventa:

Per $d = \dfrac{\lambda}{2} \Longrightarrow kd = \pi$:

$$F(\phi) = \left[1 + \cos\left(2\pi \sin\phi\right)\right] \left\{ 1 + \frac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin^2\phi} \right\}$$



09-15) Esercizio n. 3 del 26/6/2009

Un rombo di Fresnel di paraffina ha un indice di rifrazione n=1.6 nella regione delle microonde. Calcolare l'angolo (piú grande e piú piccolo) di apertura del rombo. Si valuti l'angolo limite. Se si incrementano gli angoli di apertura del rombo, cosí trovati, di $+1^0$, valutare il valore dell'angolo di fase nei due casi (angolo piú grande e angolo piú piccolo).

———————

L'angolo di apertura θ_F del rombo é dato dalla seguente formula (vedi Appunti di Campi elettromagnetici):

$$\frac{\cos\theta_F\sqrt{\sin^2\theta_F-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\sin^2\theta_F}=\tan\frac{45^0}{2}=0.4142$$

Elevando al quadrato:

$$\cos^2\theta_F\frac{\sin^2\theta_F-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{\sin^4\theta_F}=(0.4142)^2$$

Posto $\cos^2\theta_F=1-\sin^2\theta$:

$$\frac{\sin^2\theta_F-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{\sin^4\theta_F}-\frac{\sin^2\theta_F-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{\sin^2\theta_F}=(0.4142)^2$$

$$\sin^2\theta_F-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2-\sin^4\theta_F+\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\sin^2\theta_F=(0.4142)^2\sin^4\theta_F$$

$$\left[1+(0.4142)^2\right]\sin^4\theta_F-\sin^2\theta_F\left[1+\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]+\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2=0$$

$$\sin^2\theta_F=\frac{\left[1+\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]\pm\sqrt{\left[1+\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]^2-4\left[1+(0.4142)^2\right]\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{2\left[1+(0.4142)^2\right]}$$

Per $n_2=1$ e $n_1=1.6$ risulta:

$$\sin^2\theta_{F_1}=\frac{1.390625+\sqrt{1.933838-1.830565}}{2.343123}=0.73064$$

$$\sin^2\theta_{F_2} = \frac{1.390625 - \sqrt{1.933838 - 1.830565}}{2.343123} = 0.456341$$

da cui:

$$\sin\theta_{F_1} = 0.85477 \Longrightarrow \underline{\underline{\theta_{F1} = 58^0.735}}$$

$$\sin\theta_{F_2} = 0.67553 \Longrightarrow \underline{\underline{\theta_{F2} = 42^0.495}}$$

L'angolo limite é dato da:

$$\theta_L = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1.6}\right) = \underline{\underline{38^0.682}}$$

che é inferiore agli angoli di Fresnel.

Supponiamo ora che sia stato fatto un errore di $+1^0$ sugli angoli di apertura del prisma per difetto di costruzione, siano cioé:

$$\theta_{F'_1} = 59^0.735$$

$$\theta_{F'_2} = 43^0.495$$

L'angolo di fase fra le due componenti del campo elettrico é dato da:

$$\tan\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\theta_0\sqrt{\sin^2\theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\sin^2\theta_0}$$

Si ha allora:

$$\tan\frac{\delta'_1}{2} = \frac{\cos\theta_{F'_1}\sqrt{\sin^2\theta_{F'_1} - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\sin^2\theta_{F'_1}} = \frac{\cos(59^0.735)\sqrt{\sin^2(59^0.735) - \left(\frac{1}{1.6}\right)^2}}{\sin^2(59^0.735)} =$$

$$=0.40275 \Longrightarrow \underline{\underline{\delta'_1 = 2\arctan(0.40275) = 43^0.874 \text{ invece di } 45^0}}$$

$$\tan\frac{\delta'_2}{2} = \frac{\cos\theta_{F'_2}\sqrt{\sin^2\theta_{F'_2} - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\sin^2\theta_{F'_2}} = \frac{\cos(43^0.495)\sqrt{\sin^2(43^0.495) - \left(\frac{1}{1.6}\right)^2}}{\sin^2(43^0.495)} =$$

$$=0.441475 \Longrightarrow \underline{\underline{\delta'_1 = 2\arctan(0.441475) = 47^0.6405 \text{ invece di } 45^0}}$$

Come si vede, scegliendo l'angolo maggiore si compie un minore errore sulla fase.

09-16) Esercizio n. 4 del 26/6/2009

Un plasma omogeneo, irradiato da un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 1\ GHz$, ha le seguenti caratteristiche:

$$N = 10^{16}\ m^{-3},\ \nu_{eff} = 10^7\ s^{-1}$$

Determinare la minima frequenza perché l'onda possa propagarsi nel plasma.

Calcolare: a) la costante dielettrica relativa del plasma; b) la conducibilitá; c) il coefficiente di attenuazione e d) il modulo della velocitá media degli elettroni se il modulo del campo elettrico é $|\vec{E}| = 100\ mV/m$.

———————

La frequenza angolare di plasma é:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} = \frac{10^{16} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}} = 3.1738 \cdot 10^{19}\,(rad/s)^2 \Longrightarrow \omega_p = 5.6336 \cdot 10^9\,rad/s$$

$$\nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 8.9661 \cdot 10^8\ s^{-1}$$

La frequenza di soglia ν_s é data da:

$$\omega_p^2 = \omega_s^2 + \omega_{eff}^2$$

ossia:

$$\nu_s^2 = \nu_p^2 - \nu_{eff}^2 = (8.9661 \cdot 10^8)^2 - 10^{14} = 8.0381 \cdot 10^{17} \Longrightarrow \underline{\underline{\nu_s = 8.9655 \cdot 10^8\ Hz = 896.55\ MHz}}$$

Prima di calcolare i parametri costitutivi della ionosfera calcoliamo le quantitá sempre ricorrenti:

$$\omega^2 + \omega_{eff}^2 = 4\pi^2(10^18 + 10^14) = 3.9482 \cdot 10^{19}\ (rad/s)^2$$

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} = \frac{3.1738 \cdot 10^{19}}{3.9482 \cdot 10^{19}} \simeq 0.8038$$

La conducibilitá é:

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \omega_{eff} \omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2\pi \cdot 10^7 \cdot 0.8038 \simeq \underline{\underline{4.47 \cdot 10^{-4}}}\ S/m$$

La costante dielettrica relativa é:

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} = 1 - 0.8038 = \underline{\underline{0.1962}}$$

Calcoliamo il rapporto:

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{4.47 \cdot 10^{-4}}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 0.1962 \cdot 2\pi \cdot 10^9} \simeq 0.0409 \Longrightarrow \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 = 0.0017 \ll 1$$

Quindi:

$$\alpha \simeq \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_r}} = \frac{4.47 \cdot 10^{-4}}{2}\frac{377}{\sqrt{0.1962}} = \underline{\underline{0.1902\ m^{-1}}}$$

$$\vec{v} = \frac{q\vec{E}}{(-i\omega + \omega_{eff})m}$$

$$|\vec{v}|^2 = \left[\frac{q\vec{E}}{(-i\omega + \omega_{eff})m}\right] \cdot \left[\frac{q\vec{E}^*}{(+i\omega + \omega_{eff})m}\right] = \frac{q^2|\vec{E}|^2}{(\omega_{eff}^2 + \omega^2)m^2}$$

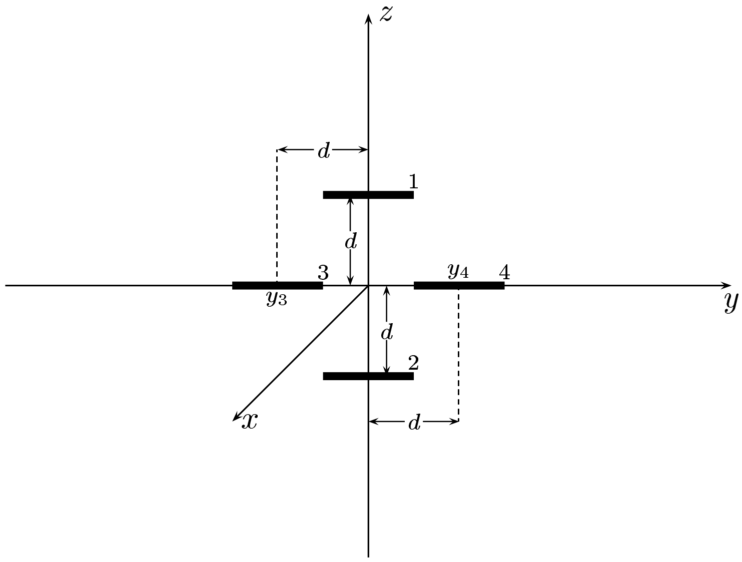
$$|\vec{v}|^2 = \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 10^{-2}}{3.9482 \cdot 10^{19} \cdot (9.11 \cdot 10^{-31})^2} = 7.8127\ (m/s)^2$$

ossia:

$$|\vec{v}| = \underline{\underline{2.7951\ m/s}}$$

09-17) Esercizio n. 1 del 24/7/2009

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda parallele, uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato.



———————

Le densitá di corrente sull'antenna 1, sull'antenna 2, sull'antenna 3 e sull'antenna 4 sono rispettivamente:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{y} A_1 \delta(x)\delta(z-d)\cos ky & -l \le y \le +l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{y} A_2 \delta(x)\delta(z+d)\cos ky & -l \le y \le +l \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{y} A_3 \delta(x)\delta(z)\cos k(y-y_3) & y_3 - l \le y \le y_3 + l \\ \vec{J}^{(4)} = \widehat{y} A_4 \delta(x)\delta(z)\cos k(y-y_4) & y_4 - l \le y \le y_4 + l \end{cases}$$

Posto $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$ per la uniformitá del sistema di antenne, la densitá di corrente risultante é la somma delle quattro:

$$\begin{aligned} \vec{J} =& \widehat{y}\delta(x)\delta(z-d)\cos ky + \widehat{y}\delta(x)\delta(z+d)\cos ky + \\ &+ \widehat{y}\delta(x)\delta(z)\cos k(y-y_3) + \widehat{y}\delta(x)\delta(z)\cos k(y-y_4) \end{aligned}$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta,\phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} \vec{J}(\vec{r}\,') d^3r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x}\sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,' = x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}
&\vec{N}(\theta,\phi) = \\
&= \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)} \widehat{y}\delta(x\,')\delta(z\,'-d)\cos ky\,'dx\,'dy\,'dz\,' + \\
&+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)} \widehat{y}\delta(x\,')\delta(z\,'+d)\cos ky\,'dx\,'dy\,'dz\,' + \\
&+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)} \widehat{y}\delta(x\,')\delta(z\,')\cos k(y\,'-y_3)dx\,'dy\,'dz\,' + \\
&+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)} \widehat{y}\delta(x\,')\delta(z\,')\cos k(y\,'-y_4)dx\,'dy\,'dz\,'
\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{y}e^{-ikd\cos\theta}\int_{-l}^{+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi}\cos ky\,'dy\,' + \\
&+ \widehat{y}e^{+ikd\cos\theta}\int_{-l}^{+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi}\cos ky\,'dy\,' + \\
&+ \widehat{y}\int_{y_3-l}^{y_3+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y\,'-y_3)dy\,' + \\
&+ \widehat{y}\int_{y_4-l}^{y_4+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y\,'-y_4)dy\,'
\end{aligned}$$

Si ha:

$$\widehat{y}\cdot\widehat{e}_r = \cos\chi = \sin\theta\sin\phi$$

essendo χ l'angolo formato fra l'asse y e la direzione del vettore posizione $\widehat{e}_r$.

Per un'antenna a mezz'onda risulta, quindi:

$$\begin{aligned}
&\int_{-l}^{+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi}\cos ky\,'dy\,' = \int_{-l}^{+l} e^{-iky\,'\cos\chi}\cos ky\,'dy\,' = \\
&= \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\chi\right)}{\sin^2\chi} = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}
\end{aligned}$$

Valutiamo, ora $\displaystyle\int_{y_3-l}^{z_3+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y\,'-y_3)dy\,'$. Poniamo $y\,'-y_3 = u \Longrightarrow$

$dy' = du$. Per $y' = y_3 - l \Longrightarrow u = -l$. Per $y' = y_3 + l \Longrightarrow u = +l$. Si ha, quindi:

$$\int_{y_3-l}^{y_3+l} e^{-iky'\sin\theta\sin\phi} \cos k(y'-y_3)dy' =$$
$$= e^{-iky_3\sin\theta\sin\phi} \int_{-l}^{+l} e^{-iku\sin\theta\sin\phi} \cos ku du = e^{-iky_3\sin\theta\sin\phi} \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}$$

Analogamente:

$$\int_{y_4-l}^{y_4+l} e^{-iky'\sin\theta\sin\phi} \cos k(y'-y_4)dy' =$$
$$= e^{-iky_4\sin\theta\sin\phi} \int_{-l}^{+l} e^{-iku\sin\theta\sin\phi} \cos ku du = e^{-iky_4\sin\theta\sin\phi} \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{y} e^{-ikd\cos\theta} \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} + \\ &+ \widehat{y} e^{+ikd\cos\theta} \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} + \\ &+ \widehat{y} e^{-iky_3\sin\theta\sin\phi} \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} + \\ &+ \widehat{y} e^{-iky_4\sin\theta\sin\phi} \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{y} \frac{4}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} \cos(kd\cos\theta) + \\ &+ \widehat{y} \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} \left[e^{-iky_3\sin\theta\sin\phi} + e^{-iky_4\sin\theta\sin\phi}\right]\end{aligned}$$

Poiché $y_3 = -d$ e $y_4 = +d$, si ha:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{y} \frac{4}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} \cos(kd\cos\theta) + \\ &+ \widehat{y} \frac{4}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} \cos(kd\sin\theta\sin\phi)\end{aligned}$$

ossia:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{y}\frac{4}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\left[\cos\left(kd\cos\theta\right)+\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right)\right]$$

Poiché:

$$\begin{cases} \widehat{x} = \widehat{e}_r\sin\theta\cos\phi + \widehat{e}_\theta\cos\theta\cos\phi - \widehat{e}_\phi\sin\phi \\ \widehat{y} = \widehat{e}_r\sin\theta\sin\phi + \widehat{e}_\theta\cos\theta\sin\phi + \widehat{e}_\phi\cos\phi \\ \widehat{z} = \widehat{e}_r\cos\theta - \widehat{e}_\theta\sin\theta \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{e}_r\left[\sin\theta\sin\phi\frac{4}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\left[\cos\left(kd\cos\theta\right)+\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right)\right]\right]+\\ &+\widehat{e}_\theta\left[\cos\theta\sin\phi\frac{4}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\left[\cos\left(kd\cos\theta\right)+\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right)\right]\right]+\\ &+\widehat{e}_\phi\left[\cos\phi\frac{4}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\left[\cos\left(kd\cos\theta\right)+\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right)\right]\right]\end{aligned}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(|N_\theta|^2+|N_\phi|^2\right)\widehat{e}_r$$

Si ha:

$$\begin{aligned}&\left(|N_\theta|^2+|N_\phi|^2\right) =\\ &=\frac{16}{k^2}\left[\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\left[\cos\left(kd\cos\theta\right)+\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right)\right]\right]^2\left[\cos^2\theta\sin^2\phi+\cos^2\phi\right]\end{aligned}$$

Quindi:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{1}{\pi r}\right)^2\left[\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\left[\cos\left(kd\cos\theta\right)+\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right)\right]\right]^2\cdot$$

$$\cdot\left[\cos^2\theta\sin^2\phi+\cos^2\phi\right]\widehat{e}_r$$

09-18) Esercizio n. 2 del 24/7/2009

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = 90^0$. Si assuma $d = \dfrac{\lambda}{2}$.

