Esercizi svolti di Campi elettromagnetici - Anno 2006

06-1) Esercizio n. 1 del 23/1/2006

Si consideri un'antenna rettilinea eccitata con onda progressiva di corrente ($p = 1$). Si dimostri che l'angolo θ formato fra la direzione del filo e quella di massima radiazione, lungo la quale cioé il lobo del diagramma di radiazione presenta un massimo, soddisfa all'equazione:

$$\frac{\tan\beta}{\beta} = 2 - \frac{\beta}{kl}$$

essendo $2l$ la lunghezza dell'antenna e $\beta = 2kl\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Dalla teoria sappiamo che il fattore di forma descrivente il diagramma di radiazione, per $p = 1$, é:

$$F(\theta) = \sin\theta\frac{\sin[kl(1-\cos\theta)]}{(1-\cos\theta)} \tag{1}$$

Poiché $1 - \cos\theta = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, la (1) si puó scrivere:

$$F(\theta) = kl\sin\theta\frac{\sin\left[2kl\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}{2kl\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \tag{2}$$

ossia:

$$F(\theta) = kl\sin\theta\frac{\sin\beta}{\beta} \tag{3}$$

avendo posto $\beta = 2kl\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Per trovare l'angolo in corrispondenza del quale si abbia un massimo di radiazione emessa, é necessario annullare la derivata prima della funzione $F(\theta)$.

$$\frac{dF(\theta)}{d\theta} = kl\left[\cos\theta\frac{\sin\beta}{\beta} + \sin\theta\frac{\beta\cos\beta - \sin\beta}{\beta^2}\frac{d\beta}{d\theta}\right] \tag{4}$$

Ma:

$$\frac{d\beta}{d\theta} = kl\sin\theta$$

Quindi:

$$\frac{dF(\theta)}{d\theta} = kl\left[\cos\theta\frac{\sin\beta}{\beta} + kl\sin^2\theta\frac{\beta\cos\beta - \sin\beta}{\beta^2}\right] \tag{5}$$

Si ha:

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - \frac{\beta}{kl}$$

$$kl\sin^2\theta = 4kl\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 4kl\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = 2\beta - \frac{\beta^2}{kl}$$

Ne segue:

$$\frac{dF(\theta)}{d\theta} = kl\left[\frac{\sin\beta}{\beta} - \frac{\sin\beta}{kl} + 2\frac{\beta\cos\beta - \sin\beta}{\beta} - \frac{\beta\cos\beta - \sin\beta}{kl}\right] \tag{6}$$

$$\frac{dF(\theta)}{d\theta} = kl\left[\frac{kl\sin\beta - \beta\sin\beta + 2kl\beta\cos\beta - 2kl\sin\beta - \beta^2\cos\beta + \beta\sin\beta}{\beta kl}\right] \tag{7}$$

ossia:

$$\frac{dF(\theta)}{d\theta} = kl\left[\frac{-kl\sin\beta + 2kl\beta\cos\beta - \beta^2\cos\beta}{\beta kl}\right] \tag{8}$$

Deve essere, allora:

$$\frac{dF(\theta)}{d\theta} = 0 \tag{9}$$

L'equazione (9) ammette sicuramente la soluzione $\beta = 0$ che rappresenta la direzione del filo e quindi fornisce l'angolo di emissione nulla.

Per $\beta \neq 0$ deve essere:

$$-kl\sin\beta + 2kl\beta\cos\beta - \beta^2\cos\beta = 0 \tag{10}$$

Il primo valore di β che soddisfa l'equazione (10) rappresenta allora il primo massimo di emissione.

Dividendo per $\beta\cos\beta$:

$$-kl\frac{\tan\beta}{\beta} + 2kl - \beta = 0 \tag{11}$$

da cui:

$$\frac{\tan\beta}{\beta} = 2 - \frac{\beta}{kl} \tag{12}$$

06-2) Esercizio n. 2 del 23/01/2006

Con riferimento al problema precedente calcolare (numericamente) il primo valore di β nell'ipotesi $kl >> 1$. Calcolare l'angolo di massima emissione nel caso $kl = 3\pi$.

L'equazione (10) si puó scrivere:

$$\frac{\tan\beta}{\beta} = 2 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{10}$$

Per $kl >> 1$ l'angolo θ_{max} diventa sempre piú piccolo e quindi si puó trascurare $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ rispetto a 2. Pertanto si puó scrivere:

$$\frac{\tan\beta}{\beta} \simeq 2 \tag{11}$$

β	$\frac{\tan\beta}{\beta}$	β	$\frac{\tan\beta}{\beta}$	β	$\frac{\tan\beta}{\beta}$
1	1.5574	1.01	1.5764	1.02	1.5962
1.03	1.6167	1.04	1.6381	1.05	1.6603
1.06	1.6834	1.07	1.7075	1.08	1.7326
1.09	1.7588	1.10	1.7861	1.11	1.8147
1.12	1.8446	1.13	1.8759	1.14	1.9087
1.15	1.9430	**1.16**	**1.9791**	**1.17**	**2.0171**
1.18	2.0570	1.19	2.0991	1.20	2.1435

L'equazione é soddisfatta per un valore di β compreso fra 1.16 e 1.17. Il valore preciso é:

$$\beta \simeq \underline{\underline{1.1656}}$$

Per trovare, quindi. l'angolo di massima emissione nel caso $kl >> 1$, possiamo scrivere:

$$\sin^2\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) \simeq \frac{1.1656}{2kl}$$

Per $kl = 3\pi$ si ha:

$$\sin^2\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) \simeq \frac{1.1656}{6\pi} \simeq 6.1837 \cdot 10^{-2}$$

$$\sin\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) \simeq 2.4867 \cdot 10^{-1}$$

ossia:

$$\frac{\theta_{max}}{2} \simeq 0.2513\ rad \simeq 14^0.40$$

$$\theta_{max} \simeq \underline{\underline{28^0.80}}$$

che corrisponde con il valore indicato dal grafico negli Appunti di Campi elettromagnetici.

06-3) Esercizio n. 3 del 23/01/2006

Un metallo ha la frequenza angolare di plasma $\omega_p = 6 \cdot 10^{15}\ rad/s$ (che corrisponde ad una lunghezza d'onda nel vuoto $\lambda_0 \simeq 314\ nm$) e $\omega_{eff} = 3 \cdot 10^{13}\ rad/s$. Una radiazione luminosa alla frequenza tale che:

$$\omega^2 = \omega_p^2 - \omega_{eff}^2$$

incide in direzione della normale, dall'aria, sulla superficie di un campione di sodio. Calcolare: a) il valore della profonditá di penetrazione della luce nel sodio, b) il coefficiente di riflessione. Se si aumenta la frequenza della luce incidente in modo tale che risulti $\omega >> \omega_p$, calcolare approssimativamente il coefficiente di attenuazione e quello di riflessione.

