Esercizi svolti di Campi elettromagnetici - Anno 2007

07-1) Esercizio n. 1 del 26/1/2007

Si abbia un'antenna rettilinea lunga $2l = 20\ cm$, alimentata nel centro e disposta lungo l'asse z di un sistema di riferimento. Si grafichi l'andamento della corrente in funzione di z per le seguenti frequenze: $\nu_1 = 200\ MHz$, $\nu_2 = 400\ MHz$, $\nu_3 = 600\ MHz$. Si calcolino le resistenze di radiazione dell'antenna in corrispondenza delle tre frequenze.

L'espressione della corrente stazionaria presente sull'antenna é:

$$
\begin{aligned}
I =& I_0 \sin\left[k(l-|z|)\right] = I_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(l-|z|)\right] = \\
=& I_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} l \left(1-\frac{|z|}{l}\right)\right] = \begin{cases} I_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} l \left(1-\frac{z}{l}\right)\right] & \text{per } z>0 \\ I_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} l \left(1+\frac{z}{l}\right)\right] & \text{per } z<0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

a) $\nu = 200\ MHz \Longrightarrow \lambda = \dfrac{3\cdot 10^8}{2\cdot 10^8} = 1.5\ m \Longrightarrow \dfrac{2\pi}{\lambda} l = 0.4189$

$$\frac{I}{I_0} = \sin\left[0.4189\left(1-\frac{|z|}{l}\right)\right]$$

$\frac{\lvert z\rvert}{l}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
I/I_0	0.4068	0.3681	0.3289	0.2890	0.2487	0.2079	0.1668	0.1253	0.0837	0.0419	0

b) $\nu = 400\ MHz \Longrightarrow \lambda = \dfrac{3\cdot 10^8}{4\cdot 10^8} = 0.75\ m \Longrightarrow \dfrac{2\pi}{\lambda} l = 0.8378$

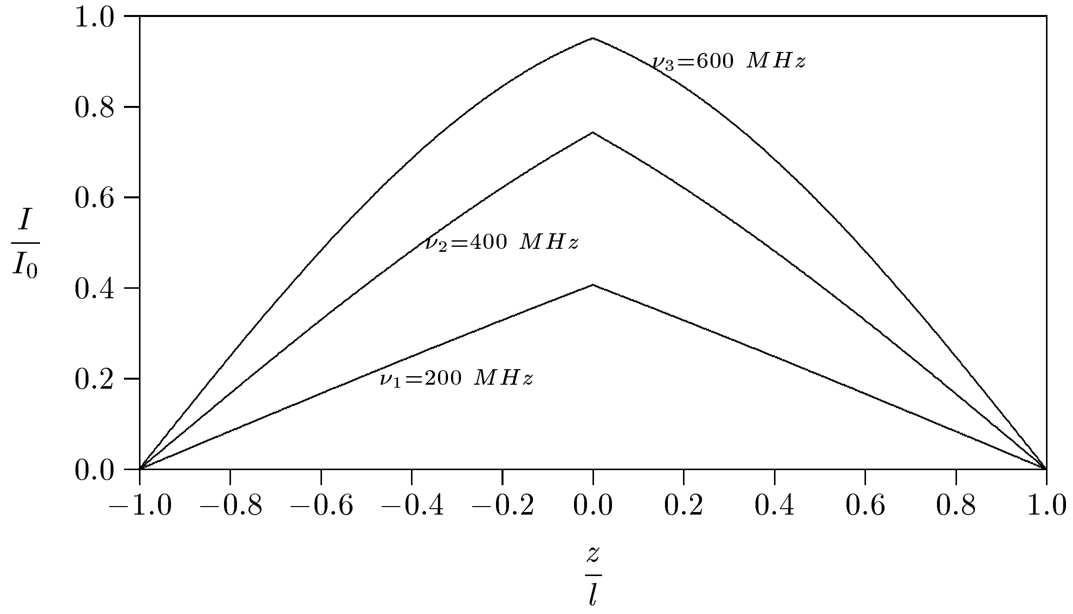
$$\frac{I}{I_0} = \sin\left[0.8378\left(1-\frac{|z|}{l}\right)\right]$$

$\frac{\lvert z\rvert}{l}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
I/I_0	0.7432	0.6846	0.6212	0.5534	0.4818	0.4068	0.3289	0.2487	0.1668	0.0837	0

c) $\nu = 600\ MHz \Longrightarrow \lambda = \dfrac{3\cdot 10^8}{6\cdot 10^8} = 0.5\ m \Longrightarrow \dfrac{2\pi}{\lambda} l = 1.2566$

$$\frac{I}{I_0} = \sin\left[0.8378\left(1-\frac{|z|}{l}\right)\right]$$

$\frac{\|z\|}{l}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
I/I_0	0.9510	0.9048	0.8443	0.7705	0.6845	0.5878	0.4817	0.3681	0.2487	0.1253	0



La resistenza di radiazione é:

$$R_a = \frac{2P}{I_0^2}$$

$$P = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi}\left\{C + \ln 2kl - Ci(2kl) + \frac{\sin 2kl}{2}\left[Si(4kl) - 2Si(2kl)\right]\right\} +$$
$$+\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi}\left\{\frac{\cos 2kl}{2}\left[C + \ln kl + Ci(4kl) - 2Ci(2kl)\right]\right\}$$

a) $\nu = 200\ MHz \Longrightarrow kl = \dfrac{2\pi}{\lambda}l = 0.4189$

$$C_i(2\cdot 0.4189) \simeq 0.2298;\ C_i(4\cdot 0.4189) \simeq 0.4687$$

$$S_i(2\cdot 0.4189) \simeq 0.8058;\ S_i(4\cdot 0.4189) \simeq 1.4352$$

$$\ln(0.4189) \simeq -0.8701;\ \ln(2\cdot 0.4189) \simeq -0.1770$$

$$\sin(2\cdot 0.4189) \simeq 0.7431;\ \cos(2\cdot 0.4189) \simeq 0.6691$$

$$P \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi}\left\{0.5772 - 0.1770 - 0.2298 + \frac{0.7431}{2}\left[1.4352 - 2\cdot 0.8058\right]\right\} +$$
$$+\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi}\left\{\frac{0.6691}{2}\left[0.5772 - 0.8701 + 0.4687 - 2\cdot 0.2298\right]\right\} \simeq$$
$$\simeq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi}\,(0.0099)$$

$$R_a \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{1}{2\pi}\left(0.0099\right) \simeq \frac{377}{2\pi}\cdot 0.0099 \underline{\underline{\simeq 0.5940\ Ohm}}$$

b) $\nu = 400\ MHz \Longrightarrow kl = \dfrac{2\pi}{\lambda}l = 0.8378$

$$C_i(2\cdot 0.8378) \simeq 0.4687;\ C_i(4\cdot 0.8378) \simeq 0.0095$$

$$S_i(2\cdot 0.8378) \simeq 1.4352;\ S_i(4\cdot 0.8378) \simeq 1.8453$$

$$\ln(0.8378) \simeq -0.1770;\ \ln(2\cdot 0.8378) \simeq 0.5162$$

$$\sin(2\cdot 0.8378) \simeq 0.9945;\ \cos(2\cdot 0.8378) \simeq -0.1046$$

$$\begin{aligned}P \simeq&\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi}\left\{0.5772+0.5162-0.4687+\frac{0.9945}{2}\left[1.8453-2\cdot 1.4352\right]\right\}+\\&+\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi}\left\{\frac{-0.1046}{2}\left[0.5772-0.1770+0.0095-2\cdot 0.4687\right]\right\}\simeq\\&\simeq\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi}\left(0.1486\right)\end{aligned}$$

$$R_a \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{1}{2\pi}\left(0.1486\right) \simeq \frac{377}{2\pi}\cdot 0.1486 \underline{\underline{\simeq 8.5562\ Ohm}}$$

b) $\nu = 600\ MHz \Longrightarrow kl = \dfrac{2\pi}{\lambda}l = 1.2566$

$$C_i(2\cdot 1.2566) \simeq 0.2816;\ C_i(4\cdot 1.2566) \simeq -0.1885$$

$$S_i(2\cdot 1.2566) \simeq 1.7816;\ S_i(4\cdot 1.2566) \simeq 1.5449$$

$$\ln(1.2566) \simeq 0.2284;\ \ln(2\cdot 1.2566) \simeq 0.9216$$

$$\sin(2\cdot 1.2566) \simeq 0.5878;\ \cos(2\cdot 1.2566) \simeq -0.8090$$

$$\begin{aligned}P \simeq&\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi}\left\{0.5772+0.9216-0.2816+\frac{0.5878}{2}\left[1.5449-2\cdot 1.7816\right]\right\}+\\&+\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi}\left\{\frac{-0.8090}{2}\left[0.5772+0.2284-0.1885-2\cdot 0.2816\right]\right\}\simeq\\&\simeq\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi}\left(0.6022\right)\end{aligned}$$

$$R_a \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{1}{2\pi}\left(0.6022\right) \simeq \frac{377}{2\pi}\cdot 0.6022 \underline{\underline{\simeq 36.1329\ Ohm}}$$

0 7-2) Esercizio n. 2 del 26/1/2007

Con riferimento al problema precedente si grafichino le densitá di potenza irradiate dall'antenna relativi alle tre frequenze di eccitazione, a paritá di I_0.

———————

L'espressione della densitá di potenza emessa da un'antenna rettilinea é:

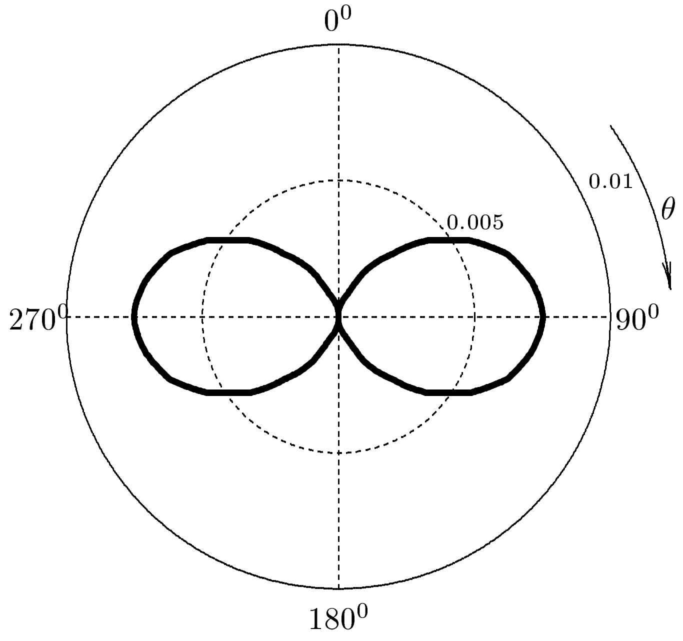
$$\mathbf{S_r} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\mathbf{I_0^2}}{\mathbf{8\pi^2 r^2}} \left[\frac{\cos(\mathbf{kl}\cos\theta) - \cos\mathbf{kl}}{\sin\theta} \right]^{\mathbf{2}}$$

Grafichiamo il fattore di forma:

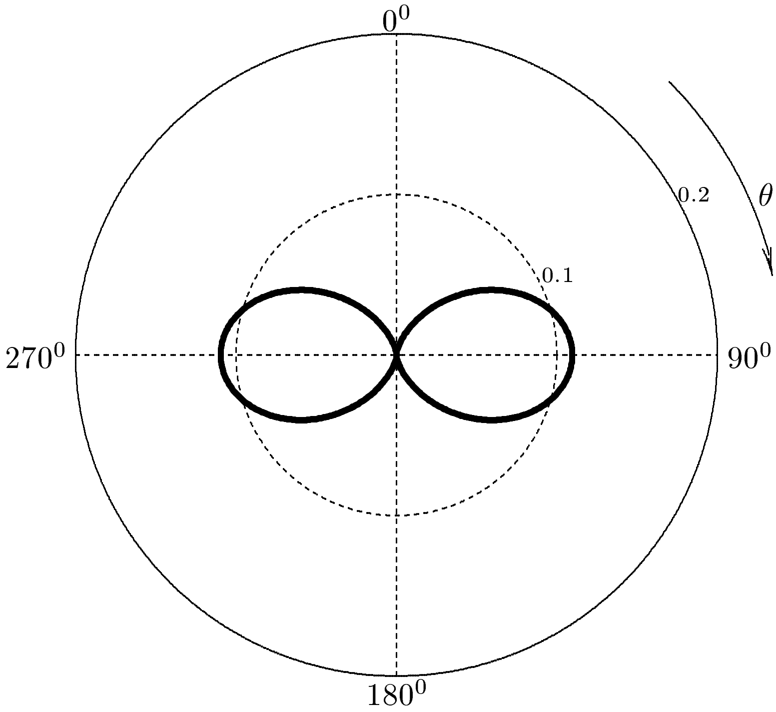
$$F(\theta) = \left[\frac{\cos(kl\cos\theta) - \cos kl}{\sin\theta} \right]^2$$

per le seguenti frequenze di eccitazione:

