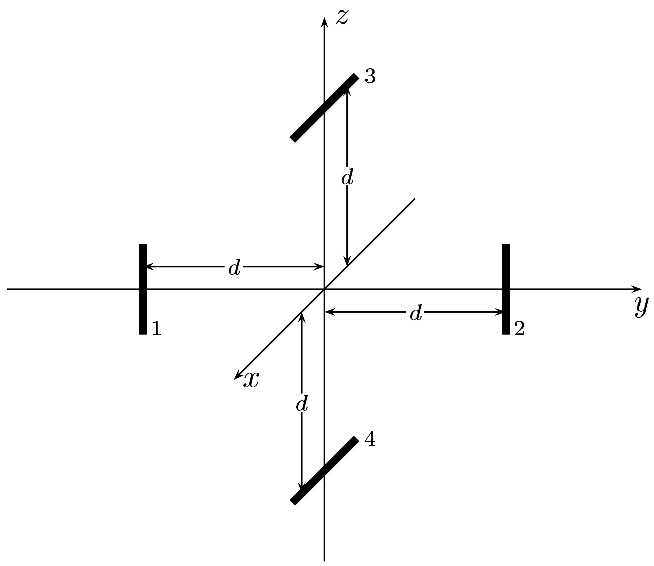
Esercizi svolti di Campi elettromagnetici - Anno 2008

08-1) Esercizio n. 1 del 31/1/2008

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato.



———————————

Le densitá di correnti sull'antenna 1, sull'antenna 2, sull'antenna 3 e sull'antenna 4 rispettivamente sono:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{z} A_1 \delta(x)\delta(y+d)\cos kz & -l \le z \le +l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{z} A_2 \delta(x)\delta(y-d)\cos kz & -l \le z \le +l \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{x} A_3 \delta(y)\delta(z-d)\cos kx & -l \le x \le +l \\ \vec{J}^{(4)} = \widehat{x} A_4 \delta(y)\delta(z+d)\cos kx & -l \le x \le +l \end{cases}$$

Quindi la densitá di corrente risultante nel sistema di antenne é la somma delle quattro:

$$\begin{aligned} \vec{J} =& \widehat{z} A_1 \delta(x)\delta(y+d)\cos kz + \widehat{z} A_2 \delta(x)\delta(y-d)\cos kz + \\ &+ \widehat{x} A_3 \delta(y)\delta(z-d)\cos kx + \widehat{x} A_4 \delta(y)\delta(z+d)\cos kx \end{aligned}$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta,\phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} \vec{J}(\vec{r}\,')d^3r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x}\sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,' = x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\vec{N}(\theta,\phi)=\int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi+y\,'\sin\theta\sin\phi+z\,'\cos\theta)}\widehat{z}A_1\delta(x\,')\delta(y\,'+d)\cos kz\,'dx\,'dy\,'dz\,'+$$
$$+\int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi+y\,'\sin\theta\sin\phi+z\,'\cos\theta)}\widehat{z}A_2\delta(x\,')\delta(y\,'-d)\cos kz\,'dx\,'dy\,'dz\,'+$$
$$+\int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi+y\,'\sin\theta\sin\phi+z\,'\cos\theta)}\widehat{x}A_3\delta(y\,')\delta(z\,'-d)\cos kx\,'dx\,'dy\,'dz\,'+$$
$$+\int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi+y\,'\sin\theta\sin\phi+z\,'\cos\theta)}\widehat{x}A_4\delta(y\,')\delta(z\,'+d)\cos kx\,'dx\,'dy\,'dz\,'$$

ossia:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =&\widehat{z}A_1\int_{-l}^{+l} e^{-ik(-d\sin\theta\sin\phi+z\,'\cos\theta)}\cos kz\,'dz\,'+\\ &+\widehat{z}A_2\int_{-l}^{+l} e^{-ik(d\sin\theta\sin\phi+z\,'\cos\theta)}\cos kz\,'dz\,'+\\ &+\widehat{x}A_3\int_{-l}^{+l} e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi+d\cos\theta)}\cos kx\,'dx\,'+\\ &+\widehat{x}A_4\int_{-l}^{+l} e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi-d\cos\theta)}\cos kx\,'dx\,'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =&\widehat{z}A_1e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos kz\,'dz\,'+\\ &+\widehat{z}A_2e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos kz\,'dz\,'+\\ &+\widehat{x}A_3e^{-ikd\cos\theta}\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,'+\\ &+\widehat{x}A_4e^{+ikd\cos\theta}\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,'\end{aligned}$$

$$\vec{N}(\theta,\phi)=\widehat{z}\left(A_1e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}+A_2e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\right)\int_{-l}^{+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos kz\,'dz\,'+$$
$$+\widehat{x}\left(A_3e^{-ikd\cos\theta}+A_4e^{+ikd\cos\theta}\right)\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,'$$

Poiché, per un'antenna a mezz'onda, risulta:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikz'\cos\theta} \cos kz' dz' = \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi} \cos kx' dx' = \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}$$

possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{z}\left(A_1 e^{+ikd\sin\theta\sin\phi} + A_2 e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \\ &+ \widehat{x}\left(A_3 e^{-ikd\cos\theta} + A_4 e^{+ikd\cos\theta}\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\end{aligned}$$

Poiché:

$$\begin{cases} \widehat{x} = \widehat{e}_r \sin\theta\cos\phi + \widehat{e}_\theta \cos\theta\cos\phi - \widehat{e}_\phi \sin\phi \\ \widehat{z} = \widehat{e}_r \cos\theta - \widehat{e}_\theta \sin\theta \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{e}_r \left[\cos\theta \left(A_1 e^{+ikd\sin\theta\sin\phi} + A_2 e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \right. \\ & \left. + \sin\theta\cos\phi \left(A_3 e^{-ikd\cos\theta} + A_4 e^{+ikd\cos\theta}\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right] + \\ & + \widehat{e}_\theta \left[-\sin\theta \left(A_1 e^{+ikd\sin\theta\sin\phi} + A_2 e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \right. \\ & \left. + \cos\theta\cos\phi \left(A_3 e^{-ikd\cos\theta} + A_4 e^{+ikd\cos\theta}\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right] + \\ & + \widehat{e}_\phi \left[-\sin\phi \left(A_3 e^{-ikd\cos\theta} + A_4 e^{+ikd\cos\theta}\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right]\end{aligned}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2 \left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2\right) \widehat{e}_r$$

Ponendo $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$, si ha:

$$N_\theta = \left[-\sin\theta \left(e^{+ikd\sin\theta\sin\phi} + e^{-ikd\sin\theta\sin\phi} \right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \right.$$

$$\left. + \cos\theta\cos\phi \left(e^{-ikd\cos\theta} + e^{+ikd\cos\theta} \right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right]$$

$$N_\phi = \left[-\sin\phi \left(e^{-ikd\cos\theta} + e^{+ikd\cos\theta} \right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right]$$

$$N_\theta = \left[-2\cos(kd\sin\theta\sin\phi) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} + \right.$$

$$\left. +2\cos\theta\cos\phi\cos(kd\cos\theta) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right]$$

$$N_\phi = \left[-2\sin\phi\cos(kd\cos\theta) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right]$$

08-2) Esercizio n. 2 del 31/1/2008

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nei piani $\theta = 90^0$ e $\phi = 0^0$. Sia $d = \lambda$.

———————

Per $d = \lambda$ risulta $kd = 2\pi$. Pertanto si ha:

$$N_\theta = \Bigg[-2\cos(2\pi \sin\theta \sin\phi)\, \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} + $$

$$+ 2\cos\theta\cos\phi\cos(2\pi\cos\theta)\, \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\Bigg]$$

$$N_\phi = \left[-2\sin\phi\cos(2\pi\cos\theta)\, \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\right]$$

Ponendo $\theta = \pi/2$ si ha:

$$N_\theta = \left[-\frac{4}{k}\cos(2\pi\sin\phi)\right]$$

$$N_\phi = \left[-\frac{4}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi}\right]$$

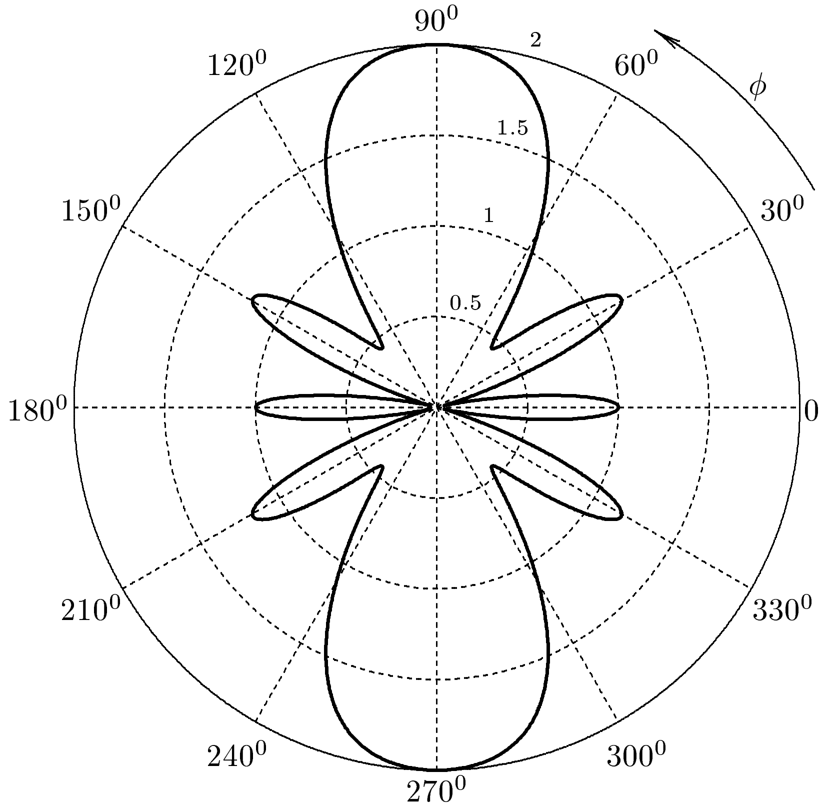
$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2 \left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2\right)\widehat{e}_r =$$

$$= \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2 \left[\left|-\frac{4}{k}\cos(2\pi\sin\phi)\right|^2 + \left|-\frac{4}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi}\right|^2\right]\widehat{e}_r =$$

$$= \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{\pi r}\right)^2 \left[|\cos(2\pi\sin\phi)|^2 + \left|\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi}\right|^2\right]\widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\phi) = \left[|\cos(2\pi\sin\phi)|^2 + \left|\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi}\right|^2\right]$$



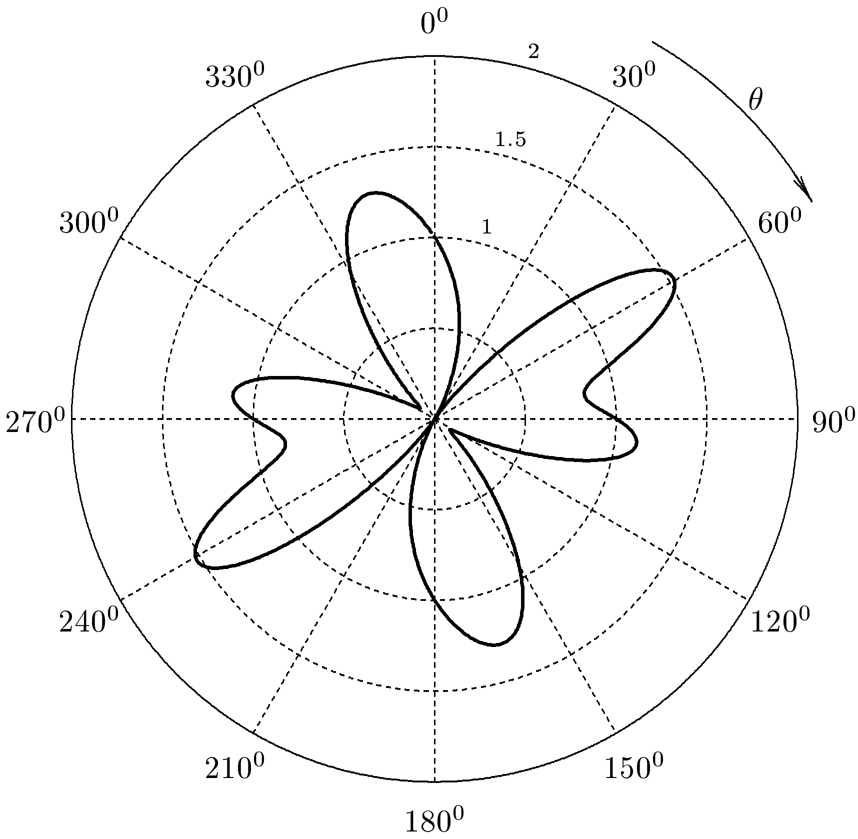
Il valore minimo del fattore di forma si ha per $\phi \simeq 14^0.478$ e vale 0.039777.
Ponendo $\phi = 0$ si ha:

$$
\begin{aligned}
N_\theta =& \left[-\frac{4}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} + \cos\left(2\pi\cos\theta\right)\frac{4}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta} \right] \\
N_\phi =& \, 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{S} \rangle =& \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2 \left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2 \right) \widehat{e}_r = \\
=& \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{\pi r}\right)^2 \left[-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} + \cos(2\pi\cos\theta)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta} \right]^2 \widehat{e}_r
\end{aligned}
$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$
F(\theta) = \left[-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} + \cos(2\pi\cos\theta)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta} \right]^2
$$



0^0
30^0
60^0
90^0
120^0
150^0
180^0
210^0
240^0
270^0
300^0
330^0
2
1.5
1
θ

08-3) Esercizio n. 3 del 31/1/2008

Il vettore induzione magnetica di un'onda elettromagnetica piana uniforme viaggiante nel libero spazio é dato dalla seguente espressione:

$$\vec{B}(r,t) = (10^{-6}\widehat{x} + 2\cdot 10^{-6}\widehat{y} + B_{0z}\widehat{z})e^{-i(\omega t + 3x - y - z)} \qquad (Wb/m^2)$$

Determinare:
a) la direzione di propagazione $\widehat{k}$, la lunghezza d'onda λ e la frequenza angolare ω;
b) la componente B_{0z};
c) il vettore campo elettrico $\vec{E}$ associato a $\vec{B}$;
d) il vettore di Poynting $\vec{S}$.

———————

In forma compatta l'espressione del vettore induzione magnetica si scrive:

$$\vec{B}(r,t) = \vec{B}_0 e^{-i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} \qquad (Wb/m^2)$$

essendo:

$$B_{0x} = 10^{-6}\ (Wb/m^2), \quad B_{0y} = 2\cdot 10^{-6}\ (Wb/m^2), \quad B_{0z} = B_{0z}\ (Wb/m^2)$$

Ne segue che:

$$k_x = -3\ (m^{-1}),\ k_y = +1\ (m^{-1}),\ k_z = +1\ (m^{-1})$$

e:

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}\ (m^{-1})$$

Pertanto:

$$a)\ \widehat{k} = \frac{\vec{k}}{k} = \frac{-3\widehat{x} + \widehat{y} + \widehat{z}}{\sqrt{11}} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{11}} = 1.8945\ (m)$$

$$\omega = ck = 3\cdot 10^8 \cdot \sqrt{11} = 9.9499\cdot 10^8\ (rad/s)$$

$$b)\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Longrightarrow ik_x B_x + ik_y B_y + ik_z B_{0z} =$$

$$= i(-3\cdot 10^{-6} + 2\cdot 10^{-6} + B_{0z})e^{-i(\omega t + 3x - y - z)} = 0$$

$$\text{ossia } (-3\cdot 10^{-6} + 2\cdot 10^{-6} + B_{0z}) = 0 \Longrightarrow B_{0z} = 10^{-6}\ (Weber/m^2)$$

c) Dalla formula relativa alle onde piane si ha:

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega}\widehat{k} \times \vec{E} = \sqrt{\epsilon_0\mu_0}\widehat{k} \times \vec{E} = \frac{1}{c}\widehat{k} \times \vec{E}$$

Ricordando che:

$$\widehat{k} \times \widehat{k} \times \vec{E} = \widehat{k}(\widehat{k} \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\widehat{k} \cdot \widehat{k}) = -\vec{E}$$

risulta:

$$\widehat{k} \times \vec{B} = -\frac{1}{c}\vec{E}$$

ossia:

$$\vec{E}_0 = -c\widehat{k} \times \vec{B}_0$$

$$\widehat{k} \times \vec{B}_0 = \frac{1}{k}\begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ k_x & k_y & k_z \\ B_{0x} & B_{0y} & B_{0z} \end{vmatrix} = \frac{10^{-6}}{\sqrt{11}}\begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ -3 & +1 & +1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{10^{-6}}{\sqrt{11}}\left(-\widehat{x} + 4\widehat{y} - 7\widehat{z}\right)$$

Ne segue:

$$\vec{E}_0 = -\frac{3 \cdot 10^2}{\sqrt{11}}\left(-\widehat{x} + 4\widehat{y} - 7\widehat{z}\right) \qquad (V/m)$$

Quindi:

$$\vec{E} = \frac{3 \cdot 10^2}{\sqrt{11}}\left(\widehat{x} - 4\widehat{y} + 7\widehat{z}\right) e^{-i(\omega t + 3x - y - z)} \quad (V/m)$$

$$d)\ \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\Re(\vec{E}) \times \Re(\vec{B})$$

essendo:

$$\Re(\vec{E}) = \vec{E}_0\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \qquad \Re(\vec{B}) = \vec{B}_0\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

$$\vec{E}_0 \times \vec{B}_0 = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{11}}\begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & +1 \end{vmatrix} = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{11}}\left(-18\widehat{x} + 6\widehat{y} + 6\widehat{z}\right)$$

$$\vec{S} = \frac{3 \cdot 10^3}{4\pi\sqrt{11}}\left(-18\widehat{x} + 6\widehat{y} + 6\widehat{z}\right)\cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (W/m^2)$$

$$\vec{S} = \frac{18 \cdot 10^3}{4\pi}\frac{(-3\widehat{x} + \widehat{y} + \widehat{z})}{\sqrt{11}}\cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (W/m^2)$$

$$\vec{S} = 1432.4\widehat{k}\cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (W/m^2)$$

08-4) Esercizio n. 4 del 31/1/2008

Un'onda elettromagnetica piana circolarmente polarizzata, viaggiante in aria, incide su un mezzo dielettrico ($\epsilon_r = 5$) con un angolo di incidenza pari all'angolo di Brewster. Calcolare l'angolo di trasmissione, il coefficiente di riflessione e quello di trasmissione, descrivendo lo stato di polarizzazione dell'onda riflessa e dell'onda trasmessa.