Dalla teoria sappiamo che, in un metallo, la costante di propagazione ed il coefficiente di attenuazione soddisfano alle seguenti equazioni:

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}\right)$$

$$2\alpha\beta = \frac{\omega}{c^2}\frac{\omega_p^2 \omega_{eff}}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}$$

Nell'ipotesi che $\omega^2 + \omega_{eff}^2 = \omega_p^2$ risulta:

$$\beta^2 - \alpha^2 = 0$$

$$2\alpha\beta = \frac{\omega}{c^2}\omega_{eff}$$

ossia:

$$\beta = \alpha = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\omega\omega_{eff}}{2}} \simeq \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\omega_p\omega_{eff}}{2}}$$

avendo posto $\omega \simeq \omega_p$. Ne segue:

$$\beta \simeq 10^6\ rad/m$$

$$\alpha \simeq 10^6\ m^{-1}$$

La profonditá di penetrazione é allora:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \underline{\underline{10^{-6}\ m = 1\ \mu m}}$$

Il coefficiente di riflessione é:

$$R = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2 = \left|\frac{\beta_1 - \beta_2 - i\alpha_2}{\beta_1 + \beta_2 + i\alpha_2}\right|^2 = \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2 + \alpha^2}{(\beta_1 + \beta_2)^2 + \alpha^2} \simeq \underline{\underline{0.819}}$$

essendo:

$$\beta_1 \simeq \frac{\omega_p}{c} \simeq 2 \cdot 10^7 \; rad/m$$

Per $\omega >> \omega_p$ si ha:

$$\alpha \simeq 0 \quad e \quad \beta = \frac{\omega}{c}$$

Ne segue che il coefficiente di riflessione é nullo ed il mezzo é trasparente alla luce.

06-4) Esercizio n. 4 del 23/01/2006

Il mezzo interstellare é un plasma diluito contenente elettroni liberi e ioni con densitá $3{\cdot}10^4\ m^{-3}$. Una stella pulsar che é ad una distanza dalla Terra di $10^{19}\ m$ emette uno stretto impulso di radiazione elettromagnetica che contiene componenti in frequenza coprenti tutto lo spettro dal visibile fino alle radiofrequenze. Trovare la differenza nei tempi di arrivo sulla Terra fra la radiazione corrispondente alla luce rossa ($\lambda = 632.8\ nm$) e la radiazione a radiofrequenza a 100 MHz.

(vedi es. n.1 del 15/9/2000)

Indicando con t_1 il tempo impiegato dalla radiazione rossa e con t_2 quello impiegato dalla radiazione a radiofrequenza, si ha:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = L\left(\frac{1}{v_{g1}} - \frac{1}{v_{g2}}\right)$$

essendo v_{g1} e v_{g2} le velocitá di gruppo relative ai due segnali.

Supponendo la ionosfera priva di collisioni, risulta:

$$v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Quindi:

$$\Delta t = \frac{L}{c}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_2^2}}}\right]$$

Ora:

$$\begin{aligned}
\omega_p^2 =& \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} = 9.521455136 \cdot 10^7\ (rad/s)^2\\
\omega_1 =& 2\pi\frac{c}{\lambda} = 2.978754096 \cdot 10^{15}\ rad/s\\
\omega_2 =& 6.283185307 \cdot 10^8\ rad/s
\end{aligned}$$

Ne segue che:

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_1^2} = 1.073084743 \cdot 10^{-23} << 1 \quad e \quad \frac{\omega_p^2}{\omega_2^2} = 2.411812761 \cdot 10^{-10} << 1$$

Pertanto risulta:

$$\Delta t \simeq \frac{L}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega_1^2} - 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega_2^2}\right) \simeq -\frac{L}{2c}\frac{\omega_p^2}{\omega_2^2} \simeq \underline{\underline{-4.02\ s}}$$

Il segnale a radiofrequenza é in ritardo di circa 4 secondi rispetto al segnale luminoso.

06-5) Esercizio n. 1 del 27/02/2006

Consideriamo la propagazione delle onde radio attraverso la ionosfera terrestre (si ignori il campo magnetico e si consideri la Terra piana), prendendo in conto solo la componente elettronica senza collisioni. Se z é la coordinata verticale (a partire dalla superficie terrestre), si supponga che la base della ionosfera sia all'altezza $z^* = h_0$, e che la densitá del plasma aumenti linearmente con l'altezza. Allora la frequenza di plasma ν_p é esprimibile come:

$$\begin{cases} \nu_p^2 = 0 & \text{per } z \leq h_0 \\ \\ \nu_p^2 = K(z - h_0) & \text{per } z \geq h_0 \end{cases}$$

Se $h_0 = 50\ km$, $K = 6.67 \cdot 10^8 \left(\dfrac{s^{-2}}{m}\right)$ e $\nu = 12\ MHz$, calcolare:

a) l'altezza $h_{max}(\nu)$ (a partire dalla superficie terrestre) alla quale onde di frequenza ν, trasmesse verticalmente da un trasmettitore posto sulla superficie terrestre, siano riflesse dalla ionosfera;

b) il tempo di viaggio di andata e ritorno di un impulso di frequenza centrale ν che, trasmesso verticalmente, venga riflesso e ritorni alla sorgente.

Come sappiamo dalla teoria, supposta la Terra piana, la propagazione ionosferica é governata dalla legge:

$$n \sin i = \sin i_0 \tag{1}$$

che definisce la forma del 'raggio'.

Il raggio ritorna indietro quando si ha la condizione per la riflessione totale ossia $i = \pi/2$. Ne segue che la condizione per cui il raggio ritorna indietro é:

$$n = \sin i_0 \tag{2}$$

essendo n l'indice di rifrazione della ionosfera che é una funzione dell'altezza dalla superficie della Terra.