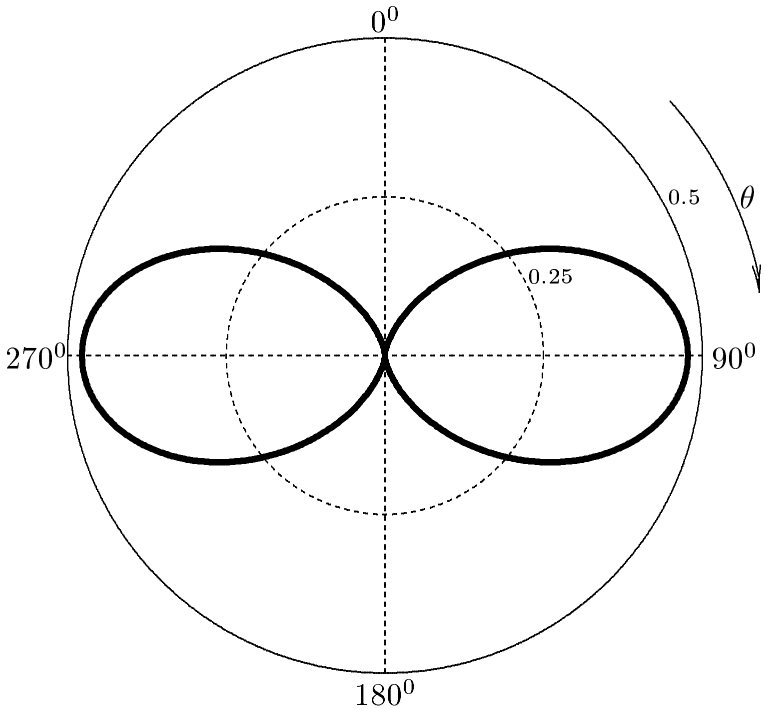
a) $\nu = 200\ MHz \Longrightarrow kl = \frac{2\pi}{\lambda} l = 0.4189$



b) $\nu = 400\ MHz \Longrightarrow kl = \dfrac{2\pi}{\lambda} l = 0.8378$



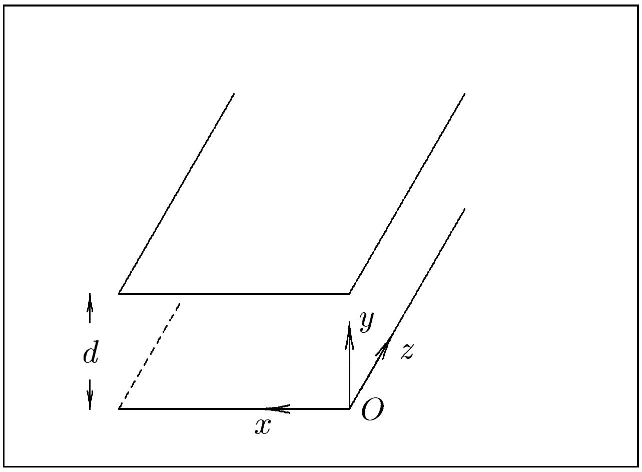
c) $\nu = 600\ MHz \Longrightarrow kl = \dfrac{2\pi}{\lambda} l = 1.2566$



07-3) Esercizio n. 3 del 26/1/2007

Una guida d'onda costituita da due lastre parallele perfettamente conduttrici é larga 10 cm lungo la direzione dell'asse x. Le due lastre sono separate da una distanza $d = 0.5\ cm$. Valutare i primi cinque modi TE e TM di frequenza piú bassa che si possono propagare nella guida e calcolare le loro frequenze di cutoff. Calcolare la velocitá di fase e quella di gruppo per il modo TM_2 ad una frequenza eguale a 1.6 volte la frequenza di cutoff dello stesso.

———————



Gli autovalori per i modi TM e TE sono dati dalla formula:

$$h^2 = \frac{p^2\pi^2}{d^2} \quad \text{con } p = 1, 2 \ldots$$

le cui frequenze di cutoff sono:

$$\nu_c = \frac{pc/n}{2d}$$

ossia, se il mezzo fra le lastre é il vuoto ($n = 1$):

$$TE_1,\ TM_1 \Longrightarrow \nu_{c_1} = \frac{c}{2d} = 30\ GHz$$

$$TE_2,\ TM_2 \Longrightarrow \nu_{c_2} = \frac{c}{d} = 60\ GHz$$

$$TE_3,\ TM_3 \Longrightarrow \nu_{c_3} = \frac{3c}{2d} = 90\ GHz$$

$$TE_4,\ TM_4 \Longrightarrow \nu_{c_4} = \frac{2c}{d} = 120\ GHz$$

$$TE_5,\ TM_5 \Longrightarrow \nu_{c_5} = \frac{5c}{2d} = 150\ GHz$$

La velocitá di fase é:

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$$

La velocitá di gruppo é:

$$v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$$

Per il modo TM con una frequenza operativa $\nu = 1.6 \cdot \nu_{c_2}$ si ha:

$$v_{f_{TM_2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{(1.6)^2}}} = \frac{c}{0.7806} = \underline{\underline{3.84 \cdot 10^8\ m/s}}$$

$$v_{g_{TM_2}} = \underline{\underline{0.7806c\ m/s}}$$

07-4) Esercizio n. 4 del 26/1/2007

Un'onda radio proveniente dallo spazio attraversa uno strato ionosferico uniforme la cui densitá elettronica é $N = 10^{12}\ m^{-3}$. Calcolare la frequenza al di sotto della quale alcun segnale possa raggiungere la Terra. Se la ionosfera é spessa 100 km e la frequenza del segnale é 10 MHz valutare il ritardo T del segnale che passa attraverso la ionosfera rispetto allo stesso segnale in atmosfera libera.

———————

La frequenza di plasma é:

$$f_p = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Nq^2}{\epsilon_0 m}} = 8.9663\ MHz$$

che, poiché il plasma é senza perdite, rappresenta la frequenza al di sotto della quale alcun segnale possa raggiungere la Terra.

La velocitá di gruppo é:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$$

essendo:

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Poiché ω é una funzione crescente la velocitá di gruppo puó anche scriversi:

$$v_g = \frac{1}{\dfrac{d\beta}{d\omega}}$$

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} + \frac{1}{c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}\left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \frac{1}{c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

ossia:

$$v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Per $f = 10\ MHz$ si ha:

$$v_{g(f=10\ MHz)} = c\sqrt{1 - \frac{(8.9663 \cdot 10^6)^2}{(10 \cdot 10^6)^2}} = 0.4428c\ m/s$$

Il tempo impiegato da un segnale per percorrere un tratto di plasma lungo L é:

$$\tau_p = \frac{L}{v_g} = \frac{L}{0.4428c}$$

mentre il tempo impiegato da un segnale per percorrere uno spazio libero (vuoto) lungo L é:

$$\tau_l = \frac{L}{c}$$

Pertanto la differenza del tempo di viaggio é:

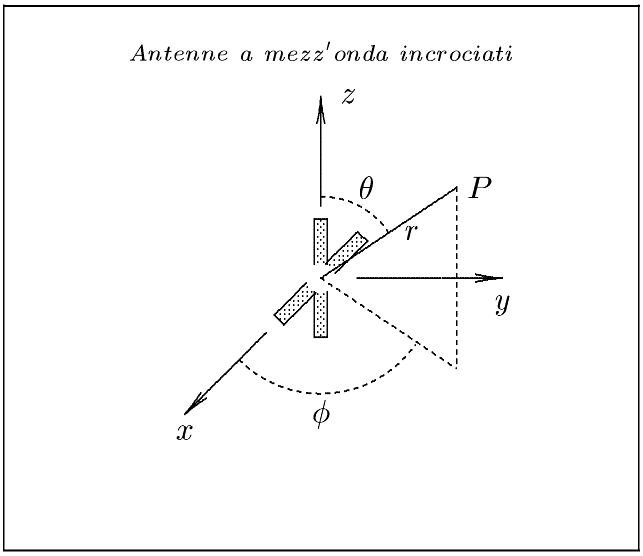
$$\begin{aligned} T =&\tau_p - \tau_l = \frac{L}{c}\left(\frac{1}{0.4428} - 1\right) = 1.2584\frac{L}{c} = \\ =&1.2584\frac{10^5}{3 \cdot 10^8} = 4.1947 \cdot 10^{-4}\ s = \underline{\underline{0.41947\ ms}} \end{aligned}$$

07-5) Esercizio n. 1 del 23/2/2007

Due dipoli a mezz'onda sono incrociati a 90^0. Se entrambi sono alimentati nei rispettivi centri con correnti ad onda stazionaria aventi la stessa intensitá massima, valutare il vettore di Poynting della radiazione emessa.

———————

(vedi Esercizi svolti di Campi elettromagnetici: es. n. 1 del 27/6/2003)



Supponiamo che le due antenne siano orientate come in figura e siano alimentate indipendentemente.

Le densitá di correnti nell'antenna 1 e nell'antenna 2 rispettivamente sono:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{x} A_1 \delta(y)\delta(z)\cos kx & \quad -l \le x \le l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{z} A_2 \delta(x)\delta(y)\cos kz & \quad -l \le z \le l \end{cases}$$

Quindi la densitá di corrente risultante nel sistema di antenne é la somma delle due:

$$\vec{J} = \widehat{x} A_1 \delta(y)\delta(z)\cos kx + \widehat{z} A_2 \delta(x)\delta(y)\cos kz$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta,\phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} \vec{J}(\vec{r}\,') d^3 r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x}\sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,' = x\,' \sin\theta\cos\phi + y\,' \sin\theta\sin\phi + z\,' \cos\theta$$

Ne segue:

$$\vec{N}(\theta,\phi)=\int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi+y\,'\sin\theta\sin\phi+z\,'\cos\theta)}\widehat{x}A_1\delta(y\,')\delta(z\,')\cos kx\,'dx\,'dy\,'dz\,'+$$
$$+\int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi+y\,'\sin\theta\sin\phi+z\,'\cos\theta)}\widehat{z}A_2\delta(x\,')\delta(y\,')\cos kz\,'dx\,'dy\,'dz\,'$$

ossia:

$$\vec{N}(\theta,\phi)=\widehat{x}A_1\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\sin\theta\cos\phi}\cos kx\,'dx\,'+\widehat{z}A_2\int_{-l}^{+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos kz\,'dz\,'$$

Dalle formule precedenti, si ha:

$$\widehat{e}_r\cdot\widehat{x}=\cos\psi=\sin\theta\cos\phi$$

essendo, quindi, ψ l'angolo formato fra l'asse x ed il raggio vettore del punto campo P.
Pertanto:

$$\vec{N}(\theta,\phi)=\widehat{x}A_1\int_{-l}^{+l} e^{-ikx\,'\cos\psi}\cos kx\,'dx\,'+\widehat{z}A_2\int_{-l}^{+l} e^{-ikz\,'\cos\theta}\cos kz\,'dz\,'$$

Sfruttando i risultati degli identici integrali svolti nella teoria delle antenne, possiamo scrivere:

$$\vec{N}(\theta,\phi)=\widehat{x}A_1\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}+\widehat{z}A_2\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

Poiché:

$$\begin{cases}\widehat{x}=\widehat{e}_r\sin\theta\cos\phi+\widehat{e}_\theta\cos\theta\cos\phi-\widehat{e}_\phi\sin\phi\\[2ex]\widehat{z}=\widehat{e}_r\cos\theta-\widehat{e}_\theta\sin\theta\end{cases}$$

si ha:

$$\vec{N}(\theta,\phi)=\widehat{e}_r\left[\sin\theta\cos\phi A_1\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}+\cos\theta A_2\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\right]+$$
$$+\widehat{e}_\theta\left[\cos\theta\cos\phi A_1\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}-\sin\theta A_2\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\right]-\widehat{e}_\phi\sin\phi A_1\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}$$

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r})=i\omega\mu\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\left(\widehat{e}_\theta N_\theta+\widehat{e}_\phi N_\phi\right)$$

Quindi:

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}) = i\omega\mu\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\widehat{e}_\theta\left[\cos\theta\cos\phi A_1\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi} - \sin\theta A_2\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\right] -$$
$$- i\omega\mu\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\widehat{e}_\phi\sin\phi A_1\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}$$

Il campo magnetico far field irradiato é:

$$\vec{H}_{rad}(\vec{r}) = ik\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\left(\widehat{e}_\phi N_\theta - \widehat{e}_\theta N_\phi\right)$$

Quindi:

$$\vec{H}_{rad}(\vec{r}) = ik\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\widehat{e}_\phi\left[\cos\theta\cos\phi A_1\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi} - \sin\theta A_2\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\right] -$$
$$- ik\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\widehat{e}_\theta\sin\phi A_1\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2\right)\widehat{e}_r$$

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left|\cos\theta\cos\phi A_1\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi} - \sin\theta A_2\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\right|^2 +$$
$$+\frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left|\sin\phi A_1\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}\right|^2$$

dove si deve porre:

$$A_1 = I_0 \quad \text{e} \quad A_2 = I_0 e^{-i\delta}$$

07-6) Esercizio n. 2 del 23/2/2007

Con riferimento al problema precedente, valutare la polarizzazione della radiazione emessa in direzione ortogonale al piano dei dipoli se le correnti sono: a) in fase, b) sfasate di 90^0 e c) sfasate di 45^0. Graficare il diagramma di radiazione in un piano ortogonale al piano contenente i dipoli.