———————

L'angolo di Brewster competente ai due mezzi é dato da:

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{\sqrt{\epsilon_{r_2}}}{\sqrt{\epsilon_{r_1}}}\right) = \arctan(\sqrt{5}) = 65^0.905$$

L'angolo di trasmissione é dato da:

$$\sin\theta_2 = \frac{\sqrt{\epsilon_{r_1}}}{\sqrt{\epsilon_{r_2}}}\sin\theta_B$$

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta_B\right) = \underline{\underline{24^0.095}}$$

a) **Riflessione**

Poiché l'onda incide sull'interfaccia con angolo di incidenza pari all'angolo di Brewster, la componente parallela del campo elettrico riflesso é nulla. L'onda riflessa, pertanto, risulta linearmente polarizzata nella direzione ortogonale al piano di incidenza. Il suo coefficiente di riflessione é:

$$R_\perp^{(B)} = \left|\frac{\sqrt{\epsilon_{r_1}}\cos\theta_B - \sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1}\sin^2\theta_B}}{\sqrt{\epsilon_{r_1}}\cos\theta_B + \sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1}\sin^2\theta_B}}\right|^2 =$$

$$= \left|\frac{\cos\theta_B - \sqrt{5 - \sin^2\theta_B}}{\cos\theta_B + \sqrt{5 - \sin^2\theta_B}}\right|^2 = \left|\frac{0.40825 - \sqrt{5 - 0.83333}}{0.40825 + \sqrt{5 - 0.83333}}\right|^2 =$$

$$= \left|\frac{-1.633}{2.4495}\right|^2 = 0.44444 = \underline{\underline{44.444\%}}$$

a) **Trasmissione**

Si ha:

$$
\begin{aligned}
T_{\perp}^{(B)} =& \frac{4\sqrt{\epsilon_{r_1}}\sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1}\sin^2\theta_B}\cos\theta_B}{\left|\sqrt{\epsilon_{r_1}}\cos\theta_B + \sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1}\sin^2\theta_B}\right|^2} = \\
=& \frac{4\sqrt{5 - \sin^2\theta_B}\cos\theta_B}{\left|\cos\theta_B + \sqrt{5 - \sin^2\theta_B}\right|^2} = \frac{4\sqrt{5 - 0.83333}\,0.40825}{\left|0.40825 + \sqrt{5 - 0.83333}\right|^2} = \\
=& \frac{3.3333}{|2.4495|^2} = 0.55555 = \underline{\underline{55.555\%}}
\end{aligned}
$$

risultato conforme alla relazione $T_{\perp} = 1 - R_{\perp}$.

$$
T_{\parallel}^{(B)} = 1
$$

L'onda trasmessa é polarizzata ellitticamente.
Il coefficiente di trasmissione totale é dato dalla formula:

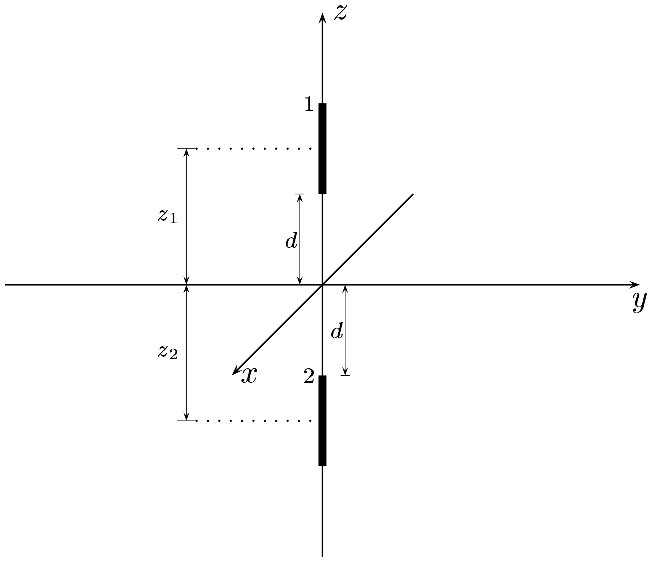
$$
T = T_{\parallel}\cos^2\alpha_i + T_{\perp}\sin^2\alpha_i
$$

Poiché l'onda incidente é polarizzata circolarmente α_i varia da zero a 2π in un periodo; quindi, per dar senso al coefficiente di trasmissione descritto dalla formula precedente (che rappresenta un coefficiente istantaneo) bisogna fare la media in un periodo. Ne segue che:

$$
\langle T\rangle = \frac{1}{2}T_{\parallel} + \frac{1}{2}T_{\perp} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}0.55555 = 0.77777 = \underline{\underline{77.777\%}}
$$

08-5) Esercizio n. 1 del 28/2/2008

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura. Determinare le espressioni del vettore di radiazione far field e del vettore di Poynting irradiati. (Suggerimento: la corrente su ciascuna antenna si puó scrivere come $I = I_0 \cos k(z - z_p)$ e fare variare z di conseguenza).



Indichiamo con z_1 e con z_2 le distanze dall'origine sull'asse z dei centri delle due antenne 1 e 2.

Le densitá di correnti sull'antenna 1 e sull'antenna 2 rispettivamente sono:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{z} A_1 \delta(x)\delta(y) \cos k(z - z_1) & z_1 - l \le z \le z_1 + l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{z} A_2 \delta(x)\delta(y) \cos k(z - z_2) & z_2 - l \le z \le z_2 + l \end{cases}$$

Quindi la densitá di corrente risultante nel sistema di antenne é la somma delle due:

$$\vec{J} = \widehat{z} A_1 \delta(x)\delta(y) \cos k(z - z_1) + \widehat{z} A_2 \delta(x)\delta(y) \cos k(z - z_2)$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta, \phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta, \phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} \vec{J}(\vec{r}\,') d^3 r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x} \sin\theta \cos\phi + \widehat{y} \sin\theta \sin\phi + \widehat{z} \cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,' = x\,' \sin\theta\cos\phi + y\,' \sin\theta\sin\phi + z\,' \cos\theta$$

Ne segue:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\,\widehat{z}A_1\delta(x\,')\delta(y\,')\cos k(z\,'-z_1)dx\,'dy\,'dz\,' +$$
$$+\int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\,\widehat{z}A_2\delta(x\,')\delta(y\,')\cos k(z\,'-z_2)dx\,'dy\,'dz\,'$$

ossia:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{z}A_1\int_{z_1-l}^{z_1+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_1)dz\,' +$$
$$+\widehat{z}A_2\int_{z_2-l}^{z_2+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_2)dz\,'$$

Valutiamo, ora $\int_{z_1-l}^{z_1+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_1)dz\,'$. Poniamo $z\,'-z_1 = u \Longrightarrow dz\,' = du$. Per $z\,' = z_1 + l \Longrightarrow u = l$. Per $z\,' = z_1 - l \Longrightarrow u = -l$. Si ha, quindi:

$$\int_{z_1-l}^{z_1+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_1)dz\,' = e^{-ikz_1\cos\theta}\int_{-l}^{+l} e^{-iku\cos\theta}\cos ku\,du$$

Poiché, per un'antenna a mezz'onda, risulta:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos kz\,'dz\,' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

possiamo scrivere:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{z}\left(A_1 e^{-ikz_1\cos\theta} + A_2 e^{-ikz_2\cos\theta}\right)\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

Poiché:

$$\widehat{z} = \widehat{e}_r\cos\theta - \widehat{e}_\theta\sin\theta$$

si ha:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{e}_r\left[\cos\theta\left(A_1 e^{-ikz_1\cos\theta} + A_2 e^{-ikz_2\cos\theta}\right)\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\right] +$$
$$+\widehat{e}_\theta\left[-\sin\theta\left(A_1 e^{-ikz_1\cos\theta} + A_2 e^{-ikz_2\cos\theta}\right)\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\right]$$

Ponendo $A_1 = A_2 = 1$ nonché $z_1 = d + l$ e $z_2 = -(d + l)$ si ha:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{e}_r \left[\cos\theta \left(e^{-ik(d+l)\cos\theta} + e^{+ik(d+l)\cos\theta} \right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \right] +$$

$$+\widehat{e}_\theta \left[-\sin\theta \left(e^{-ik(d+l)\cos\theta} + e^{+ik(d+l)\cos\theta} \right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \right]$$

$$N_r = \left[\cos\theta \left\{ 2\cos[k(d+l)\cos\theta] \right\} \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \right]$$

$$N_\theta = \left[-2\cos[k(d+l)\cos\theta] \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right]$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r} \right)^2 \left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2 \right) \widehat{e}_r$$

08-6) Esercizio n. 2 del 28/2/2008

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione. Si assuma $d = \dfrac{\lambda}{2}$.

———————

Si ha:

$$d + l = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{3}{4}\lambda \Longrightarrow k(d+l) = \frac{3}{2}\pi$$

La componente del vettore di radiazione N_θ é, allora:

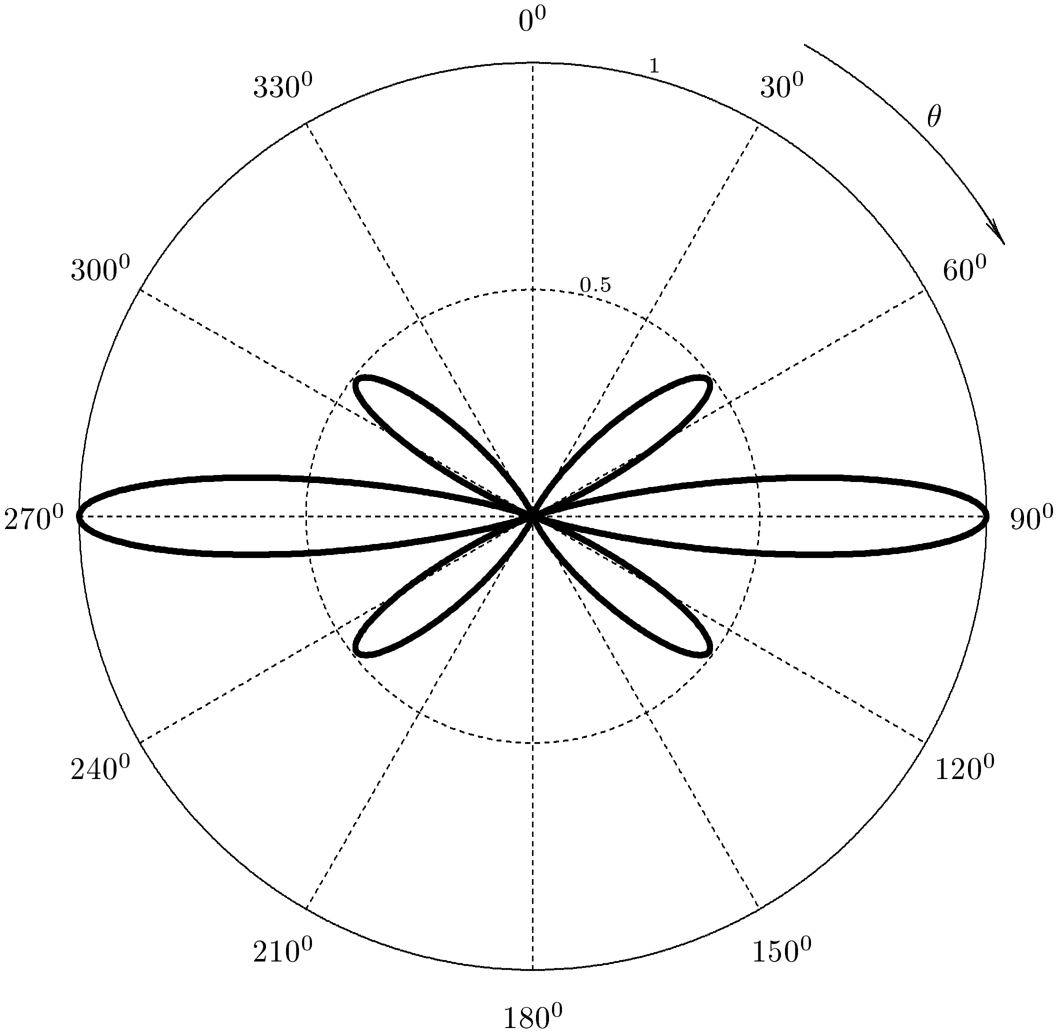
$$N_\theta = \left[-2\cos\left(\frac{3}{2}\pi\cos\theta\right)\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{1}{\pi r}\right)^2 \left| -\cos\left(\frac{3}{2}\pi\cos\theta\right)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right|^2 \widehat{e_r}$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\theta) = \left| -\cos\left(\frac{3}{2}\pi\cos\theta\right)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right|^2$$



0^0
30^0
60^0
90^0
120^0
150^0
180^0
210^0
240^0
270^0
300^0
330^0
1
0.5
θ

08-7) Esercizio n. 3 del 28/2/2008

Un recipiente pieno d'acqua é ricoperto da uno strato d'olio spesso 1 cm. Sopra l'olio vi é l'aria. Un'onda elettromagnetica di frequenza $\nu = 1\ MHz$, viaggiante in aria, incide sulla superficie dell'olio nella direzione della normale. Calcolare il coefficiente di riflessione. Calcolare, altresí, il minimo spessore dell'olio affinché il coefficiente di riflessione sia minimo e quello per cui sia massimo. L'indice di rifrazione dell'acqua é $n_{H_2O} = 9$ e quello dell'olio é $n_{olio} = 1.48$. Si consideri lo strato d'acqua infinitamente esteso.

———————

Il coefficiente di riflessione dello strato dielettrico (olio) é:

$$R = \frac{|E_1|^2}{|E_0|^2} = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\beta_2 d}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\beta_2 d}$$

essendo:

$$r_{12} = \frac{\mu_2 k_1 - \mu_1 k_2}{\mu_2 k_1 + \mu_1 k_2} \qquad e \qquad r_{23} = \frac{\mu_3 k_2 - \mu_2 k_3}{\mu_3 k_2 + \mu_2 k_3}$$

Posto:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0 \quad \text{e} \quad k_l = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_{r_l}} = \frac{\omega}{c} n_l \quad (l = 1, 2, 3)$$

si ha:

$$r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1 - 1.48}{1 + 1.48} = -0.19355$$

$$r_{23} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3} = \frac{1.48 - 9}{1.48 + 9} = -0.71756$$

D'altra parte:

$$\sin^2(\beta_2 d) = \sin^2\left(\frac{\omega}{c} n_2 d\right) = \sin^2\left(\frac{2\pi \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} 1.48 \cdot 10^{-2}\right) =$$
$$= \sin^2\left(3.0997 \cdot 10^{-4}\right) = 9.6081 \cdot 10^{-8}$$

Conseguentemente:

$$R = \frac{(-0.19355 - 0.71756)^2 - 4 \cdot 0.19355 \cdot 0.71756 \cdot 9.6081 \cdot 10^{-8}}{(1 + 0.19355 \cdot 0.71756)^2 - 4 \cdot 0.19355 \cdot 0.71756 \cdot 9.6081 \cdot 10^{-8}} =$$
$$= \frac{0.83012 - 5.3376 \cdot 10^{-8}}{1.2971 - 5.3376 \cdot 10^{-8}} = \frac{0.8312}{1.2971} = \underline{\underline{0.64081}}$$

Poiché $n_2 < n_3$, la riflettivitá é **massima** per:

$$n_2 d = m\frac{\lambda_0}{4} \quad \text{con} \quad m \quad \text{pari}$$

La minima distanza si ha, quindi, per $m = 2$:

$$d_{R_{max}} = \frac{\lambda_0}{2n_2} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^6} \frac{1}{2 \cdot 1.48} = \underline{\underline{101.35\ m}}$$

Poiché $n_2 < n_3$, la riflettivitá é **minima** per:

$$n_2 d = m \frac{\lambda_0}{4} \quad \text{con} \quad m \quad \text{dispari}$$

La minima distanza si ha, quindi, per $m = 1$:

$$d_{R_{min}} = \frac{\lambda_0}{4n_2} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^6} \frac{1}{4 \cdot 1.48} = \underline{\underline{50.675\ m}}$$

08-8) Esercizio n. 4 del 28/2/2008

Alla lunghezza d'onda $\lambda_0 = 589.3\ nm$ gli indici di rifrazione del sodio solido sono $n_r = 0.04$ e $n_i = 2.4$. Calcolare il coefficiente di riflessione della luce per incidenza normale.