Per $i_0 = 0$, la suddetta condizione diventa:

$$n = 0 \tag{3}$$

Dalla teoria dei plasmi si ha:

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \tag{4}$$

Sostituendo l'espressione della frequenza di plasma risulta:

$$n = \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 K(z - h_0)}{\omega^2}} \tag{5}$$

L'altezza h_{max} alla quale il raggio torna indietro si ricava dalla (3), eguagliando quindi l'equazione (5) a zero:

$$\sqrt{1-\frac{4\pi^2 K(h_{max}-h_0)}{\omega^2}}=0 \tag{6}$$

ossia:

$$\omega^2=4\pi^2 K(h_{max}-h_0) \Longrightarrow \underline{\underline{h_{max}=h_0+\frac{\omega^2}{4\pi^2 K}\simeq 265.89\ km}} \tag{7}$$

Per rispondere al quesito b), scriviamo l'espressione della velocitá di gruppo:

$$v_g=c\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \tag{8}$$

Cominciamo a calcolare il tempo impiegato dal raggio per il viaggio andata e ritorno all'interno della ionosfera.

Si ha:

$$dt=\frac{dz}{v_g(z)}=\frac{dz}{c\sqrt{1-\dfrac{4\pi^2 K(z-h_0)}{\omega^2}}} \tag{9}$$

Integrando:

$$\begin{aligned} t_{iono}&=\int_{h_0}^{h_{max}}\frac{dz}{c\sqrt{1-\dfrac{4\pi^2 K(z-h_0)}{\omega^2}}}=-\frac{2\omega^2}{4\pi^2\cdot K\cdot c}\left[\sqrt{1-\frac{4\pi^2 K(z-h_0)}{\omega^2}}\right]_{h_0}^{h_{max}}\\ &=-\frac{2\omega^2}{4\pi^2\cdot K\cdot c}\left[\sqrt{1-\frac{4\pi^2 K(h_{max}-h_0)}{\omega^2}}-1\right]=\frac{2\omega^2}{4\pi^2\cdot K\cdot c}\end{aligned} \tag{10}$$

essendo valida la (6).

Si puó dare un'espressione piú elegante della (10) applicando l'equazione (7):

$$t_{iono}=\frac{2(h_{max}-h_0)}{c}$$

che conduce all'importante risultato che, nel caso di ionosfera con densitá elettronica lineare il tempo di transito é il doppio di quello competente al caso di atmosfera normale.

Risulta, dunque:

$$t_{iono}\simeq\frac{2\cdot 215.89\cdot 10^3}{3\cdot 10^8}\simeq\underline{\underline{1.4393\cdot 10^{-3}\ s}} \tag{11}$$

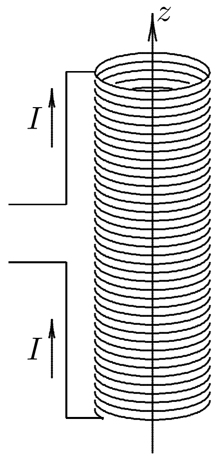
Allora il tempo complessivo di viaggio di andata e ritorno del 'raggio' é:

$$t_{ar}=2\frac{h_0}{c}+2\frac{2(h_{max}-h_0)}{c}=2\frac{h_0}{c}+2t_{iono}\simeq 0.33\cdot 10^{-3}+2.8766\cdot 10^{-3}\ s\simeq\underline{\underline{3.21\ ms}} \tag{12}$$

essendo $2\dfrac{h_0}{c}$ il tempo impiegato dal 'raggio' per percorrere la distanza dalla superficie terrestre alla base della ionosfera e viceversa.

06-6) Esercizio n. 2 del 27/02/2006

Un lungo solenoide vuoto é costituito da N spire per cm, su ciascuna delle quali scorre una corrente di intensitá I. Utilizzando il tensore degli sforzi di Maxwell, calcolare la tensione meccanica che agisce sulla parte interna del solenoide nella sezione centrale.



Il campo di induzione magnetica generato da un solenoide infinitamente lungo é:

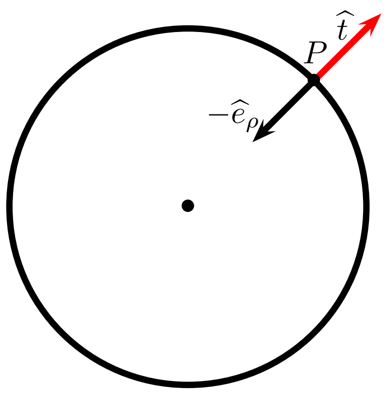
$$\vec{B} = \mu_0 N I \hat{z}$$

Il tensore degli sforzi é soltanto di natura magnetica. Nel nostro caso, tenendo conto che il campo ha soltanto la componente lungo l'asse z, é:

$$\bar{\bar{S}}^{(m)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2\mu_0}B_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2\mu_0}B_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & +\dfrac{1}{2\mu_0}B_z^2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo una sezione del solenoide. In ciascun punto di essa la normale é diretta verso il centro del solenide (parte esterna).

Consideriamo la sezione del solenoide:



Consideriamo un punto P su ciasscun punto della spira. Si ha:

$$\widehat{e}_\rho = \widehat{x}\cos\phi + \widehat{y}\sin\phi$$

La densitá superficiale di forza che agisce sul punto P é allora:

$$\vec{t} = \overline{\overline{S}}^{(m)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2\mu_0}B_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2\mu_0}B_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & +\dfrac{1}{2\mu_0}B_z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos\phi \\ -\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}B_z^2\cos\phi\widehat{x} + \frac{1}{2\mu_0}B_z^2\sin\phi\widehat{y} = \frac{1}{2\mu_0}B_z^2\widehat{e}_\rho$$

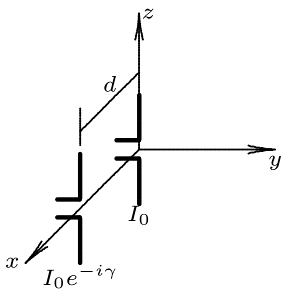
il cui modulo é:

$$|\vec{t}| = \frac{1}{2\mu_0}B_z^2 = \frac{\mu_0}{2}N^2I^2$$

La densitá di forza é di tensione, ossia tende ad allargare le spire, come disegnato in figura.

06-7) Esercizio n. 3 del 27/02/2006

Consideriamo un sistema di due dipoli a mezz'onda disposti come in figura. Calcolare γ e d affinché il diagramma di radiazione presenti un massimo nella direzione $+x$ e nessuna emissione nella direzione $-x$.