———————

Per studiare la polarizzazione in una direzione ortogonale al piano dei dipoli, dobbiamo porre $\theta = \phi = 90^0$ nella formula del campo elettrico. Si ha, allora:

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}) = -i\omega\mu \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\frac{2}{k}\left(A_2\widehat{e}_\theta + A_1\widehat{e}_\phi\right) = -i\omega\mu \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\frac{2}{k} I_0 \left(e^{-i\delta}\widehat{e}_\theta + \widehat{e}_\phi\right)$$

Per studiare lo stato di polarizzazione é sufficiente fare il rapporto, diciamo r, fra le componenti del campo elettrico $\dfrac{E_\theta}{E_\phi}$.

a) $\delta = 0$ **Correnti in fase**

$r = 1$ - Il rapporto fra le componenti é reale e quindi l'onda irradiata é linearmente polarizzata.

b) $\delta = \dfrac{\pi}{2}$ **Correnti in quadratura**

$r = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ - L'onda irradiata é circolarmente polarizzata.

c) $\delta = \dfrac{\pi}{4}$ **Correnti sfasate di** $\dfrac{\pi}{4}$

$r = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ - L'onda irradiata é ellitticamente polarizzata.

I piani ortogonali al piano contenenti i dipoli sono: $\theta = 90^0$ e $\phi = 90^0$.
Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, per $\theta = 90^0$ é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2 \frac{4}{k^2}\left\{|-A_2|^2 + \left|\sin\phi A_1 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin^2\phi}\right|^2\right\}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, per $\phi = 90^0$ é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2 \frac{4}{k^2}\left\{\left|-\sin\theta A_2 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\right|^2 + |A_1|^2\right\}$$

Per $\delta = 0$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, per $\theta = 90^0$ é:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r} \right)^2 \frac{4}{k^2} I_0^2 \left\{ 1 + \left| \sin\phi \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin^2\phi} \right|^2 \right\}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, per $\phi = 90^0$ é:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r} \right)^2 \frac{4}{k^2} I_0^2 \left\{ \left| -\sin\theta \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \right|^2 + 1 \right\}$$

Per $\delta = \frac{\pi}{2}$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, per $\theta = 90^0$ é:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r} \right)^2 \frac{4}{k^2} I_0^2 \left\{ 1 + \left| \sin\phi \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin^2\phi} \right|^2 \right\}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, per $\phi = 90^0$ é:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r} \right)^2 \frac{4}{k^2} I_0^2 \left\{ \left| i\sin\theta \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \right|^2 + 1 \right\}$$

Per $\delta = \frac{\pi}{4}$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, per $\theta = 90^0$ é:

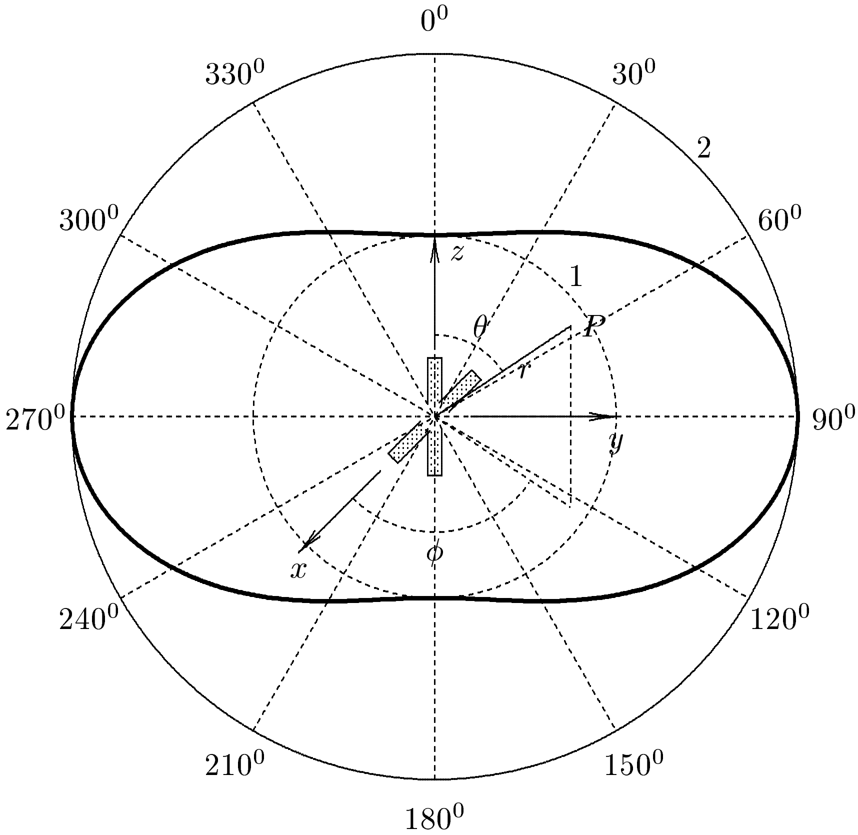
$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r} \right)^2 \frac{4}{k^2} I_0^2 \left\{ \left| -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \right|^2 + \left| \sin\phi \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin^2\phi} \right|^2 \right\}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, per $\phi = 90^0$ é:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r} \right)^2 \frac{4}{k^2} I_0^2 \left\{ \left| \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\sin\theta \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \right|^2 + 1 \right\}$$

Si osserva che i diagrammi di radiazione nei due piani hanno la stessa forma sia per $\delta = 0$, sia per $\delta = \pi/2$ che per $\delta = \pi/4$ in quanto risulta $\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right|^2 = 1$. A titolo di esempio riportiamo quello nel piano $\phi = \pi/2$.

Diagramma di radiazione nel piano $\phi = \pi/2$ al variare di θ



07-7) Esercizio n. 3 del 23/2/2007

Dimostrare che il vettore di Poynting, mediato in un periodo, di un'onda elettromagnetica circolarmente polarizzata é due volte quello competente ad un'onda elettromagnetica linearmente polarizzata se il valore massimo del campo elettrico é lo stesso per entrambe le onde. Questo vuol dire che un mezzo dielettrico puó sostenere un campo elettrico prossimo al breakdown supportando una potenza doppia con un'onda circolarmente polarizzata rispetto ad una linearmente polarizzata.

Sia $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{ikz} e^{-i\omega t}$ un'onda elettromagnetica piana, linearmente polarizzata, che si propaga lungo l'asse z.

Il vettore di Poynting ad essa associato é:

$$|\vec{S}| = \frac{E_0 \cdot E_0^*}{2Z}$$

Si consideri, ora, un'onda elettromagnetica piana che si propaga lungo l'asse z circolarmente polarizzata avente lo stesso valore massimo del campo elettrico di quello associato all'onda linearmente polarizzata.

$$\vec{E}_{circ} = E_0(\widehat{x} \pm i\widehat{y}) e^{ikz} e^{-i\omega t}$$

Poiché il modulo quadro di $\vec{E}_{circ}$ é $2E_0^2$, il vettore di Poynting ad essa associato é, quindi:

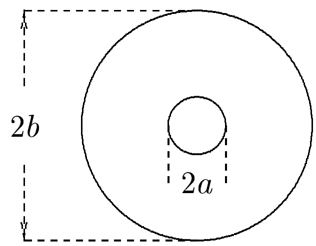
$$|\vec{S}| = \frac{E_0^2}{Z}$$

ossia due volte quello competente all'onda piana linearmente polarizzata.

07-8) Esercizio n. 4 del 23/2/2007

Un cavo coassiale ha un diametro interno di 1 mm ed un diametro esterno di 5 mm. Calcolare la massima potenza che puó essere trasportata dal cavo se esso é eccitato nel modo TEM. Assumere che il campo elettrico di breakdown sia 10 KV/mm e che la massima densitá lineare di corrente permessa sulla superficie dei conduttori sia 10 A/mm.

———————



Il campo elettrico nel caso di modo TEM é:

$$\vec{E}_t = -\widehat{e}_r \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \frac{1}{r} e^{-i\beta z}$$

Il campo magnetico é:

$$H_\phi = \frac{YV_0}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r} e^{-i\beta z})$$

dove

$$Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$$

L'onda di tensione associata al campo elettrico, sul conduttore interno ($r = a$) é:

$$V = V_0 e^{-i\beta z}$$

Il vettore densitá di corrente sul conduttore interno é:

$$\vec{J} = \widehat{n} \times \vec{H} = \widehat{e}_r \times \vec{H} = \frac{YV_0}{\ln \frac{b}{a}} \left(\frac{\widehat{z}}{a} \right) e^{-i\beta z}$$

La potenza trasportata lungo la linea é:

$$P = \frac{1}{2} \Re \int_a^b \int_0^{2\pi} \left(\vec{E} \times \vec{H}^* \right) \cdot \widehat{z} r dr d\phi = \frac{1}{2} \frac{YV_0^2}{\left(\ln \frac{b}{a} \right)^2} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{d\phi dr}{r} = \frac{\pi Y V_0^2}{\ln \frac{b}{a}}$$

che é eguale a quella calcolata con la formula:

$$P = \frac{1}{2} Re\,(VI^*) = \frac{1}{2} V_0 I_0 = \frac{1}{2} V_0^2 \frac{2\pi Y}{\ln \frac{b}{a}}$$

Affinché siano soddisfatte le situazioni imposte dal problema occorre che siano verificate contemporaneamente le seguenti condizioni:

$$|\vec{E}_t| = \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \frac{1}{a} \leq 10^7 \ V/m$$

e

$$|\vec{J}| = \frac{Y V_0}{\ln \frac{b}{a}} \left(\frac{1}{a} \right) \leq 10000 \ A/m$$

ossia:

$$\begin{cases} V_0 \leq a \left| \ln \frac{a}{b} \right| \cdot 10^7 = 0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 1.6094 \cdot 10^7 = \underline{\underline{8047 \ V}} \\ V_0 \leq aZ \ln \frac{b}{a} \cdot 10^4 = 0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 377 \cdot 1.6094 \cdot 10^4 = \underline{\underline{3033.7 \ V}} \end{cases}$$

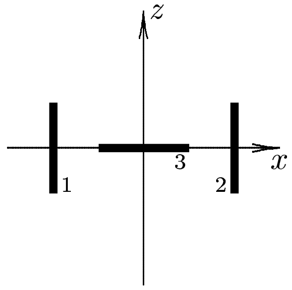
Pertanto affinché siano verificate le due condizioni il valore massimo della tensione applicata deve essere $\underline{\underline{3033.7 \ V}}$

La potenza massima é, quindi:

$$P_{max} = \frac{1}{2} V_{0_{max}}^2 \frac{2\pi Y}{\ln \frac{b}{a}} \simeq \underline{\underline{47653 \ W}}$$

07-9) Esercizio n. 1 del 29/6/2007

Sia dato un sistema di antenne come in figura:



Le antenne sono lunghe $\lambda/2$ e la distanza fra i loro centri é $d = \lambda/2$. Esse sono alimentate con la stessa intensitá di corrente, ma la corrente sull'antenna orizzontale é sfasata di δ rispetto alle altre. Determinare il vettore di Poynting irradiato.