———————

Per $\theta = 90^0$ risulta:

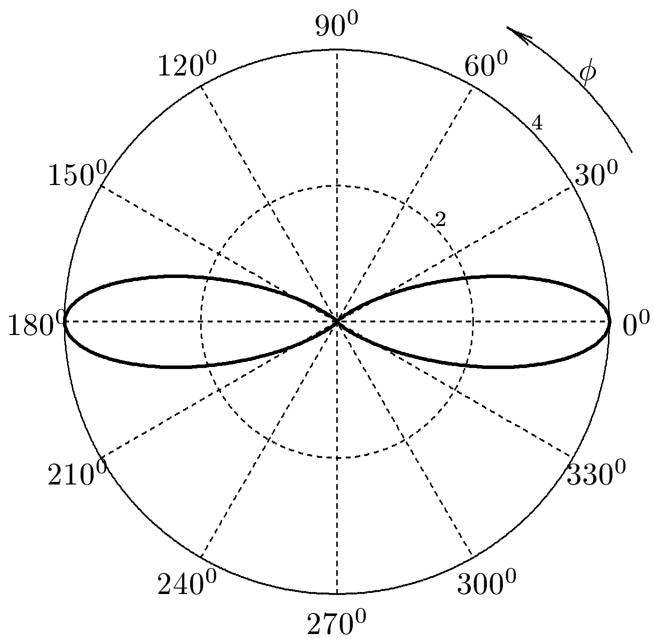
$$\langle \vec{S} \rangle_{(\theta=90^0)} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{\pi r} \right)^2 \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin\phi \right)}{1 - \sin^2\phi} \left[1 + \cos\left(kd \sin\phi \right) \right] \right]^2 \cos^2\phi \, \widehat{e}_r$$

Per $d = \dfrac{\lambda}{2} \Longrightarrow kd = \pi$, quindi:

$$\langle \vec{S} \rangle_{(\theta=90^0)} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{\pi r} \right)^2 \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin\phi \right)}{\cos\phi} \left[1 + \cos\left(\pi \sin\phi \right) \right] \right]^2 \widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\phi) = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin\phi \right)}{\cos\phi} \left[1 + \cos\left(\pi \sin\phi \right) \right] \right]^2$$



09-19) Esercizio n. 3 del 24/7/2009

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 10\ GHz$ si propaga in un mezzo conduttore i cui parametri costitutivi sono:

$$\epsilon_r = 9,\ \mu_r = 1,\ \sigma = 5\ S/m$$

Calcolare la costante di propagazione β, il coefficiente di attenuazione α, la velocitá di fase v_f e la profonditá di penetrazione δ. Se un'onda elettromagnetica piana della stessa suddetta frequenza, viaggiante in aria, penetra nel mezzo sopra descritto in direzione della normale, calcolare il coefficiente di riflessione.

Calcoliamo il rapporto $\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}$. Si ha:

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{5}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 9 \cdot 2\pi \cdot 10^{10}} \simeq 0.998 \Longrightarrow \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} \simeq 0.996$$

Segue:

$$\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} = \sqrt{1 + 0.996} = 1.4128$$

La costante di propagazione é:

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_r\epsilon_r}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}\right]} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{9}{2}(1 + 1.4128)} =$$

$$= 3.2951\frac{\omega}{c} = 3.2951\frac{2\pi \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^8} = 3.2951 \cdot 209.4395 = \underline{\underline{690.1241\ (rad/m)}}$$

Il coefficiente di attenuazione é:

$$\alpha = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_r\epsilon_r}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} - 1\right]} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{9}{2}(1.4128 - 1)} =$$

$$= 1.3629\frac{\omega}{c} = 1.3629\frac{2\pi \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^8} = 1.3629 \cdot 209.4395 = \underline{\underline{285.4451\ \left(m^{-1}\right)}}$$

La velocitá di fase é:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \underline{\underline{\frac{c}{3.2951}\ (m/s) = 9.1 \cdot 10^7\ (m/s)}}$$

La profonditá di penetrazione é:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{285.4451} = \underline{\underline{3.5033 \cdot 10^{-3}\ m = 3.5\ mm}}$$

Il coefficiente di riflessione, per incidenza normale, é:

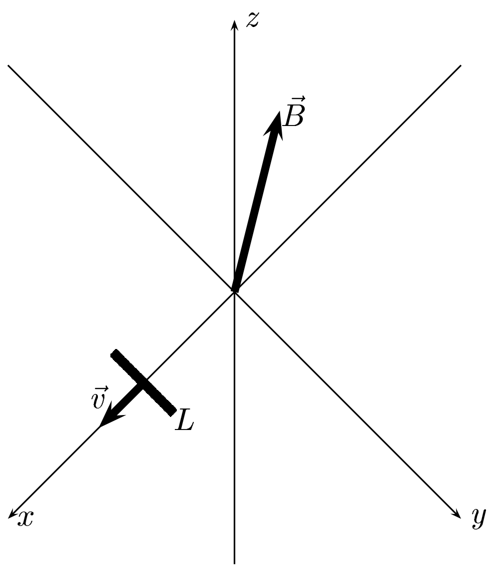
$$R = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2 = \left|\frac{\beta_1 - \beta_2 - i\alpha_2}{\beta_1 + \beta_2 + i\alpha_2}\right|^2 = \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2 + \alpha_2^2}{(\beta_1 + \beta_2)^2 + \alpha_2^2} = \frac{(1 - 3.2951)^2 + 1.3629^2}{(1 + 3.2951)^2 + 1.3629^2} \simeq$$
$$\simeq \underline{\underline{0.35 = 35\%}}$$

in quanto $\beta_1 = \dfrac{\omega}{c}$.

09-20) Esercizio n. 4 del 24/7/2009

Una barra metallica lunga 1 metro é diretta secondo l'asse y di un sistema di riferimento. Essa si muove nella direzione $\widehat{x}$ con una velocitá di 100 Km/h nella regione dove esiste un campo di induzione magnetica $\vec{B} = B_x\widehat{x} + B_z\widehat{z}$ con $B_x = -800\ G$ e $B_z = 1000\ G$. Applicando le leggi di trasformazione dei campi, calcolare la differenza di potenziale indotta fra gli estremi della barra.

———————



I dati del problema sono:

$$B_x = -800\ G = 0.08\ Wb/m^2;\ B_z = 1000\ G = 0.1\ Wb/m^2;$$
$$v = 100\ Km/h \simeq 27.78\ m/s;\ L = 1\ m.$$

Le formule di trasformazione dei campi, nel caso di moto lungo l'asse x positivo, sono:

$$\begin{array}{ll} E\,'_x = E_x & B\,'_x = B_x \\ E\,'_y = \gamma\,[E_y - vB_z] & B\,'_y = \gamma\left[B_y + \dfrac{v}{c^2}E_z\right] \\ E\,'_z = \gamma\,[E_z + vB_y] & B\,'_z = \gamma\left[B_z - \dfrac{v}{c^2}E_y\right] \end{array}$$

Nel nostro caso si ha:

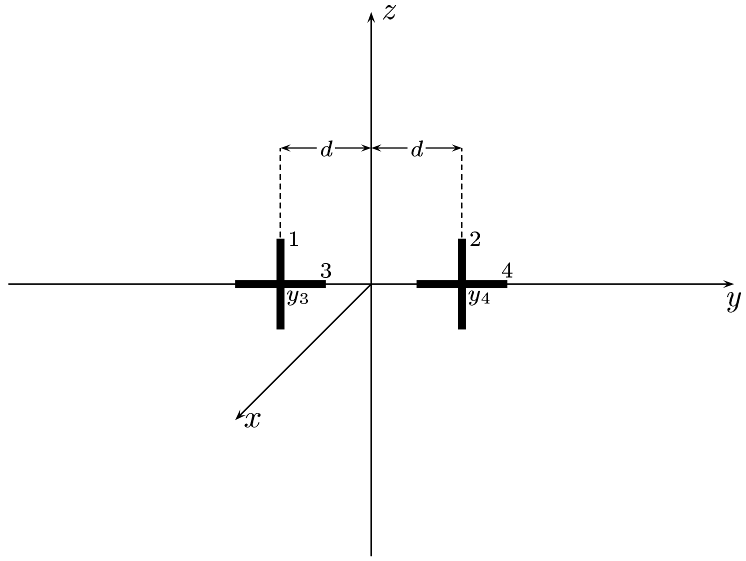
$$\begin{array}{ll} E\,'_x = 0 & B\,'_x = B_x \\ E\,'_y = -v\gamma B_z & B\,'_y = 0 \\ E\,'_z = 0 & B\,'_z = \gamma B_z \end{array}$$

Posto $\gamma = 1$ in quanto la velocitá della barra non é relativistica ed indicando con ϵ la forza elettromotrice indotta, si ha:

$$\epsilon = \int_L E'_y dy = -\int_L vB_z dy = -B_z vL = \underline{\underline{-2.778\ V}}$$

09-21) Esercizio n. 1 del 4/9/2009

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda parallele, uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato.



——————————

(vedi es. n.1 del 24/2/2009)

Le densitá di corrente sull'antenna 1, sull'antenna 2, sull'antenna 3 e sull'antenna 4 sono rispettivamente:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{z}A_1\delta(x)\delta(y+d)\cos kz & -l \le z \le +l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{z}A_2\delta(x)\delta(y-d)\cos kz & -l \le z \le +l \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{y}A_3\delta(x)\delta(z)\cos k(y-y_3) & y_3 - l \le y \le y_3 + l \\ \vec{J}^{(4)} = \widehat{y}A_4\delta(x)\delta(z)\cos k(y-y_4) & y_4 - l \le y \le y_4 + l \end{cases}$$

Posto $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$ per la uniformitá del sistema di antenne, la densitá di corrente risultante é la somma delle quattro:

$$\begin{aligned} \vec{J} =& \widehat{z}\delta(x)\delta(y+d)\cos kz + \widehat{z}\delta(x)\delta(y-d)\cos kz + \\ &+ \widehat{y}\delta(x)\delta(z)\cos k(y-y_3) + \widehat{y}\delta(x)\delta(z)\cos k(y-y_4) \end{aligned}$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta,\phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'}\vec{J}(\vec{r}\,')d^3r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x}\sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,' = x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\vec{N}(\theta,\phi) =$$

$$= \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,'+d)\cos kz\,'dx\,'dy\,'dz\,' +$$
$$+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,'-d)\cos kz\,'dx\,'dy\,'dz\,' +$$
$$+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{y}\delta(x\,')\delta(z\,')\cos k(y\,'-y_3)dx\,'dy\,'dz\,' +$$
$$+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{y}\delta(x\,')\delta(z\,')\cos k(y\,'-y_4)dx\,'dy\,'dz\,'$$

ossia:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{z}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos kz\,'dz\,' + \\ &+\widehat{z}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos kz\,'dz\,' + \\ &+\widehat{y}\int_{y_3-l}^{y_3+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y\,'-y_3)dy\,' + \\ &+\widehat{y}\int_{y_4-l}^{y_4+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y\,'-y_4)dy\,'\end{aligned}$$

Per un'antenna a mezz'onda, orientata lungo l'asse z, risulta:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos kz\,'dy\,' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

Valutiamo, ora $\displaystyle\int_{y_3-l}^{z_3+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y\,'-y_3)dy\,'$.

Si ha:

$$\widehat{y}\cdot\widehat{e}_r = \cos\chi = \sin\theta\sin\phi$$

essendo χ l'angolo formato fra l'asse y e la direzione del vettore posizione $\widehat{e}_r$.