Il vettore di Poynting di un sistema di antenne é:

$$S_r = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{8\pi^2 r^2} \left| F(\theta) A(\theta, \phi) \right|^2$$

essendo:

$$A(\theta, \phi) = \sum_{p=0}^{n-1} A_p e^{-ikx_p \sin\theta \cos\phi}$$

e, per antenne a mezz'onda:

$$F(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}$$

Per un sistema di due antenne a mezz'onda si ha, allora:

$$A(\theta, \phi) = I_0 + I_0 e^{-i\gamma} e^{-ikd \sin\theta \cos\phi}$$

Pertanto il vettore di Poynting si scrive:

$$S_r = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{8\pi^2 r^2} \left| F(\theta) A(\theta, \phi) \right|^2 =$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{8\pi^2 r^2} \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right|^2 \left| I_0 + I_0 e^{-i\gamma} e^{-ikd\sin\theta\cos\phi} \right|^2 =$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{8\pi^2 r^2} \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right|^2 \left| 1 + e^{-i(kd\sin\theta\cos\phi + \gamma)} \right|^2 =$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{8\pi^2 r^2} \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right|^2 \left[1 + e^{-i(kd\sin\theta\cos\phi + \gamma)} \right] \left[1 + e^{+i(kd\sin\theta\cos\phi + \gamma)} \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{8\pi^2 r^2} \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right|^2 \left[2 + 2\cos(kd\sin\theta\cos\phi + \gamma) \right]$$

Consideriamo il vettore di Poynting per $\theta = 90^0$. Si ha:

$$(S_r)_{\theta = 90^0} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{8\pi^2 r^2} \left[2 + 2\cos(kd\cos\phi + \gamma) \right]$$

La direzione $+x$ corrisponde a $\phi = 0^0$; la direzione $-x$ corrispoonde a $\phi = 180^0$. Affinché siano verificate le condizioni richieste, deve essere:

$$\begin{cases} \cos(kd + \gamma) = 1 \\ \\ \cos(-kd + \gamma) = -1 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} kd + \gamma = \begin{cases} 0 \\ 2\pi \end{cases} \\ \\ -kd + \gamma = \pi \end{cases}$$

che comporta:

$$\begin{cases} kd = 2\pi - \gamma \\ \\ -2\pi + 2\gamma = \pi \end{cases}$$

ossia:

$$\gamma = 3\frac{\pi}{2} \qquad e \quad \frac{2\pi}{\lambda} d = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow d = \frac{\lambda}{4}$$

Si é evitato di porre eguale a zero la prima equazione perché avrebbe dato una distanza negativa.

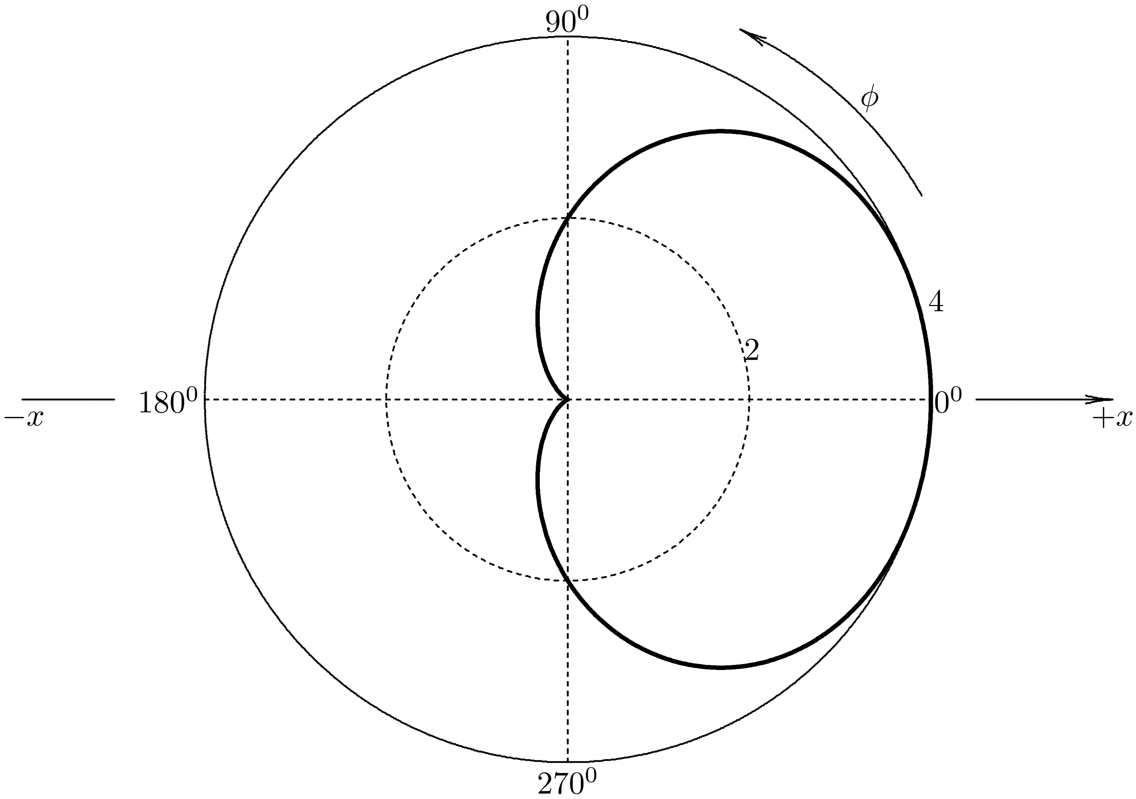
06-8) Esercizio n. 4 del 27/02/2006

Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione nel piano xy e nel piano xz.

Il fattore di forma che descrive il diagramma di radiazione nel piano xy é:

$$F(\phi) = [2 + 2\cos(kd\cos\phi + \gamma)]$$

con $\gamma = 3\frac{\pi}{2}$ e $kd = \frac{\pi}{2}$.