———————

Le densitá di correnti sull'antenna 1, sull'antenna 2 e sull'antenna 3 rispettivamente sono:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{z}A_1\delta(y)\delta(x+d)\cos kz & -l \le z \le +l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{z}A_2\delta(y)\delta(x-d)\cos kz & -l \le z \le +l \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{x}A_3\delta(y)\delta(z)(\cos kx)e^{-i\delta} & -l \le x \le +l \end{cases}$$

Quindi la densitá di corrente risultante nel sistema di antenne é la somma delle tre:

$$\vec{J} = \widehat{z}A_1\delta(y)\delta(x+d)\cos kz + \widehat{z}A_2\delta(y)\delta(x-d)\cos kz + \widehat{x}A_3\delta(y)\delta(z)(\cos kx)e^{-i\delta}$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta,\phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r\cdot\vec{r}\,'}\vec{J}(\vec{r}\,')d^3r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x}\sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r\cdot\vec{r}\,' = x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{z}A_1\delta(y\,')\delta(x\,'+d)\cos kz\,'dx\,'dy\,'dz\,' +$$
$$+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{z}A_2\delta(y\,')\delta(x\,'-d)\cos kz\,'dx\,'dy\,'dz\,' +$$
$$+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}\widehat{x}A_3\delta(y\,')\delta(z\,')(\cos kx\,')e^{-i\delta}dx\,'dy\,'dz\,'$$

ossia:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =&\widehat{z}A_1\int_{-l}^{+l} e^{-ik(-d\sin\theta\cos\phi + z'\cos\theta)}\cos kz' dz' +\\ &+\widehat{z}A_2\int_{-l}^{+l} e^{-ik(+d\sin\theta\cos\phi + z'\cos\theta)}\cos kz' dz' +\\ &+\widehat{x}A_3\int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}(\cos kx')e^{-i\delta}dx'\end{aligned}$$

Poiché:

$$\widehat{e}_r\cdot\widehat{x} = \cos\psi = \sin\theta\cos\phi$$

essendo ψ l'angolo formato fra l'asse x ed il raggio vettore del punto campo P, segue:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =&\widehat{z}A_1 e^{+ikd\sin\theta\cos\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz' dz' +\\ &+\widehat{z}A_2 e^{-ikd\sin\theta\cos\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz' dz' +\\ &+\widehat{x}A_3\int_{-l}^{+l} e^{-ikx'\cos\psi}(\cos kx')e^{-i\delta}dx'\end{aligned}$$

Sfruttando i risultati degli identici integrali svolti nella teoria delle antenne, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =&\widehat{z}A_1 e^{+ikd\sin\theta\cos\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} +\\ &+\widehat{z}A_2 e^{-ikd\sin\theta\cos\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} +\\ &+\widehat{x}A_3\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}e^{-i\delta}\end{aligned}$$

Poiché:

$$\begin{cases}\widehat{x} = \widehat{e}_r\sin\theta\cos\phi + \widehat{e}_\theta\cos\theta\cos\phi - \widehat{e}_\phi\sin\phi\\ \\ \widehat{z} = \widehat{e}_r\cos\theta - \widehat{e}_\theta\sin\theta\end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) = & \widehat{e}_r \left[\sin\theta\cos\phi A_3 \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi} e^{-i\delta} + \right. \\
& + \cos\theta A_1 e^{+ikd\sin\theta\cos\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \\
& \left. + \cos\theta A_2 e^{-ikd\sin\theta\cos\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\right] + \\
& + \widehat{e}_\theta \left[\cos\theta\cos\phi A_3 \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi} e^{-i\delta} - \right. \\
& - A_1 e^{+ikd\sin\theta\cos\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} - \\
& \left. - A_2 e^{-ikd\sin\theta\cos\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right] + \\
& + \widehat{e}_\phi \left[-\sin\phi A_3 \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi} e^{-i\delta}\right]
\end{aligned}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2 \left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2\right)\widehat{e}_r$$

Ponendo $A_1 = A_2 = A_3 = 1$, si ha:

$$\begin{aligned}
N_\theta = & \left[\cos\theta\cos\phi \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi} e^{-i\delta} - \right. \\
& \left. - \left(e^{+ikd\sin\theta\cos\phi} + e^{-ikd\sin\theta\cos\phi}\right)\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]
\end{aligned}$$

$$N_\phi = \left[-\sin\phi \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi} e^{-i\delta}\right]$$

07-10) Esercizio n. 2 del 29/6/2007

Con riferimento al problema precedente, graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = \pi/2$ nel caso di: 1) $\delta = 0$ e 2) $\delta = \pi/4$.

———————

Ponendo $\theta = \pi/2$ si ha:

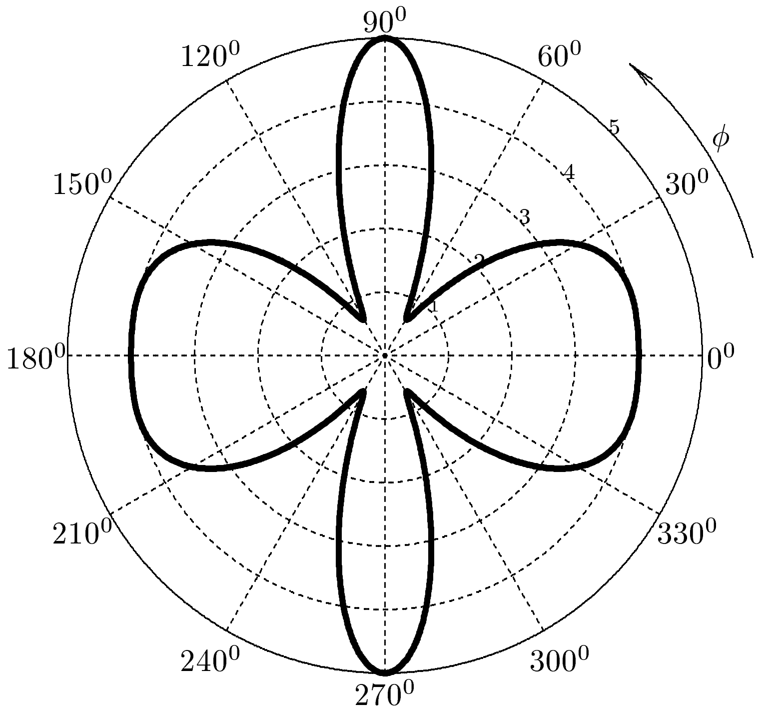
$$N_\theta = \left[-\frac{2}{k}\left(e^{+ikd\cos\phi} + e^{-ikd\cos\phi}\right)\right]$$

$$N_\phi = \left[-\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi}e^{-i\delta}\right]$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{2\pi r}\right)^2 \left[4\cos^2(kd\cos\phi) + \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin^2\phi}\right] \widehat{e}_r$$

Il diagramma di radiazione non dipende da δ. Grafichiamo il fattore di forma per $kd = \pi$:

$$F(\phi) = 4\cos^2(\pi\cos\phi) + \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin^2\phi}$$



07-11) Esercizio n. 3 del 29/6/2007

Il campo magnetico terrestre (approssimativamente 0.6 $Gauss$) é sufficiente a causare la rotazione di Faraday quando un'onda elettromagnetica viaggia attraverso la ionosfera. Se un'onda linearmente polarizzata di frequenza $\nu = 2\,GHz$ attraversa 100 Km di ionosfera ($N = 10^{12}\ m^{-3}$), calcolare la massima rotazione possibile.

———————

(vedi es. n.4 del 14/09/1999)

La massima rotazione di Faraday si ha per propagazione longitudinale ossia lungo la direzione del campo magnetico.

L'angolo di rotazione per unitá di percorso é:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left[\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega-\omega_g)}} - \sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+\omega_g)}}\right]$$

$$\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} = 3.1738\cdot 10^{15}\ (rad/s)^2$$

$$\omega_g = \frac{q_e B_0}{m_e} = -\frac{1.6\cdot 10^{-19}\cdot 0.6\cdot 10^{-4}}{9.11\cdot 10^{-31}} = -1.0538\cdot 10^7 \quad (rad/s)$$

$$\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega-\omega_g)} = \frac{3.1738\cdot 10^{15}}{2\pi\cdot 2\cdot 10^9\cdot(2\pi\cdot 2\cdot 10^9 + 1.0538\cdot 10^7)} = 2.0081\cdot 10^{-5}$$

$$\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+\omega_g)} = \frac{3.1738\cdot 10^{15}}{2\pi\cdot 2\cdot 10^9\cdot(2\pi\cdot 2\cdot 10^9 - 1.0538\cdot 10^7)} = 2.0115\cdot 10^{-5}$$

Sviluppando in serie le radici quadrate, si ha:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left[\frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+\omega_g)} - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega-\omega_g)}\right]$$

$$\tau = \frac{1}{4}\frac{\omega}{c}\left(2.0115\cdot 10^{-5} - 2.0081\cdot 10^{-5}\right) = \frac{1}{4}\frac{2\pi\cdot 2\cdot 10^9}{3\cdot 10^8}3.4\cdot 10^{-8} = 3.5605\cdot 10^{-7}\ (rad/m)$$

L'angolo di rotazione dopo un percorso di 100 Km é:

$$\tau L = 3.5605\cdot 10^{-7}\cdot 10^5 = 3.5605\cdot 10^{-2}\ rad = \underline{\underline{2^0.04}}$$

07-12) Esercizio n. 4 del 29/6/2007

Un'onda elettromagnetica piana di intensitá I $(Watt/m^2)$, viaggiante nel vuoto, viene riflessa ad incidenza normale da un mezzo di indice di rifrazione n. Dimostrare che la pressione esercitata sull'interfaccia dal campo é:

$$\frac{2(1+n^2)}{(1+n)^2}\frac{I}{c}\ (N/m^2)$$

———————

(vedi es. n.4 del 24/7/1996 ed es. n.2 del 28/4/2001)

La pressione di radiazione esercitata sull'interfaccia é:

$$\frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{I}{c}(1+R)$$

essendo R il coefficiente di riflessione.

Per incidenza normale:

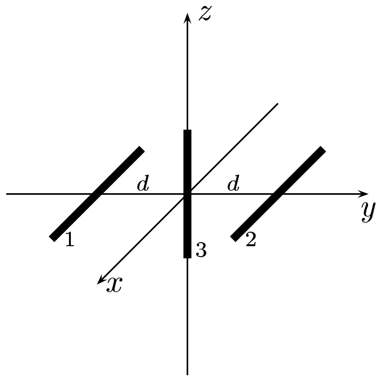
$$R = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2$$

e, quindi:

$$\frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{I}{c}\left[1+\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2\right] = \frac{2(1+n^2)}{(1+n)^2}\frac{I}{c}\ (N/m^2)$$

07-13) Esercizio n. 1 del 27/7/2007

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato.



———————

Le densitá di correnti sull'antenna 1, sull'antenna 2 e sull'antenna 3 rispettivamente sono:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{x} A_1 \delta(y+d)\delta(z)\cos kx & -l \le x \le +l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{x} A_2 \delta(y-d)\delta(z)\cos kx & -l \le x \le +l \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{z} A_3 \delta(x)\delta(y)(\cos kz) & -l \le z \le +l \end{cases}$$

Quindi la densitá di corrente risultante nel sistema di antenne é la somma delle tre:

$$\vec{J} = \widehat{x} A_1 \delta(y)\delta(y+d)\cos kx + \widehat{x} A_2 \delta(y-d)\delta(z)\cos kx + \widehat{z} A_3 \delta(x)\delta(y)(\cos kz)$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta,\phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} \vec{J}(\vec{r}\,')d^3r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x}\sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,' = x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)} \widehat{x} A_1 \delta(y\,'+d)\delta(z\,')\cos kx\,'dx\,'dy\,'dz\,' +$$
$$+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)} \widehat{x} A_2 \delta(y\,'-d)\delta(z\,)\cos kx\,'dx\,'dy\,'dz\,' +$$
$$+ \int_V e^{-ik\,(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)} \widehat{z} A_3 \delta(x\,')\delta(y\,')\cos kz\,'dx\,'dy\,'dz\,'$$

ossia:

$$\vec{N}(\theta,\phi)=\widehat{x}A_1\int_{-l}^{+l}e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi-d\sin\theta\sin\phi)}\cos kx'dx'+$$
$$+\,\widehat{x}A_2\int_{-l}^{+l}e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+d\sin\theta\sin\phi)}\cos kx'dx'+$$
$$+\,\widehat{z}A_3\int_{-l}^{+l}e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz'$$

Poiché:

$$\widehat{e}_r\cdot\widehat{x}=\cos\psi=\sin\theta\cos\phi$$

essendo ψ l'angolo formato fra l'asse x ed il raggio vettore del punto campo P, segue:

$$\vec{N}(\theta,\phi)=\widehat{x}A_1e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l}e^{-ikx'\cos\psi}\cos kx'dx'+$$
$$+\,\widehat{x}A_2e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l}e^{-ikx'\cos\psi)}\cos kx'dx'+$$
$$+\,\widehat{z}A_3\int_{-l}^{+l}e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz'$$

Sfruttando i risultati degli identici integrali svolti nella teoria delle antenne, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi)=&\widehat{x}A_1e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}+\\&+\widehat{x}A_2e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}+\\&+\widehat{z}A_3\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\end{aligned}$$

Poiché:

$$\begin{cases}\widehat{x}=\widehat{e}_r\sin\theta\cos\phi+\widehat{e}_\theta\cos\theta\cos\phi-\widehat{e}_\phi\sin\phi\\[2ex]\widehat{z}=\widehat{e}_r\cos\theta-\widehat{e}_\theta\sin\theta\end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =&\widehat{e}_r\Bigg[\sin\theta\cos\phi A_1 e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}+\\
&+\sin\theta\cos\phi A_2 e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}+\\
&+\cos\theta A_3\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\Bigg]+\\
&+\widehat{e}_\theta\Bigg[\cos\theta\cos\phi A_1 e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}+\\
&+\cos\theta\cos\phi A_2 e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}-\\
&-\sin\theta A_3\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\Bigg]+\\
&+\widehat{e}_\phi\Bigg[-\sin\phi A_1 e^{+ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}-\\
&-\sin\phi A_2 e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}\Bigg]\end{aligned}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(|N_\theta|^2+|N_\phi|^2\right)\widehat{e}_r$$

Ponendo $A_1 = A_2 = A_3 = 1$, si ha:

$$N_\theta =\left[\cos\theta\cos\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}2\cos(kd\sin\theta\sin\phi)-\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]$$

$$N_\phi = \left[-\sin\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}2\cos(kd\sin\theta\sin\phi)\right]$$

07-14) Esercizio n. 2 del 27/7/2007

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nei piani $\theta = 90^0$, $\phi = 0^0$ e $\phi = 90^0$. Sia $d = \lambda/2$.