Poniamo $y\,'-y_3 = u \Longrightarrow dy\,' = du$. Per $y\,' = y_3 - l \Longrightarrow u = -l$. Per $y\,' = y_3 + l \Longrightarrow u = +l$. Si ha, quindi:

$$\int_{y_3-l}^{y_3+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y\,'-y_3)dy\,' =$$

$$= e^{-iky_3\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-iku\sin\theta\sin\phi}\cos ku du = e^{-iky_3\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}$$

Analogamente:

$$\int_{y_4-l}^{y_4+l} e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y'-y_4)dy' =$$

$$= e^{-iky_4\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-iku\sin\theta\sin\phi}\cos ku du = e^{-iky_4\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) = &\widehat{z}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+\\ &+\widehat{z}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+\\ &+\widehat{y}e^{-iky_3\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}+\\ &+\widehat{y}e^{-iky_4\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\end{aligned}$$

Poiché $y_3 = -d$ e $y_4 = +d$, si ha:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) = &\widehat{z}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+\\ &+\widehat{z}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+\\ &+\widehat{y}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}+\\ &+\widehat{y}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) = &\widehat{z}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\left[e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}+e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\right]+\\ &+\widehat{y}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\left[e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}+e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\right]\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) = &\widehat{z}\frac{4}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right)+\\ &+\widehat{y}\frac{4}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right)\end{aligned}$$

Poiché:

$$\begin{cases} \widehat{x} = \widehat{e}_r \sin\theta\cos\phi + \widehat{e}_\theta \cos\theta\cos\phi - \widehat{e}_\phi \sin\phi \\ \widehat{y} = \widehat{e}_r \sin\theta\sin\phi + \widehat{e}_\theta \cos\theta\sin\phi + \widehat{e}_\phi \cos\phi \\ \widehat{z} = \widehat{e}_r \cos\theta - \widehat{e}_\theta \sin\theta \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{e}_r \Bigg[& \cos\theta \frac{4}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \cos(kd\sin\theta\sin\phi) + \\ & + \sin\theta\sin\phi \frac{4}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} \cos(kd\sin\theta\sin\phi) \Bigg] + \\ & + \widehat{e}_\theta \Bigg[-\sin\theta \frac{4}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \cos(kd\sin\theta\sin\phi) + \\ & + \cos\theta\sin\phi \frac{4}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} \cos(kd\sin\theta\sin\phi) \Bigg] + \\ & + \widehat{e}_\phi \Bigg[\cos\phi \frac{4}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} \cos(kd\sin\theta\sin\phi) \Bigg] \end{aligned}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2 \left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2\right) \widehat{e}_r$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \langle\vec{S}\rangle = & \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{\pi r}\right)^2 \cos^2(kd\sin\theta\sin\phi) \Bigg\{ \Bigg[-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} + \\ & + \cos\theta\sin\phi \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} \Bigg]^2 + \Bigg[\cos\phi \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} \Bigg]^2 \Bigg\} \widehat{e}_r \end{aligned}$$

09-22) Esercizio n. 2 del 4/9/2009

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = 90^0$. Si assuma $d = \dfrac{\lambda}{2}$.

———————

Per $\theta = 90^0$ risulta:

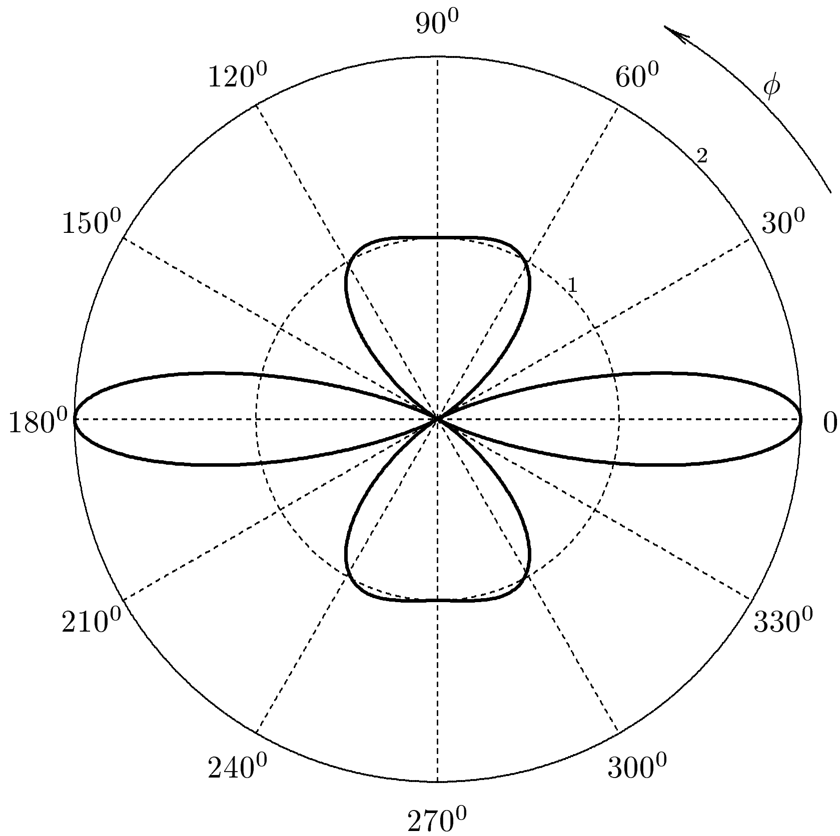
$$\langle \vec{S} \rangle_{(\theta=90^0)} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{\pi r} \right)^2 \cos^2 (kd \sin\phi) \left\{ \Big[-1 \Big]^2 + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} \right]^2 \right\} \widehat{e}_r$$

Per $d = \dfrac{\lambda}{2} \Longrightarrow kd = \pi$, quindi:

$$\langle \vec{S} \rangle_{(\theta=90^0)} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{\pi r} \right)^2 \cos^2 (\pi \sin\phi) \left\{ 1 + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} \right]^2 \right\} \widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma:

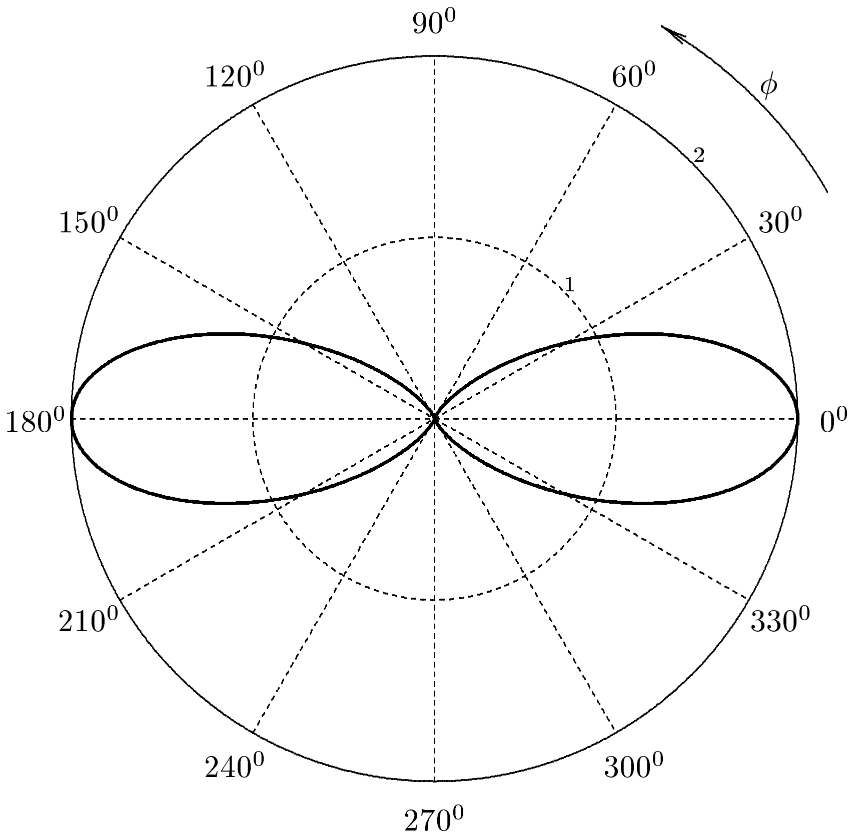
$$F(\phi) = \cos^2 (\pi \sin\phi) \left\{ 1 + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} \right]^2 \right\}$$



É utile illustrare il diagramma di radiazione per $d = \lambda/4$. In questo caso, infatti, il diagramma di radiazione presenta soltanto il lobo principale nella direzione $(0, \pi)$, ed il fattore di forma diventa:

Per $d = \dfrac{\lambda}{4} \Longrightarrow kd = \pi/2$:

$$F(\phi) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)\left\{1 + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi}\right]^2\right\}$$



09-23) Esercizio n. 3 del 4/9/2009

Si consideri una barra metallica lunga 1 m. La barra ruota attorno ad una sua estremitá vincolata ad un asse ad essa perpendicolare, con una frequenza angolare di 12 rad/s. Assumendo che il campo di induzione magnetica terrestre sia diretto ortogonalmente al piano di rotazione della barra, valutare, servendosi esclusivamente delle leggi di trasformazione dei campi, la differenza di potenziale misurata fra gli estremi della barra. Si assuma $|\vec{B}| = 0.6\ G$.

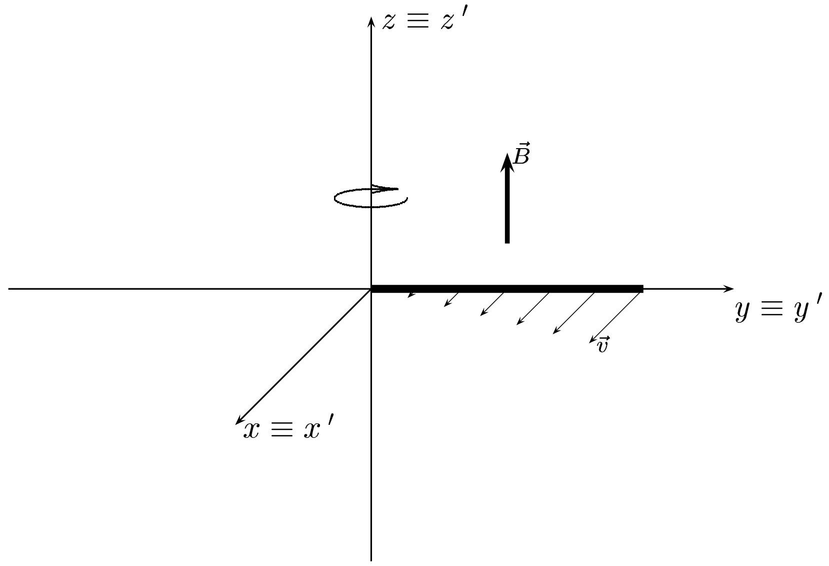
———————

Consideriamo un sistema di riferimento $S \equiv Oxyz$ ed un sistema di riferimento $S' \equiv O'x'y'z'$. Sia $O' \equiv O$ e $z' \equiv z$. Sia l'asse z l'asse di rotazione rispetto al quale ruota il sistema S'. La barra sia solidale all'asse y'.

Consideriamo l'istante in cui l'asse y' coincide con l'asse y e, quindi, l'asse x' con l'asse x. La barra si può considerare costituita da tanti punti mobili con velocità variabile secondo la legge:

$$\vec{v} = \omega y'\widehat{x} = \omega y\widehat{x}$$

essendo ω la velocitá angolare di rotazione della barra e $y > 0$ la distanza di ciascun punto di essa dall'asse di rotazione.



Le leggi di trasformazione dei campi, nel caso di moto lungo l'asse x positivo, sono:

$$\begin{array}{ll} E'_x = E_x & B'_x = B_x \\ E'_y = \gamma\left[E_y - vB_z\right] & B'_y = \gamma\left[B_y + \dfrac{v}{c^2}E_z\right] \\ E'_z = \gamma\left[E_z + vB_y\right] & B'_z = \gamma\left[B_z - \dfrac{v}{c^2}E_y\right] \end{array}$$

Nel sitema di riferimento S i campi sono:

$$E_x = E_y = E_z = B_x = B_y = 0, \; B_z = B$$

Nel sistema di riferimento $S\,'$, si ha, allora:

$$\begin{array}{ll} E\,'_x = 0 & B\,'_x = 0 \\ E\,'_y = -\gamma\omega y B & B\,'_y = 0 \\ E\,'_z = 0 & B\,'_z = \gamma B \end{array}$$

La differenza di potenziale indotta fra gli estremi della barra 0 e $+l$ é:

$$\Delta V = \int_0^{+l} \vec{E'} \cdot \vec{dl} = -\int_0^{+l} \gamma\omega y B \, dy = \gamma\omega B \left(-\frac{1}{2} l^2\right) = -12\frac{1}{2} \cdot 0.6 \cdot 10^{-4} = \underline{\underline{-0.36\, mV}}$$

avendo posto $\gamma = 1$.

09-24) Esercizio n. 4 del 4/9/2009

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 10\ GHz$, viaggiante in aria, incide con un angolo di incidenza $\theta_0 = 30^0$ sulla superficie di un mezzo conduttore i cui parametri costitutivi sono $\epsilon_r = 9,\ \mu_r = 1,\ \sigma = 5\ S/m$.

Se il campo elettrico dell'onda incidente é polarizzato in direzione ortogonale al piano di incidenza, calcolare il coefficiente di riflessione. Si calcoli, altresí, l'angolo di rifrazione.