——————

L'indice di rifrazione del sodio solido é:

$$n = \sqrt{\epsilon_r'} = n_r + in_i$$

Il coefficiente di riflessione per incidenza normale é:

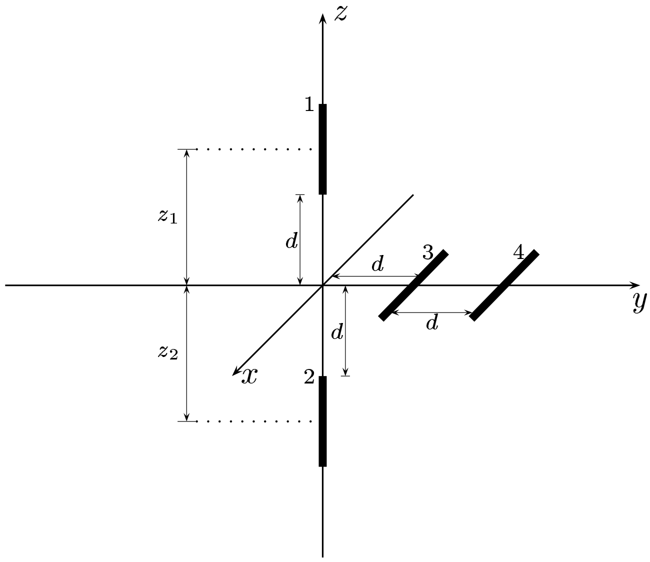
$$R_{(\theta=0^0)} = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_{r_1}} - \sqrt{\epsilon_{r_2}}}{\sqrt{\epsilon_{r_1}} + \sqrt{\epsilon_{r_2}}} \right|^2 = \left| \frac{1 - (n_r + in_i)}{1 + (n_r + in_i)} \right|^2 =$$

$$= \left| \frac{1 - (0.04 + i2.4)}{1 + (0.04 + i2.4)} \right|^2 = \left| \frac{0.96 - i2.4}{1.04 + i2.4} \right|^2 =$$

$$= \left(\frac{0.96 - i2.4}{1.04 + i2.4} \right) \left(\frac{0.96 + i2.4}{1.04 - i2.4} \right) = \frac{(0.96)^2 + (2.4)^2}{(1.04)^2 + (2.4)^2} = \underline{\underline{0.9766}}$$

08-9) Esercizio n. 1 del 9 Maggio 2008

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato.



Indichiamo con z_1 e con z_2 le distanze dall'origine sull'asse z dei centri delle due antenne 1 e 2.

Le densitá di correnti sull'antenna 1, sull'antenna 2, sull'antenna 3 e sull'antenna 4 rispettivamente sono:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{z}A_1\delta(x)\delta(y)\cos k(z-z_1) & z_1 - l \le z \le z_1 + l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{z}A_2\delta(x)\delta(y)\cos k(z-z_2) & z_2 - l \le z \le z_2 + l \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{x}A_3\delta(y-d)\delta(z)\cos kx & -l \le x \le +l \\ \vec{J}^{(4)} = \widehat{x}A_4\delta(y-2d)\delta(z)\cos kx & -l \le x \le +l \end{cases}$$

Quindi la densitá di corrente risultante nel sistema di antenne é la somma delle quattro:

$$\begin{aligned} \vec{J} =& \widehat{z}A_1\delta(x)\delta(y)\cos k(z-z_1) + \widehat{z}A_2\delta(x)\delta(y)\cos k(z-z_2) + \\ &+ \widehat{x}A_3\delta(y-d)\delta(z)\cos kx + \widehat{x}A_4\delta(y-2d)\delta(z)\cos kx \end{aligned}$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta,\phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'}\vec{J}(\vec{r}\,')d^3r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x}\sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r\cdot\vec{r}\,' = x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi)=&\int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi+z'\cos\theta)}\widehat{z}A_1\delta(x')\delta(y')\cos k(z'-z_1)dx'dy'dz'+\\
+&\int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi+z'\cos\theta)}\widehat{z}A_2\delta(x')\delta(y')\cos k(z'-z_2)dx'dy'dz'+\\
+&\int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi+z'\cos\theta)}\widehat{x}A_3\delta(y'-d)\delta(z')\cos kx'dx'dy'dz'+\\
+&\int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi+z'\cos\theta)}\widehat{x}A_4\delta(y'-2d)\delta(z')\cos kx'dx'dy'dz'\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi)=&\widehat{z}A_1\int_{z_1-l}^{z_1+l}e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_1)dz'+\\
&+\widehat{z}A_2\int_{z_2-l}^{z_2+l}e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_2)dz'+\\
&+\widehat{x}A_3\int_{-l}^{+l}e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+d\sin\theta\sin\phi)}\cos kx'dx'+\\
&+\widehat{x}A_4\int_{-l}^{+l}e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+2d\sin\theta\sin\phi)}\cos kx'dx'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi)=&\widehat{z}A_1\int_{z_1-l}^{z_1+l}e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_1)dz'+\\
&+\widehat{z}A_2\int_{z_2-l}^{z_2+l}e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_2)dz'+\\
&+\widehat{x}A_3e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l}e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\cos kx'dx'+\\
&+\widehat{x}A_4e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l}e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\cos kx'dx'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\vec{N}(\theta,\phi)=\\
&=\widehat{z}\left(A_1\int_{z_1-l}^{z_1+l}e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_1)dz'+A_2\int_{z_2-l}^{z_2+l}e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_2)dz'\right)+\\
&+\widehat{x}\left(A_3e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}+A_4e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\right)\int_{-l}^{+l}e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\cos kx'dx'\end{aligned}$$

Valutiamo, ora $\int_{z_1-l}^{z_1+l} e^{-ikz' \cos\theta} \cos k(z'-z_1) dz'$. Poniamo $z'-z_1 = u \Longrightarrow dz' = du$. Per $z' = z_1 + l \Longrightarrow u = l$. Per $z' = z_1 - l \Longrightarrow u = -l$. Si ha, quindi:

$$\int_{z_1-l}^{z_1+l} e^{-ikz' \cos\theta} \cos k(z'-z_1) dz' = e^{-ikz_1 \cos\theta} \int_{-l}^{+l} e^{-iku \cos\theta} \cos kudu$$

Poiché, per un'antenna a mezz'onda, risulta:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikz' \cos\theta} \cos kz' dz' = \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikx' \sin\theta\cos\phi} \cos kx' dx' = \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}$$

possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
&\vec{N}(\theta,\phi)= \\
&=\widehat{z}\left(A_1 e^{-ikz_1\cos\theta} + A_2 e^{-ikz_2\cos\theta}\right)\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+ \\
&+\widehat{x}\left(A_3 e^{-ikd\sin\theta\sin\phi} + A_4 e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\right)\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}
\end{aligned}$$

Poiché:

$$\begin{cases} \widehat{x} = \widehat{e}_r \sin\theta\cos\phi + \widehat{e}_\theta \cos\theta\cos\phi - \widehat{e}_\phi \sin\phi \\ \widehat{z} = \widehat{e}_r \cos\theta - \widehat{e}_\theta \sin\theta \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) =&\widehat{e}_r\Bigg[\cos\theta\left(A_1 e^{-ikz_1\cos\theta} + A_2 e^{-ikz_2\cos\theta}\right)\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+ \\
&+\sin\theta\cos\phi\left(A_3 e^{-ikd\sin\theta\sin\phi} + A_4 e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\right)\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\Bigg]+ \\
&+\widehat{e}_\theta\Bigg[-\sin\theta\left(A_1 e^{-ikz_1\cos\theta} + A_2 e^{-ikz_2\cos\theta}\right)\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+ \\
&+\cos\theta\cos\phi\left(A_3 e^{-ikd\sin\theta\sin\phi} + A_4 e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\right)\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\Bigg]+ \\
&+\widehat{e}_\phi\Bigg[-\sin\phi\left(A_3 e^{-ikd\sin\theta\sin\phi} + A_4 e^{-2ikd\sin\theta\sin\phi}\right)\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\Bigg]
\end{aligned}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r} \right)^2 \left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2 \right) \hat{e}_r$$

Ponendo $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$, si ha:

$$N_\theta = \Bigg[-\sin\theta \left(e^{-ikz_1 \cos\theta} + e^{-ikz_2 \cos\theta} \right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta \right)}{\sin^2\theta} +$$

$$+ \cos\theta \cos\phi \left(e^{-ikd \sin\theta \sin\phi} + e^{-2ikd \sin\theta \sin\phi} \right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin\theta \cos\phi \right)}{1 - \sin^2\theta \cos^2\phi} \Bigg]$$

$$N_\phi = \Bigg[-\sin\phi \left(e^{-ikd \sin\theta \sin\phi} + e^{-2ikd \sin\theta \sin\phi} \right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin\theta \cos\phi \right)}{1 - \sin^2\theta \cos^2\phi} \Bigg]$$

Posto $z_1 = d + l$ e $z_2 = -(d + l)$ si ha:

$$N_\theta = \Bigg[-2\cos\left[k(d+l)\cos\theta \right] \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta \right)}{\sin\theta} +$$

$$+ \cos\theta \cos\phi \left(e^{-ikd \sin\theta \sin\phi} + e^{-2ikd \sin\theta \sin\phi} \right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin\theta \cos\phi \right)}{1 - \sin^2\theta \cos^2\phi} \Bigg]$$

$$N_\phi = \Bigg[-\sin\phi \left(e^{-ikd \sin\theta \sin\phi} + e^{-2ikd \sin\theta \sin\phi} \right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin\theta \cos\phi \right)}{1 - \sin^2\theta \cos^2\phi} \Bigg]$$

08-10) Esercizio n. 2 del 9 Maggio 2008

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nel piano $\phi = 90^0$. Si assuma $d = \dfrac{\lambda}{2}$.

——————

Per $\phi = 90^0$ si ha:

$$N_{\theta\,(\phi=90^0)} = \left[-2\cos\left[k(d+l)\cos\theta\right] \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right]$$

$$N_{\phi\,(\phi=90^0)} = \left[-\left(e^{-ikd\sin\theta} + e^{-2ikd\sin\theta}\right)\frac{2}{k}\right]$$

Si ha:

$$kd = \pi \qquad \text{e} \qquad k(d+l) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}\right) = \frac{3}{2}\pi$$

Ne segue:

$$N_{\theta\,(\phi=90^0)} = -\frac{4}{k}\left[\cos\left(\frac{3}{2}\pi\cos\theta\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]$$

$$\begin{aligned} N_{\phi\,(\phi=90^0)} &= -\frac{2}{k}\left(e^{-i\pi\sin\theta} + e^{-2i\pi\sin\theta}\right) = \\ &= -\frac{2}{k}\left\{\cos(\pi\sin\theta) + \cos(2\pi\sin\theta) - i\left[\sin(\pi\sin\theta) + \sin(2\pi\sin\theta)\right]\right\} \end{aligned}$$

Quindi:

$$|N_\theta|^2_{(\phi=90^0)} = \frac{16}{k^2}\left|\cos\left(\frac{3}{2}\pi\cos\theta\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right|^2$$

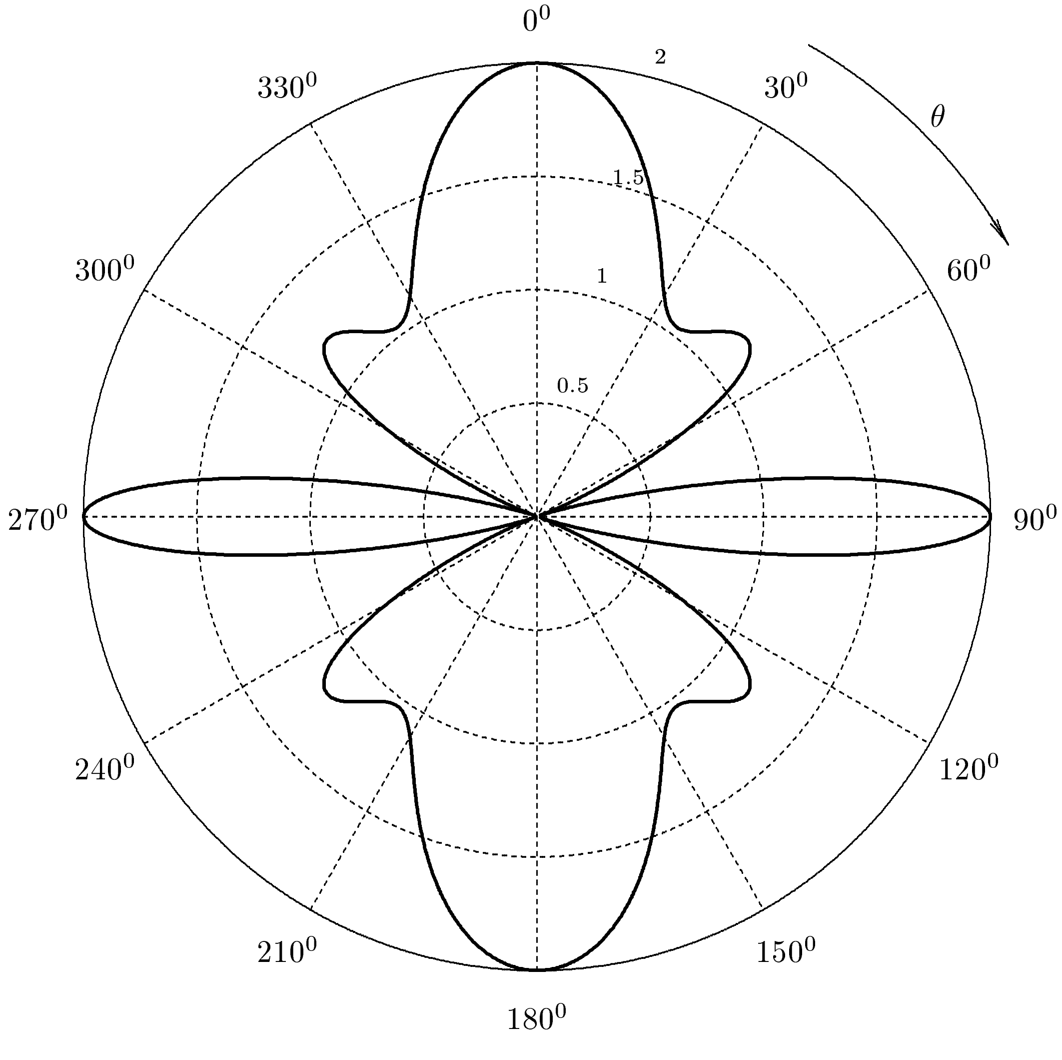
$$\begin{aligned} |N_\phi|^2_{(\phi=90^0)} &= \frac{4}{k^2}\left\{\left[\cos(\pi\sin\theta) + \cos(2\pi\sin\theta)\right]^2 + \left[\sin(\pi\sin\theta) + \sin(2\pi\sin\theta)\right]^2\right\} = \\ &= \frac{4}{k^2}\left\{\left[2 + 2\cos(\pi\sin\theta)\cos(2\pi\sin\theta) + 2\sin(\pi\sin\theta)\sin(2\pi\sin\theta)\right]\right\} = \\ &= \frac{8}{k^2}\left[1 + \cos(\pi\sin\theta)\right] \end{aligned}$$

In definitiva:

$$\begin{aligned} \langle\vec{S}\rangle_{(\phi=90^0)} &= \frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(|N_\theta|^2_{(\phi=90^0)} + |N_\phi|^2_{(\phi=90^0)}\right)\widehat{e}_r = \\ &= \frac{1}{4}Z\left(\frac{1}{\pi r}\right)^2\left(2\left|\cos\left(\frac{3}{2}\pi\cos\theta\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right|^2 + \left[1 + \cos(\pi\sin\theta)\right]\right)\widehat{e}_r \end{aligned}$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\theta)_{(\phi=90^0)} = \left(2\left|\cos\left(\frac{3}{2}\pi\cos\theta\right)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right|^2 + [1+\cos(\pi\sin\theta)]\right)$$



08-11) Esercizio n. 3 del 9 Maggio 2008

Una pulsar é una stella di neutroni molto densa, in rapida rotazione. Essa trasmette impulsi a larga banda che sono piú intensi nella banda di frequenze comprese fra 100 MHz e 500 MHz. Il mezzo interstellare ha una densitá elettronica media di $N = 3 \cdot 10^4\ m^{-3}$. Se la differenza nel tempo di arrivo sulla Terra di due impulsi di frequenza $f_1 = 400\ MHz$ e $f_2 = 300\ MHz$ é $\Delta t = 1.13\ s$, calcolare la distanza della pulsar dalla Terra. Esprimere tale distanza in anni luce.

———————

(vedi es. n.4 del 25/2/2005)

Il tempo impiegato da un impulso a raggiungere la Terra é:

$$t = \frac{L}{v_g}$$

essendo L la distanza percorsa e v_g la velocitá di gruppo nel mezzo dispersivo data da:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$$

Si ha, nell'ipotesi che $\omega_{eff} = 0$:

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

essendo ω_p la frequenza angolare di plasma e ω la frequenza angolare centrale dell'impulso.
Si ha, nel nostro caso:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}} \simeq 9.5215 \cdot 10^7\ (rad/s)^2$$

Poiché β é una funzione sempre crescente all'aumentare di ω, la velocitá di gruppo si puó scrivere:

$$v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1}$$

Risulta:

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{c}\left[\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} + \frac{\omega\left(2\frac{\omega_p^2}{\omega^3}\right)}{2\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}\right] = \frac{1}{c}\left(\frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}\right)$$

Ne segue, nell'ipotesi che $\omega^2 >> \omega_p^2$:

$$v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \simeq c\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

Si ha:

$$t_1 = \frac{L}{v_{g_1}} \quad e \quad t_2 = \frac{L}{v_{g_2}}$$

Ne segue:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = L\left(\frac{1}{v_{g_1}} - \frac{1}{v_{g_2}}\right)$$

Sempre nell'ipotesi che $\omega^2 >> \omega_p^2$, si puó scrivere:

$$\frac{1}{v_g} \simeq \frac{1}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

Ne segue:

$$\Delta t = \frac{L}{c}\left(\frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega_1^2} - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega_2^2}\right) = \frac{L}{c}\frac{\omega_p^2}{8\pi^2}\left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2}\right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\Delta t =& 4.02 \cdot 10^{-3} L\left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2}\right) = 4.02 \cdot 10^{-19} L\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{9}\right) = \\ =& 4.02 \cdot 10^{-19} L \cdot (-0.048611) = -1.9542 \cdot 10^{-20} L\end{aligned}$$

da cui:

$$L = \frac{\Delta t}{1.9542 \cdot 10^{-20}} = \frac{1.13}{1.9542 \cdot 10^{-20}} = \underline{\underline{5.7824 \cdot 10^{19}\ m}}$$

$$\text{Un anno luce} = 3 \cdot 10^8 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 9.4608 \cdot 10^{15}\ m$$

Ne segue:

$$L = \frac{5.7824 \cdot 10^{19}}{9.4608 \cdot 10^{15}} \simeq \underline{\underline{6112 \text{ anni luce}}}$$

Cosí gli impulsi ricevuti oggi sono stati trasmessi dalla stella pulsar circa sei millenni fa.