———————

Ponendo $\theta = \pi/2$ si ha:

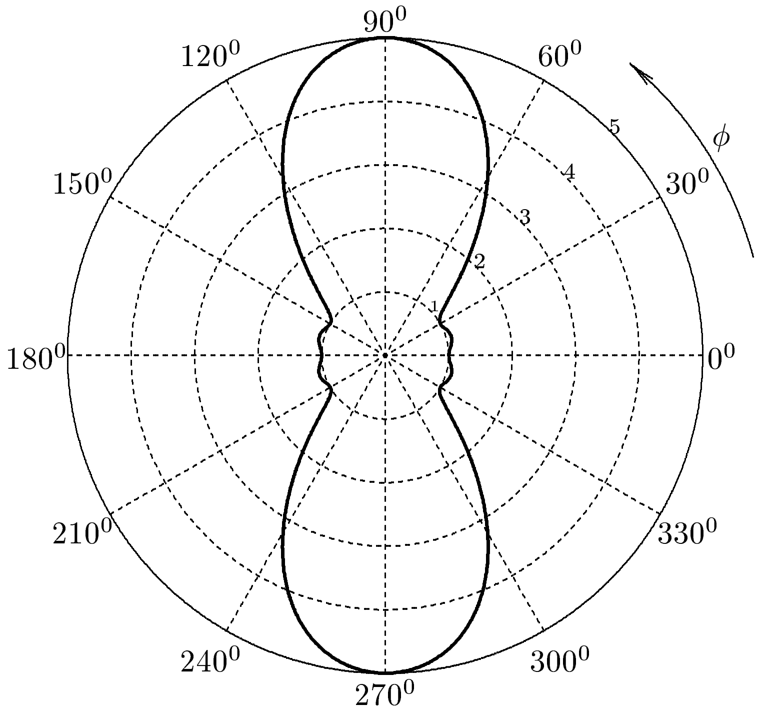
$$N_\theta = -\frac{2}{k}$$

$$N_\phi = \left[-\frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi} 2\cos(kd\sin\phi) \right]$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{2\pi r}\right)^2 \left[1 + \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin^2\phi} 4\cos^2(kd\sin\phi) \right] \widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma per $kd = \pi$:

$$F(\phi) = 1 + \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin^2\phi} 4\cos^2(\pi\sin\phi)$$



Ponendo $\phi = 0$ si ha:

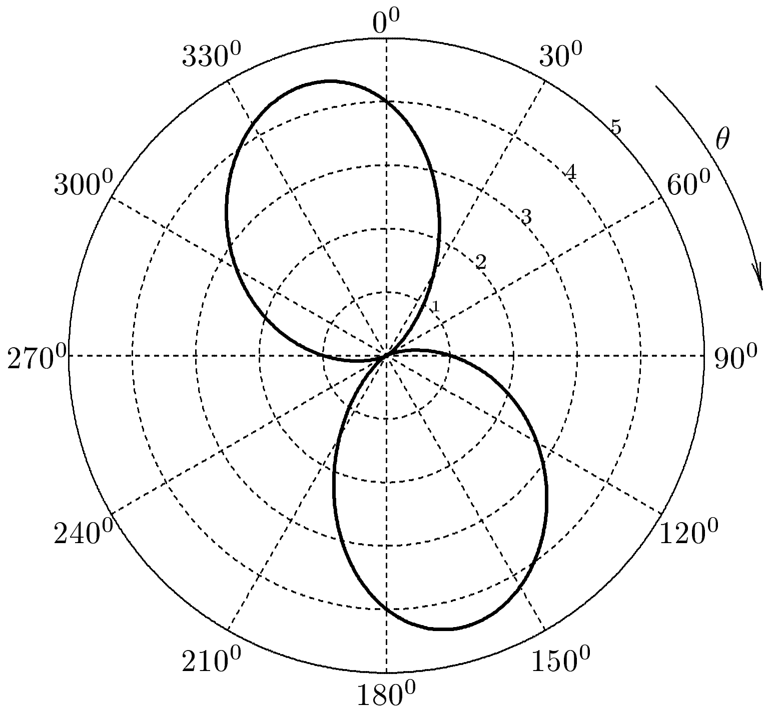
$$N_\theta = \left[\frac{4}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta} - \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right]$$

$$N_\phi = 0$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{2\pi r} \right)^2 \left[2 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right]^2 \widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\theta) = \left[2 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right]^2$$



Ponendo $\phi = \pi/2$ si ha:

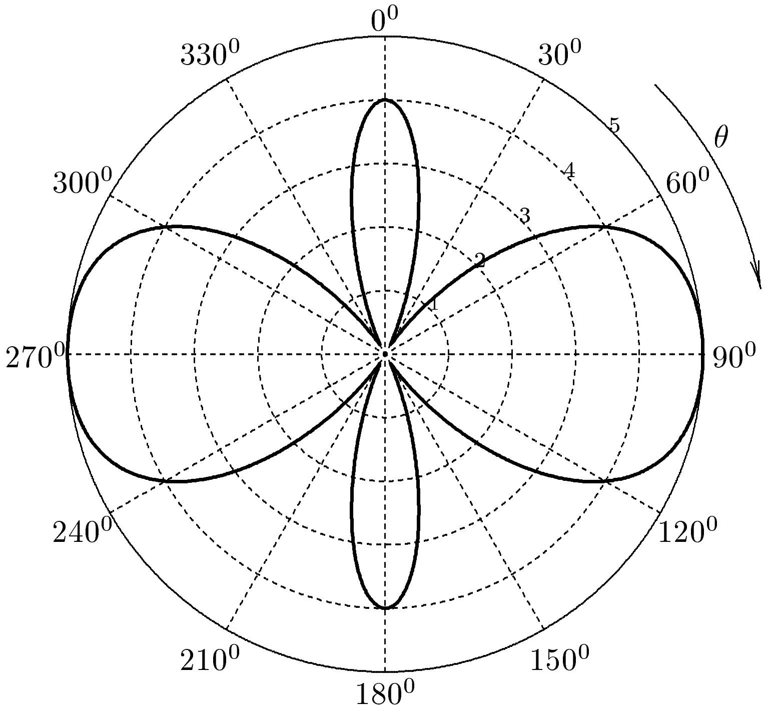
$$N_\theta = \left[-\frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right]$$

$$N_\phi = -\frac{2}{k} 2\cos(kd\sin\theta)$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{2\pi r} \right)^2 \left[\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + 4\cos^2(kd\sin\theta) \right] \widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma per $kd = \pi$:

$$F(\theta) = \left[\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + 4\cos^2(\pi\sin\theta) \right]$$


0^0
30^0
60^0
90^0
120^0
150^0
180^0
210^0
240^0
270^0
300^0
330^0
θ
1
2
3
4
5

07-15) Esercizio n. 3 del 27/7/2007

Impulsi a microonde di breve durata vengono emessi dalla supernova Crab nebula che si trova ad una distanza di 2 kpc (kiloparsecs), ossia ad una distanza $L \simeq 6 \cdot 10^{19}\ m$ dalla Terra. Quando essi raggiungono la terra, le componenti in frequenza degli impulsi sono disperse in frequenza cosicché le piú alte frequenze attorno a 115 MHz arrivono prima dopo un viaggio di durata T mentre le componenti a piú bassa frequenza attorno a 110 MHz compaiono dopo circa 1.5 s. La dispersione osservata é dovuta al plasma interstellare. Dimostrare che la frequenza angolare di plasma si puó calcolare dalla espressione seguente:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi^2\nu^3 c}{L}\left|\frac{dT}{d\nu}\right|$$

avendo posto $v_g \simeq v_f \simeq c$. Calcolare il valore di ω_p.

La velocitá di gruppo di un'onda elettromagnetica che si propaga in un plasma omogeneo é:

$$v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

La velocitá di fase di un'onda elettromagnetica che si propaga in un plasma omogeneo é:

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

Se T é il tempo percorso dall'impulso per percorrere la distanza L, si ha:

$$T = \frac{L}{v_g} = \frac{L}{c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

Per valutare la frequenza angolare di plasma del mezzo interstellare bisognerebbe, quindi, conoscere il tempo T di viaggio dell'impulso. Poiché questo non é possibile il metodo consiste nella misurazione del ritardo fra due impulsi di frequenza diversa. Pertanto conviene valutare $\frac{dT}{d\omega}$:

$$\frac{dT}{d\omega} = \frac{L}{c}\frac{1}{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}\frac{\omega_p^2}{\omega^3}$$

Moltiplicando e dividendo per c, si ha:

$$\frac{dT}{d\omega} = L\frac{v_f}{v_g^2}\frac{\omega_p^2}{\omega^3}$$

Poiché:

$$\frac{dT}{d\omega} = \frac{dT}{d\nu}\frac{d\nu}{d\omega} = \frac{1}{2\pi}\frac{dT}{d\nu}$$

si ha:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi^2\nu^3 c}{L}\left|\frac{dT}{d\nu}\right|$$

avendo posto $v_g \simeq v_f \simeq c$.

Data la linearitá sperimentale di T da ν, possiamo porre:

$$\left|\frac{dT}{d\nu}\right| = \left|\frac{\Delta T}{\Delta\nu}\right| = \frac{1.5}{5\cdot 10^6} = 3\cdot 10^{-7}\ (s^2/rad)$$

ossia:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi^2\cdot(115\cdot 10^6)^3\cdot 3\cdot 10^8}{6\cdot 10^{19}}\cdot 3\cdot 10^{-7} = 3.0021\cdot 10^{14}\cdot 3\cdot 10^{-7} = 9.0063\cdot 10^7\ (rad/s)^2$$

da cui:

$$\underline{\underline{\omega_p = 9490.2\ (rad/s)}};\quad \underline{\underline{\nu_p = 1510.4\ Hz}}$$

07-16) Esercizio n. 4 del 27/7/2007

Un mezzo solido di titanato di ferrite ha i seguenti parametri costitutivi:

$$\sigma = 0,\ \mu_r = 15(1+3i),\ \epsilon_r = 50(1+i)$$

Calcolare: a) il coefficiente di attenuazione α; b) il coefficiente di riflessione per un'onda elettromagnetica, viaggiante in aria, incidente secondo la direzione della normale sulla superficie piana del mezzo.

———————

La costante di propagazione competente ad un'onda elettromagnetica che si propaga nel mezzo é:

$$\begin{aligned} k =&\omega\sqrt{\epsilon'\mu'} = \frac{\omega}{c}\sqrt{[\Re(\epsilon'_r) + i\Im(\epsilon'_r)]\,[\Re(\mu'_r) + i\Im(\mu'_r)]} = \\ =&\frac{\omega}{c}\sqrt{\Re(\epsilon'_r)\Re(\mu'_r) + i\Re(\epsilon'_r)Im(\mu'_r) + i\Re(\mu'_r)\Im(\epsilon'_r) - \Im(\epsilon'_r)\Im(\mu'_r)} \end{aligned}$$

essendo ϵ' e μ' la permeabilitá dielettrica complessa e la permeabilitá magnetica complessa rispettivamente.

Sostituendo i valori numerici, si ha:

$$k = \beta + i\alpha = \frac{\omega}{c}\sqrt{50\cdot 15 + i50\cdot 45 + i15\cdot 50 - 50\cdot 45} = \frac{\omega}{c}\sqrt{-1500 + i3000}$$

Elevando al quadrato ed eguagliando le parti reali e le parti immaginarie, si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = -\dfrac{\omega^2}{c^2}1500 \\ \alpha\beta = \dfrac{\omega^2}{c^2}1500 \end{cases}$$

Dividendo membro a membro la prima per la seconda equazione del sistema, si ha:

$$\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} = -1$$

Moltiplicando ambo i membri per $\dfrac{\beta}{\alpha}$, si ha:

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\beta}{\alpha} - 1 = 0$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0.61803$$

avendo scartato la radice negativa.