———————

La costante di propagazione in aria é:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^8} = \underline{\underline{209.4395\ (rad/m)}}$$

Calcoliamo il rapporto $\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}$. Si ha:

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{5}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 9 \cdot 2\pi \cdot 10^{10}} \simeq 0.998 \Longrightarrow \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} \simeq 0.996$$

Segue:

$$\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} = \sqrt{1 + 0.996} = 1.4128$$

La costante di propagazione nel mezzo conduttore indefinito é:

$$\beta_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_r\epsilon_r}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}\right]} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{9}{2}(1 + 1.4128)} =$$

$$= 3.2951\frac{\omega}{c} = 3.2951\frac{2\pi \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^8} = 3.2951 \cdot 209.4395 = \underline{\underline{690.1241\ \ (rad/m)}}$$

Il coefficiente di attenuazione nel mezzo conduttore indefinito é:

$$\alpha_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_r\epsilon_r}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} - 1\right]} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{9}{2}(1.4128 - 1)} =$$

$$= 1.3629\frac{\omega}{c} = 1.3629\frac{2\pi \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^8} = 1.3629 \cdot 209.4395 = \underline{\underline{285.4451\ \ \left(m^{-1}\right)}}$$

Il coefficiente di riflessione ortogonale é:

$$\rho_\perp^2 = \frac{\left[\mu_1 q - \mu_2\beta_1\cos\theta_0\right]^2 + \mu_1^2 p^2}{\left[\mu_1 q + \mu_2\beta_1\cos\theta_0\right]^2 + \mu_1^2 p^2}$$

Scriviamo le espressioni di p, q ed n in funzione delle costanti dei mezzi e dell'angolo di incidenza.

$$p^2(\theta_0) = \frac{1}{2}\left[-\beta_2^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 \sin^2\theta_0 + \sqrt{4\beta_2^2\alpha_2^2 + \left(\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2\theta_0\right)^2}\right]$$

$$q^2(\theta_0) = \frac{1}{2}\left[\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2\theta_0 + \sqrt{4\beta_2^2\alpha_2^2 + \left(\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2\theta_0\right)^2}\right]$$

Si ha:

$$\begin{aligned} p^2\left(30^0\right) =& \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\Bigg[-(3.2951)^2 + (1.3629)^2 + 0.25+ \\ &+\sqrt{4\cdot(3.2951)^2\cdot(1.3629)^2 + \left[(3.2951)^2 - (1.3629)^2 - 0.25\right]^2}\Bigg] = \\ =& \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left(-8.7502 + \sqrt{157.2382}\right) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left(-8.7502 + 12.5395\right) = \\ =& \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}3.7893 = 1.8946\frac{\omega^2}{c^2} \end{aligned}$$

Ne segue:

$$p\left(30^0\right) = 1.3764\frac{\omega}{c}$$

$$\begin{aligned} q^2\left(30^0\right) =& \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\Bigg[(3.2951)^2 - (1.3629)^2 - 0.25+ \\ &+\sqrt{4\cdot(3.2951)^2\cdot(1.3629)^2 + \left[(3.2951)^2 - (1.3629)^2 - 0.25\right]^2}\Bigg] = \\ =& \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left(8.7502 + \sqrt{157.2382}\right) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left(8.7502 + 12.5395\right) = \\ =& \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}21.2897 = 10.6449\frac{\omega^2}{c^2} \end{aligned}$$

Ne segue:

$$q\left(30^0\right) = 3.2627\frac{\omega}{c}$$

Ponendo $\mu_1 = \mu_1$:

$$\rho_\perp^2 = \frac{\left[q - \beta_1\cos\theta_0\right]^2 + p^2}{\left[q + \beta_1\cos\theta_0\right]^2 + p^2}$$

Si ha:

$$\rho_\perp^2 = \frac{\left[3.2627 - 0.866\right]^2 + 1.8946}{\left[3.2627 + 0.866\right]^2 + 1.8946} = \frac{7.6388}{18.9408} = \underline{\underline{0.403 = 40.3\%}}$$

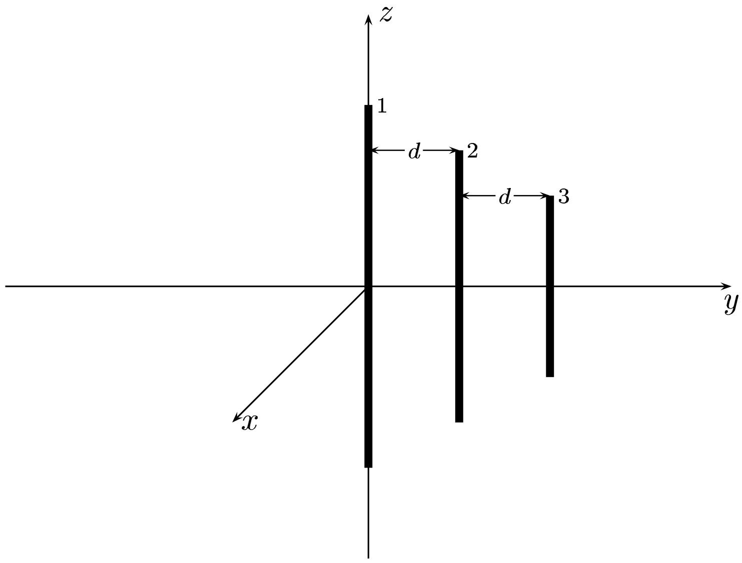
$$\tan\psi = \frac{\beta_1 \sin\theta_0}{q} = \frac{0.5}{3.2627} = 0.15324$$

da cui:

$$\psi = \arctan(0.15324) = \underline{\underline{0.152\ rad = 8^0.7126}}$$

09-25) Esercizio n. 1 del 28/9/2009

Sia dato un sistema uniforme di antenne in fase costituito da tre antenne parallele di lunghezze diverse, sistemate come in figura. L'antenna 1 é lunga λ, l'antenna 2 é lunga $\frac{3}{4}\lambda$, l'antenna 3 é lunga $\frac{\lambda}{2}$. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato.



Cominciamo con il calcolare la quantitá kl.
Per l'antenna 1, $2l_1 = \lambda$:

$$kl_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2} = \pi$$

Per l'antenna 2, $2l_2 = \frac{3}{4}\lambda$:

$$kl_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{3}{8}\lambda = \frac{3}{4}\pi$$

Per l'antenna 3, $2l_3 = \frac{\lambda}{2}$:

$$kl_3 = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Le densitá di corrente sull'antenna 1, sull'antenna 2 e sull'antenna 3 :

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{z}A_1\delta(x)\delta(y)\sin k(l_1 - |z|) & -l_1 \le z \le +l_1 \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{z}A_2\delta(x)\delta(y-d)\sin k(l_2 - |z|) & -l_2 \le z \le +l_2 \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{z}A_3\delta(x)\delta(y-2d)\sin k(l_3 - |z|) & -l_3 \le z \le +l_3 \end{cases}$$

Posto $A_1 = A_2 = A_3 = 1$ per la uniformitá del sistema di antenne, la densitá di corrente risultante é la somma delle tre:

$$\begin{aligned}\vec{J} =&\widehat{z}\delta(x)\delta(y)\sin k(l_1 - |z|) + \widehat{z}\delta(x)\delta(y-d)\sin k(l_2 - |z|)+ \\ &+\widehat{z}\delta(x)\delta(y-2d)\sin k(l_3 - |z|)\end{aligned}$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta,\phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r\cdot\vec{r}\,'}\vec{J}(\vec{r}\,')d^3r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x}\sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r\cdot\vec{r}\,' = x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}&\vec{N}(\theta,\phi) = \\ &= \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,')\sin k(l_1 - |z\,'|)dx\,'dy\,'dz\,'+ \\ &+\int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,'-d)\sin k(l_2 - |z\,'|)dx\,'dy\,'dz\,'+ \\ &+\int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,'-2d)\sin k(l_3 - |z\,'|)dx\,'dy\,'dz\,'\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =&\widehat{z}\int_{-l_1}^{+l_1} e^{-ikz\,'\cos\theta}\sin k(l_1 - |z\,'|)dz\,'+ \\ &+\widehat{z}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l_2}^{+l_2} e^{-ikz\,'\cos\theta}\sin k(l_2 - |z\,'|)dz\,'+ \\ &+\widehat{z}e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l_3}^{+l_3} e^{-ikz\,'\cos\theta}\sin k(l_3 - |z\,'|)dz\,'\end{aligned}$$

Risulta:

$$\int_{-l_1}^{+l_1} e^{-ikz\,'\cos\theta}\sin k(l_1 - |z\,'|)dz\,' = \frac{2\left[\cos(kl_1\cos\theta) - \cos kl_1\right]}{k\sin^2\theta} = \frac{2\left[\cos(\pi\cos\theta) + 1\right]}{k\sin^2\theta}$$

$$\int_{-l_2}^{+l_2} e^{-ikz\,'\cos\theta}\sin k(l_2 - |z\,'|)dz\,' = \frac{2\left[\cos(kl_2\cos\theta) - \cos kl_2\right]}{k\sin^2\theta} = \frac{2\left[\cos\left(\dfrac{3}{4}\pi\cos\theta\right) + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]}{k\sin^2\theta}$$

$$\int_{-l_3}^{+l_3} e^{-ikz'\cos\theta}\sin k(l_3-|z'|)dz' = \frac{2\left[\cos(kl_3\cos\theta)-\cos kl_3\right]}{k\sin^2\theta} = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{k\sin^2\theta}$$

Pertanto:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{z}\frac{2}{k}\left\{\frac{[\cos(\pi\cos\theta)+1]}{\sin^2\theta} + e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\cos\theta\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]}{\sin^2\theta} + \right.$$
$$\left. + e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\right\}$$

Poiché:

$$\begin{cases} \widehat{x} = \widehat{e}_r\sin\theta\cos\phi + \widehat{e}_\theta\cos\theta\cos\phi - \widehat{e}_\phi\sin\phi \\ \widehat{y} = \widehat{e}_r\sin\theta\sin\phi + \widehat{e}_\theta\cos\theta\sin\phi + \widehat{e}_\phi\cos\phi \\ \widehat{z} = \widehat{e}_r\cos\theta - \widehat{e}_\theta\sin\theta \end{cases}$$

si ha:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{e}_r\frac{2}{k}\cos\theta\left\{\frac{[\cos(\pi\cos\theta)+1]}{\sin^2\theta} + e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\cos\theta\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]}{\sin^2\theta} + \right.$$
$$\left. + e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\right\} -$$
$$-\widehat{e}_\theta\frac{2}{k}\sin\theta\left\{\frac{[\cos(\pi\cos\theta)+1]}{\sin^2\theta} + e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\cos\theta\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]}{\sin^2\theta} + \right.$$
$$\left. + e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\right\}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(|N_\theta|^2+|N_\phi|^2\right)\widehat{e}_r$$

Si ha:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{1}{2\pi r}\right)^2\left|\frac{[\cos(\pi\cos\theta)+1]}{\sin\theta} + e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\cos\theta\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]}{\sin\theta} + \right.$$
$$\left. + e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right|^2$$

ossia:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{2\pi r} \right)^2 \left\{ \left[\frac{[\cos(\pi \cos\theta) + 1]}{\sin\theta} + \cos\left(kd \sin\theta \sin\phi\right) \frac{\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi \cos\theta \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \right]}{\sin\theta} + \right. \right.$$

$$\left. + \cos\left(2kd \sin\theta \sin\phi\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta \right)}{\sin\theta} \right]^2 +$$

$$\left. + \left[\sin\left(kd \sin\theta \sin\phi\right) \frac{\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi \cos\theta \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \right]}{\sin\theta} + \sin\left(2kd \sin\theta \sin\phi\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta \right)}{\sin\theta} \right]^2 \right\}$$

09-26) Esercizio n. 2 del 28/9/2009

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = 90^0$. Si assuma $d = \dfrac{\lambda}{4}$.

———————

Per $\theta = 90^0$ risulta:

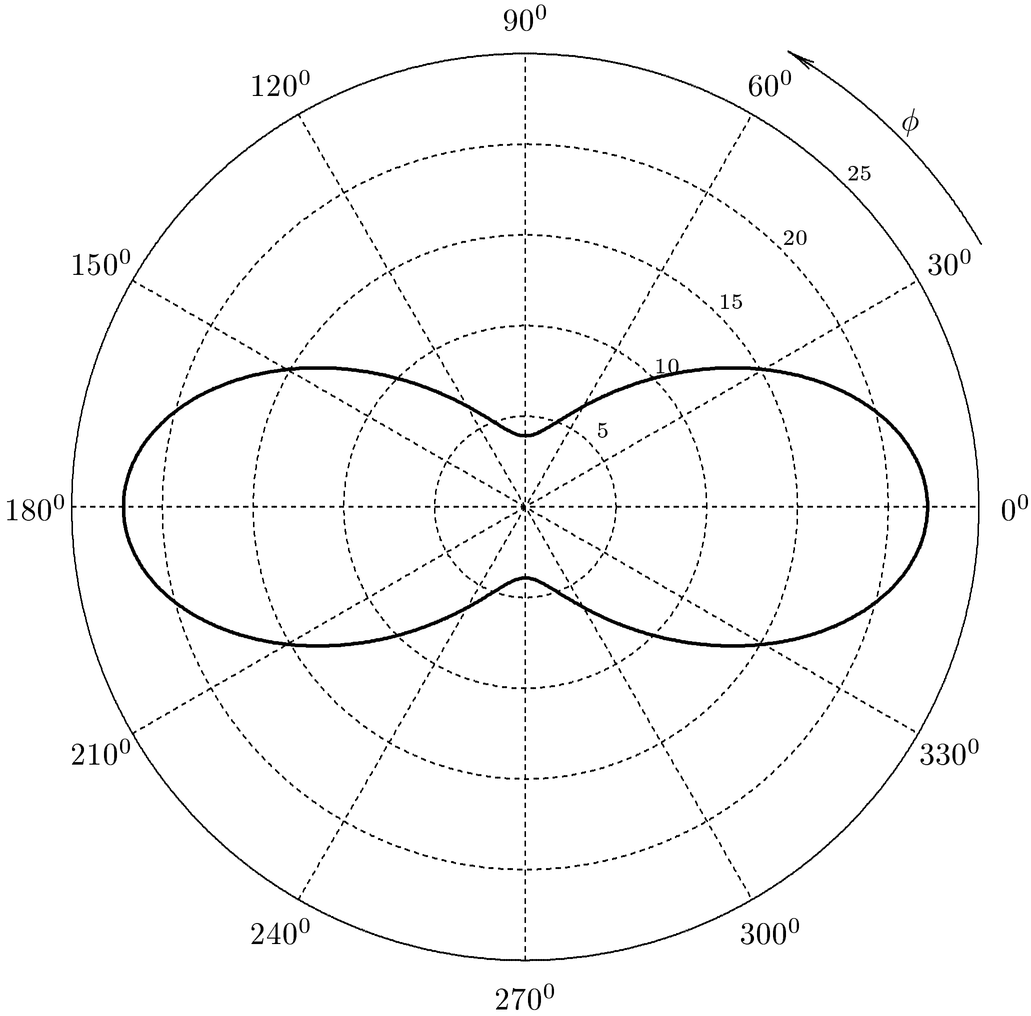
$$\langle \vec{S} \rangle_{(\theta=90^0)} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{2\pi r} \right)^2 \left\{ \left[2 + \cos\left(kd \sin\phi\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cos\left(2kd \sin\phi\right) \right]^2 + \right.$$
$$\left. + \left[\sin\left(kd \sin\phi\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(2kd \sin\phi\right) \right]^2 \right\}$$

Per $d = \dfrac{\lambda}{4} \Longrightarrow kd = \pi/2$:

$$\langle \vec{S} \rangle_{(\theta=90^0)} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{2\pi r} \right)^2 \left\{ \left[2 + \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin\phi\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\pi \sin\phi\right) \right]^2 + \right.$$
$$\left. + \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} \sin\phi\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(\pi \sin\phi\right) \right]^2 \right\}$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\phi) = \left\{ \left[2 + \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin\phi\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\pi \sin\phi\right) \right]^2 + \right.$$
$$\left. + \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} \sin\phi\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(\pi \sin\phi\right) \right]^2 \right\}$$



90^0
120^0
60^0
ϕ
25
20
150^0
30^0
15
10
5
180^0
0^0
210^0
330^0
240^0
300^0
270^0

09-27) Esercizio n. 3 del 28/9/2009

Un'onda elettromagnetica piana si propaga in aria lungo l'asse z di un sistema di riferimento. Le ampiezze complesse delle componenti del campo elettrico sono:

$$E_{0x} = (2 - 3i) \quad \text{e} \quad E_{0y} = (1 - 2i)$$

Calcolare la differenza di fase fra le due componenti e, quindi, lo stato di polarizzazione dell'onda.