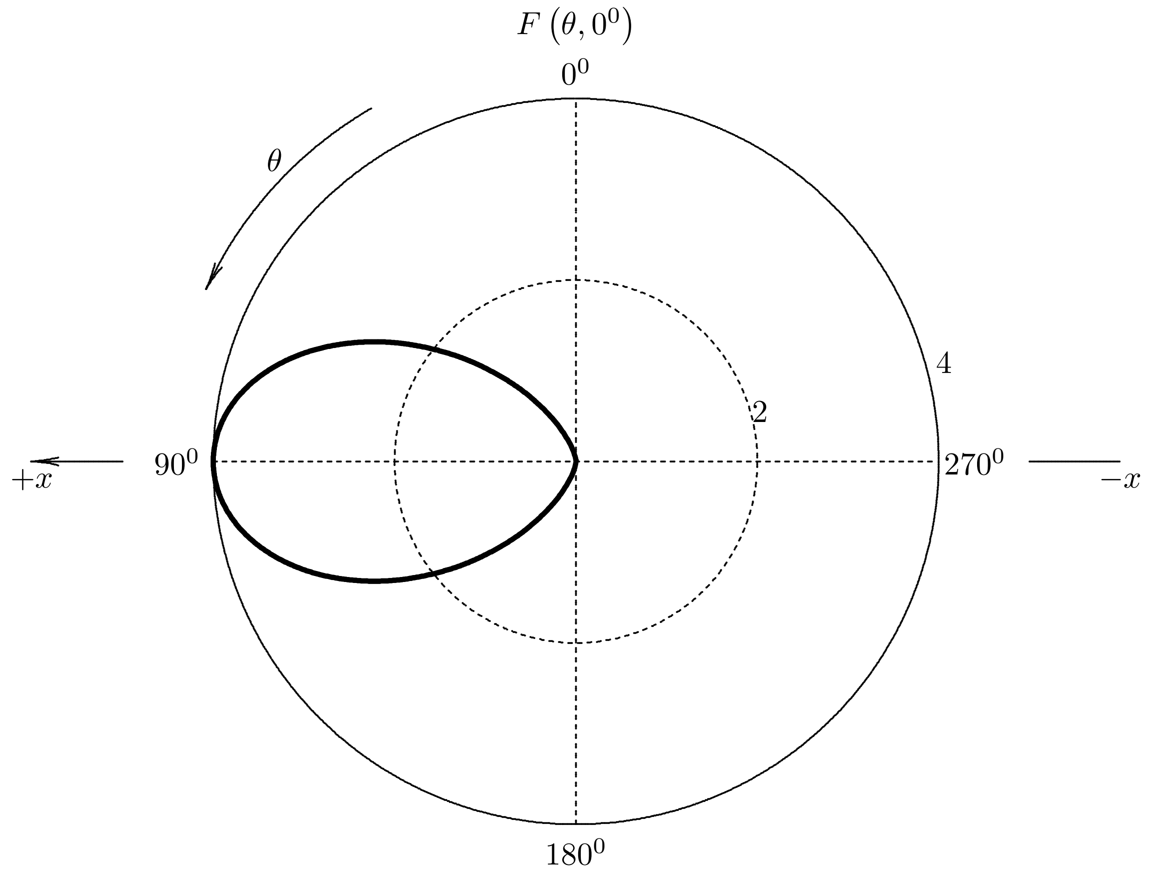
Il fattore di forma che descrive il diagramma di radiazione nel piano xz si ottiene ponendo $\phi = 0^0$ e $\phi = 180^0$ nell'espressione generale del vettore di Poynting:

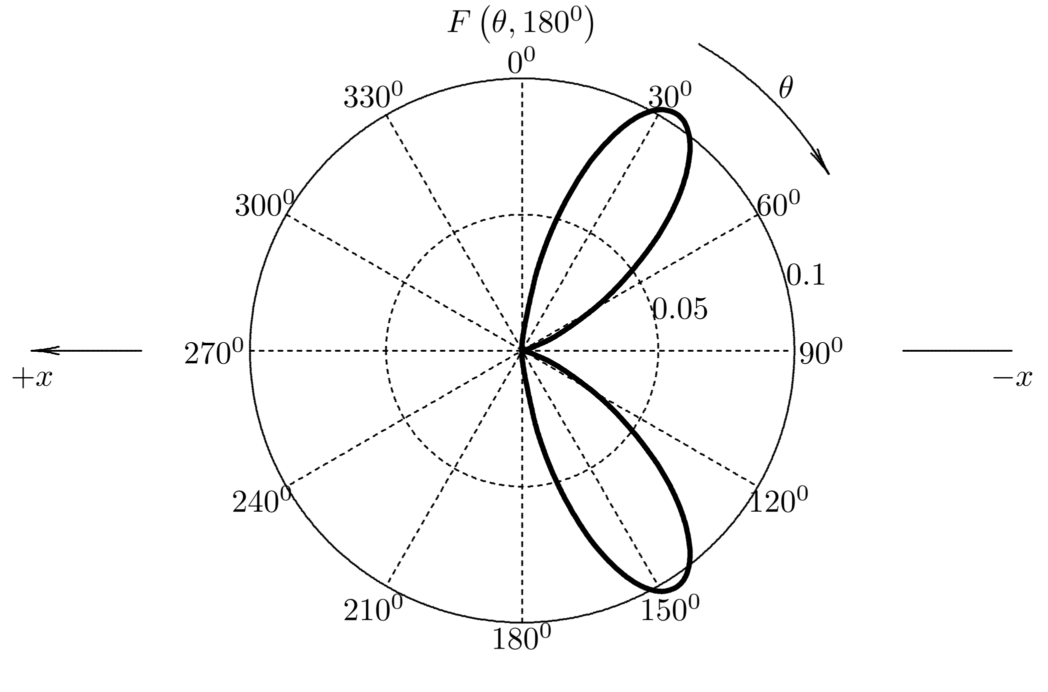
Per $\phi = 0^0$ si ha:

$$F(\theta)_{\phi=0^0} = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right|^2 [2 + 2\cos(kd\sin\theta + \gamma)] \qquad 0 \le \theta \le 180^0$$

Per $\phi = 180^0$ si ha:

$$F(\theta)_{\phi=0^0} = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right|^2 [2 + 2\cos(-kd\sin\theta + \gamma)] \qquad 0 \le \theta \le 180^0$$

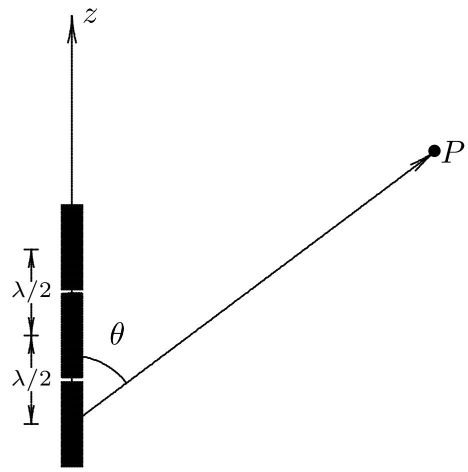

$F(\theta, 0^0)$
0^0
θ
4
2
90^0
$+x$
270^0
$-x$
180^0


$F(\theta, 180^0)$
0^0
330^0
30^0
θ
300^0
60^0
0.1
0.05
270^0
$+x$
90^0
$-x$
240^0
120^0
210^0
150^0
180^0

06-9) Esercizio n. 1 del 28/04/2006

Un array di antenne consiste di tre dipoli a mezz'onda allineati lungo l'asse z, equidistanti $d = \lambda/2$ e alimentati in fase. La corrente nel dipolo centrale é il doppio di quella che scorre negli altri due (che si assume unitaria). Determinare l'espressione del vettore di Poynting.