Moltiplicando per ciascun termine della seconda equazione del sistema, si ha:

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} 927.04 \quad (rad/m)^2$$

da cui:

$$\beta = \frac{\omega}{c} 30.447 \quad rad/m$$

Ne segue:

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} 2427.04 \quad m^{-2}$$

da cui:

$$\alpha = \frac{\omega}{c} 49.265 \quad m^{-1}$$

Il coefficiente di riflessione, per incidenza normale, é:

$$R = \left| \frac{\mu_2 k_1 - \mu_1 k_2}{\mu_1 k_2 + \mu_2 k_1} \right|^2$$

$$R = \left| \frac{\Re(\mu'_r) + iIm(\mu'_r) - 30.447 - i49.265}{30.447 + i49.265 + \Re(\mu'_r) + iIm(\mu'_r)} \right|^2$$

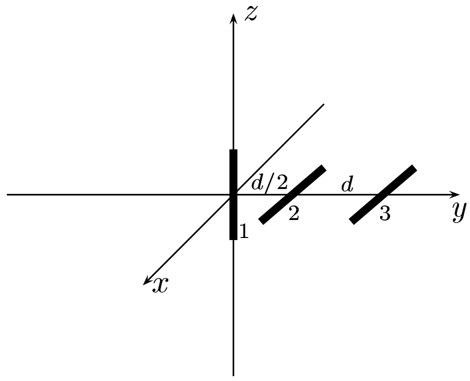
$$R = \left| \frac{(15 - 30.447) + i(45 - 49.265)}{(30.447 + 15) + i(45 + 49.265)} \right|^2 = \left| \frac{-15.447 - i4.265}{45.447 + i94.265} \right|^2 =$$

$$= \frac{(15.447)^2 + (4.265)^2}{(45.447)^2 + (94.265)^2} = \frac{256.8}{10951} = \underline{\underline{0.02345 = 2.345\%}}$$

avendo posto $k_2 = \beta + i\alpha$.

07-17) Esercizio n. 1 del 28/9/2007

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato.



———————

Le densitá di correnti sull'antenna 1, sull'antenna 2 e sull'antenna 3 rispettivamente sono:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{z} A_1 \delta(x)\delta(y) \cos kz & -l \le z \le +l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{x} A_2 \delta(y - d/2)\delta(z) \cos kx & -l \le x \le +l \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{x} A_3 \delta(y - 3d/2)\delta(z) \cos kx & -l \le x \le +l \end{cases}$$

Quindi la densitá di corrente risultante nel sistema di antenne é la somma delle tre:

$$\begin{aligned} \vec{J} =& \widehat{z} A_1 \delta(x)\delta(y) \cos kz + \widehat{x} A_2 \delta(y - d/2)\delta(z) \cos kx + \\ &+ \widehat{x} A_3 \delta(y - 3d/2)\delta(z) \cos kx \end{aligned}$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta, \phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta, \phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} \vec{J}(\vec{r}\,') d^3 r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x} \sin\theta \cos\phi + \widehat{y} \sin\theta \sin\phi + \widehat{z} \cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,' = x\,' \sin\theta \cos\phi + y\,' \sin\theta \sin\phi + z\,' \cos\theta$$

Ne segue:

$$\vec{N}(\theta,\phi)=\int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi+z'\cos\theta)}\widehat{z}A_1\delta(x')\delta(y')\cos kz'dx'dy'dz'+$$
$$+\int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi+z'\cos\theta)}\widehat{x}A_2\delta(y'-d/2)\delta(z')\cos kx'dx'dy'dz'+$$
$$+\int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi+z'\cos\theta)}\widehat{x}A_3\delta(y'-3d/2)\delta(z')\cos kx'dx'dy'dz'$$

ossia:

$$\vec{N}(\theta,\phi)=\widehat{z}A_1\int_{-l}^{+l}e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz'+$$
$$+\widehat{x}A_2\int_{-l}^{+l}e^{-ik\left(x'\sin\theta\cos\phi+\frac{d}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}\cos kx'dx'+$$
$$+\widehat{x}A_3\int_{-l}^{+l}e^{-ik\left(x'\sin\theta\cos\phi+\frac{3d}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}\cos kx'dx'$$

$$\vec{N}(\theta,\phi)=\widehat{z}A_1\int_{-l}^{+l}e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz'+$$
$$+\widehat{x}A_2e^{-ik\frac{d}{2}\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l}e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\cos kx'dx'+$$
$$+\widehat{x}A_3e^{-ik\frac{3d}{2}\sin\theta\sin\phi}\int_{-l}^{+l}e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\cos kx'dx'$$

Si ha:

$$\widehat{e}_r\cdot\widehat{x}=\cos\psi=\sin\theta\cos\phi$$

essendo ψ l'angolo formato fra l'asse x ed il raggio vettore del punto campo P.

Sfruttando,quindi, i risultati degli identici integrali svolti nella teoria delle antenne, possiamo scrivere:

$$\vec{N}(\theta,\phi)=\widehat{z}A_1\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+$$
$$+\widehat{x}A_2e^{-ik\frac{d}{2}\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}+$$
$$+\widehat{x}A_3e^{-ik\frac{3d}{2}\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}$$

Poiché:

$$\begin{cases}\widehat{x}=\widehat{e}_r\sin\theta\cos\phi+\widehat{e}_\theta\cos\theta\cos\phi-\widehat{e}_\phi\sin\phi\\[2ex]\widehat{z}=\widehat{e}_r\cos\theta-\widehat{e}_\theta\sin\theta\end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) =&\widehat{e}_r\Bigg[\cos\theta A_1\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+\\
&+\sin\theta\cos\phi A_2 e^{-ik\frac{d}{2}\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}+\\
&+\sin\theta\cos\phi A_3 e^{-ik\frac{3d}{2}\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}\Bigg]+\\
&+\widehat{e}_\theta\Bigg[-\sin\theta A_1\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+\\
&+\cos\theta\cos\phi A_2 e^{-ik\frac{d}{2}\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}+\\
&+\cos\theta\cos\phi A_3 e^{-ik\frac{3d}{2}\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}\Bigg]+\\
&+\widehat{e}_\phi\Bigg[-\sin\phi A_2 e^{-ik\frac{d}{2}\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}-\\
&-\sin\phi A_3 e^{-ik\frac{3d}{2}\sin\theta\sin\phi}\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\psi\right)}{\sin^2\psi}\Bigg]
\end{aligned}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(|N_\theta|^2+|N_\phi|^2\right)\widehat{e}_r$$

Ponendo $A_1 = A_2 = A_3 = 1$, si ha:

$$\begin{aligned}
N_\theta =&\Bigg[-\sin\theta\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+\\
&+\cos\theta\cos\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\left(e^{-ik\frac{d}{2}\sin\theta\sin\phi}+e^{-ik\frac{3d}{2}\sin\theta\sin\phi}\right)\Bigg]
\end{aligned}$$

$$N_\phi = \left[-\sin\phi\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\left(e^{-ik\frac{d}{2}\sin\theta\sin\phi}+e^{-ik\frac{3d}{2}\sin\theta\sin\phi}\right)\right]$$

07-18) Esercizio n. 2 del 28/9/2007

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nei piani $\theta = 90^0$, $\phi = 0^0$ e $\phi = 90^0$. Sia $d = \lambda/2$.

———————

Ponendo $\theta = \pi/2$ si ha:

$$N_\theta = -\frac{2}{k}$$

$$N_\phi = \left[-\frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin\phi} \left(e^{-ik\frac{d}{2}\sin\phi} + e^{-ik\frac{3d}{2}\sin\phi} \right) \right]$$

Segue:

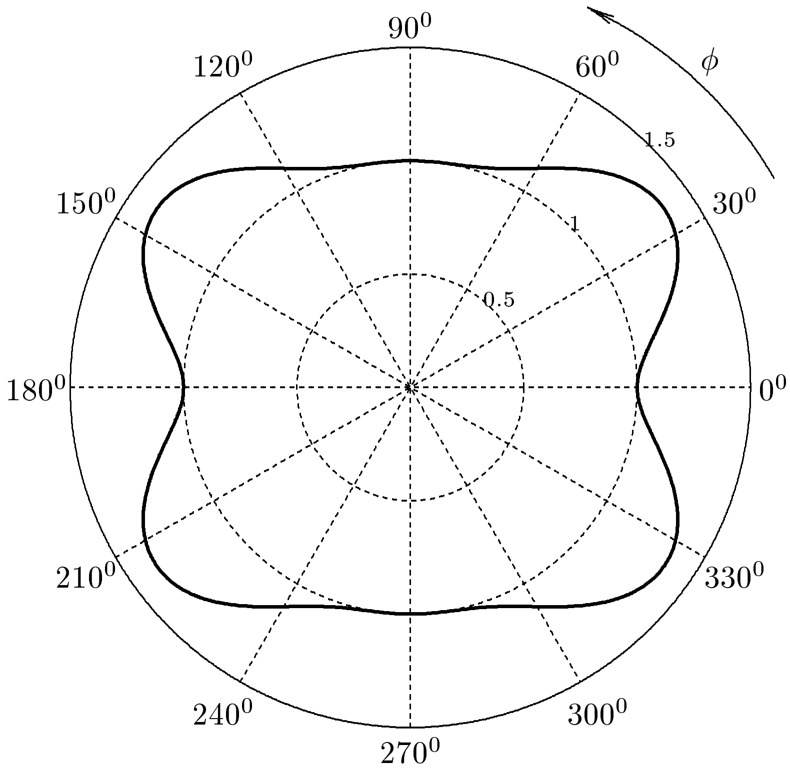
$$|N_\theta|^2 = \frac{4}{k^2}$$

$$|N_\phi|^2 = \frac{4}{k^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin^2\phi} \left(e^{-ik\frac{d}{2}\sin\phi} + e^{-ik\frac{3d}{2}\sin\phi} \right) \left(e^{+ik\frac{d}{2}\sin\phi} + e^{+ik\frac{3d}{2}\sin\phi} \right) =$$
$$= \frac{4}{k^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin^2\phi} 2[1 + \cos(kd\sin\phi)]$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{2\pi r} \right)^2 \left[1 + 2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin^2\phi} [1 + \cos(kd\sin\phi)] \right] \widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma per $kd = \pi$:

$$F(\phi) = 1 + 2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)}{\sin^2\phi} [1 + \cos(\pi\sin\phi)]$$



Ponendo $\phi = 0$ si ha:

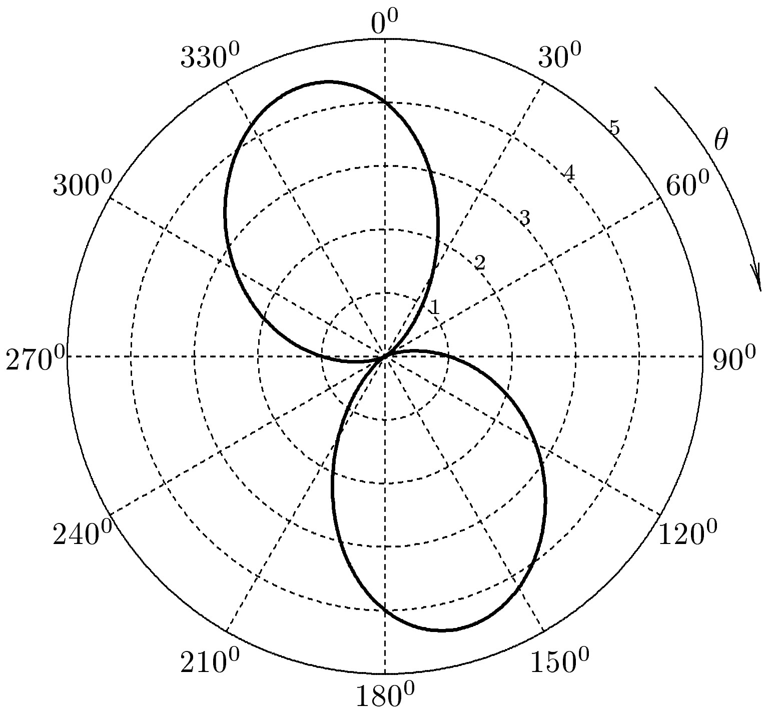
$$N_\theta = \left[\frac{4}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta} - \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right]$$

$$N_\phi = 0$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{2\pi r} \right)^2 \left[2\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right]^2 \widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\theta) = \left[2\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)}{\cos\theta} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right]^2$$



Ponendo $\phi = \pi/2$ si ha:

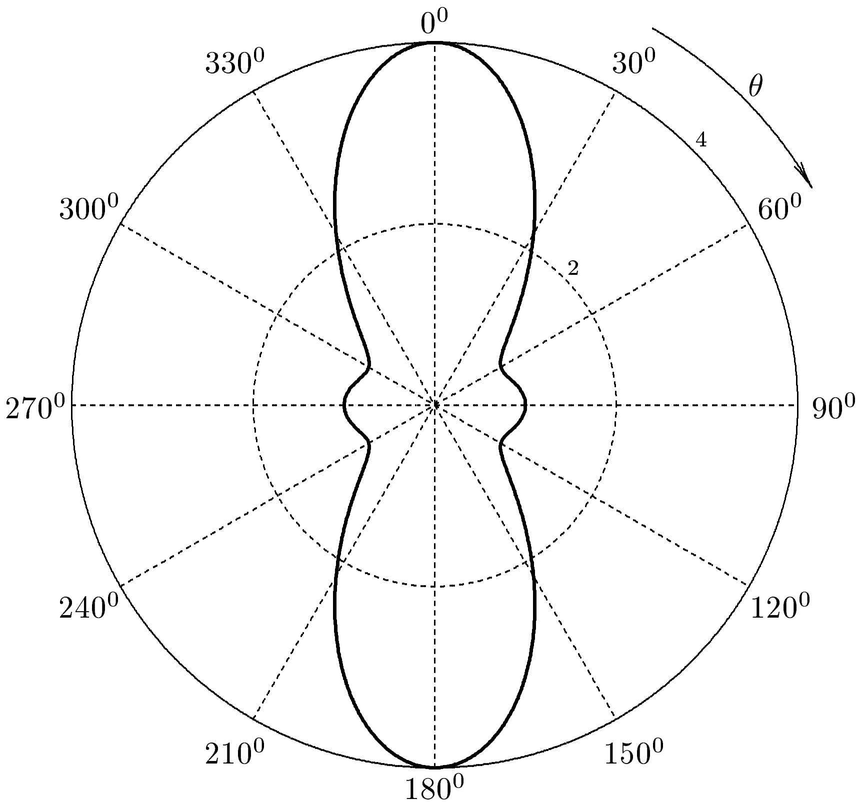
$$|N_\theta|^2 = \left[-\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]^2$$

$$|N_\phi|^2 = \frac{4}{k^2}\left[e^{-ik\frac{d}{2}\sin\theta} + e^{-ik\frac{d}{2}\sin\theta}\right]\left[e^{+ik\frac{d}{2}\sin\theta} + e^{+ik\frac{d}{2}\sin\theta}\right] =$$
$$= \frac{4}{k^2} 2[1+\cos(kd\sin\theta)]$$

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{1}{2\pi r}\right)^2\left[\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + 2[1+\cos(kd\sin\theta)]\right]\widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma per $kd = \pi$:

$$F(\theta) = \left[\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + 2[1+\cos(\pi\sin\theta)]\right]$$



0^0
30^0
60^0
90^0
120^0
150^0
180^0
210^0
240^0
270^0
300^0
330^0
θ
2
4

07-19) Esercizio n. 3 del 28/9/2007

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 10\ GHz$ si propaga in un plasma omogeneo uniformemente magnetizzato, lungo la direzione del campo magnetostatico applicato. Siano $B = 1000\ G$, $\omega_p = 2\pi \cdot 8\ GHz$, $\omega_{eff} = 0$. Calcolare l'angolo di rotazione per unitá di distanza percorsa che il vettore campo elettrico subisce nel plasma.

———————

Sappiamo dalla teoria che l'angolo τ di cui il vettore risultante $\vec{E}$ di un'onda elettromagnetica quando essa viaggiando nella direzione longitudinale in un plasma magnetizato ha percorso una distanza unitaria é:

$$\tau = \frac{k_0' - k_0''}{2}$$

La rotazione é nel senso orario se $k_0' > k_0''$. τ, dopo aver supposto $\omega_{eff} = 0$, si puó scrivere:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left[\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_g)}} - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_g)}}\right]$$

che riproduce la dipendenza della rotazione di Faraday τ con la frequenza. In termini di $X = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$ e $Y = -\frac{\omega_g}{\omega}$ puó essere scritta:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left(\sqrt{1 - \frac{X}{1+Y}} - \sqrt{1 - \frac{X}{1-Y}}\right)$$

Poiché ω_g é negativa per gli elettroni, osserviamo che τ é positiva (rotazione oraria) nel caso di propagazione parallela a $\vec{B}_0$.

Si ha:

$$X = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{2\pi \cdot 8}{2\pi \cdot 10}\right)^2 = 0.64$$

$$\omega_g = \frac{qB}{m} = -\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.1}{9.11 \cdot 10^{-31}} \simeq -1.7563 \cdot 10^{10}\ (rad/s) \simeq -2\pi \cdot 2.7953 \cdot 10^{9}\ (rad/s)$$

$$Y = -\frac{\omega_g}{\omega} = \frac{2.7953}{10} = 0.27953$$

$$1 - \frac{X}{1+Y} = 1 - \frac{0.64}{1 + 0.27953} = 1 - 0.50018 = 0.49982$$

$$1 - \frac{X}{1-Y} = 1 - \frac{0.64}{1 - 0.27352} = 1 - 0.88831 = 0.11169$$

Poiché i rapporti $\dfrac{X}{1-Y}$ e$\dfrac{X}{1+Y}$ non sono << 1 dobbiamo utilizzare le formule esatte; quindi:

$$\sqrt{1-\frac{X}{1+Y}}-\sqrt{1-\frac{X}{1-Y}}=\sqrt{0.49982}-\sqrt{0.11169}=0.70698-0.3342=0.37278$$

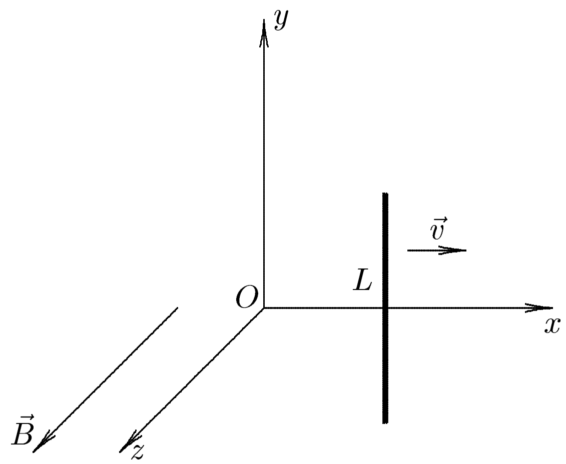
$$\tau=\frac{1}{2}\frac{2\pi\cdot 10\cdot 10^9}{3\cdot 10^8}\cdot 0.37278\simeq 104.72\cdot 0.37278\simeq \underline{\underline{39.038\ rad=2236.7\ gradi}}$$

Cioé il campo elettrico compie $\underline{\underline{2236.7/360=6.2131}}$ giri per metro.

07-20) Esercizio n. 4 del 28/9/2007

Una barra metallica lunga 1 metro é diretta secondo l'asse y di un sistema di riferimento. Essa si muove nella direzione $\widehat{x}$ con una velocitá di 48 Km/h. Un campo di induzione magnetica di modulo $B = 1000\ G$ é diretto nella direzione $\widehat{z}$. Calcolare la differenza di potenziale indotta fra gli estremi della barra.

————————



Consideriamo un sistema di riferimento $S \equiv (O, x, y, z)$. Rispetto ad esso si ha:

$$E_x = E_y = E_z = 0; \quad B_x = B_y = 0,\ B_z = 1000\ G = 0.1\ Wb/m^2$$

$$v = 48\ Km/h = 13.3\ m/s; \quad L = 1\ m$$

Consideriamo un sistema di riferimento S' solidale alla barra che si muove.

Applicando la legge di trasformazione dei campi, nel caso di moto lungo l'asse x positivo, si ha:

$$\begin{array}{ll} E'_x = E_x & B'_x = B_x \\ E'_y = \gamma\left[E_y - vB_z\right] & B'_y = \gamma\left[B_y + \dfrac{v}{c^2}E_z\right] \\ E'_z = \gamma\left[E_z + vB_y\right] & B'_z = \gamma\left[B_z - \dfrac{v}{c^2}E_y\right] \end{array}$$

ossia nel nuovo sistema di riferimento i campi sono:

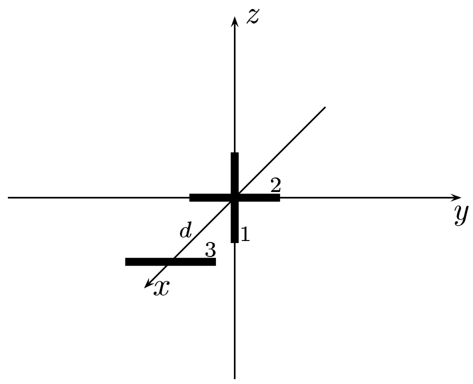
$$\begin{array}{ll} E'_x = 0 & B'_x = 0 \\ E'_y = \gamma\left(-vB_z\right) & B'_y = 0 \\ E'_z = 0 & B'_z = \gamma B_z \end{array}$$

Pertanto sulla barra vi sará un campo elettrico $E\ '_y = -vB_z$ avendo, ovviamente, posto $\gamma = 1$. La differenza di potenziale ai capi della barra é:

$$\epsilon = \oint_C E\ '_y d\vec{l} = -\int_0^L B_z v dl = -B_z v L = \underline{\underline{-1.33\ V}}$$

07-21) Esercizio n. 1 del 30/11/2007

Sia dato un sistema di antenne a mezz'onda uniformemente alimentate e con le correnti in fase fra di loro. Esse sono posizionate come in figura. Determinare l'espressione del vettore di Poynting irradiato.



———————

Le densitá di correnti sull'antenna 1, sull'antenna 2 e sull'antenna 3 rispettivamente sono:

$$\begin{cases} \vec{J}^{(1)} = \widehat{z} A_1 \delta(x)\delta(y)\cos kz & -l \le z \le +l \\ \vec{J}^{(2)} = \widehat{y} A_2 \delta(x)\delta(z)\cos ky & -l \le y \le +l \\ \vec{J}^{(3)} = \widehat{y} A_3 \delta(x-d)\delta(z)\cos ky & -l \le y \le +l \end{cases}$$

Quindi la densitá di corrente risultante nel sistema di antenne é la somma delle tre:

$$\begin{aligned} \vec{J} =& \widehat{z} A_1 \delta(x)\delta(y)\cos kz + \widehat{y} A_2 \delta(x)\delta(z)\cos ky + \\ &+ \widehat{y} A_3 \delta(x-d)\delta(z)\cos ky \end{aligned}$$

Il vettore di radiazione (far field) $\vec{N}(\theta,\phi)$ é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int_V e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} \vec{J}(\vec{r}\,') d^3 r\,'$$

Ora:

$$\widehat{e}_r = \widehat{x} \sin\theta\cos\phi + \widehat{y}\sin\theta\sin\phi + \widehat{z}\cos\theta$$

Quindi:

$$\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,' = x\,' \sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta$$

Ne segue:

$$\vec{N}(\theta,\phi)=\int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi+z'\cos\theta)}\widehat{z}A_1\delta(x')\delta(y')\cos kz'dx'dy'dz'+$$
$$+\int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi+z'\cos\theta)}\widehat{y}A_2\delta(x')\delta(z')\cos ky'dx'dy'dz'+$$
$$+\int_V e^{-ik\,(x'\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi+z'\cos\theta)}\widehat{y}A_3\delta(x'-d)\delta(z')\cos ky'dx'dy'dz'$$

ossia:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =&\widehat{z}A_1\int_{-l}^{+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz'+\\ &+\widehat{y}A_2\int_{-l}^{+l} e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos ky'dy'+\\ &+\widehat{y}A_3\int_{-l}^{+l} e^{-ik\,(d\sin\theta\cos\phi+y'\sin\theta\sin\phi)}\cos ky'dy'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi)=&\widehat{z}A_1\int_{-l}^{+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz'+\\ &+\widehat{y}A_2\int_{-l}^{+l} e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos ky'dy'+\\ &+\widehat{y}A_3 e^{-ikd\sin\theta\cos\phi}\int_{-l}^{+l} e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos ky'dy'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi)=&\widehat{z}A_1\int_{-l}^{+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz'+\\ &+\widehat{y}\left(A_2+A_3e^{-ikd\sin\theta\cos\phi}\right)\int_{-l}^{+l} e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos ky'dy'\end{aligned}$$

Poiché, per un'antenna a mezz'onda, risulta:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

$$\int_{-l}^{+l} e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\cos ky'dy' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}$$

possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta,\phi) =&\widehat{z}A_1\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}+\\ &+\widehat{y}\left(A_2+A_3e^{-ikd\sin\theta\cos\phi}\right)\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\end{aligned}$$

Poiché:

$$\begin{cases} \widehat{y} = \widehat{e}_r \sin\theta \sin\phi + \widehat{e}_\theta \cos\theta \sin\phi + \widehat{e}_\phi \cos\phi \\ \\ \widehat{z} = \widehat{e}_r \cos\theta - \widehat{e}_\theta \sin\theta \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
\vec{N}(\theta,\phi) =& \widehat{e}_r \Bigg[\cos\theta A_1 \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \\
& + \sin\theta\sin\phi \left(A_2 + A_3 e^{-ikd\sin\theta\cos\phi}\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\Bigg] + \\
& + \widehat{e}_\theta \Bigg[-\sin\theta A_1 \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \\
& + \cos\theta\sin\phi \left(A_2 + A_3 e^{-ikd\sin\theta\cos\phi}\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\Bigg] + \\
& + \widehat{e}_\phi \Bigg[\cos\phi \left(A_2 + A_3 e^{-ikd\sin\theta\cos\phi}\right) \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\Bigg]
\end{aligned}$$

Il vettore di Poynting (far field), mediato in un periodo, é:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2 \left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2\right) \widehat{e}_r$$

Ponendo $A_1 = A_2 = A_3 = 1$, si ha:

$$\begin{aligned}
N_\theta =& \Bigg[-\sin\theta \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + \\
& + \cos\theta\sin\phi \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} \left(1 + e^{-ikd\sin\theta\cos\phi}\right)\Bigg]
\end{aligned}$$

$$N_\phi = \left[\cos\phi \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi} \left(1 + e^{-ikd\sin\theta\cos\phi}\right)\right]$$

07-22) Esercizio n. 2 del 30/11/2007

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nei piani $\theta = 90^0$ e $\phi = 0^0$. Sia $d = \lambda/2$.