———————

Indichiamo con E_x ed E_y le due componenti complesse ortogonali sul piano trasversale della guida. Esse si possono cosí esprimere:

$$E_x = a_1 e^{-i\delta_x} e^{-i\phi}$$

$$E_y = b_1 e^{-i\delta_y} e^{-i\phi}$$

essendo:
1) a_1 il modulo della componente E_x
2) b_1 il modulo della componente E_y
3) $\phi = \omega t - \beta z$
4) δ_x la fase costante della componente E_x
5) δ_y la fase costante della componente E_y

Dai dati del problema si ha:

$$a_1 = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \simeq 3.6 \ V/m$$

$$b_1 = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \simeq 2.236 \ V/m$$

Si ha, allora:

$$E_{0x} = 2 - 3i = 3.6 e^{-i\delta_x} = 3.6 \cos\delta_x - i3.6 \sin\delta_x$$

$$E_{0y} = 1 - 2i = 2.236 e^{-i\delta_y} = 2.236 \cos\delta_y - i2.236 \sin\delta_y$$

$$\sin\delta_x = \frac{\Im(E_{0x})}{a_1} = \frac{3}{3.6} = 0.833$$

$$\cos\delta_x = \frac{\Re(E_{0x})}{a_1} = \frac{2}{3.6} = 0.555$$

$$\sin\delta_y = \frac{\Im(E_{0y})}{b_1} = \frac{2}{2.236} = 0.894$$

$$\cos \delta_y = \frac{\Re(E_{0y})}{b_1} = \frac{1}{2.236} = 0.447$$

Sia $\delta = \delta_y - \delta_x$ la differenza di fase fra le due componenti ortogonali. si ha:

$$\sin \delta = \sin \delta_y \cos \delta_x - \sin \delta_x \cos \delta_y = 0.894 \cdot 0.555 - 0.833 \cdot 0.447 = +0.123819$$

$$\cos \delta = \cos \delta_y \cos \delta_x + \sin \delta_y \sin \delta_x = 0.447 \cdot 0.555 + 0.894 \cdot 0.833 = +0.9928$$

Essendo $\sin \delta > 0$ e $\cos \delta > 0$, l'angolo δ giace nel primo quadrante e risulta:

$$\delta = \arcsin(0.123819) = \underline{\underline{7^0.11}}$$

Dalla teoria della polarizzazione sappiamo che:

$$\sin \delta \begin{cases} < 0 \text{ l'onda é polarizzata levogira} \\ \\ > 0 \text{ l'onda é polarizzata destrogira} \end{cases}$$

Nel nostro caso, quindi, l'onda é polarizzata ellitticamente destrogira.

09-28) Esercizio n. 4 del 28/9/2009

Un'onda elettromagnetica piana si propaga nel rame ($\epsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 5.7 \cdot 10^7\ S/m$). Calcolare la costante di propagazione β, il coefficiente di attenuazione α e la profonditá di penetrazione δ alle seguenti frequenze: 1 KHz, 1 MHz, 1 GHz.

———————

a) $\nu = 1\ KHz$

La costante di propagazione in aria é:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} = \underline{\underline{2.094395 \cdot 10^{-5}\ (rad/m)}}$$

Calcoliamo il rapporto $\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}$. Si ha:

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{5.7 \cdot 10^7}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2\pi \cdot 10^3} \simeq 1.0246 \cdot 10^{15} \Longrightarrow \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} \simeq 1.05 \cdot 10^{30} >> 0$$

Segue:

$$\beta = \alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5.7 \cdot 10^7}{2}} = \underline{\underline{474.37\ m^{-1}}}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \simeq \underline{\underline{2.1 \cdot 10^{-3}\ m = 2.1\ mm}}$$

b) $\nu = 1\ MHz$

La costante di propagazione in aria é:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} = \underline{\underline{2.094395 \cdot 10^{-2}\ (rad/m)}}$$

Calcoliamo il rapporto $\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}$. Si ha:

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{5.7 \cdot 10^7}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2\pi \cdot 10^6} \simeq 1.0246 \cdot 10^{12} \Longrightarrow \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} \simeq 1.05 \cdot 10^{24} >> 0$$

Segue:

$$\beta = \alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5.7 \cdot 10^7}{2}} \simeq \underline{\underline{15000\ m^{-1}}}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \simeq \underline{\underline{6.7 \cdot 10^{-5}\ m = 67\ \mu m}}$$

c) $\nu = 1\ GHz$

La costante di propagazione in aria é:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} = \underline{\underline{20.94395\ (rad/m)}}$$

Calcoliamo il rapporto $\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}$. Si ha:

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{5.7 \cdot 10^7}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2\pi \cdot 10^9} \simeq 1.0246 \cdot 10^9 \Longrightarrow \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} \simeq 1.05 \cdot 10^{18} >> 0$$

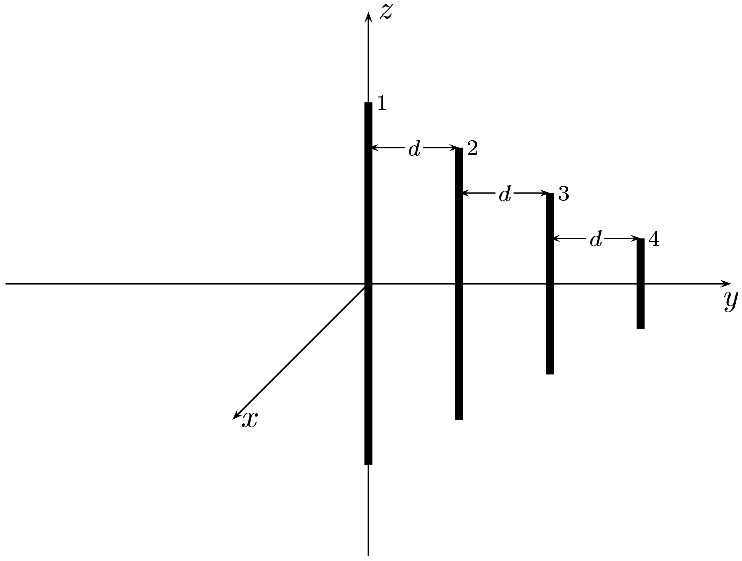
Segue:

$$\beta = \alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5.7 \cdot 10^7}{2}} \simeq \underline{\underline{474370\ m^{-1}}}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \simeq \underline{\underline{2.1 \cdot 10^{-6}\ m = 2.1\ \mu m}}$$

09-29) Esercizio n. 1 del 23/10/2009

Sia dato un sistema uniforme di antenne in fase costituito da quattro antenne parallele di lunghezze diverse, sistemate come in figura. L'antenna 1 é lunga λ, l'antenna 2 é lunga $\frac{3}{4}\lambda$, l'antenna 3 é lunga $\frac{\lambda}{2}$, l'antenna 4 é lunga $\frac{\lambda}{4}$. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato.



Cominciamo con il calcolare la quantitá kl.
Per l'antenna 1, $2l_1 = \lambda$:

$$kl_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2} = \pi$$

Per l'antenna 2, $2l_2 = \frac{3}{4}\lambda$:

$$kl_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{3}{8}\lambda = \frac{3}{4}\pi$$

Per l'antenna 3, $2l_3 = \frac{\lambda}{2}$:

$$kl_3 = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Per l'antenna 4, $2l_4 = \frac{\lambda}{4}$:

$$kl_4 = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4}$$

Le densitá di corrente sull'antenna 1, sull'antenna 2, sull'antenna 3 e sull'antenna 4 sono:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{z}A_1\delta(x)\delta(y)\sin k(l_1-|z|) & -l_1 \le z \le +l_1 \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{z}A_2\delta(x)\delta(y-d)\sin k(l_2-|z|) & -l_2 \le z \le +l_2 \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{z}A_3\delta(x)\delta(y-2d)\sin k(l_3-|z|) & -l_3 \le z \le +l_3 \\ \vec{J}^{(4)} = \widehat{z}A_3\delta(x)\delta(y-3d)\sin k(l_4-|z|) & -l_4 \le z \le +l_4 \end{cases}$$

Posto $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$ per la uniformitá del sistema di antenne, la densitá di corrente risultante é la somma delle quattro:

$$\begin{aligned} \vec{J} =& \widehat{z}\delta(x)\delta(y)\sin k(l_1-|z|) + \widehat{z}\delta(x)\delta(y-d)\sin k(l_2-|z|) + \\ &+ \widehat{z}\delta(x)\delta(y-2d)\sin k(l_3-|z|) + \widehat{z}\delta(x)\delta(y-3d)\sin k(l_4-|z|) \end{aligned}$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta,\phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r\cdot\vec{r}\,'}\vec{J}(\vec{r}\,')d^3r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x}\sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r\cdot\vec{r}\,' = x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} &\vec{N}(\theta,\phi) = \\ &= \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi+y\,'\sin\theta\sin\phi+z\,'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,')\sin k(l_1-|z\,'|)dx\,'dy\,'dz\,'+ \\ &+\int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi+y\,'\sin\theta\sin\phi+z\,'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,'-d)\sin k(l_2-|z\,'|)dx\,'dy\,'dz\,'+ \\ &+\int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi+y\,'\sin\theta\sin\phi+z\,'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,'-2d)\sin k(l_3-|z\,'|)dx\,'dy\,'dz\,'+ \\ &+\int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi+y\,'\sin\theta\sin\phi+z\,'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,'-3d)\sin k(l_4-|z\,'|)dx\,'dy\,'dz\,' \end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned} \vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{z}\int_{-l_1}^{+l_1} e^{-ikz\,'\cos\theta}\sin k(l_1-|z\,'|)dz\,'+ \\ &+\widehat{z}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l_2}^{+l_2} e^{-ikz\,'\cos\theta}\sin k(l_2-|z\,'|)dz\,'+ \\ &+\widehat{z}e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l_3}^{+l_3} e^{-ikz\,'\cos\theta}\sin k(l_3-|z\,'|)dz\,'+ \\ &+\widehat{z}e^{-3ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l_4}^{+l_4} e^{-ikz\,'\cos\theta}\sin k(l_4-|z\,'|)dz\,' \end{aligned}$$

Risulta:

$$\int_{-l_1}^{+l_1} e^{-ikz'\cos\theta}\sin k(l_1-|z'|)dz' = \frac{2\left[\cos(kl_1\cos\theta)-\cos kl_1\right]}{k\sin^2\theta} = \frac{2\left[\cos(\pi\cos\theta)+1\right]}{k\sin^2\theta}$$

$$\int_{-l_2}^{+l_2} e^{-ikz'\cos\theta}\sin k(l_2-|z'|)dz' = \frac{2\left[\cos(kl_2\cos\theta)-\cos kl_2\right]}{k\sin^2\theta} = \frac{2\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\cos\theta\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]}{k\sin^2\theta}$$

$$\int_{-l_3}^{+l_3} e^{-ikz'\cos\theta}\sin k(l_3-|z'|)dz' = \frac{2\left[\cos(kl_3\cos\theta)-\cos kl_3\right]}{k\sin^2\theta} = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{k\sin^2\theta}$$

$$\int_{-l_4}^{+l_4} e^{-ikz'\cos\theta}\sin k(l_4-|z'|)dz' = \frac{2\left[\cos(kl_4\cos\theta)-\cos kl_4\right]}{k\sin^2\theta} = \frac{2\left[\cos(\pi\cos\theta)+1\right]}{k\sin^2\theta}$$

Pertanto:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{z}\frac{2}{k}\left\{\frac{\left[\cos(\pi\cos\theta)+1\right]}{\sin^2\theta} + e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\cos\theta\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]}{\sin^2\theta} + \right.$$
$$\left. + e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + e^{-3ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\cos\theta\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]}{\sin^2\theta}\right\}$$

Poiché:

$$\begin{cases} \widehat{x} = \widehat{e}_r\sin\theta\cos\phi + \widehat{e}_\theta\cos\theta\cos\phi - \widehat{e}_\phi\sin\phi \\ \widehat{y} = \widehat{e}_r\sin\theta\sin\phi + \widehat{e}_\theta\cos\theta\sin\phi + \widehat{e}_\phi\cos\phi \\ \widehat{z} = \widehat{e}_r\cos\theta - \widehat{e}_\theta\sin\theta \end{cases}$$

si ha:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{e}_r\frac{2}{k}\cos\theta\left\{\frac{\left[\cos(\pi\cos\theta)+1\right]}{\sin^2\theta} + e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\cos\theta\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]}{\sin^2\theta} + \right.$$
$$\left. + e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + e^{-3ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\cos\theta\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]}{\sin^2\theta}\right\} -$$
$$-\widehat{e}_\theta\frac{2}{k}\sin\theta\left\{\frac{\left[\cos(\pi\cos\theta)+1\right]}{\sin^2\theta} + e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\cos\theta\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]}{\sin^2\theta} + \right.$$
$$\left. + e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + e^{-3ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\cos\theta\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]}{\sin^2\theta}\right\}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r} \right)^2 \left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2 \right) \widehat{e}_r$$

Si ha:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{2\pi r} \right)^2 \left| \frac{[\cos(\pi \cos\theta) + 1]}{\sin\theta} + e^{-ikd\sin\theta\sin\phi} \frac{\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\cos\theta \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \right]}{\sin\theta} + \right.$$

$$\left. + e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta \right)}{\sin\theta} + e^{-3ikd\sin\theta\sin\phi} \frac{\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\cos\theta \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \right]}{\sin\theta} \right|^2 \widehat{e}_r$$

09-30) Esercizio n. 2 del 23/10/2009

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = 90^0$. Si assuma $d = \dfrac{\lambda}{4}$.