(vedi es. n.4 del 20/7/2001)



Poiché le ampiezze di corrente sono rappresentate dalla terna ordinata 1,2,1, l'array di antenne allineate come in figura é di tipo **binomiale**. Pertanto la formula dell'array factor si ottiene da quella studiata nella teoria sostituendo ψ con θ e ponendo, nel nostro caso, $\gamma = 0$.

La formula dell'array factor é, allora:

$$|A(\theta)| = 2^{n-1} \left|\cos^{n-1}(kd\cos\theta/2)\right|$$

che per $n = 3$ diventa:

$$|A(\theta)| = 2^{2} \left|\cos^{2}(kd\cos\theta/2)\right|$$

Il vettore di Poynting é:

$$S_r = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{8\pi^2 r^2} \left|F(\theta) A(\theta, \phi)\right|^2$$

essendo:

$$|F(\theta)| = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right| \quad e \quad |A(\theta)| = 2^2 \left|\cos^2(\pi\cos\theta/2)\right|$$

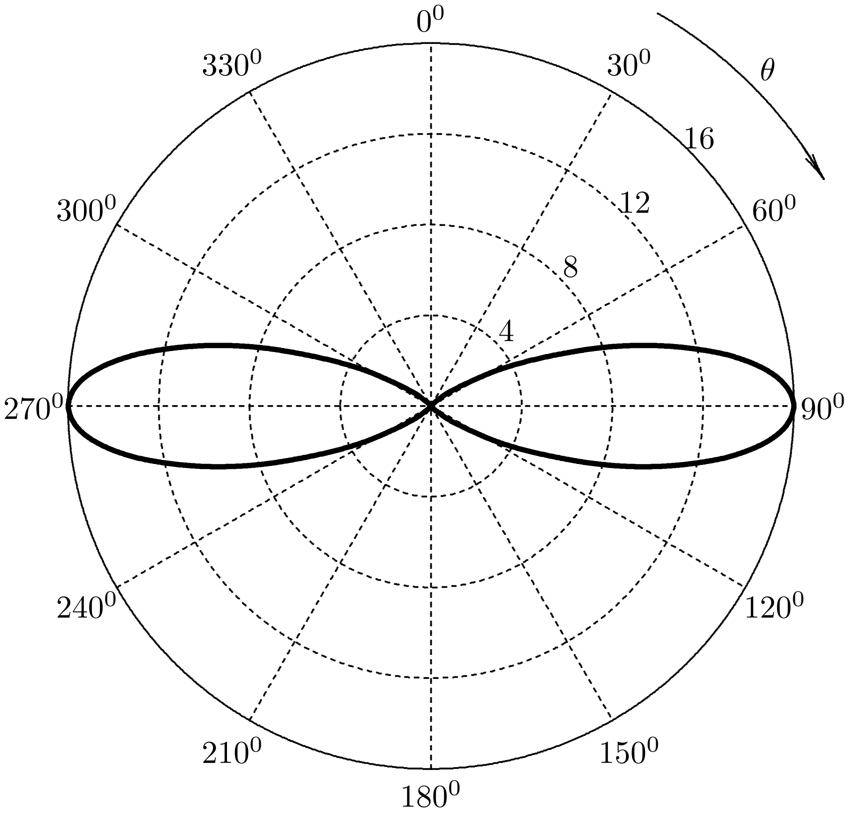
avendo posto $d = \lambda/2$ e quindi $kd = \pi$.

06-10) Esercizio n. 2 del 28/04/2006

Con riferimento al problema precedente graficare la densitá di potenza irradiata dal sistema di antenne.

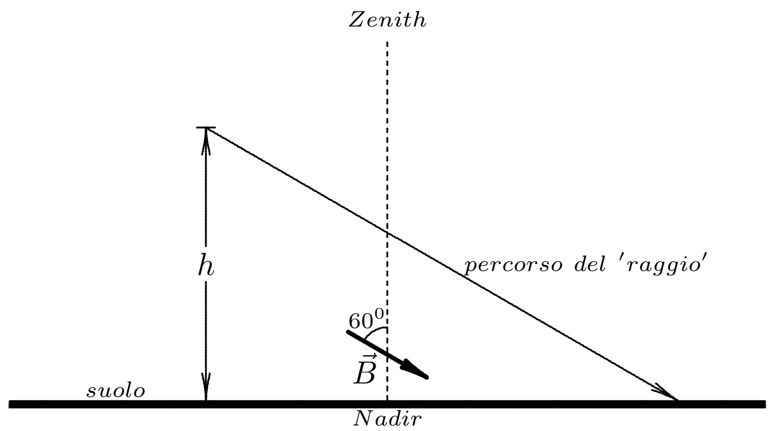
Il diagramma di radiazione é omnidirezionale.
Grafichiamo il fattore di forma:

$$U(\theta) = 16 \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right|^2 \left|\cos^2\left(\pi\cos\theta/2\right)\right|^2$$



06-11) Esercizio n. 3 del 28/04/2006

Si assuma che la ionosfera abbia una densitá elettronica uniforme di 10^{11} m^{-3} e che il campo magnetico terrestre formi un angolo di 60^0 rispetto al Nadir ed abbia una intensitá uniforme $B = 0.628$ $Gauss$. Trascurando le collisioni, calcolare l'angolo di rotazione di Faraday subito da un'onda elettromagnetica di frequenza $\nu = 1.4$ GHz trasmessa da un'altezza $h = 1000$ km lungo la direzione di B.