08-12) Esercizio n. 4 del 9 Maggio 2008

Un'onda elettromagnetica piana linearmente polarizzata, viaggiante in acqua, con il vettore campo elettrico ortogonale al piano di incidenza, incide sull'interfaccia acqua-aria con un angolo di incidenza di 45^0. Calcolare l'ampiezza del campo elettrico in aria: a) sull'interfaccia e b) ad una distanza $\lambda/4$ dalla superficie. L'ampiezza del campo elettrico incidente é $E_0 = 1\ V/m$. Si assuma che i parametri costitutivi dell'acqua siano: $\epsilon_r = 81$, $\mu_r = 1$ e $\sigma = 0$.

(vedi es. n.2 del 21/7/2000)

L'angolo di incidenza sull'interfaccia acqua-aria é $\theta_0 = 45^0$. L'angolo limite competente alla superficie di separazione acqua-aria é:

$$\theta_L = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \qquad n_1 > n_2$$

dove n_1 é l'indice di rifrazione dell'acqua e n_2 l'indice di rifrazione dell'aria.

Nel nostro caso $n_1 = 9$ e $n_2 = 1$, quindi:

$$\theta_L = \arcsin\left(\frac{1}{9}\right) = \underline{\underline{6^0.3794}}$$

L'espressione del campo **evanescente** trasmesso in aria é:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_2 e^{\beta_1 x + i\alpha z} e^{-i\omega t} \qquad (x < 0)\ (\theta_0 > \theta_L)$$

L'ampiezza del campo trasmesso (evanescente) é, quindi $\vec{E}_2 e^{\beta_1 x}$ essendo:

$$\beta_1 = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1}\sqrt{\sin^2\theta_0 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\epsilon_{r_1}\mu_{r_1}}\sqrt{\sin^2\theta_0 - \frac{\epsilon_{r_2}}{\epsilon_{r_1}}} = \frac{2\pi}{\lambda}9\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{81}} =$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}9\sqrt{\frac{79}{162}} = 6.2849\frac{2\pi}{\lambda}$$

Nel caso di campo elettrico ortogonale al piano di incidenza si ha:

$$\vec{E}_2 = \frac{2\sqrt{\epsilon_{r_1}}\cos\theta_0}{\sqrt{\epsilon_{r_1}}\cos\theta_0 + \sqrt{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_2}\sin^2\theta_0}}\vec{E}_0 = \frac{9\sqrt{2}}{4.5\cdot\sqrt{2} + i\sqrt{\frac{81}{2} - \frac{9}{2}}}\vec{E}_0 =$$

$$= \frac{9\sqrt{2}}{4.5\cdot\sqrt{2} + i6}\vec{E}_0$$

Il modulo di $\vec{E}_2$ é:

$$E_2 = \sqrt{\frac{9\sqrt{2}}{4.5 \cdot \sqrt{2} + i6} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{4.5 \cdot \sqrt{2} - i6}} E_0 = \sqrt{\frac{162}{40.5 + 36}} E_0 = 1.4552 E_0$$

Il modulo del campo trasmesso é, quindi:

$$E_t = 1.4552 E_0 e^{\beta_1 x} = 1.4552 E_0 \exp\left(6.2849 \frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad (x < 0)$$

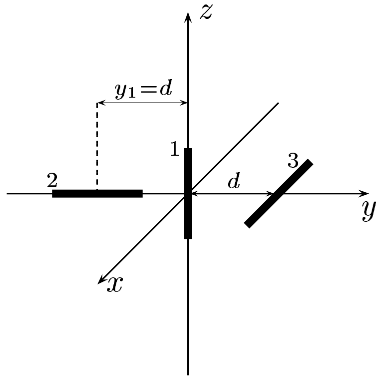
Per $x = 0 \Longrightarrow E_t = 1.4552 E_0 = \underline{\underline{1.4552\ V/m}}$

Per $x = -\lambda/4 \Longrightarrow E_t = 1.4552 E_0 \exp\left(-6.2849 \frac{\pi}{2}\right) = 1.4552 \cdot 5.1584 \cdot 10^{-5} =$ $\underline{\underline{7.5065 \cdot 10^{-5}\ V/m = 75.065\ \mu V/m}}$

Il suddetto risultato conferma che l'onda superficiale si estende nel secondo mezzo per circa una lunghezze d'onda.

08-13) Esercizio n. 1 del 27 Giugno 2008

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato.



Indichiamo con y_1 la distanza dall'origine sull'asse y del centro dell' antenna 2.

Le densitá di correnti sull'antenna 1, sull'antenna 2 e sull'antenna 3 rispettivamente sono:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{z} A_1 \delta(x)\delta(y)\cos k(z) & -l \le z \le +l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{y} A_2 \delta(x)\delta(z)\cos k(y+y_1) & -y_1 - l \le y \le -y_1 + l \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{x} A_3 \delta(y-d)\delta(z)\cos kx & -l \le x \le +l \end{cases}$$

Quindi la densitá di corrente risultante nel sistema di antenne é la somma delle tre:

$$\vec{J} = \widehat{z} A_1 \delta(x)\delta(y)\cos kz + \widehat{y} A_2 \delta(x)\delta(z)\cos k(y+y_1) + \widehat{x} A_3 \delta(y-d)\delta(z)\cos kx$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta,\phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} \vec{J}(\vec{r}\,') d^3 r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x}\sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,' = x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\vec{N}(\theta,\phi)=\int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi+z'\cos\theta)}\widehat{z}A_1\delta(x')\delta(y')\cos kz'dx'dy'dz'+$$
$$+\int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi+z'\cos\theta)}\widehat{y}A_2\delta(x')\delta(z')\cos k(y'+y_1)dx'dy'dz'+$$
$$+\int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi+z'\cos\theta)}\widehat{x}A_3\delta(y'-d)\delta(z')\cos kx'dx'dy'dz'$$

ossia:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi)=&\widehat{z}A_1\int_{-l}^{+l}e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz'+\\&+\widehat{y}A_2\int_{-y_1-l}^{-y_1+l}e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y'+y_1)dy'+\\&+\widehat{x}A_3\int_{-l}^{+l}e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+d\sin\theta\sin\phi)}\cos kx'dx'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi)=&\widehat{z}A_1\int_{-l}^{+l}e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz'+\\&+\widehat{y}A_2\int_{-y_1-l}^{-y_1+l}e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y'+y_1)dy'+\\&+\widehat{x}A_3e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l}e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\cos kx'dx'\end{aligned}$$

Valutiamo, ora $\int_{-y_1-l}^{-y_1+l}e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y'+y_1)dy'$. Poniamo $y'+y_1=u\Longrightarrow dy'=du$. Per $y'=-y_1+l\Longrightarrow u=l$. Per $y'=-y_1-l\Longrightarrow u=-l$. Si ha, quindi:

$$\int_{-y_1-l}^{-y_1+l}e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos k(y'+y_1)dy'=e^{+iky_1\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l}e^{-iku\sin\theta\sin\phi}\cos kudu$$

Si ha:

$$\widehat{y}\cdot\widehat{e}_r=\cos\chi=\sin\theta\sin\phi$$

essendo χ l'angolo formato fra l'asse y e la direzione del vettore posizione $\widehat{e}_r$.

Per un'antenna a mezz'onda risulta, quindi:

$$\int_{-l}^{+l}e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz'=\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

$$\int_{-l}^{+l}e^{-iku\sin\theta\sin\phi}\cos kudu=\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}$$

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\cos kx'dx' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}$$

Pertanto:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{z}A_1\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \widehat{y}A_2 e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} +$$
$$+\widehat{x}A_3 e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}$$

Poiché:

$$\begin{cases} \widehat{x} = \widehat{e}_r\sin\theta\cos\phi + \widehat{e}_\theta\cos\theta\cos\phi - \widehat{e}_\phi\sin\phi \\ \widehat{y} = \widehat{e}_r\sin\theta\sin\phi + \widehat{e}_\theta\cos\theta\sin\phi + \widehat{e}_\phi\cos\phi \\ \widehat{z} = \widehat{e}_r\cos\theta - \widehat{e}_\theta\sin\theta \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) = &\widehat{e}_r\left[\cos\theta A_1\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \right.\\
&+\sin\theta\sin\phi e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}A_2\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} +\\
&\left.+\sin\theta\cos\phi A_3 e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\right] +\\
&+\widehat{e}_\theta\left[-\sin\theta A_1\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \right.\\
&+\cos\theta\sin\phi e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}A_2\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} +\\
&\left.+\cos\theta\cos\phi A_3 e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\right] +\\
&+\widehat{e}_\phi\left[-\sin\phi A_3 e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} + \right.\\
&\left.+\cos\phi e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}A_2\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\right]
\end{aligned}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r} \right)^2 \left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2 \right) \widehat{e}_r$$

Ponendo $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$, si ha:

$$\begin{aligned} N_\theta = \Bigg[& - \sin\theta \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \\ & + \cos\theta \sin\phi e^{+ikd\sin\theta\sin\phi} \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1 - \sin^2\theta\sin^2\phi} + \\ & + \cos\theta\cos\phi e^{-ikd\sin\theta\sin\phi} \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1 - \sin^2\theta\cos^2\phi} \Bigg] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_\phi = \Bigg[& - \sin\phi e^{-ikd\sin\theta\sin\phi} \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1 - \sin^2\theta\cos^2\phi} + \\ & + \cos\phi e^{+ikd\sin\theta\sin\phi} \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1 - \sin^2\theta\sin^2\phi} \Bigg] \end{aligned}$$

08-14) Esercizio n. 2 del 27 Giugno 2008

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nel piano $\phi = 90^0$. Si assuma $d = \dfrac{\lambda}{2}$.

———————

(vedi es. n.2 del 22/9/2003)

Per $\phi = 90^0$ si ha:

$$N_{\theta\,(\phi=90^0)} = \left[-\sin\theta \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \cos\theta e^{+ikd\sin\theta} \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{1-\sin^2\theta} \right]$$

$$N_{\phi\,(\phi=90^0)} = \left[-e^{-ikd\sin\theta} \frac{2}{k} \right]$$

Posto $kd = \pi$, si ha:

$$N_{\theta\,(\phi=90^0)} = \frac{2}{k}\left[-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} + e^{+i\pi\sin\theta} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta} \right]$$

$$N_{\phi\,(\phi=90^0)} = -\frac{2}{k} e^{-i\pi\sin\theta}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
|N_\theta|^2_{(\phi=90^0)} =& \frac{4}{k^2}\left(-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} + e^{+i\pi\sin\theta} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta} \right) \cdot \\
&\cdot \left(-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} + e^{-i\pi\sin\theta} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta} \right) = \\
=& \frac{4}{k^2}\left\{ \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]^2 + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta}\right]^2 + \right. \\
&\left. + \left[-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right] \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta}\right] \left[e^{-i\pi\sin\theta} + e^{+i\pi\sin\theta}\right] \right\} \\
|N_\phi|^2_{(\phi=90^0)} =& \frac{4}{k^2}
\end{aligned}$$

In definitiva:

$$\langle \vec{S} \rangle_{(\phi=90^0)} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r} \right)^2 \left(|N_\theta|^2_{(\phi=90^0)} + |N_\phi|^2_{(\phi=90^0)} \right) \widehat{e}_r =$$

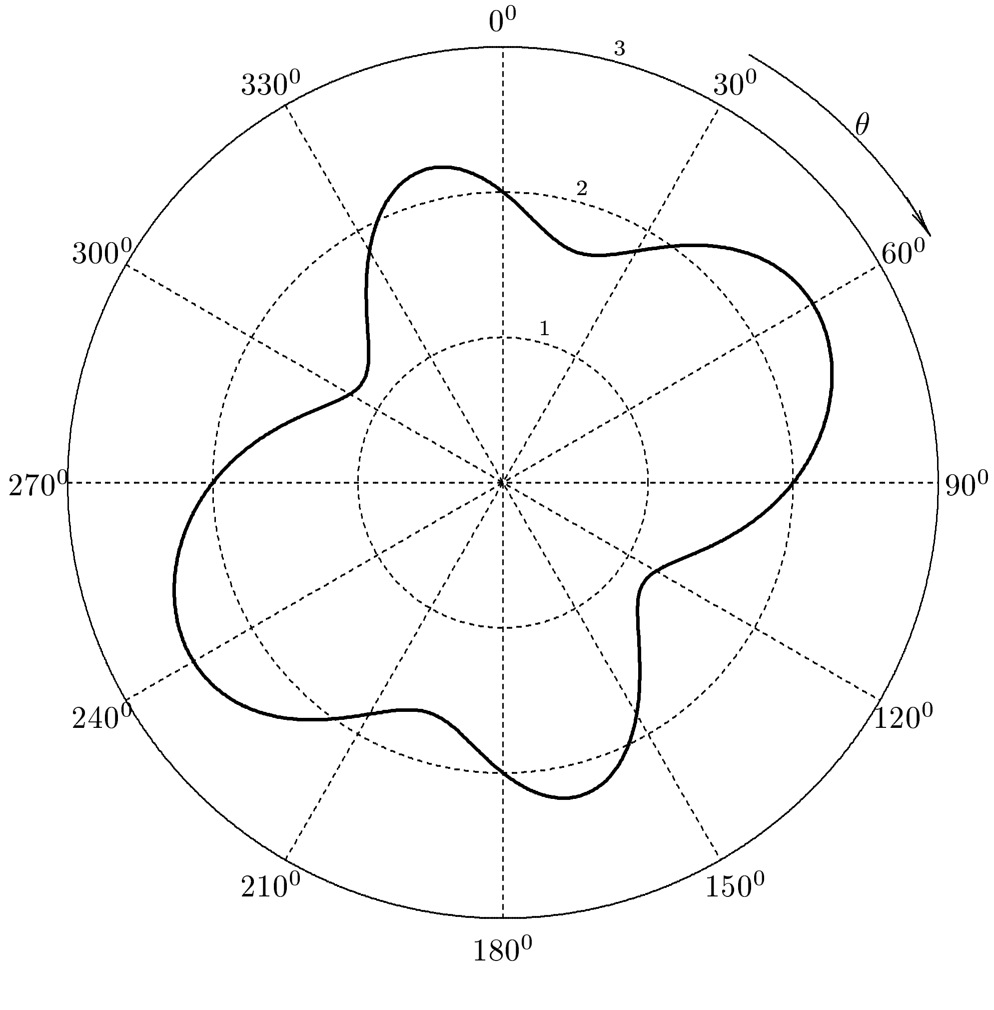
$$= \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{2\pi r} \right)^2 \left\{ \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right]^2 + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta} \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right] \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta} \right] [2\cos(\pi\sin\theta)] + 1 \right\} \widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\theta)_{(\phi=90^0)} = \left\{ \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right]^2 + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta} \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right] \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta} \right] [2\cos(\pi\sin\theta)] + 1 \right\}$$



08-15) Esercizio n. 3 del 27 Giugno 2008

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 1\ GHz$, viaggiante in aria, incide su una superficie conduttrice i cui parametri costitutivi sono:

$$\epsilon_r = 6, \quad \sigma = 0.35\ S/m, \quad \mu_r = 1.$$

Se l'angolo di incidenza é $\theta_0 = 30^0$, calcolare il coefficiente di riflessione nei due casi: a) campo elettrico incidente ortogonale al piano di incidenza e b) campo elettrico incidente parallelo al piano di incidenza.

———————

Calcoliamo il rapporto $\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}$.