———————

Ponendo $\theta = \pi/2$ si ha:

$$N_\theta = -\frac{2}{k}$$

$$N_\phi = \left[\cos\phi \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{1-\sin^2\phi}\left(1+e^{-ikd\cos\phi}\right)\right]$$

Segue:

$$|N_\theta|^2 = \frac{4}{k^2}$$

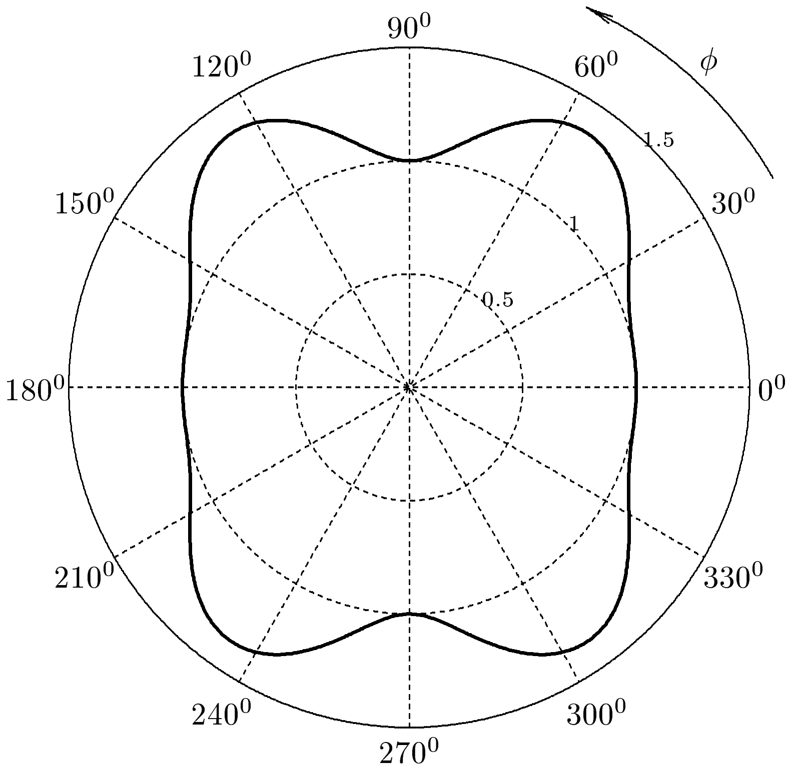
$$|N_\phi|^2 = \left|\cos\phi \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{1-\sin^2\phi}\left(1+e^{-ikd\cos\phi}\right)\right|^2 =$$

$$= \cos^2\phi \frac{4}{k^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{(1-\sin^2\phi)^2}\left[2+2\cos(kd\cos\phi)\right]$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{2\pi r}\right)^2 \left[1 + 2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos^2\phi}[1+\cos(kd\cos\phi)]\right]\widehat{e}_r$$

Grafichiamo il fattore di forma per $kd = \pi$:

$$F(\phi) = 1 + 2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\phi\right)}{\cos^2\phi}[1+\cos(\pi\cos\phi)]$$



Ponendo $\phi = 0$ si ha:

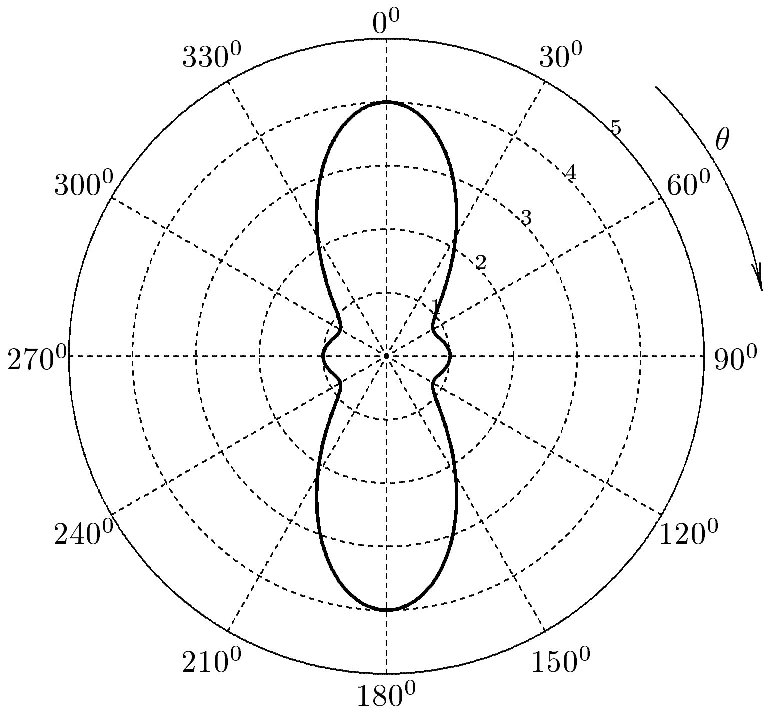
$$N_\theta = \left[-\frac{2}{k} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right]$$

$$N_\phi = \left[\cos\phi \frac{2}{k} \left(1 + e^{-ikd\sin\theta} \right) \right]$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{2\pi r} \right)^2 \left[\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + 2\left[1 + \cos(kd\sin\theta)\right] \right]$$

Grafichiamo il fattore di forma per $kd = \pi$:

$$F(\theta) = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} + 2\left[1 + \cos(\pi\sin\theta)\right]$$


0^0
30^0
60^0
90^0
120^0
150^0
180^0
210^0
240^0
270^0
300^0
330^0
θ
1
2
3
4
5

07-23) Esercizio n. 3 del 30/11/2007

Si consideri un plasma omogeneo magnetizzato uniformemente e senza collisioni. Sia $B = 1000\ G$ ed $N = 10^{12}\ cm^{-3}$ il numero di elettroni per unitá di volume. Un'onda elettromagnetica linearmente polarizzata si propaga nel plasma nella stessa direzione del campo magnetico. Calcolare le frequenze di soglia dell'onda ordinaria e dell'onda straordinaria.

———————

Si ha:

$$\omega_p^2 = \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m} = \frac{10^{18}\cdot(1.6\cdot 10^{-19})^2}{8.854\cdot 10^{-12}\cdot 9.11\cdot 10^{-31}} = 3.1738\cdot 10^{21}\ (rad/s)^2$$

da cui:

$$\omega_p = 5.6336\cdot 10^{10}\ (rad/s) \Longrightarrow \nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 8.9662\cdot 10^9\ (Hz)$$

Inoltre:

$$\omega_g = -\frac{|q_e|B}{m} = -\frac{1.6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{-1}}{9.11\cdot 10^{-31}} = -1.7563\cdot 10^{10}\ (rad/s) \quad \text{ossia} \quad \omega_g/\omega_p = -0.31175$$

Consideriamo la propagazione longitudinale ossia avente la stessa direzione del campo magnetico $\theta = 0^0$ e quindi $Y_T = 0$ e $Y_L = Y = \left(-\frac{\omega_g}{\omega}\right)$.

Si ha, per l'onda ordinaria:

$$\frac{c^2 k'^2_{(\theta=0^0)}}{\omega^2} = 1 - \frac{X}{(1+iZ)+Y}$$

Si ha, per l'onda straordinaria:

$$\frac{c^2 k''^2_{(\theta=0^0)}}{\omega^2} = 1 - \frac{X}{(1+iZ)-Y}$$

Ponendo $Z = 0$ si ha:

$$\frac{c^2 k'^2_{(\theta=0^0)}}{\omega^2} = 1 - \frac{X}{1+Y} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega-\omega_g)} \tag{1}$$

$$\frac{c^2 k''^2_{(\theta=\pi/2)}}{\omega^2} = 1 - \frac{X}{1-Y} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+\omega_g)} \tag{2}$$

$k'_{(\theta=0^0)}$ compete ad un'onda circolarmente polarizzata destra e $k''_{(\theta=0^0)}$ compete ad un'onda circolarmente polarizzata sinistra. Le frequenze di soglia si ottengono annullando le espressioni (1) e (2).

Per l'onda polarizzata circolarmente destra si ha:

$$\omega_R(\omega_R - \omega_g) = \omega_p^2$$

da cui:

$$\omega_R = \frac{\omega_g}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_g^2}{4} + \omega_p^2} = -0.87815 \cdot 10^{10} \pm \sqrt{\frac{(-1.7563 \cdot 10^{10})^2}{4} + 3.1738 \cdot 10^{21}} =$$
$$= -\, 0.87815 \cdot 10^{10} \pm 5.70171 \cdot 10^{10} = \underline{\underline{4.8236 \cdot 10^{10}}}\ rad \Longrightarrow \nu_R = \underline{\underline{7.677 \cdot 10^9\ Hz}}$$

avendo scartata la soluzione negativa. Da cui:

$$\frac{\omega_R}{\omega_p} = 0.85622$$

Per l'onda polarizzata circolarmente sinistra si ha:

$$\omega_L(\omega_L + \omega_g) = \omega_p^2$$

da cui:

$$\omega_L = -\,\frac{\omega_g}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_g^2}{4} + \omega_p^2} = 0.87815 \cdot 10^{10} \pm \sqrt{\frac{(-1.7563 \cdot 10^{10})^2}{4} + 3.1738 \cdot 10^{21}} =$$
$$= 0.87815 \cdot 10^{10} \pm 5.70171 \cdot 10^{10} = \underline{\underline{6.5799 \cdot 10^{10}}}\ rad \Longrightarrow \nu_L = \underline{\underline{10.472 \cdot 10^9\ Hz}}$$

avendo scartata la soluzione negativa. Da cui:

$$\frac{\omega_L}{\omega_p} = 1.168$$

07-24) Esercizio n. 4 del 30/11/2007

Con riferimento al problema precedente si valuti l'angolo unitario di rotazione di Faraday se la frequenza dell'onda é $\nu = 20\ GHz$.

———————

Sappiamo dalla teoria che l'angolo τ di cui il vettore risultante $\vec{E}$ di un'onda elettromagnetica quando essa viaggiando nella direzione longitudinale in un plasma magnetizzato ha percorso una distanza unitaria é:

$$\tau = \frac{k_0' - k_0''}{2}$$

La rotazione é nel senso orario se $k_0' > k_0''$. τ, dopo aver supposto $\omega_{eff} = 0$, si puó scrivere:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left[\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_g)}} - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_g)}}\right]$$

che riproduce la dipendenza della rotazione di Faraday τ con la frequenza. In termini di $X = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$ e $Y = -\frac{\omega_g}{\omega}$ puó essere scritta:

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left(\sqrt{1 - \frac{X}{1+Y}} - \sqrt{1 - \frac{X}{1-Y}}\right)$$

Poiché ω_g é negativa per gli elettroni, osserviamo che τ é positiva (rotazione oraria) nel caso di propagazione parallela a $\vec{B}_0$.

Si ha:

$$X = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{5.6336 \cdot 10^{10}}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{10}}\right)^2 = 0.20098$$

$$Y = -\frac{\omega_g}{\omega} = -\frac{1.7563 \cdot 10^{10}}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^10} = 0.13976$$

$$1 - \frac{X}{1+Y} = 1 - \frac{0.20098}{1 + 0.13976} = 1 - 0.17634 = 0.82366$$

$$1 - \frac{X}{1-Y} = 1 - \frac{0.20098}{1 - 0.13976} = 1 - 0.23363 = 0.76637$$

Poiché i rapporti $\frac{X}{1-Y}$ e $\frac{X}{1+Y}$ non sono $<< 1$ dobbiamo utilizzare le formule esatte; quindi:

$$\sqrt{1 - \frac{X}{1+Y}} - \sqrt{1 - \frac{X}{1-Y}} = \sqrt{0.82366} - \sqrt{0.76637} = 0.90756 - 0.87543 = 0.03213$$

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{2\pi \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} \cdot 0.03213 \simeq 209.44 \cdot 0.03213 \simeq \underline{\underline{6.7293\ rad/m = 385.56\ gradi}}$$

Cioé il campo elettrico compie $\underline{\underline{385.56/360 = 1.071}}$ giri per metro.

Fine Esercizi Campi e.m. - 2007