Per $\theta = 90^0$ risulta:

$$\langle \vec{S} \rangle_{(\theta=90^0)} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{2\pi r} \right)^2 \left| 2 + e^{-ikd\sin\phi} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + e^{-2ikd\sin\phi} + e^{-3ikd\sin\phi} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right|^2$$

Per $d = \dfrac{\lambda}{4} \Longrightarrow kd = \pi/2$:

$$\langle \vec{S} \rangle_{(\theta=90^0)} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{2\pi r} \right)^2 \left| 2 + e^{-i\frac{\pi}{2}\sin\phi} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + e^{-i\pi\sin\phi} + e^{-i\frac{3\pi}{2}\sin\phi} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{2\pi r} \right)^2 \left\{ 2 + e^{-i\frac{\pi}{2}\sin\phi} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + e^{-i\pi\sin\phi} + e^{-i\frac{3\pi}{2}\sin\phi} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ 2 + e^{+i\frac{\pi}{2}\sin\phi} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + e^{+i\pi\sin\phi} + e^{+i\frac{3\pi}{2}\sin\phi} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Il prodotto fra le parentesi graffe risulta:

$$\left\{ 4 + 2e^{+i\frac{\pi}{2}\sin\phi} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 2e^{+i\pi\sin\phi} + 2e^{+i\frac{3\pi}{2}\sin\phi} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \right.$$

$$+ 2e^{-i\frac{\pi}{2}\sin\phi} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + e^{+i\frac{\pi}{2}\sin\phi} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} e^{+i\pi\sin\phi} +$$

$$+ 2e^{-i\pi\sin\phi} + e^{-i\frac{\pi}{2}\sin\phi} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 1 + e^{+i\frac{\pi}{2}\sin\phi} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) +$$

$$\left. + 2e^{-i\frac{3\pi}{2}\sin\phi} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} e^{-i\pi\sin\phi} + e^{-i\frac{\pi}{2}\sin\phi} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right\}$$

Si ha:

$$4 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \underline{\underline{8}}$$

$$2e^{+i\frac{\pi}{2}\sin\phi}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+e^{+i\frac{\pi}{2}\sin\phi}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+e^{+i\frac{\pi}{2}\sin\phi}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2e^{+i\frac{\pi}{2}\sin\phi}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$2e^{-i\frac{\pi}{2}\sin\phi}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+e^{-i\frac{\pi}{2}\sin\phi}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+e^{-i\frac{\pi}{2}\sin\phi}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2e^{-i\frac{\pi}{2}\sin\phi}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

da cui:

$$2e^{+i\frac{\pi}{2}\sin\phi}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2e^{-i\frac{\pi}{2}\sin\phi}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\underline{\underline{4\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}}$$

Ancora:

$$2e^{+i\pi\sin\phi}+\frac{1}{2}e^{+i\pi\sin\phi}+2e^{-i\pi\sin\phi}+\frac{1}{2}e^{-i\pi\sin\phi}=\underline{\underline{5\cos\left(\pi\sin\phi\right)}}$$

Infine:

$$2e^{+i\frac{3\pi}{2}\sin\phi}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2e^{-i\frac{3\pi}{2}\sin\phi}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\underline{\underline{4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}\sin\phi\right)}}$$

Pertanto il prodotto fra le quantitá dentro le parentesi graffe si puó scrivere:

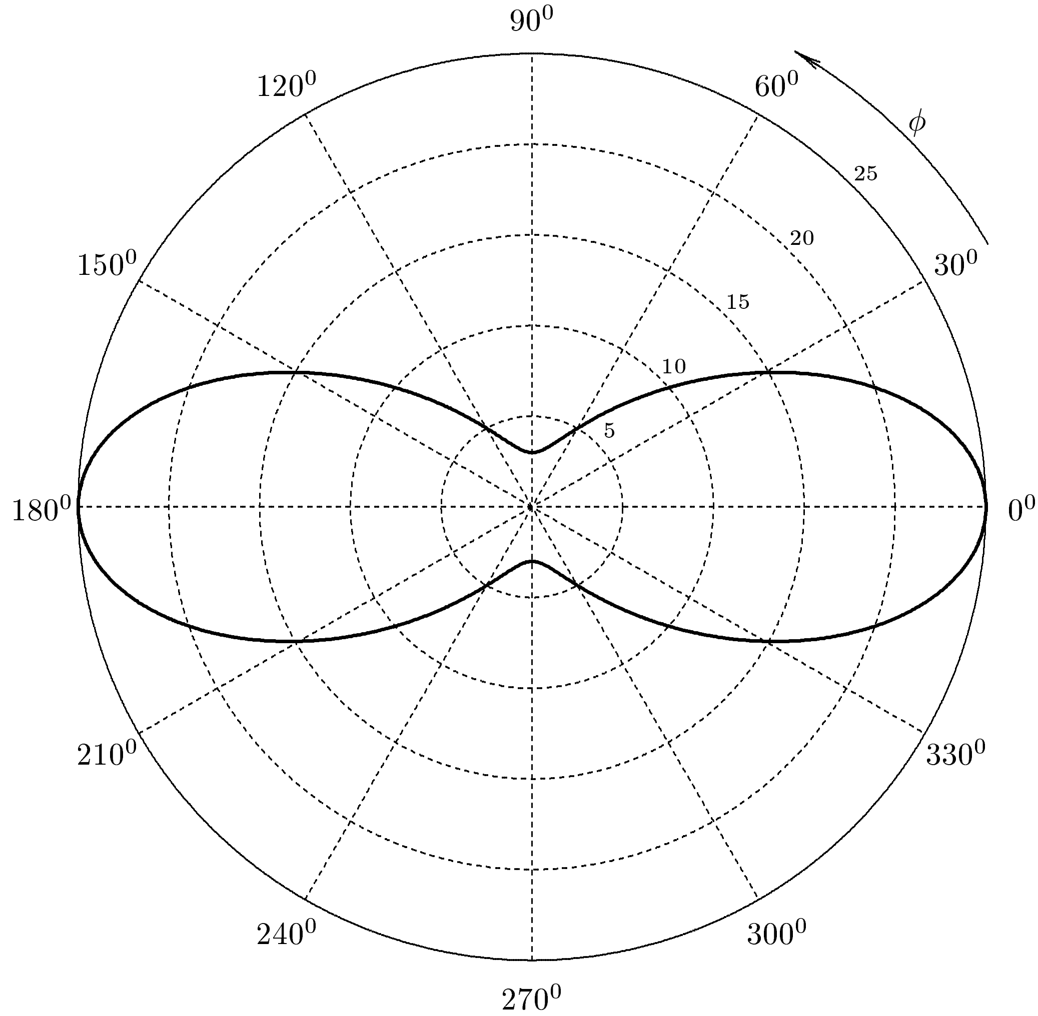
$$8+4\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)+5\cos\left(\pi\sin\phi\right)+4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}\sin\phi\right)$$

Ne segue:

$$\langle\vec{S}\rangle_{(\theta=90^0)}=\frac{1}{2}Z\left(\frac{1}{2\pi r}\right)^2\left[8+4\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)+\right.$$
$$\left.+\,5\cos\left(\pi\sin\phi\right)+4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}\sin\phi\right)\right]$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\phi)=\left[8+4\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)+5\cos\left(\pi\sin\phi\right)+4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}\sin\phi\right)\right]$$


90^0
120^0
60^0
ϕ
25
20
150^0
30^0
15
10
5
180^0
0^0
210^0
330^0
240^0
300^0
270^0

09-31) Esercizio n. 3 del 23/10/2009

Le componenti del campo elettrico di un'onda elettromagnetica piana, viaggiante in aria, hanno le seguenti espressioni:

$$E_x = 2\cos(\omega t - \beta z + \pi/6); \quad E_y = 5\cos(\omega t - \beta z + \pi/3)$$

Scrivere l'equazione dell'ellisse di polarizzazione. Graficare l'ellisse di polarizzazione sul piano $z = 0$, indicando il verso di rotazione del vettore $\vec{E}$.

———————

Sia $\delta = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$. Ne segue che $\sin\delta > 0$ e, quindi, la polarizzazione é destrogira. L'equazione dell'ellisse di polarizzazione é, allora:

$$\frac{E_x^2}{4} + \frac{E_y^2}{25} + \frac{E_x E_y}{10} = \frac{1}{4}$$

Le espressioni delle componenti dei campi, nel piano $z = 0$, si possono scrivere:

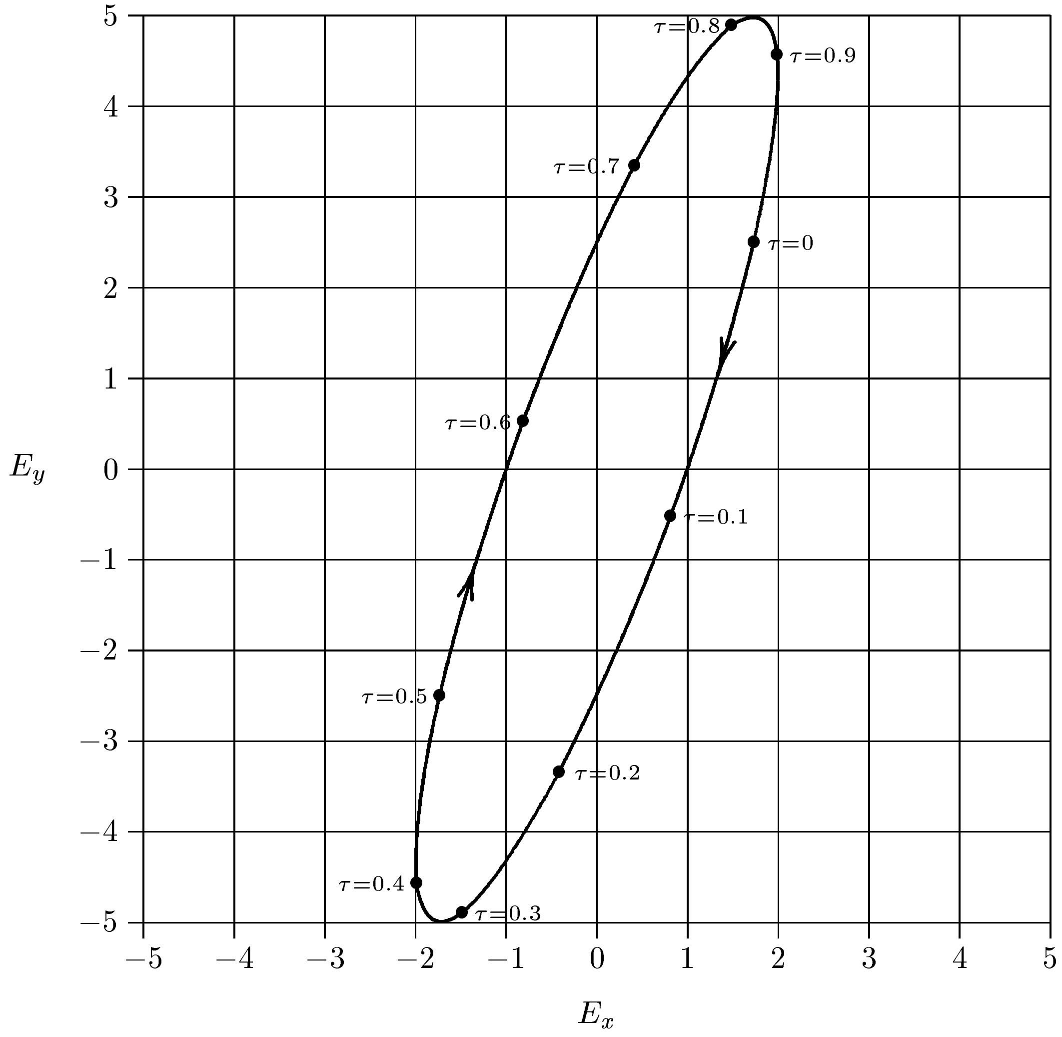
$$E_x = 2\cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \pi/6\right); \quad E_y = 5\cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \pi/3\right)$$

Posto $\tau = \dfrac{t}{T}$, si ha:

$$E_x = 2\cos(2\pi\tau + \pi/6); \quad E_y = 5\cos(2\pi\tau + \pi/3)$$

essendo $0 \le \tau \le 1$.