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{0.35}{8.854\cdot 10^{-12}\cdot 6\cdot 2\pi\cdot 10^9} = 1.0486 \Longrightarrow \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 = 1.0996$$

$$R_\perp = \rho_\perp^2 = \frac{(q-\beta_1\cos\theta_0)^2+p^2}{(q+\beta_1\cos\theta_0)^2+p^2} \qquad (\mu_1 \simeq \mu_2)$$

$$R_\parallel = \rho_\parallel^2 = \rho_\perp^2 \frac{(q-\beta_1\sin\theta_0\tan\theta_0)^2+p^2}{(q+\beta_1\sin\theta_0\tan\theta_0)^2+p^2} \qquad (\mu_1 \simeq \mu_2)$$

Calcoliamo i parametri p e q con le formule esatte dato che $\left(\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 \simeq 1$.

$$q^2(\theta_0) = \frac{1}{2}\left[\beta_2^2-\alpha_2^2-\beta_1^2\sin^2\theta_0+\sqrt{\left(\beta_2^2-\alpha_2^2-\beta_1^2\sin^2\theta_0\right)^2+4\alpha_2^2\beta_2^2}\right]$$

$$p^2(\theta_0) = \frac{1}{2}\left[-\beta_2^2+\alpha_2^2+\beta_1^2\sin^2\theta_0+\sqrt{\left(\beta_2^2-\alpha_2^2-\beta_1^2\sin^2\theta_0\right)^2+4\alpha_2^2\beta_2^2}\right]$$

essendo:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c}, \qquad \beta_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_r\epsilon_r}{2}\left[1+\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}\right]}, \qquad \alpha_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_r\epsilon_r}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}-1\right]}$$

ossia:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c}, \qquad \beta_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{3\cdot 2.449} = \frac{\omega}{c}2.7105, \qquad \alpha_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{3\cdot 0.449} = \frac{\omega}{c}1.1606$$

Ne segue:

$$q^2(30^0) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left[7.3468-1.347-0.25+\sqrt{(7.3468-1.347-0.25)^2+4\cdot 1.347\cdot 7.3468}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left[5.7498+\sqrt{(5.7498)^2+39.585}\right] = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}14.273$$

$$p^2(30^0) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left[-7.3468 + 1.347 + 0.25 + \sqrt{(7.3468 - 1.347 - 0.25)^2 + 4 \cdot 1.347 \cdot 7.3468}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left[-5.7498 + \sqrt{(5.7498)^2 + 39.585}\right] = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2} 2.7734$$

Si ha:

$$(q - \beta_1 \cos\theta_0)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\sqrt{\frac{14.273}{2}} - \cos(30^0)\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} 3.2595$$

$$(q + \beta_1 \cos\theta_0)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\sqrt{\frac{14.273}{2}} + \cos(30^0)\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} 12.514$$

$$(q - \beta_1 \sin\theta_0 \tan\theta_0)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\sqrt{\frac{14.273}{2}} - \sin(30^0)\tan(30^0)\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} 5.6775$$

$$(q + \beta_1 \sin\theta_0 \tan\theta_0)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\sqrt{\frac{14.273}{2}} + \sin(30^0)\tan(30^0)\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} 8.7622$$

Ne segue:

$$R_\perp = \rho_\perp^2 = \frac{3.2595 + 1.3867}{12.514 + 1.3867} = \underline{\underline{0.33424 = 33.424\%}}$$

$$R_\parallel = \rho_\parallel^2 = 0.33424 \frac{5.6775 + 1.3867}{8.7622 + 1.3867} = 0.33424 \cdot 0.69606 = \underline{\underline{0.23265 = 23.265\%}}$$

08-16) Esercizio n. 4 del 27 Giugno 2008

Un plasma omogeneo indefinito é attraversato da un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 1\ GHz$. Il numero di elettroni per unitá di volume é $N = 10^{16}\ m^{-3}$ e il numero di collisioni per unitá di tempo é $\nu_{eff} = 10^9\ s^{-1}$.

Calcolare l'indice di rifrazione del plasma, la sua conducibilitá ed il coefficiente di attenuazione dell'onda elettromagnetica. Nell'ipotesi che il plasma sia senza collisioni, calcolare il tempo impiegato dall'onda elettromagnetica per attraversare 10 Km di plasma.

———————

$$\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} = \frac{10^{16}\cdot(1.6\cdot 10^{-19})^2}{8.854\cdot 10^{-12}\cdot 9.11\cdot 10^{-31}} = 3.1738\cdot 10^{19} = 31.738\cdot 10^{18} \quad (rad/s)^2$$

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\omega_{eff}^2} = \frac{31.738\cdot 10^{18}}{4\pi^2\cdot 10^{18}+4\pi^2\cdot 10^{18}} = 0.40197$$

$$n = \sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\omega_{eff}^2}} = \sqrt{1-0.40197} = \underline{\underline{0.77332}}$$

$$\sigma = \frac{\epsilon_0\omega_{eff}\omega_p^2}{\omega^2+\omega_{eff}^2} = \underline{\underline{\epsilon_0\cdot 2\pi\cdot 10^9\cdot 0.40197\ \ (S/m)}}$$

$$\epsilon = \epsilon_0\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\omega_{eff}^2}\right) = \epsilon_0\cdot n^2 = \underline{\underline{0.59802\epsilon_0}}$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{0.40197}{0.59802} = 0.67217 \Longrightarrow \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 = 0.45181$$

$$\alpha = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_r\epsilon_r}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}-1\right]} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{0.59802}{2}\left[\sqrt{1+0.45181}-1\right]} =$$

$$= \frac{\omega}{c}0.24753 = \underline{\underline{5.1843\ m^{-1}}}$$

Utilizzando la formula approssimata:

$$\alpha = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} = \frac{\sigma}{2n}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{\epsilon_0\cdot 2\pi\cdot 10^9\cdot 0.40197}{2\cdot 0.77332}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{2\pi\cdot 10^9\cdot 0.40197}{2\cdot c\cdot 0.77332} = \underline{\underline{5.4433\ m^{-1}}}$$

oppure quella utilizzata in letteratura:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}\omega_{eff}\omega_p^2}{c(\omega^2+\omega_{eff}^2)\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\omega_{eff}^2}}} = \frac{\frac{1}{2}\omega_{eff}\omega_p^2}{c(\omega^2+\omega_{eff}^2)n} = \frac{\frac{1}{2}\omega_{eff}}{cn}0.40197 =$$

$$= \frac{\pi\cdot 10^9}{3\cdot 10^8\cdot 0.77332}0.40197 = \underline{\underline{5.4433\ \ m^{-1}}}$$

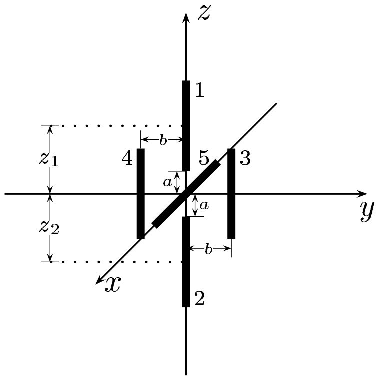
Come si evince dai calcoli il coefficiente di attenuazione calcolato con la formula esatta é praticamente uguale a quello calcolato con la formula approssimata.

$$v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = c\sqrt{1 - 0.80393} = 0.4428c$$

$$\tau = \frac{L}{v_g} = \frac{10^4}{0.4428c} = \underline{\underline{7.5279 \cdot 10^{-5}\ s = 75.279\ \mu s}}$$

08-17) Esercizio n. 1 del 25 Luglio 2008

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato.



———————

Indichiamo con z_1 la quota sull'asse z del centro dell'antenna 1 rispetto all'origine del sistema di riferimento e con z_2 la quota sull'asse z del centro dell'antenna 2 rispetto alla stessa origine.

Le densitá di correnti sull'antenna 1, sull'antenna 2, sull'antenna 3, sull'antenna 4 e sull'antenna 5 sono rispettivamente:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{z} A_1 \delta(x)\delta(y)\cos k(z-z_1) & z_1 - l \le z \le z_1 + l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{z} A_2 \delta(x)\delta(y)\cos k(z-z_2) & z_2 - l \le z \le z_2 + l \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{z} A_3 \delta(x)\delta(y-b)\cos kz & -l \le z \le +l \\ \vec{J}^{(4)} = \widehat{z} A_4 \delta(x)\delta(y+b)\cos kz & -l \le z \le +l \\ \vec{J}^{(5)} = \widehat{x} A_5 \delta(y)\delta(z)\cos kx & -l \le x \le +l \end{cases}$$

Posto $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 1$ per la uniformitá del sistema di antenne, la densitá di corrente risultante é la somma delle cinque:

$$\begin{aligned}\vec{J} =& \widehat{z}\delta(x)\delta(y)\cos k(z-z_1) + \widehat{z}\delta(x)\delta(y)\cos k(z-z_2) + \widehat{z}\delta(x)\delta(y-b)\cos kz + \\ &+ \widehat{z}\delta(x)\delta(y+b)\cos kz + \widehat{x}\delta(y)\delta(z)\cos kx\end{aligned}$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta,\phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} \vec{J}(\vec{r}\,')d^3r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x} \sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,' = x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,')\cos k(z\,'-z_1)dx\,'dy\,'dz\,' + \\ &+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,')\cos k(z\,'-z_2)dx\,'dy\,'dz\,' + \\ &+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,'-b)\cos kz\,'dx\,'dy\,'dz\,' + \\ &+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,'+b)\cos kz\,'dx\,'dy\,'dz\,' + \\ &+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{x}\delta(y\,')\delta(z\,')\cos kx\,'dx\,'dy\,'dz\,'\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{z}\int_{z_1-l}^{z_1+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_1)dz\,' + \\ &+\widehat{z}\int_{z_2-l}^{z_2+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_2)dz\,' + \\ &+\widehat{z}e^{-ikb\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos kz\,'dz\,' + \\ &+\widehat{z}e^{+ikb\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos kz\,'dz\,' + \\ &+\widehat{x}\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{z}\int_{z_1-l}^{z_1+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_1)dz\,' + \\ &+\widehat{z}\int_{z_2-l}^{z_2+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_2)dz\,' + \\ &+\widehat{z}2\cos\left(kb\sin\theta\sin\phi\right)\int_{-l}^{+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos kz\,'dz\,' + \\ &+\widehat{x}\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,'\end{aligned}$$

Valutiamo, ora $\int_{z_1-l}^{z_1+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_1)dz'$. Poniamo $z'-z_1 = u \Longrightarrow dz' = du$. Per $z' = z_1 - l \Longrightarrow u = -l$. Per $z' = z_1 + l \Longrightarrow u = +l$. Si ha, quindi:

$$\int_{z_1-l}^{z_1+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_1)dz' = e^{-ikz_1\cos\theta}\int_{-l}^{+l} e^{-iku\cos\theta}\cos kudu$$

e, analogamente:

$$\int_{z_2-l}^{z_2+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos k(z'-z_2)dz' = e^{-ikz_2\cos\theta}\int_{-l}^{+l} e^{-iku\cos\theta}\cos kudu$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =&\widehat{z}\left(e^{-ikz_1\cos\theta}+e^{-ikz_2\cos\theta}\right)\int_{-l}^{+l} e^{-iku\cos\theta}\cos kudu+\\ &+\widehat{z}2\cos\left(kb\sin\theta\sin\phi\right)\int_{-l}^{+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz'+\\ &+\widehat{x}\int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\cos kx'dx'\end{aligned}$$

Si ha:

$$\widehat{x}\cdot\widehat{r} = \cos\psi = \sin\theta\cos\phi$$

essendo ψ l'angolo formato fra l'asse x e la direzione del vettore posizione $\widehat{e}_r$.

Per un'antenna a mezz'onda risulta, quindi:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

$$\int_{-l}^{+l} e^{-iku\cos\theta}\cos kudu = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\cos kx'dx' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}$$

Pertanto:

$$\vec{N}(\theta,\phi)= \widehat{z}\left(e^{-ikz_1\cos\theta}+e^{-ikz_2\cos\theta}+2\cos\left(kb\sin\theta\sin\phi\right)\right)\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+$$
$$+\widehat{x}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}$$

Poiché:

$$\begin{cases} \widehat{x} = \widehat{e}_r \sin\theta\cos\phi + \widehat{e}_\theta \cos\theta\cos\phi - \widehat{e}_\phi \sin\phi \\ \\ \widehat{y} = \widehat{e}_r \sin\theta\sin\phi + \widehat{e}_\theta \cos\theta\sin\phi + \widehat{e}_\phi \cos\phi \\ \\ \widehat{z} = \widehat{e}_r \cos\theta - \widehat{e}_\theta \sin\theta \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{e}_r \Bigg[\cos\theta \left(e^{-ikz_1\cos\theta} + e^{-ikz_2\cos\theta} + 2\cos\left(kb\sin\theta\sin\phi\right)\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \\ & + \sin\theta\cos\phi \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\Bigg] + \\ & + \widehat{e}_\theta \Bigg[-\sin\theta \left(e^{-ikz_1\cos\theta} + e^{-ikz_2\cos\theta} + 2\cos\left(kb\sin\theta\sin\phi\right)\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \\ & + \cos\theta\cos\phi \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\Bigg] + \\ & + \widehat{e}_\phi \Bigg[-\sin\phi \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\Bigg] \end{aligned}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2 \left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2\right) \widehat{e}_r$$

08-18) Esercizio n. 2 del 25 Luglio 2008

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = 90^0$. Si assuma $a = \dfrac{\lambda}{8}$ e $b = \dfrac{\lambda}{4}$.

———————

Si ha:

$$a = \frac{\lambda}{8}; \quad b = \frac{\lambda}{4}; \quad z_1 = \frac{\lambda}{8} + \frac{\lambda}{4} = \frac{3}{8}\lambda; \quad z_2 = -\frac{3}{8}\lambda$$

Ne segue:

$$N_\theta = \left[-\sin\theta \left(e^{-ikz_1\cos\theta} + e^{-ikz_2\cos\theta} + 2\cos\left(kb\sin\theta\sin\phi\right)\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \right.$$

$$\left. + \cos\theta\cos\phi \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right]$$

$$N_\phi = \left[-\sin\phi \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right]$$

ossia:

$$N_\theta = \left\{ -\sin\theta \left[e^{-ik\frac{3}{8}\lambda\cos\theta} + e^{+ik\frac{3}{8}\lambda\cos\theta} + 2\cos\left(k\frac{\lambda}{4}\sin\theta\sin\phi\right)\right] \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \right.$$

$$\left. + \cos\theta\cos\phi \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right\}$$

$$N_\phi = \left[-\sin\phi \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right]$$

$$N_\theta = \left\{ -\sin\theta \left[e^{-i\frac{3}{4}\pi\cos\theta} + e^{+i\frac{3}{4}\pi\cos\theta} + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)\right] \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \right.$$

$$\left. + \cos\theta\cos\phi \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right\}$$

$$N_\phi = \left[-\sin\phi \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right]$$

e, ancora:

$$N_\theta = \left\{ -\sin\theta \left[2\cos\left(\frac{3}{4}\pi\cos\theta\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)\right] \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \right.$$

$$\left. + \cos\theta\cos\phi \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right\}$$

$$N_\phi = \left[-\sin\phi \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right]$$

$$N_{\theta\,(\theta=90^0)} = \left\{ -\left[2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)\right] \frac{2}{k} \right\}$$

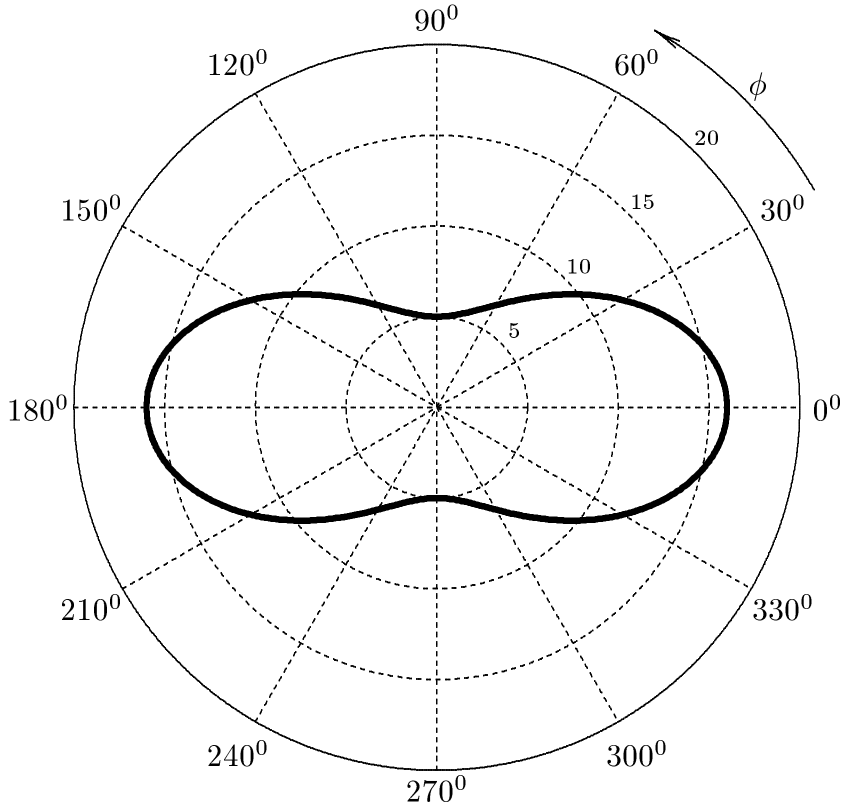
$$N_{\phi\,(\theta=90^0)} = \left[-\frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi} \right]$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{2\pi r}\right)^2 \left\{ \left[2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)\right]^2 + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi}\right]^2 \right\} \widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\phi) = \left\{ \left[2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)\right]^2 + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi}\right]^2 \right\}$$



90⁰
120⁰
60⁰
ϕ
20
15
150⁰
30⁰
10
5
180⁰
0⁰
210⁰
330⁰
240⁰
300⁰
270⁰

08-19) Esercizio n. 3 del 25 Luglio 2008

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 1\ GHz$, viaggiante in aria, incide su una superficie conduttrice i cui parametri costitutivi sono:

$$\epsilon_r = 10, \quad \sigma = 0.6\ S/m, \quad \mu_r = 1.$$

Se l'angolo di incidenza é $\theta_0 = 30^0$, calcolare l'angolo di rifrazione nel mezzo conduttore. Confrontare il risultato trovato con quello competente ad un mezzo dielettrico perfetto avente la stessa costante dielettrica.

Calcoliamo il rapporto $\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}$.