Si ha:

$$\omega_p^2 = \frac{nq^2}{m\epsilon_0} \simeq 3.1738 \cdot 10^{14}\ (rad/s)^2$$

$$\omega_g = \frac{q_e B_0}{m_e} \simeq -\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.628 \cdot 10^{-4}}{9.11 \cdot 10^{-31}} \simeq -1.103 \cdot 10^7\ rad/s$$

$$\omega = 2\pi\nu \simeq 8.8 \cdot 10^9\ rad/s$$

$$\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_g)} \simeq \frac{3.1738 \cdot 10^{14}}{8.8 \cdot 10^9 \cdot (8.8 \cdot 10^9 + 1.103 \cdot 10^7)} \simeq 4.0933 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_g)} \simeq \frac{3.1738 \cdot 10^{14}}{8.8 \cdot 10^9 \cdot (8.8 \cdot 10^9 - 1.103 \cdot 10^7)} \simeq 4.1035 \cdot 10^{-6}$$

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left[\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_g)}} - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_g)}}\right] \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_g)} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_g)}\right)\right] \simeq \frac{1}{2}\frac{\omega}{c} 5.1 \cdot 10^{-9} \simeq$$

$$\simeq 7.48 \cdot 10^{-8}\ rad/m$$

L'angolo di rotazione totale dopo tutto il percorso si ottiene moltiplicando l'angolo τ di rotazione per metro per la lunghezza del percorso. La lunghezza del percorso é:

$$L = \frac{h}{\sin 30^0} = 2 \cdot 10^6 \ m$$

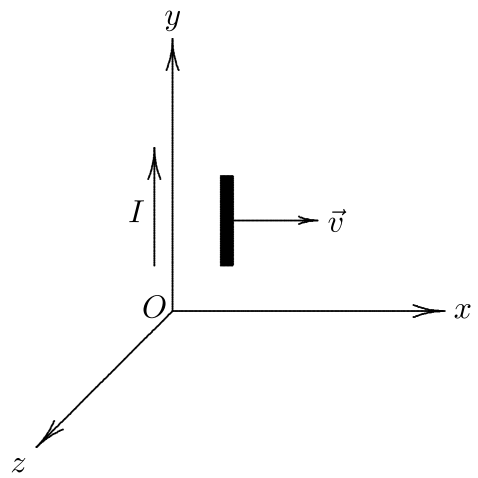
Pertanto, detto θ l'angolo di rotazione totale é:

$$\theta = L \cdot \tau \simeq 1.496 \cdot 10^{-1} \ rad \simeq \underline{\underline{8.57 \ gradi}}$$

06-12) Esercizio n. 4 del 28/04/2006

Un lungo filo conduttore percorso da corrente I si trova sull'asse y di un sistema di riferimento $Oxyz$. Una sottile barra metallica, di lunghezza l parallela al filo e giacente nel piano xy, si muove con velocità costante $\vec{v} = v\hat{x}$. Se la corrente I è diretta lungo il verso positivo dell'asse y, applicando le leggi di trasformazione dei campi, calcolare: a) il campo elettrico (in modulo, direzione e verso) in tutti i punti della barra; b) la f.e.m. misurabile fra gli estremi di essa; c) l'intensità e verso della corrente circolante nella barra se essa viene cortocircuitata con fili di resistenza trascurabile rispetto alla propria resistenza R.Il campo magnetico generato dal filo sul piano xy è:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}\widehat{z}$$



Il campo magnetico generato dal filo nel piano xy è:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}\widehat{z}$$

Quindi nel sistema S $(Oxyz)$ si ha:

$$E_x = E_y = E_z = 0$$

$$B_x = B_y = 0 \ ; \quad B_z = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}$$

Consideriamo un sistema S' solidale alla barra in moto. Scriviamo le trasformazioni:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x \\ E'_y &= \gamma[E_y - vB_z] \\ E'_z &= \gamma[E_z + vB_y] \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B'_x &= B_x \\ B'_y &= \gamma\left[B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right] \\ B'_z &= \gamma\left[B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right] \end{aligned}$$

che diventano

$$\begin{aligned} E'_x &= 0 \\ E'_y &= \gamma v \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x} \\ E'_z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B'_x &= 0 \\ B'_y &= 0 \\ B'_z &= \gamma B_z = -\gamma\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x} \end{aligned}$$

a) Il campo elettrico in tutti i punti della barra è:

$$\vec{E} = \gamma v \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}\hat{y}$$

b) La f.e.m. fra gli estremi di essa è:

$$f.e.m. = \gamma v l \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}$$

c) L'intensità di corrente è:

$$I = \frac{\gamma v l}{R}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}$$

ed ha nella barra lo stesso verso del filo.

06-13) Esercizio n. 1 del 26/06/2006

Un sistema uniforme di N antenne a mezz'onda, parallele ed equidistanziate, con i centri disposti lungo l'asse x di un sistema di riferimento, é alimentato con correnti dirette lungo l'asse z. Si desidera sintetizzare un pattern di radiazione che abbia i seguenti requisiti:

1. Presenti nel piano $\theta = \pi/2$ un solo singolo lobo principale per $0 \le \phi \le 180^0$ che abbia un massimo per $\phi = 60^0$.
2. Uno dei due zeri del lobo principale é $\phi_1 = 70^0$.

Calcolare la fase γ, il minimo numero N e la distanza d fra i dipoli adiacenti se l'array é alimentato ad una frequenza di 10 GHz.

Il diagramma di radiazione nel piano $\theta = \pi/2$ é rappresentata dall'espressione:

$$|A(\phi)| = \left| \frac{\sin\left[N\left(kd\cos\phi + \gamma\right)/2\right]}{\sin\left[\left(kd\cos\phi + \gamma\right)/2\right]} \right|$$

Affinché esso abbia un massimo per $\phi = 60^0$ occorre che:

$$kd\cos 60^0 + \gamma = 0$$

ossia:

$$\gamma = -\frac{kd}{2}$$

Per $\phi = \phi_1 = 70^0$ il diagramma deve presentare uno zero; pertanto deve essere:

$$\frac{N}{2}(kd\cos 70^0 + \gamma) = \pm\pi$$

e, ancora:

$$\frac{N}{2}\left[kd\left(\cos 70^0 - 0.5\right)\right] = \pm\pi$$

ossia:

$$Nkd = \pm\frac{2\pi}{\cos 70^0 - 0.5} \simeq -\frac{2\pi}{0.342 - 0.5} \simeq 39.77$$

dove abbiamo scelto il segno meno in quanto Nkd deve essere positivo.