τ	E_x	E_y	τ	E_x	E_y	τ	E_x	E_y
0	+1.732	+2.5	0.1	+0.813	−0.523	0.2	−0.416	−3.345
0.3	−1.486	−4.890	0.4	−1.989	−4.567	0.5	−1.732	−2.5
0.6	−0.813	+0.523	0.7	+0.416	+3.345	0.8	+1.486	+4.8980
0.9	+1.989	+4.567	1	+1.732	+2.5			



τ=0.8
τ=0.9
τ=0.7
τ=0
τ=0.6
τ=0.1
τ=0.5
τ=0.2
τ=0.4
τ=0.3
E_y
E_x
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5

09-32) Esercizio n. 4 del 23/10/2009

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 100\ MHz$, viaggiante in aria, incide con un angolo $\theta_0 = 30^0$ su un plasma indefinito i cui parametri sono:

$$N = 10^{14}\ m^{-3}, \quad \omega_{eff} = 2\pi \cdot 10^8\ (rad/s)$$

Calcolare i coefficienti di riflessione $R_\perp$ ed $R_\parallel$.

Si ha:

$$\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} = \frac{10^{14} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}} \simeq 3.1738 \cdot 10^{17}\ (rad/s)^2$$

ossia:

$$\omega_p \simeq 5.63 \cdot 10^8\ (rad/s) \Longrightarrow \nu_p = 8.96 \cdot 10^7\ Hz = 89.6\ MHz$$

Valutiamo i parametri del plasma ϵ_r e σ; si ha:

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} = 1 - \frac{3.1738 \cdot 10^{17}}{4\pi^2 \cdot 10^{16} + 4\pi^2 \cdot 10^{16}} \simeq 1 - 0.402 = 0.598$$

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \omega_{eff} \omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} = \frac{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2\pi \cdot 10^8 \cdot 3.1738 \cdot 10^{17}}{4\pi^2 \cdot 10^{16} + 4\pi^2 \cdot 10^{16}} \simeq 2.2362 \cdot 10^{-3}\ (S/m)$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{2.2362 \cdot 10^{-3}}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 0.598 \cdot 2\pi \cdot 10^8} = 0.672 \Longrightarrow \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 \simeq 0.452$$

Valutiamo le costanti β_2 e α_2 sia con le formule esatte che con quelle approssimate nell'ipotesi $\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 << 1$:

$$\beta_2 = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}\right]} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{0.598}{2}\left[1 + \sqrt{1 + (0.452)^2}\right]} \simeq 0.792\frac{\omega}{c}\ (rad/m)$$

$$\alpha_2 = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} - 1\right]} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{0.598}{2}\left[\sqrt{1 + (0.452)^2} - 1\right]} \simeq 0.171\frac{\omega}{c}\ (m^{-1})$$

$$\beta_{2_{approx}} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r} = \frac{\omega}{c}\sqrt{0.598} \simeq 0.773\frac{\omega}{c}\ (rad/m)$$

$$\alpha_{2_{approx}} = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} = \frac{2.2362 \cdot 10^{-3}}{2}\sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 0.598}} \simeq 0.545\ (m^{-1}) = 0.260\frac{\omega}{c}\ (m^{-1})$$

Utilizzeremo, quindi, le formule esatte.
Si ricorda, inoltre, che:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c}$$

Si ha:

$$q^2(\theta_0) = \frac{1}{2}\left[\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2\theta_0 + \sqrt{4\alpha_2^2\beta_2^2 + \left(\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2\sin^2\theta_0\right)^2}\right]$$

$$p^2\left(\theta_0\right) = \frac{1}{2}\left[-\beta_2^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 \sin^2\theta_0 + \sqrt{4\alpha_2^2\beta_2^2 + \left(\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2\sin^2\theta_0\right)^2}\right]$$

ossia:

$$\begin{aligned} q^2(30^0) =& \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left\{(0.792)^2 - (0.171)^2 - (0.5)^2 + \right.\\ &\left. + \sqrt{4\cdot(0.171)^2\cdot(0.792)^2 + \left[(0.792)^2 - (0.171)^2 - (0.5)^2\right]^2}\right\} \simeq \\ \simeq& \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left[0.348 + \sqrt{0.073 + 0.121}\right] \simeq \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}0.78845 = \frac{\omega^2}{c^2}0.3942 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^2(30^0) =& \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left\{-(0.792)^2 + (0.171)^2 + (0.5)^2 + \right.\\ &\left. + \sqrt{4\cdot(0.171)^2\cdot(0.792)^2 + \left[(0.792)^2 - (0.171)^2 - (0.5)^2\right]^2}\right\} \simeq \\ \simeq& \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left[-0.348 + \sqrt{0.073 + 0.121}\right] \simeq \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}0.09245 = \frac{\omega^2}{c^2}0.046225 \end{aligned}$$

Ne segue:

$$q(30^0) \simeq \frac{\omega}{c}0.62785; \quad p(30^0) \simeq \frac{\omega}{c}0.215$$

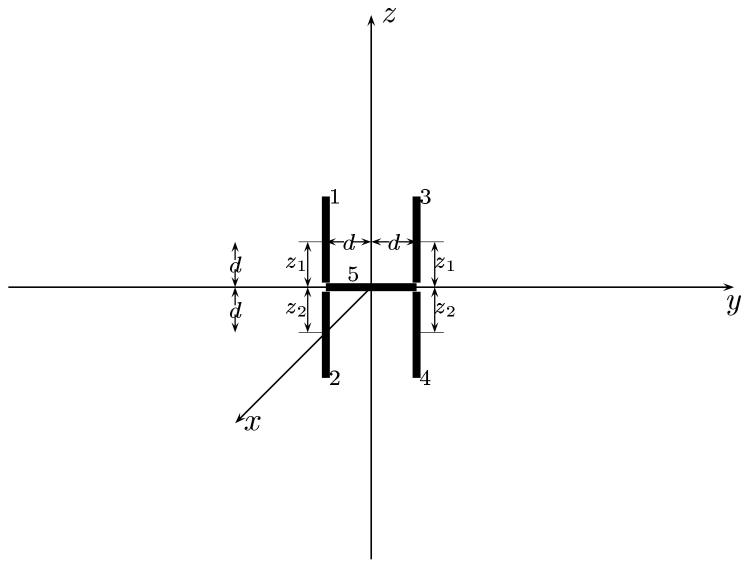
Poiché $\mu_1 \simeq \mu_2$ i coefficienti di riflessione sono:

$$\begin{aligned} R_\perp = \rho_\perp^2 =& \frac{\left(q - \beta_1\cos\theta_0\right)^2 + p^2}{\left(q + \beta_1\cos\theta_0\right)^2 + p^2} = \frac{\left(0.62785 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0.046225}{\left(0.62785 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0.046225} \simeq \frac{0.10295}{2.27789} \simeq \\ \simeq& \underline{\underline{0.04517 \simeq 4.5\%}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_\parallel = \rho_\parallel^2 =& \rho_\perp^2 \frac{\left(q - \beta_1\sin\theta_0\tan\theta_0\right)^2 + p^2}{\left(q + \beta_1\sin\theta_0\tan\theta_0\right)^2 + p^2} = 0.04517\frac{\left(0.62785 - 0.5\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 0.046225}{\left(0.62785 + 0.5\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 0.046225} \simeq \\ \simeq& 0.04517\cdot\frac{0.16126}{0.88624} \simeq \underline{\underline{0.008219 \simeq 0.082\%}} \end{aligned}$$

09-33) Esercizio n. 1 del 27/11/2009

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato.



———————

Le densitá di corrente sull'antenna 1, sull'antenna 2, sull'antenna 3, sull'antenna 4 e sull'antenna 5 sono rispettivamente:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{z} A_1 \delta(x)\delta(y+d)\cos k(z-z_1) & z_1 - l \le z \le z_1 + l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{z} A_2 \delta(x)\delta(y+d)\cos k(z-z_2) & z_2 - l \le z \le z_2 + l \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{z} A_3 \delta(x)\delta(y-d)\cos k(z-z_1) & z_1 - l \le z \le z_1 + l \\ \vec{J}^{(4)} = \widehat{z} A_4 \delta(x)\delta(y-d)\cos k(z-z_2) & z_2 - l \le z \le z_2 + l \\ \vec{J}^{(5)} = \widehat{y} A_5 \delta(x)\delta(z)\cos ky & -l \le y \le +l \end{cases}$$

Posto $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$ per la uniformitá del sistema di antenne, la densitá di corrente risultante é la somma delle cinque:

$$\begin{aligned} \vec{J} =& \widehat{z}\delta(x)\delta(y+d)\cos k(z-z_1) + \widehat{z}\delta(x)\delta(y+d)\cos k(z-z_2) + \\ &+ \widehat{z}\delta(x)\delta(y-d)\cos k(z-z_1) + \widehat{z}\delta(x)\delta(y-d)\cos k(z-z_2) \\ &+ \widehat{y} A_5 \delta(x)\delta(z)\cos ky \end{aligned}$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta,\phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r\cdot\vec{r}\,'}\vec{J}(\vec{r}\,')d^3r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x}\sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r\cdot\vec{r}\,' = x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi)=&\int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi+y\,'\sin\theta\sin\phi+z\,'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,'+d)\cos k(z\,'-z_1)dx\,'dy\,'dz\,'+\\ &+\int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi+y\,'\sin\theta\sin\phi+z\,'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,'+d)\cos k(z\,'-z_2)dx\,'dy\,'dz\,'+\\ &+\int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi+y\,'\sin\theta\sin\phi+z\,'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,'-d)\cos k(z\,'-z_1)dx\,'dy\,'dz\,'+\\ &+\int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi+y\,'\sin\theta\sin\phi+z\,'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,'-d)\cos k(z\,'-z_2)dx\,'dy\,'dz\,'+\\ &+\int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi+y\,'\sin\theta\sin\phi+z\,'\cos\theta)}\widehat{y}\delta(x\,')\delta(z\,')\cos ky\,'dx\,'dy\,'dz\,'\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =&\widehat{z}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{z_1-l}^{z_1+l}e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_1)dz\,'+\\ &+\widehat{z}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{z_2-l}^{z_2+l}e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_2)dz\,'+\\ &+\widehat{z}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{z_1-l}^{z_1+l}e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_1)dz\,'+\\ &+\widehat{z}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{z_2-l}^{z_2+l}e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_2)dz\,'+\\ &+\widehat{y}\int_{-l}^{+l}e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi}\cos ky\,'dy\,'\end{aligned}$$

Si ha:

$$\widehat{y}\cdot\widehat{e}_r = \cos\chi = \sin\theta\sin\phi$$

essendo χ l'angolo formato fra l'asse y e la direzione del vettore posizione $\widehat{e}_r$.

Per un'antenna a mezz'onda risulta, quindi:

$$\int_{-l}^{+l}e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi}\cos ky\,'dy\,' = \int_{-l}^{+l}e^{-iky\,'\cos\chi}\cos ky\,'dy\,' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}$$

Valutiamo, ora $\displaystyle\int_{z_1-l}^{z_1+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_1)dz'$. Poniamo $z'-z_1 = u \Longrightarrow dz' = du$. Per $z' = z_1 - l \Longrightarrow u = -l$. Per $z' = z_2 + l \Longrightarrow u = +l$. Si ha, quindi:

$$\int_{z_1-l}^{z_1+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_1)dz' = e^{-ikz_1\cos\theta}\int_{-l}^{+l} e^{-iku\cos\theta}\cos kudu =$$

$$= e^{-ikz_1\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

Analogamente:

$$\int_{z_2-l}^{z_2+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_2)dz' = e^{-ikz_2\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{z}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}e^{-ikz_1\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} +\\ &+\widehat{z}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}e^{-ikz_2\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} +\\ &+\widehat{z}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}e^{-ikz_1\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} +\\ &+\widehat{z}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}e^{-ikz_2\cos\theta}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} +\\ &+\widehat{y}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\end{aligned}$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{y}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} +\\ &+\widehat{z}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\left[e^{-ikz_1\cos\theta}+e^{-ikz_2\cos\theta}\right] +\\ &+\widehat{z}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\left[e^{-ikz_1\cos\theta}+e^{-ikz_2\cos\theta}\right]\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{y}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} +\\ &+\widehat{z}\frac{4}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\left[e^{-ikz_1\cos\theta}+e^{-ikz_2\cos\theta}\right]\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right)\end{aligned}$$

Posto:

$$z_1 = +d \quad e \quad z_2 = -d$$

si ha:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{y}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} + $$
$$+\widehat{z}\frac{8}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\cos(kd\cos\theta)\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right)$$

Poiché:

$$\begin{cases} \widehat{x} = \widehat{e}_r\sin\theta\cos\phi + \widehat{e}_\theta\cos\theta\cos\phi - \widehat{e}_\phi\sin\phi \\ \widehat{y} = \widehat{e}_r\sin\theta\sin\phi + \widehat{e}_\theta\cos\theta\sin\phi + \widehat{e}_\phi\cos\phi \\ \widehat{z} = \widehat{e}_r\cos\theta - \widehat{e}_\theta\sin\theta \end{cases}$$

si ha:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{e}_r\left[\sin\theta\sin\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} + \right.$$
$$\left. +\cos\theta\frac{8}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\cos(kd\cos\theta)\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right)\right] +$$
$$+\widehat{e}_\theta\left[\cos\theta\sin\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} - \right.$$
$$\left. -\sin\theta\frac{8}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\cos(kd\cos\theta)\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right)\right] +$$
$$+\widehat{e}_\phi\left[\cos\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\right]$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2\right)\widehat{e}_r$$

essendo:

$$|N_\theta|^2 = \frac{4}{k^2}\left[\cos\theta\sin\phi\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} - 4\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\cos(kd\cos\theta)\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right)\right]^2$$

$$|N_\phi|^2 = \frac{4}{k^2}\left[\cos\phi\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\right]^2$$

09-34) Esercizio n. 2 del 27/11/2009

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = 90^0$. Si assuma $d = \dfrac{\lambda}{4}$.