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{0.6}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 10 \cdot 2\pi \cdot 10^9} = 1.0785 \Longrightarrow \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 = 1.1632$$

$$\tan\psi = \frac{\beta_1 \sin\theta_0}{q}$$

Calcoliamo il parametro q con la formula esatta dato che $\left(\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 \simeq 1$.

$$q^2(\theta_0) = \frac{1}{2}\left[\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2\theta_0 + \sqrt{\left(\beta_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2 \sin^2\theta_0\right)^2 + 4\alpha_2^2\beta_2^2}\right]$$

essendo:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c}, \qquad \beta_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_r\epsilon_r}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}\right]}, \qquad \alpha_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_r\epsilon_r}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} - 1\right]}$$

ossia:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c}, \qquad \beta_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{5 \cdot 2.4708} = \frac{\omega}{c}3.5148, \qquad \alpha_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{5 \cdot 0.47078} = \frac{\omega}{c}1.5342$$

Ne segue:

$$q^2(30^0) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left[12.354 - 2.3538 - 0.25 + \sqrt{(12.354 - 2.3538 - 0.25)^2 + 4 \cdot 2.3538 \cdot 12.354}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left[9.7502 + \sqrt{(9.7502)^2 + 116.32}\right] = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}24.289$$

Si ha:

$$\tan\psi = \frac{\beta_1 \sin\theta_0}{q} = \frac{0.5}{\sqrt{\dfrac{24.289}{2}}} = 0.14348$$

da cui:

$$\psi = \arctan(0.14348) = \underline{\underline{8^0.1651}}$$

Se il secondo mezzo non fosse stato conduttore:

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{10}}\cdot 0.5 = 0.15811 \Longrightarrow \theta_2 = \arcsin(0.15811) = \underline{\underline{9^0.0972}}$$

08-20) Esercizio n. 4 del 25 Luglio 2008

Un elettrone viaggia con velocitá $v = 0.9c$ in un campo elettromagnetico di frequenza $\nu = 1\ GHz$. Calcolare la frequenza vista dall'elettrone nei casi: a) la direzione di moto dell'elettrone é antiparallela a quella di propagazione dell'onda elettromagnetica; b) la direzione di moto dell'elettrone in avvicinamento forma un angolo di 30^0 con quella di propagazione dell'onda elettromagnetica.

———————

Indicando con $\omega\,'$ la frequenza angolare osservata dall'elettrone in moto e con ω quella del campo elettromagnetico, si ha:

$$\omega\,' = \gamma\left(\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}\right)$$

essendo:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.81}} = 2.2942$$

il fattore relativistico.

Segue:

$$\omega\,' = \gamma\left(\omega - \frac{\omega}{c}0.9c\cos\theta\right)$$

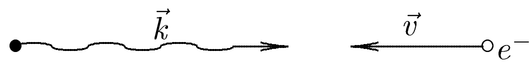
essendo θ l'angolo (minore) formato fra il vettore $\vec{k}$ ed il vettore $\vec{v}$.

$$\omega\,' = \gamma\left(\omega - 0.9\omega\cos\theta\right)$$

e, ancora:

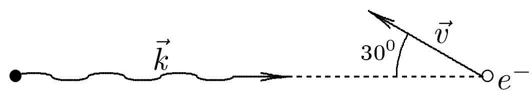
$$\nu\,' = \gamma\nu\left(1 - 0.9\cos\theta\right)$$

Nel caso in cui l'elettrone si muove in direzione antiparallela a quella della radiazione, $\theta = 180^0$ e, quindi si ha:



$$\nu\,' = 2.2942\cdot 10^9\cdot(1+0.9) = \underline{\underline{4.359\cdot 10^9\ Hz}}$$

Nel caso che le due direzioni formano un angolo di 30^0:



In questo caso l'angolo θ é $180^0 - 30^0 = 150^0$. Si ha:

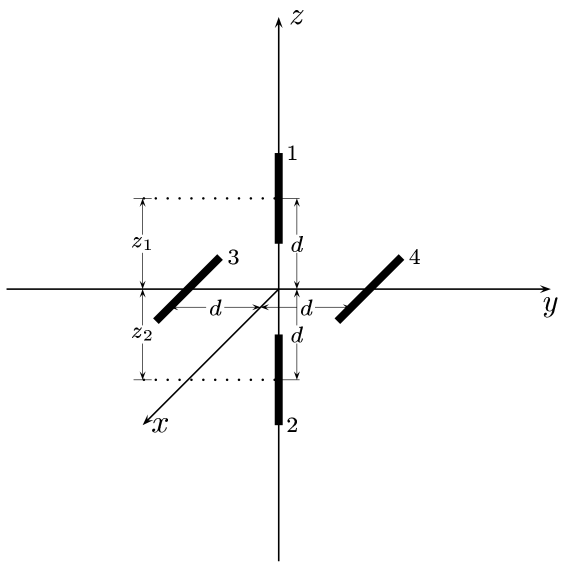
$$\cos(150^0) = -\cos 30^0 = -0.86603$$

Quindi:

$$\nu\,' = 2.2942\cdot 10^9\cdot(1+0.9\cdot 0.86603) = \underline{\underline{4.0824\cdot 10^9\ Hz}}$$

08-21) Esercizio n. 1 del 29 Settembre 2008

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato.



Indichiamo con z_1 la quota sull'asse z del centro dell'antenna 1 rispetto all'origine del sistema di riferimento e con z_2 la quota sull'asse z del centro dell'antenna 2 rispetto alla stessa origine.

Le densitá di corrente sull'antenna 1, sull'antenna 2, sull'antenna 3, sull'antenna 4 sono rispettivamente:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{z} A_1 \delta(x)\delta(y) \cos k(z - z_1) & z_1 - l \le z \le z_1 + l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{z} A_2 \delta(x)\delta(y) \cos k(z - z_2) & z_2 - l \le z \le z_2 + l \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{x} A_3 \delta(y + d)\delta(z) \cos kx & -l \le x \le +l \\ \vec{J}^{(4)} = \widehat{x} A_4 \delta(y - d)\delta(z) \cos kx & -l \le x \le +l \end{cases}$$

Posto $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$ per la uniformitá del sistema di antenne, la densitá di corrente risultante é la somma delle quattro:

$$\begin{aligned} \vec{J} =& \widehat{z}\delta(x)\delta(y) \cos k(z - z_1) + \widehat{z}\delta(x)\delta(y) \cos k(z - z_2) + \widehat{x}\delta(y + d)\delta(z) \cos kx + \\ &+ \widehat{x}\delta(y - d)\delta(z) \cos kx \end{aligned}$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta,\phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} \vec{J}(\vec{r}\,')d^3r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x}\sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,' = x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) = &\int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,')\cos k(z\,'-z_1)dx\,'dy\,'dz\,' +\\ &+\int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{z}\delta(x\,')\delta(y\,')\cos k(z\,'-z_2)dx\,'dy\,'dz\,' +\\ &+\int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{x}\delta(y\,'+d)\delta(z\,')\cos kx\,'dx\,'dy\,'dz\,' +\\ &+\int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{x}\delta(y\,'-d)\delta(z\,')\cos kx\,'dx\,'dy\,'dz\,'\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) = &\widehat{z}\int_{z_1-l}^{z_1+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_1)dz\,' +\\ &+\widehat{z}\int_{z_2-l}^{z_2+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_2)dz\,' +\\ &+\widehat{x}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,' +\\ &+\widehat{x}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) = &\widehat{z}\int_{z_1-l}^{z_1+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_1)dz\,' +\\ &+\widehat{z}\int_{z_2-l}^{z_2+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_2)dz\,' +\\ &+\widehat{x}2\cos(kd\sin\theta\sin\phi)\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,'\end{aligned}$$

Valutiamo, ora $\int_{z_1-l}^{z_1+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_1)dz\,'$. Poniamo $z\,'-z_1 = u \Longrightarrow dz\,' = du$. Per $z\,' = z_1 - l \Longrightarrow u = -l$. Per $z\,' = z_1 + l \Longrightarrow u = +l$. Si ha, quindi:

$$\int_{z_1-l}^{z_1+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos k(z\,'-z_1)dz\,' = e^{-ikz_1\cos\theta}\int_{-l}^{+l} e^{-iku\cos\theta}\cos ku\,du$$

e, analogamente:

$$\int_{z_2-l}^{z_2+l} e^{-ikz' \cos\theta} \cos k(z' - z_2) dz' = e^{-ikz_2 \cos\theta} \int_{-l}^{+l} e^{-iku \cos\theta} \cos kudu$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{z} \left(e^{-ikz_1 \cos\theta} + e^{-ikz_2 \cos\theta} \right) \int_{-l}^{+l} e^{-iku\cos\theta} \cos kudu + \\ &+ \widehat{x} 2 \cos\left(kd \sin\theta \sin\phi \right) \int_{-l}^{+l} e^{-ikx' \sin\theta\cos\phi} \cos kx' dx'\end{aligned}$$

Si ha:

$$\widehat{x} \cdot \widehat{r} = \cos\psi = \sin\theta\cos\phi$$

essendo ψ l'angolo formato fra l'asse x e la direzione del vettore posizione $\widehat{e}_r$.

Per un'antenna a mezz'onda risulta, quindi:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikz' \cos\theta} \cos kz' dz' = \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

$$\int_{-l}^{+l} e^{-iku \cos\theta} \cos kudu = \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikx' \sin\theta\cos\phi} \cos kx' dx' = \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1 - \sin^2\theta\cos^2\phi}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{z} \left(e^{-ikz_1 \cos\theta} + e^{-ikz_2 \cos\theta} \right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \\ &+ \widehat{x} 2 \cos\left(kd \sin\theta \sin\phi \right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1 - \sin^2\theta\cos^2\phi}\end{aligned}$$

Poiché:

$$\begin{cases} \widehat{x} = \widehat{e}_r \sin\theta\cos\phi + \widehat{e}_\theta \cos\theta\cos\phi - \widehat{e}_\phi \sin\phi \\ \widehat{y} = \widehat{e}_r \sin\theta\sin\phi + \widehat{e}_\theta \cos\theta\sin\phi + \widehat{e}_\phi \cos\phi \\ \widehat{z} = \widehat{e}_r \cos\theta - \widehat{e}_\theta \sin\theta \end{cases}$$

si ha:

$$
\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{e}_r \left[\cos\theta \left(e^{-ikz_1\cos\theta} + e^{-ikz_2\cos\theta} \right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \right. \\
& \left. + \sin\theta\cos\phi 2\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right] + \\
& + \widehat{e}_\theta \left[-\sin\theta \left(e^{-ikz_1\cos\theta} + e^{-ikz_2\cos\theta} \right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \right. \\
& \left. + \cos\theta\cos\phi 2\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right] + \\
& + \widehat{e}_\phi \left[-\sin\phi 2\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right]
\end{aligned}
$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$
\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r} \right)^2 \left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2 \right) \widehat{e}_r
$$

08-22) Esercizio n. 2 del 29 Settembre 2008

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = 90^0$ e nel piano $\phi = 0^0$. Si assuma $d = \dfrac{\lambda}{2}$.

Si ha:

$$N_\theta = \left[-\sin\theta \left(e^{-ikz_1\cos\theta} + e^{-ikz_2\cos\theta} \right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \right.$$

$$\left. + \cos\theta\cos\phi 2\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right]$$

$$N_\phi = \left[-\sin\phi 2\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right]$$

Posto $z_1 = +d$ e $z_2 = -d$, si ha:

$$N_\theta = \left[-\sin\theta \left(e^{-ikd\cos\theta} + e^{+ikd\cos\theta} \right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \right.$$

$$\left. + \cos\theta\cos\phi 2\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right]$$

$$N_\phi = \left[-\sin\phi 2\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right]$$

e, ancora:

$$N_\theta = \left[-\sin\theta 2\cos(kd\cos\theta) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \right.$$

$$\left. + \cos\theta\cos\phi 2\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right]$$

$$N_\phi = \left[-\sin\phi 2\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right]$$

$$N_{\theta(\theta=90^0)} = -\frac{4}{k}$$

$$N_{\phi(\theta=90^0)} = -\sin\phi 2\cos\left(kd\sin\phi\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{1-\cos^2\phi}$$

ossia:

$$N_{\theta(\theta=90^0)} = -\,\frac{4}{k}$$

$$N_{\phi(\theta=90^0)} = -\,2\cos\left(kd\sin\phi\right)\,\frac{2}{k}\,\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

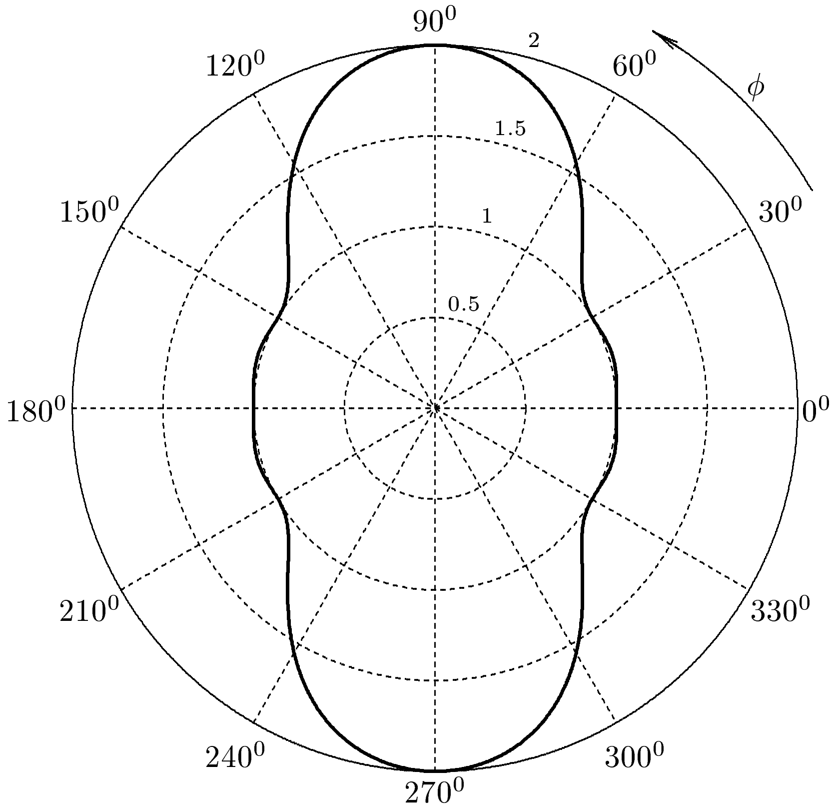
$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{1}{\pi r}\right)^2\left\{1+\left[\cos\left(kd\sin\phi\right)\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi}\right]^2\right\}\widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\phi) = 1+\left[\cos\left(kd\sin\phi\right)\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi}\right]^2$$

Per $d = \dfrac{\lambda}{2}$:

$$F(\phi) = 1+\left[\cos\left(\pi\sin\phi\right)\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi}\right]^2$$



$$
\begin{aligned}
N_{\theta\,(\phi=0^0)} =& -\sin\theta 2\cos(kd\cos\theta)\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+2\cos\theta\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{1-\sin^2\theta}\\
N_{\phi\,(\phi=0^0)} =&0
\end{aligned}
$$

ossia:

$$
\begin{aligned}
N_{\theta\,(\phi=0^0)} =& -2\cos(kd\cos\theta)\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}+2\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta}\\
N_{\phi\,(\phi=0^0)} =&0
\end{aligned}
$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

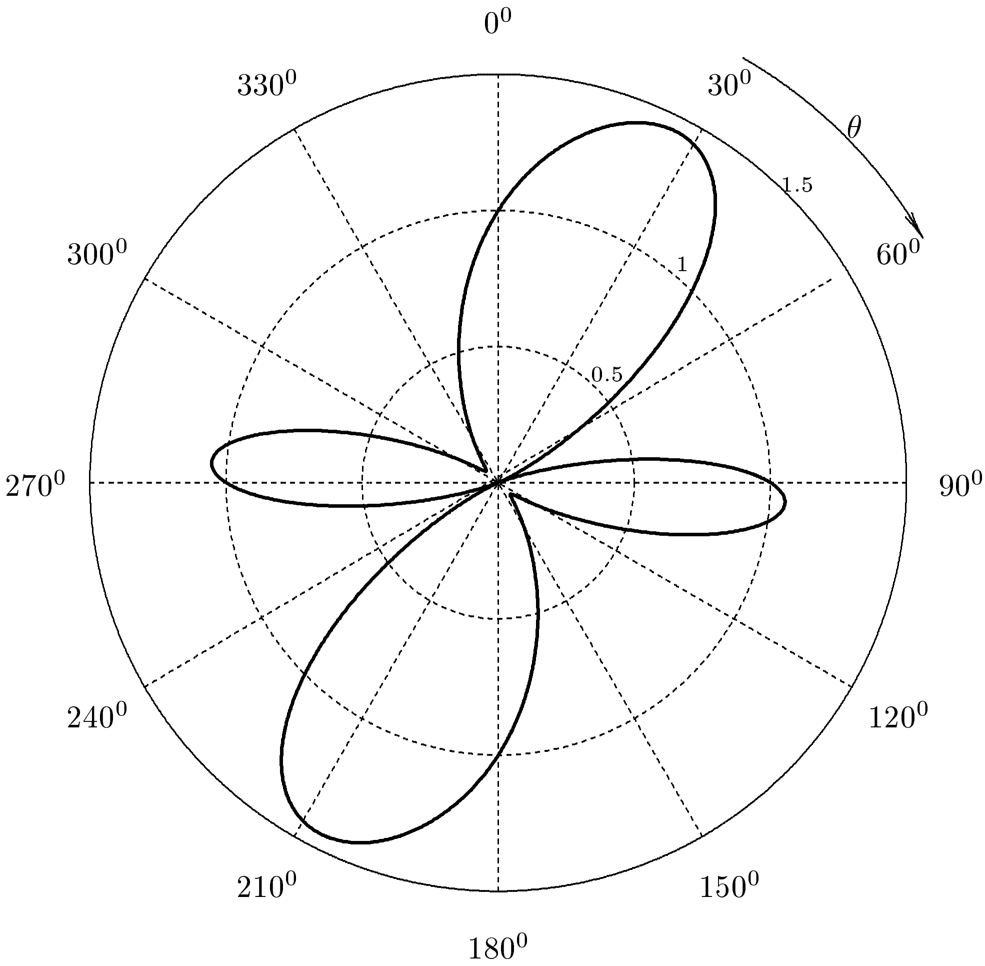
$$
\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{1}{\pi r}\right)^2\left[-\cos\left(kd\cos\theta\right)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta}\right]^2\widehat{e}_r
$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$
F(\theta) = \left[-\cos\left(kd\cos\theta\right)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta}\right]^2
$$

Per $d=\dfrac{\lambda}{2}$:

$$
F(\theta) = \left[-\cos\left(\pi\cos\theta\right)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta}\right]^2
$$



0^0
30^0
60^0
90^0
120^0
150^0
180^0
210^0
240^0
270^0
300^0
330^0
θ
1.5
1
0.5

08-23) Esercizio n. 3 del 29 Settembre 2008

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 1\ GHz$, viaggiante in aria, incide su una superficie conduttrice i cui parametri costitutivi sono:

$$\epsilon_r = 10, \quad \sigma = 6\ S/m, \quad \mu_r = 1.$$

Graficare il coefficiente di riflessione per $E_\perp$ e quello per $E_\parallel$, in funzione dell'angolo di incidenza. Valutare l'angolo pseudo-Brewster ed il valore della riflettivitá ad esso competente.

———————

Calcoliamo il rapporto $\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}$.

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{6}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 10 \cdot 2\pi \cdot 10^9} = 10.785 \Longrightarrow \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 = 116.32 >> 1$$

In questo caso:

$$\alpha_2 \simeq \beta_2 \simeq q \simeq p \simeq \sqrt{\frac{\omega\mu_2\sigma_2}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6}{2}} \simeq 153.91\ rad/m$$

Poiché il mezzo conduttore é non magnetico ($\mu_1 \simeq \mu_2$), i coefficienti di riflessione sono:

$$\rho_\perp^2 = \frac{(q - \beta_1 \cos\theta_0)^2 + p^2}{(q + \beta_1 \cos\theta_0)^2 + p^2} \qquad (\mu_1 \simeq \mu_2)$$

e:

$$\rho_\parallel^2 = \rho_\perp^2 \frac{(q - \beta_1 \sin\theta_0 \tan\theta_0)^2 + p^2}{(q + \beta_1 \sin\theta_0 \tan\theta_0)^2 + p^2} \qquad (\mu_1 \simeq \mu_2)$$

Si ha anche:

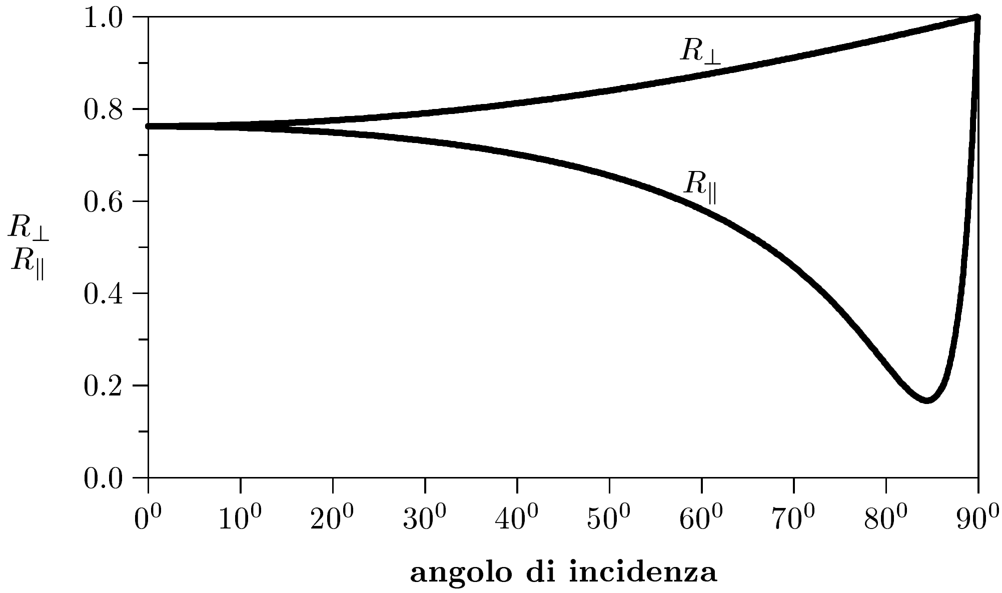
$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} = 20.9439$$

Tabella delle riflettivitá per $\left(\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 >> 1$

θ_0	$R_\perp$	θ_0	$R_\parallel$
0^0	0.7624	0^0	0.7624
10^0	0.7655	10^0	0.7592
20^0	0.7749	20^0	0.7491
30^0	0.7905	30^0	0.7307

40^0	0.8121	40^0	0.7013
50^0	0.8397	50^0	0.6554
60^0	0.8729	60^0	0.5820
70^0	0.9111	70^0	0.4581
80^0	0.9538	80^0	0.2462
81^0	0.9583	81^0	0.2219
82^0	0.9628	82^0	0.1994
83^0	0.9674	83^0	0.1806
84^0	0.9720	84^0	0.1688
85^0	0.9766	85^0	0.1695
86^0	0.9812	86^0	0.1917
87^0	0.9859	87^0	0.2507
88^0	0.9905	88^0	0.3722
89^0	0.9953	89^0	0.5992
90^0	1	90^0	1

Coefficienti di riflessione $R_\perp$ e $R_\parallel$ per superficie conduttrice - $\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 >> 1$



Si ha anche:

$$x = \frac{\mu_2\beta_1}{\mu_1\beta_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{20.9439}{153.91} \simeq 0.135429 << 1$$

Anche se $\frac{\mu_2\beta_1}{\mu_1\beta_2}$ non é proprio molto minore dell'unitá, possiamo graficare le riflettivitá con le formule ancora piú approssimate:

Quindi:

$$\rho_\perp^2 \simeq 1 - 2x\cos\theta_0$$

$$\rho_{\parallel}^2 = \frac{2\cos^2\theta_0 - 2x\cos\theta_0 + x^2}{2\cos^2\theta_0 + 2x\cos\theta_0 + x^2}$$

Il valore dell'angolo pseudo Brewster si ottiene, in questo caso, dalla relazione:

$$\cos\theta_{pB} = \frac{x_{pB}}{\sqrt{2}} \simeq 0.095763 \Longrightarrow \theta_{pB} = \underline{\underline{84^0.54}}$$

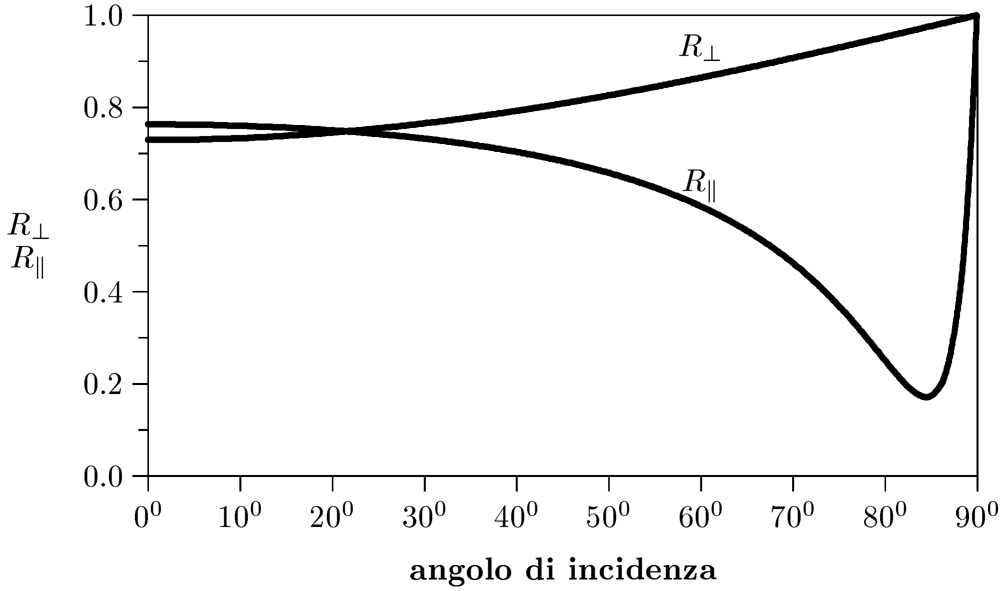
che sostituito nella formula della riflettivitá conduce al valore minimo di essa:

$$\left(\rho_{\parallel}^2\right)_{mim} = \underline{\underline{0.17158}}$$

Tabella per i coefficienti di riflessione approssimati $\frac{\mu_2\beta_1}{\mu_1\beta_2} << 1$**,** $x = 0.135429$

θ_0	$R_\perp$	θ_0	$R_\parallel$
0^0	0.7291	0^0	0.7634
10^0	0.7333	10^0	0.7602
20^0	0.7455	20^0	0.7503
30^0	0.7654	30^0	0.7324
40^0	0.7925	40^0	0.7035
50^0	0.8259	50^0	0.6582
60^0	0.8646	60^0	0.5857
70^0	0.9074	70^0	0.4629
80^0	0.9530	80^0	0.2515
81^0	0.9576	81^0	0.2272
82^0	0.9623	82^0	0.2045
83^0	0.9670	83^0	0.1855
84^0	0.9717	84^0	0.1734
85^0	0.9764	85^0	0.1727
86^0	0.9811	86^0	0.1954
87^0	0.9858	87^0	0.2358
88^0	0.9905	88^0	0.3746
89^0	0.9953	89^0	0.6007
90^0	1	90^0	1

Coefficienti di riflessione $R_\perp$ e $R_\parallel$ per superficie conduttrice con $x = 0.135429$



Si puó osservare che i grafici si assomigliano abbastanza.

08-24) Esercizio n. 4 del 29 Settembre 2008

Un sistema ottico é costituito da tre mezzi dielettrici perfetti: aria - olio d'oliva - vetro. Un fascio di luce di lunghezza d'onda nel vuoto $\lambda_0 = 589.3\ nm$ (arancione), viaggiante in aria e linearmente polarizzata, penetra nel sistema in direzione della normale. Se lo spessore dell'olio é 1 mm, calcolare il coefficiente di riflessione. Si assuma $n_{olio} = 1.467$ e $n_{vetro} = 1.5$. Confrontare tale risultato con quello competente al sistema aria - vetro.

Il coefficiente di riflessione dello strato dielettrico é:

$$R = \frac{|E_1|^2}{|E_0|^2} = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\beta_2 d}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\beta_2 d}$$

dove:

$$r_{12} = \frac{\mu_2 k_1 - \mu_1 k_2}{\mu_2 k_1 + \mu_1 k_2} \qquad e \qquad r_{23} = \frac{\mu_3 k_2 - \mu_2 k_3}{\mu_3 k_2 + \mu_2 k_3}$$

che, nel nostro caso, essendo $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, si possono scrivere:

$$r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = -\frac{0.467}{2.467} = -0.1893 \qquad e \qquad r_{23} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3} = -\frac{0.033}{2.967} = -0.01112$$

Si ha:

$$\begin{cases} (r_{12} + r_{23})^2 \simeq 0.04 \\ 4r_{12}r_{23} \simeq 0.00842 \\ (1 + r_{12}r_{23})^2 = 1.004214 \end{cases}$$

Inoltre:

$$\beta_2 = \frac{\omega}{c} n_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_2 = 15641325.0392541\ rad/m \Longrightarrow \beta_2 d = 15641.3250392541$$

Ne segue:

$$\sin\beta_2 d = 0.61688833322158 \Longrightarrow \sin^2\beta_2 d = 0.380551215664899$$

Quindi:

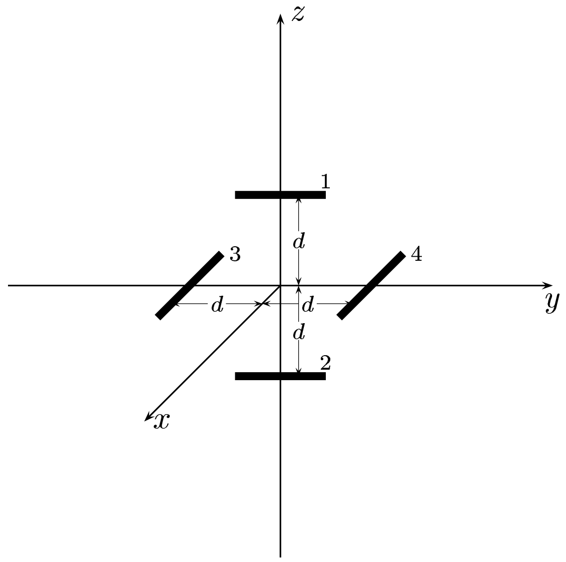
$$R = \frac{0.04 - 0.00842 \cdot 0.380551215664899}{1.004214 - 0.00842 \cdot 0.380551215664899} = \underline{\underline{0.036759}} = \underline{\underline{3.6759\%}}$$

Se il sistema fosse costituito soltanto dall'aria e dal vetro, il coefficiente di riflessione sarebbe:

$$R = |r_{13}|^2 = \left|\frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3}\right|^2 = \underline{\underline{0.04}} = \underline{\underline{4\%}}$$

08-25) Esercizio n. 1 del 28 Novembre 2008

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato.



———————

Le densitá di corrente sull'antenna 1, sull'antenna 2, sull'antenna 3, sull'antenna 4 sono rispettivamente:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{y} A_1 \delta(x)\delta(z-d)\cos ky & -l \le y \le +l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{y} A_2 \delta(x)\delta(z+d)\cos ky & -l \le y \le +l \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{x} A_3 \delta(y+d)\delta(z)\cos kx & -l \le x \le +l \\ \vec{J}^{(4)} = \widehat{x} A_4 \delta(y-d)\delta(z)\cos kx & -l \le x \le +l \end{cases}$$

Posto $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$ per la uniformitá del sistema di antenne, la densitá di corrente risultante é la somma delle quattro:

$$\begin{aligned}\vec{J} =& \widehat{y}\delta(x)\delta(z-d)\cos ky + \widehat{y}\delta(x)\delta(z+d)\cos ky + \widehat{x}\delta(y+d)\delta(z)\cos kx + \\ &+\widehat{x}\delta(y-d)\delta(z)\cos kx\end{aligned}$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta,\phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} \vec{J}(\vec{r}\,')d^3r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x}\sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,' = x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{y}\delta(x\,')\delta(z\,'-d)\cos ky\,'dx\,'dy\,'dz\,' + \\ &+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{y}\delta(x\,')\delta(z\,'+d)\cos ky\,'dx\,'dy\,'dz\,' + \\ &+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{x}\delta(y\,'+d)\delta(z\,')\cos kx\,'dx\,'dy\,'dz\,' + \\ &+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{x}\delta(y\,'-d)\delta(z\,')\cos kx\,'dx\,'dy\,'dz\,'\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{y}e^{-ikd\cos\theta}\int_{-l}^{+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi}\cos ky\,'dy\,' + \\ &+ \widehat{y}e^{+ikd\cos\theta}\int_{-l}^{+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi}\cos ky\,'dy\,' + \\ &+ \widehat{x}e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,' + \\ &+ \widehat{x}e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{y}2\cos\left(kd\cos\theta\right)\int_{-l}^{+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi}\cos ky\,'dy\,' + \\ &+ \widehat{x}2\cos\left(kd\sin\theta\sin\phi\right)\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,'\end{aligned}$$

Si ha:

$$\widehat{x}\cdot\widehat{r} = \cos\psi = \sin\theta\cos\phi$$

essendo ψ l'angolo formato fra l'asse x e la direzione del vettore posizione $\widehat{e}_r$.

Inoltre:

$$\widehat{y}\cdot\widehat{r} = \cos\chi = \sin\theta\sin\phi$$

essendo χ l'angolo formato fra l'asse y e la direzione del vettore posizione $\widehat{e}_r$.

Per un'antenna a mezz'onda risulta, quindi:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-iky\,'\sin\theta\sin\phi}\cos ky\,'dy\,' = \int_{-l}^{+l} e^{-iky\,'\cos\chi}\cos ky\,'dy\,' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}$$

e:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\cos kx'dx' = \int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\cos\psi}\cos kx'dx' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}$$

Pertanto:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{y}2\cos(kd\cos\theta)\,\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} + \widehat{x}2\cos(kd\sin\theta\sin\phi)\,\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}$$

Poiché:

$$\begin{cases} \widehat{x} = \widehat{e}_r\sin\theta\cos\phi + \widehat{e}_\theta\cos\theta\cos\phi - \widehat{e}_\phi\sin\phi \\ \widehat{y} = \widehat{e}_r\sin\theta\sin\phi + \widehat{e}_\theta\cos\theta\sin\phi + \widehat{e}_\phi\cos\phi \\ \widehat{z} = \widehat{e}_r\cos\theta - \widehat{e}_\theta\sin\theta \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{e}_r\Bigg[&2\sin\theta\sin\phi\cos(kd\cos\theta)\,\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} + \\
&+2\sin\theta\cos\phi\cos(kd\sin\theta\sin\phi)\,\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\Bigg] + \\
+\widehat{e}_\theta\Bigg[&2\cos\theta\sin\phi\cos(kd\cos\theta)\,\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} + \\
&+2\cos\theta\cos\phi\cos(kd\sin\theta\sin\phi)\,\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\Bigg] + \\
+\widehat{e}_\phi\Bigg[&2\cos\phi\cos(kd\cos\theta)\,\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} - \\
&-2\sin\phi\cos(kd\sin\theta\sin\phi)\,\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\Bigg]
\end{aligned}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2\right)\widehat{e}_r$$

08-26) Esercizio n. 2 del 28 Novembre 2008

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = 90^0$ e nel piano $\phi = 0^0$. Si assuma $d = \dfrac{\lambda}{2}$.