——————

Per $\theta = 90^0$ risulta:

$$\langle \vec{S} \rangle_{(\theta=90^0)} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{2\pi r} \right)^2 \left\{ \Big[-4\cos\left(kd\sin\phi\right) \Big]^2 + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} \right]^2 \right\} \widehat{e}_r$$

Per $d = \dfrac{\lambda}{4} \Longrightarrow kd = \dfrac{\pi}{2}$:

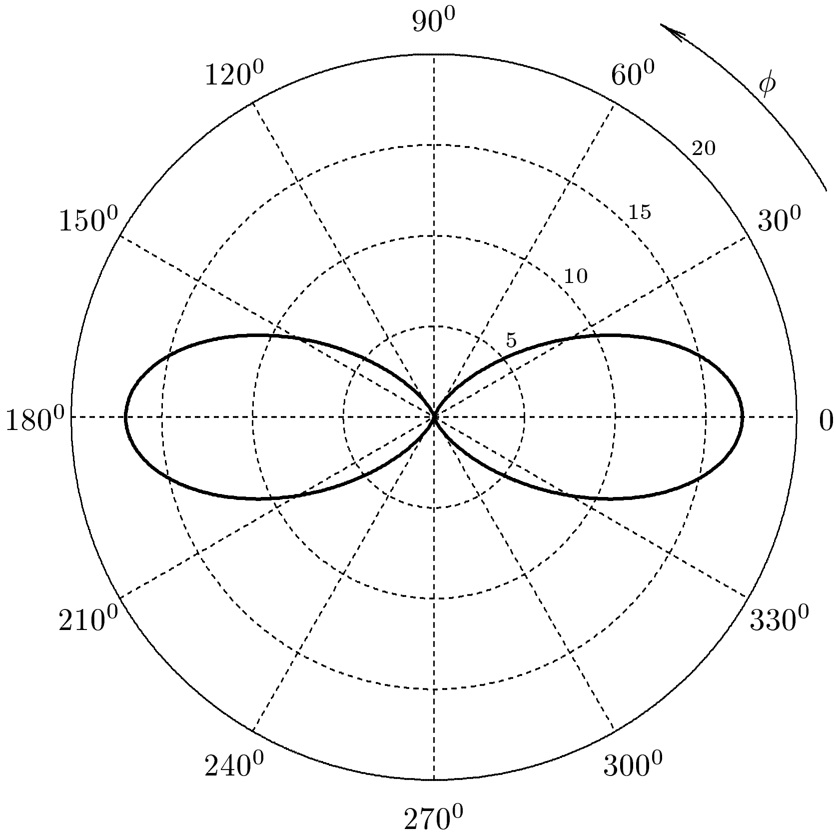
$$\langle \vec{S} \rangle_{(\theta=90^0)} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{2\pi r} \right)^2 \left\{ \Big[-4\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right) \Big]^2 + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} \right]^2 \right\} \widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\phi) = \Big[-4\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right) \Big]^2 + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} \right]^2$$

Prima di fare il grafico é utile ricordare che:

$$\lim_{\phi \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} \right]^2 = 0$$



ϕ	$F(\phi)$	ϕ	$F(\phi)$	ϕ	$F(\phi)$	ϕ	$F(\phi)$
0^0	17	10^0	15.795	20^0	12.645	30^0	8.67
40^0	5.013	50^0	2.377	60^0	0.873	70^0	0.220
80^0	0.028	90^0	0	100^0	0.028	110^0	0.220
120^0	0.873	130^0	2.377	140^0	5.013	150^0	8.67
160^0	12.645	170^0	15.795	180^0	17		

09-35) Esercizio n. 3 del 27/11/2009

Un'onda elettromagnetica piana linearmente polarizzata, di frequenza $\nu = 100\ MHz$, viaggiante in acqua, incide su una superficie di separazione acqua - aria. Graficare il coefficiente di trasmissione al variare dell'angolo di incidenza, nel caso di polarizzazione perpendicolare e parallela al piano di incidenza rispettivamente.

———————

L'onda elettromagnetica passa da un mezzo piú rifrangente (acqua) ad un mezzo meno rifrangente (aria). Per la frequenza di 100 MHz si puó porre:

$$\epsilon_{r_{H_2O}} = \epsilon_{r_1} = 81, \quad \epsilon_{r_{aria}} = \epsilon_{r_2} = 1$$

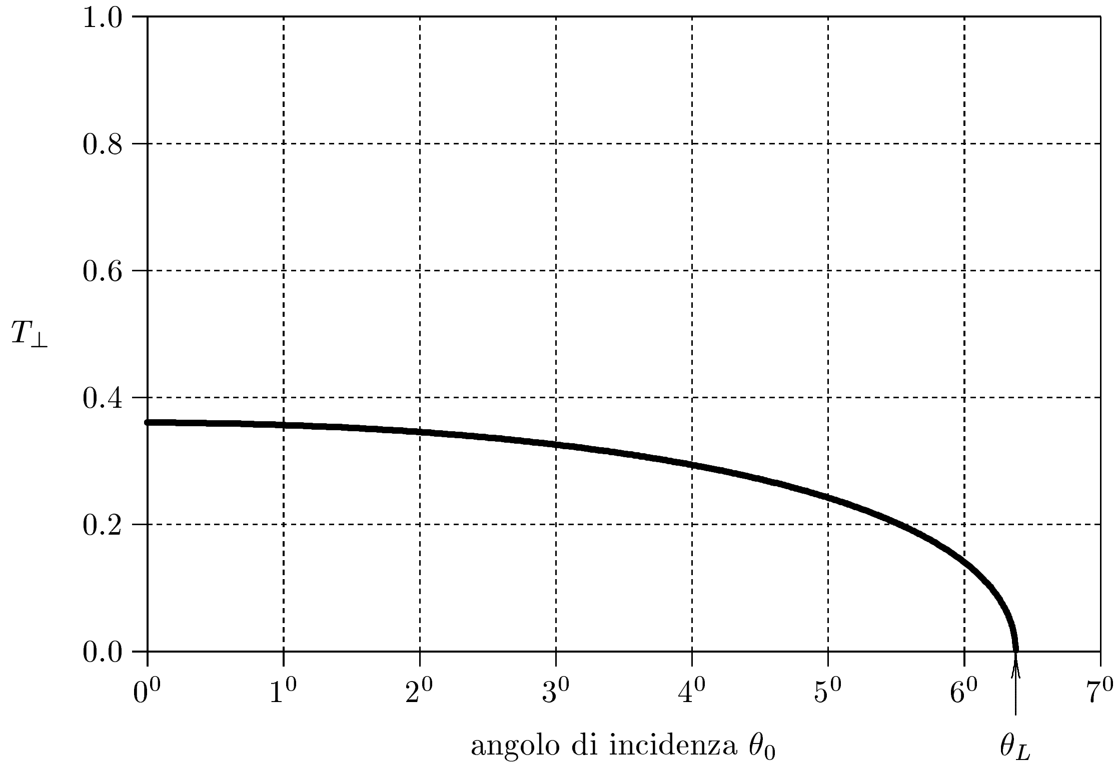
L'angolo limite θ_L é dato da:

$$\theta_L = \arcsin\left(\frac{\sqrt{\epsilon_{r_2}}}{\sqrt{\epsilon_{r_1}}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{9}\right) = 6^0.38$$

Quindi per $\theta_0 > 6^0.38$, l'onda elettromagnetica viene riflessa totalmente. Ci proponiamo, quindi, di graficare il coefficiente di trasmissione nell'intervallo $0 \leq \theta_0 \leq \theta_L$. Si ha:

$$T_\perp = \frac{4\sqrt{\epsilon_{r_1}}\sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1}\sin^2\theta_0}\cos\theta_0}{\left|\sqrt{\epsilon_{r_1}}\cos\theta_0 + \sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1}\sin^2\theta_0}\right|^2}$$

$$T_\parallel = \frac{4\epsilon_{r_2}\sqrt{\epsilon_{r_1}}\sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1}\sin^2\theta_0}\cos\theta_0}{\left|\epsilon_{r_2}\cos\theta_0 + \sqrt{\epsilon_{r_1}}\sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1}\sin^2\theta_0}\right|^2}$$

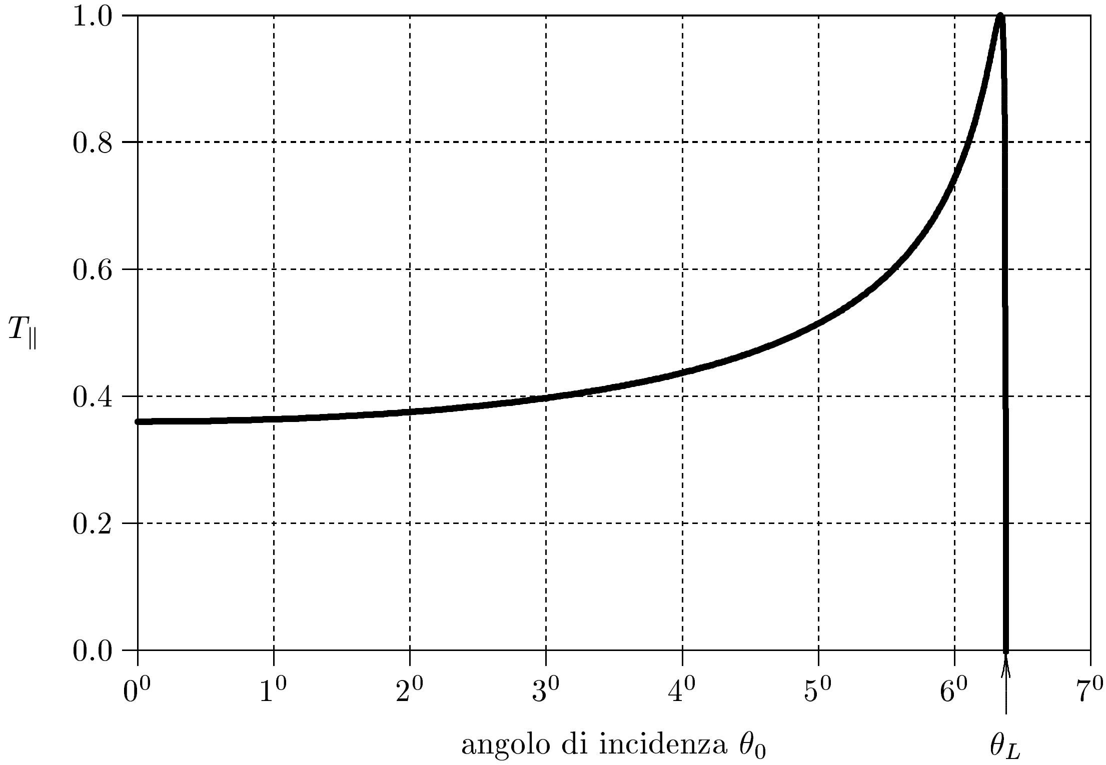


θ_0	$T_\perp$	θ_0	$T_\perp$	θ_0	$T_\perp$	θ_0	$T_\perp$
0^0	0.36	1^0	0.3564	2^0	0.3454	3^0	0.3255
4^0	0.2937	5^0	0.2421	6^0	0.1406	$6^0.38$	0

Per graficare l'andamento del coefficiente di trasmissione per la componente parallela é conveniente calcolare l'angolo di Brewster.

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{\sqrt{\epsilon_{r_2}}}{\sqrt{\epsilon_{r_1}}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{9}\right) = 6^0.34$$

In corrispondenza di esso il coefficiente di trasmissione é 1.



θ_0	$T_{\parallel}$	θ_0	$T_{\parallel}$	θ_0	$T_{\parallel}$	θ_0	$T_{\parallel}$
0^0	0.36	1^0	0.3636	2^0	0.3750	3^0	0.3970
4^0	0.4365	5^0	0.5140	6^0	0.7415	$6^0.34$	1
$6^0.38$	0						

09-36) Esercizio n. 4 del 27/11/2009

Con riferimento al problema precedente, calcolare la distanza dalla superficie di separazione acqua - aria per cui il campo elettrico ortogonale trasmesso (associato all'onda superficiale) é un decimo del valore che ha il modulo del campo elettrico sulla superfice di separazione dalla parte dell'aria. Si supponga l'angolo di incidenza eguale a 20^0 e 45^0.

———————

Per $\theta_0 > \theta_L$ nel secondo mezzo vi sará un'onda superficiale o evanescante.

Il campo elettrico associato a tale onda é:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_2 e^{\beta_1 x + i\alpha z} e^{-i\omega t} \qquad (x < 0)$$

essendo:

$$\alpha = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_0}\sin\theta_0 \qquad (\mu_2 \simeq \mu_1 \simeq \mu_0)$$

la costante di propagazione dell'onda superficiale e

$$\beta_1 = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_0}\sqrt{\sin^2\theta_0 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{\omega}{c}n_1\sqrt{\sin^2\theta_0 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} \qquad (\mu_2 \simeq \mu_1 \simeq \mu_0)$$

il coefficiente di attenuazione in aria.

Deve essere:

$$e^{\beta_1 x^*} = 0.1 \Longrightarrow \beta_1 x^* = \log 0.1 = -2.3 \Longrightarrow \textit{da cui } x^* = -\frac{2.3}{\beta_1}$$

Risulta per $\theta_0 = 20^0$:

$$\beta_1 = \frac{2\pi\cdot 10^8}{3\cdot 10^8}9\sqrt{0.117 - \frac{1}{81}} \simeq 18.85\cdot 0.3235 \simeq 6.098\ rad/m$$

Ne segue:

$$x^* \simeq -0.3772\ m = -37.72\ cm$$

Poiché la lunghezza d'onda competente alla frequenza di 100 MHz é $\lambda_0 = \dfrac{c}{\nu} = 3\ m =$ 300 cm risulta:

$$\underline{\underline{x^* \simeq -0.13\lambda_0}}$$

Risulta per $\theta_0 = 45^0$:

$$\beta_1 = \frac{2\pi\cdot 10^8}{3\cdot 10^8}9\sqrt{0.5 - \frac{1}{81}} \simeq 18.85\cdot 0.6983 \simeq 13.163\ rad/m$$

Ne segue:

$$x^* \simeq -0.1747\ m = -17.47\ cm$$

Poiché la lunghezza d'onda competente alla frequenza di 100 MHz é $\lambda_0 = \dfrac{c}{\nu} = 3\ m =$ 300 cm risulta:

$$\underline{\underline{x^* \simeq -0.058\lambda_0}}$$

Fine Esercizi Campi e.m. - 2009