—————————

Si ha:

$$N_\theta = \left[2\cos\theta \sin\phi \cos(kd\cos\theta)\, \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} + \right.$$
$$\left. +2\cos\theta\cos\phi\cos(kd\sin\theta\sin\phi)\, \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right]$$
$$N_\phi = \left[2\cos\phi\cos(kd\cos\theta)\, \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} - \right.$$
$$\left. -2\sin\phi\cos(kd\sin\theta\sin\phi)\, \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi} \right]$$

$$N_{\theta\,(\theta=90^0)} = 0$$
$$N_{\phi\,(\theta=90^0)} = \left[2\cos\phi \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{1-\sin^2\phi} - 2\sin\phi\cos(kd\sin\phi)\, \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{1-\cos^2\phi} \right]$$

ossia:

$$N_{\theta\,(\theta=90^0)} = 0$$
$$N_{\phi\,(\theta=90^0)} = \left[2\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} - 2\cos(kd\sin\phi)\, \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi} \right]$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

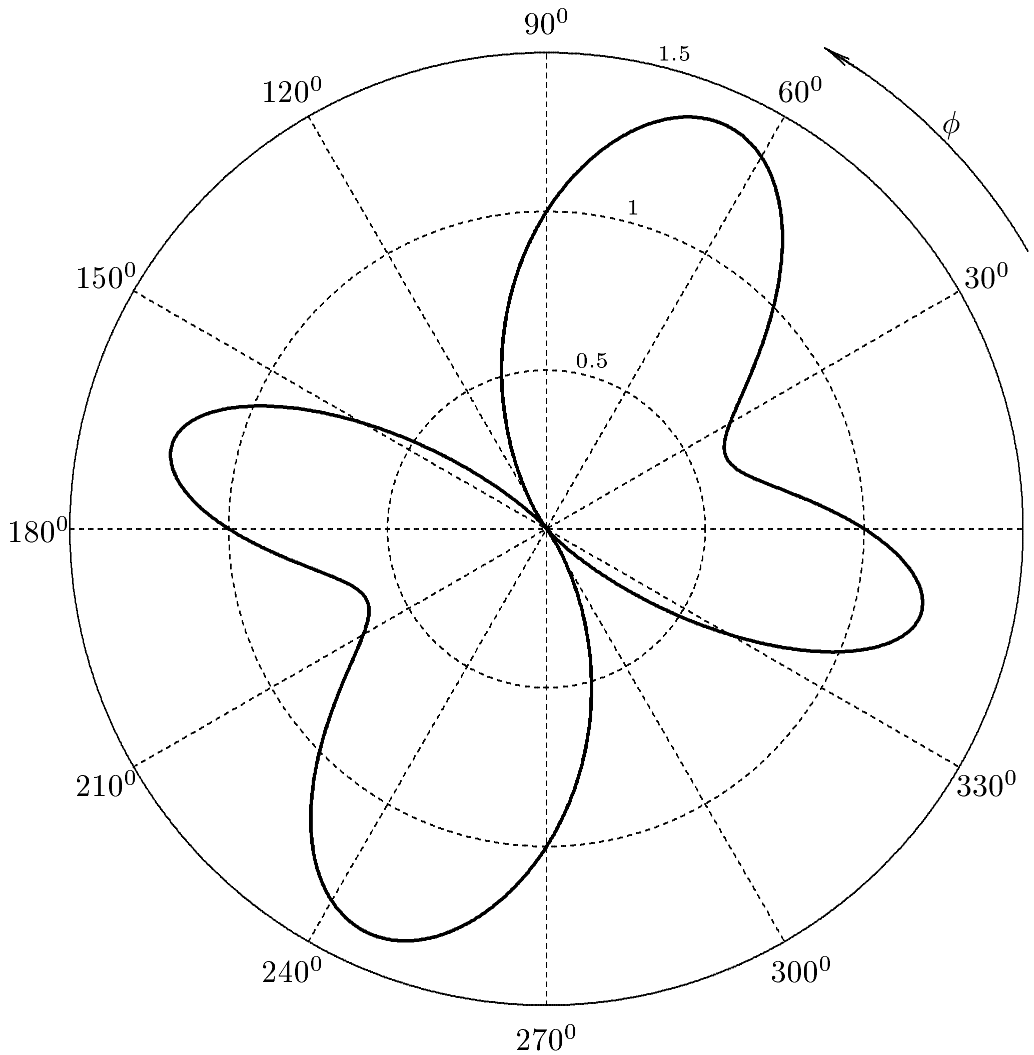
$$\langle\vec{S}\rangle_{(\theta=90^0)} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{\pi r}\right)^2 \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} - \cos(kd\sin\phi)\, \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi} \right]^2 \widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\phi)_{(\theta=90^0)} = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} - \cos(kd\sin\phi)\, \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi} \right]^2$$

Per $d = \dfrac{\lambda}{2}$:

$$F(\phi)_{(\theta=90^0)} = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos\phi} - \cos\left(\pi\sin\phi\right)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi} \right]^2$$



$$N_{\theta(\phi=0^0)} = 2\cos\theta \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{1-\sin^2\theta}$$
$$N_{\phi(\phi=0^0)} = 2\cos\left(kd\cos\theta\right)\frac{2}{k}$$

ossia:

$$N_{\theta(\phi=0^0)} = \frac{4}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta}$$
$$N_{\phi(\phi=0^0)} = \frac{4}{k}\cos\left(kd\cos\theta\right)$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

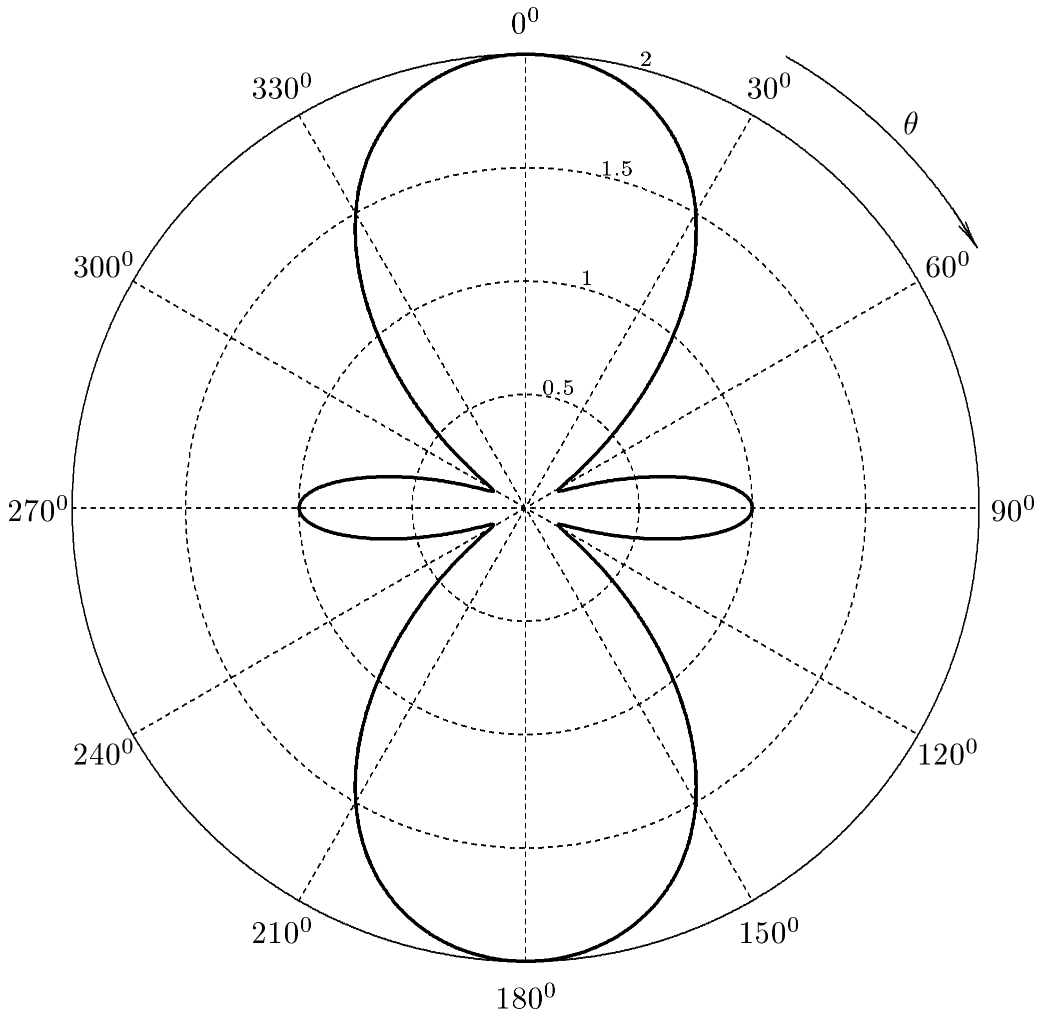
$$\langle \vec{S} \rangle_{(\phi=0^0)} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{\pi r} \right)^2 \left\{ \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta} \right]^2 + \left[\cos\left(kd\cos\theta\right)\right]^2 \right\} \widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\theta)_{(\phi=0^0)} = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta} \right]^2 + \left[\cos\left(kd\cos\theta\right)\right]^2$$

Per $d = \dfrac{\lambda}{2}$:

$$F(\theta)_{(\phi=0^0)} = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta} \right]^2 + \left[\cos\left(\pi\cos\theta\right)\right]^2$$



08-27) Esercizio n. 3 del 28 Novembre 2008

Un'onda elettromagnetica piana incide in direzione della normale sulla superficie del mare. Nell'ipotesi che i parametri costitutivi siano

$$\epsilon_r = 80,\ \mu_r = 1,\ \sigma = 3\ S/m,$$

calcolare: a) il coefficiente di riflessione; b) la profonditá di penetrazione nel mare, per le seguenti frequenze: 100 MHz, 400 MHz e 700 MHz. Si faccia l'ipotesi che i parametri costitutivi restino costanti per tutte le frequenze.

———————

Poiché il mezzo conduttore é non magnetico ($\mu_1 \simeq \mu_2$), i coefficienti di riflessione sono:

$$\rho_\perp^2 = \frac{(q - \beta_1 \cos\theta_0)^2 + p^2}{(q + \beta_1 \cos\theta_0)^2 + p^2} \qquad (\mu_1 \simeq \mu_2)$$

e:

$$\rho_\parallel^2 = \rho_\perp^2 \frac{(q - \beta_1 \sin\theta_0 \tan\theta_0)^2 + p^2}{(q + \beta_1 \sin\theta_0 \tan\theta_0)^2 + p^2} \qquad (\mu_1 \simeq \mu_2)$$

che per $\theta_0 = 0^0$ diventano:

$$R = \rho_\perp^2 = \rho_\parallel^2 = \frac{(q - \beta_1)^2 + p^2}{(q + \beta_1)^2 + p^2} \qquad (\mu_1 \simeq \mu_2)$$

Calcoliamo i rapporti $\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}$:

a) $\nu = 100\ MHz \Longrightarrow \dfrac{\sigma}{\epsilon\omega} = \dfrac{3}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 80 \cdot 2\pi \cdot 10^8} \simeq 6.74 \Longrightarrow \left(\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 \simeq 45.43 \gg 1$

b) $\nu = 400\ MHz \Longrightarrow \dfrac{\sigma}{\epsilon\omega} = \dfrac{3}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 80 \cdot 2\pi \cdot 4 \cdot 10^8} \simeq 1.685 \Longrightarrow \left(\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 \simeq 2.84$

c) $\nu = 700\ MHz \Longrightarrow \dfrac{\sigma}{\epsilon\omega} = \dfrac{3}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 80 \cdot 2\pi \cdot 7 \cdot 10^8} \simeq 0.963 \Longrightarrow \left(\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 \simeq 0.927$

Caso a)

In questo caso:

$$\alpha_2 \simeq \beta_2 \simeq q \simeq p \simeq \sqrt{\frac{\omega\mu_2\sigma_2}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^8 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3}{2}} \simeq 34.4144\ rad/m$$

e

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} = 2.094\ rad/m$$

Ne segue:

$$R \simeq \frac{(34.4144 - 2.094)^2 + (34.4144)^2}{(34.4144 + 2.094)^2 + (34.4144)^2} \simeq \underline{\underline{0.8855}} = \underline{\underline{88.55\%}}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{34.4144} \simeq \underline{\underline{0.029\ m = 2.9\ cm}}$$

$\underline{\underline{\textit{Caso b)}}}$

Si ha:

$$\alpha_2 = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}-1\right]} = \frac{2\pi\cdot 4\cdot 10^8}{3\cdot 10^8}\sqrt{40\left[\sqrt{1+2.84}-1\right]} \simeq 51.9\ m^{-1}$$

$$\beta_2 = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}+1\right]} = \frac{2\pi\cdot 4\cdot 10^8}{3\cdot 10^8}\sqrt{40\left[\sqrt{1+2.84}+1\right]} \simeq 91.15\ rad/m$$

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\cdot 4\cdot 10^8}{3\cdot 10^8} \simeq 8.377\ rad/m$$

Per $\theta = 0^0$ risulta: $p = \alpha_2 = 51.9\ m^{-1}$, $q = \beta_2 = 91.15\ rad/m$.
Ne segue:

$$R = \frac{(91.15 - 8.377)^2 + (51.9)^2}{(91.15 + 8.377)^2 + (51.9)^2} \simeq \underline{\underline{0.7576}} = \underline{\underline{75.76\%}}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{51.9} \simeq \underline{\underline{0.0193\ m = 1.93\ cm}}$$

$\underline{\underline{\textit{Caso c)}}}$

Si ha:

$$\alpha_2 = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}-1\right]} = \frac{2\pi\cdot 7\cdot 10^8}{3\cdot 10^8}\sqrt{40\left[\sqrt{1+0.927}-1\right]} \simeq 57.77\ m^{-1}$$

$$\beta_2 = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}+1\right]} = \frac{2\pi\cdot 7\cdot 10^8}{3\cdot 10^8}\sqrt{40\left[\sqrt{1+0.927}+1\right]} \simeq 143.29\ rad/m$$

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\cdot 7\cdot 10^8}{3\cdot 10^8} \simeq 14.66\ rad/m$$

Per $\theta = 0^0$ risulta: $p = \alpha_2 = 57.77\ m^{-1}$, $q = \beta_2 = 143.29\ rad/m$.
Ne segue:

$$R = \frac{(143.29 - 14.66)^2 + (57.77)^2}{(143.29 + 14.66)^2 + (57.77)^2} \simeq \underline{\underline{0.7029}} = \underline{\underline{70.29\%}}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{57.77} \simeq \underline{\underline{0.0173\ m = 1.73\ cm}}$$

08-28) Esercizio n. 4 del 28 Novembre 2008

Un plasma omogeneo é caratterizzato dai seguenti parametri:

$$N = 6.4 \cdot 10^{11}\ m^{-3},\ \nu_{eff} = 10^6 s^{-1}$$

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $10^7\ Hz$ attraversa il plasma. Calcolare la costante di propagazione β, il coefficiente di attenuazione α, la velocitá di fase e la velocitá di gruppo.

La frequenza angolare di plasma é:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{6.4 \cdot 10^{11} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}}} \simeq 4.5 \cdot 10^7\ rad/s$$

La costante dielettrica relativa ϵ_r é:

$$\epsilon_r = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}\right) = \left(1 - \frac{(4.5 \cdot 10^7)^2}{4\pi^2 \cdot 10^{14} + 4\pi^2 \cdot 10^{12}}\right) \simeq 0.4921$$

La conducibilitá é:

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \omega_{eff} \omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2} = \frac{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2\pi \cdot 10^6 \cdot (4.5 \cdot 10^7)^2}{4\pi^2 \cdot 10^{14} + 4\pi^2 \cdot 10^{12}} \simeq 2.8253 \cdot 10^{-5}\ S/m$$

La costante di propagazione ed il coefficiente di attenuazione sono:

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r} = \frac{2\pi \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8}\sqrt{0.4921} \simeq \underline{\underline{0.1469\ rad/m}}$$

$$\alpha = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{2.8253 \cdot 10^{-5}}{2}\sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 0.4921}} \simeq \underline{\underline{7.59 \cdot 10^{-3}\ m^{-1}}}$$

La velocitá di fase e quella di gruppo sono:

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{0.4921}} \simeq \underline{\underline{4.2765 \cdot 10^8\ m/s}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\left(\dfrac{d\beta}{d\omega}\right)}$$

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\omega_{eff}^2}} + \frac{\omega}{c}\frac{\dfrac{2\omega\omega_p^2}{\left(\omega^2+\omega_{eff}^2\right)^2}}{2\sqrt{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2+\omega_{eff}^2}}} =$$

$$= \frac{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2+\omega_{eff}^2}+\dfrac{\omega^2\omega_p^2}{\left(\omega^2+\omega_{eff}^2\right)^2}}{c\sqrt{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2+\omega_{eff}^2}}} = \frac{1-\dfrac{\omega_p^2\omega_{eff}^2}{\left(\omega^2+\omega_{eff}^2\right)^2}}{c\sqrt{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2+\omega_{eff}^2}}}$$

Ne segue:

$$v_g = \frac{c\sqrt{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2+\omega_{eff}^2}}}{1-\dfrac{\omega_p^2\omega_{eff}^2}{(\omega^2+\omega_{eff}^2)^2}} = \frac{c\sqrt{\epsilon_r}}{\left[1-\dfrac{(4.5\cdot 10^7)^2\cdot(2\pi\cdot 10^6)^2}{(4\pi^2\cdot 10^{14}+4\pi^2\cdot 10^{12})^2}\right]} \simeq$$

$$\simeq \frac{2.1045\cdot 10^8}{1-5.03\cdot 10^{-3}} \simeq \underline{\underline{2.115\cdot 10^8\ m/s}}$$

Fine Esercizi Campi e.m. - 2008