Bisogna, ora, stabilire il minimo numero N di antenne affinché il sistema presenti un solo lobo nell'intervallo $0 \le \phi \le 180^0$. Per questo consideriamo il massimo successivo della funzione $A(\phi)$. Esso si ha per:

$$kd\cos\phi_{2_{max}} + \gamma = \pm 2\pi$$

Affinché il massimo della funzione sia soltanto quello corrispondente a 60^0, occorre che

$$|\cos\phi_{2_{max}}| > 1$$

ossia:

$$\cos\phi_{2_{max}} = \frac{2\pi - \gamma}{kd} > 1 \Longrightarrow \frac{4\pi + kd}{2kd} > 1$$

e:

$$\cos\phi_{2_{max}} = \frac{-2\pi - \gamma}{kd} < -1 \Longrightarrow \frac{-4\pi + kd}{2kd} < -1$$

La prima comporta:

$$4\pi > kd \Longrightarrow 4N\pi > Nkd \Longrightarrow 4N\pi > 39.77 \Longrightarrow N > \frac{39.77}{4\pi} = 3.16$$

La seconda comporta:

$$-4\pi < -3kd \Longrightarrow 4N\pi > 3Nkd \Longrightarrow 4N\pi > 3 \cdot 39.77 \Longrightarrow N > \frac{3 \cdot 39.77}{4\pi} = 9.49$$

Ne segue che il minimo numero di antenne affinché esista un singolo lobo principale a 60^0 é $N = 10$.

Si ha, ovviamente;

$$kd = \frac{39.77}{N} = 3.977$$

e, ancora:

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{3.977}{2\pi} = 0.63$$

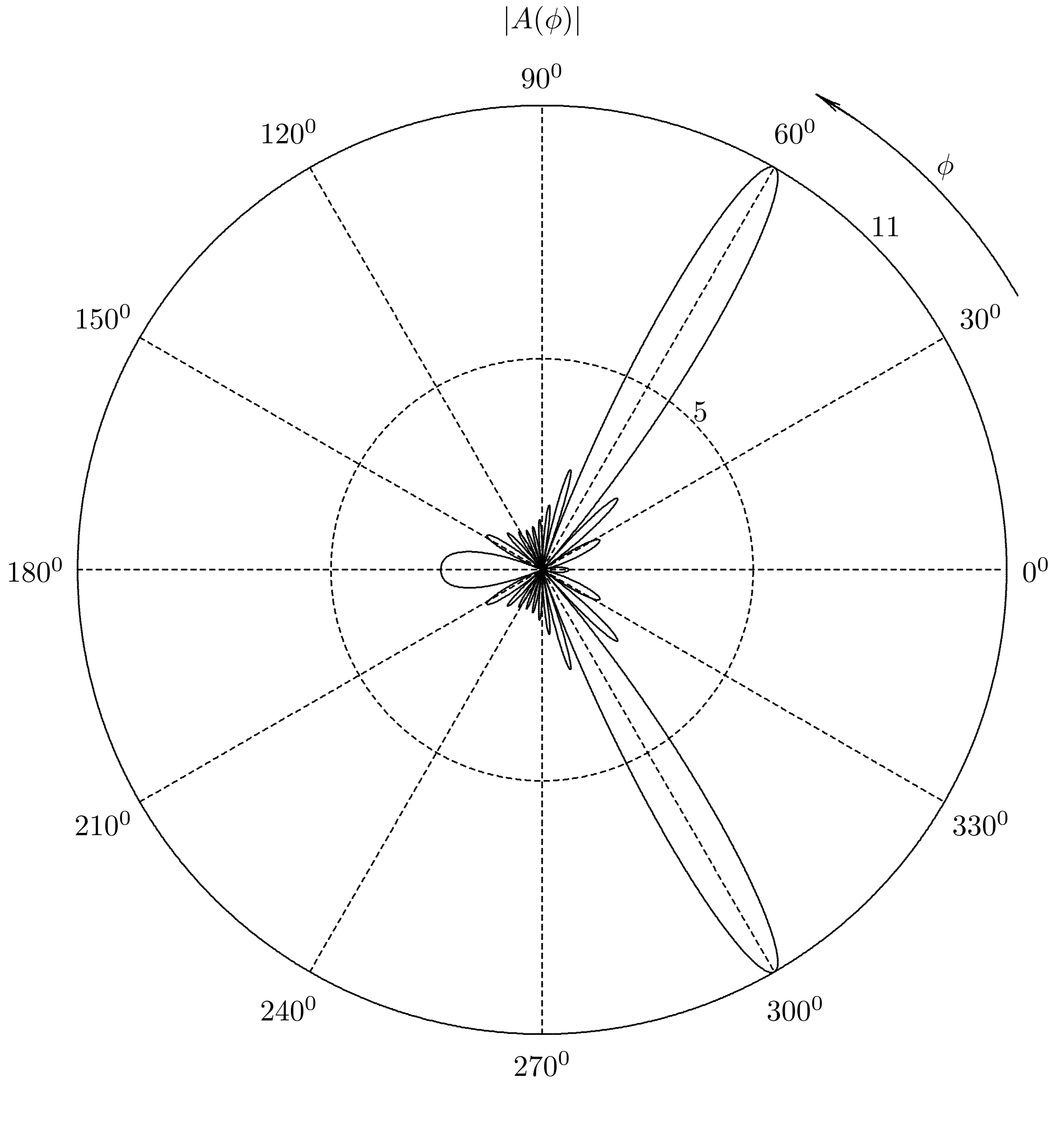
Poiché la lunghezza d'onda λ é 3 cm, si ha:

$$d = 0.63\lambda = 1.89\ cm$$

06-14) Esercizio n. 2 del 26/06/2006

Con riferimento al problema precedente, graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = \pi/2$ assumendo che il numero di antenne sia $N = N_{min} + 1$ essendo N_{min} il minimo numero di antenne calcolato.

Poniamo $N = 11$, $\gamma = -\frac{kd}{2} = -\frac{39.77}{2 \cdot 11} \simeq -1.8$



06-15) Esercizio n. 3 del 26/06/2006

Un dispositivo per la rotazione di Faraday consiste di una lastra di ferrite ($\epsilon_r \simeq 15$) magnetizzata con un campo di induzione magnetica di 10000 G. Calcolare la spessore della lastra affinché un'onda elettromagnetica, linearmente polarizzata, di frequenza $\nu = 1\ GHz$ che si propaga lungo la direzione del campo subisca una rotazione del piano di polarizzazione di 90^0. Si ponga $\gamma_e \simeq -10^{10}\ C/Kg$ e $\mu_{xx} = 1.105\mu_0$.

(vedi es. n.2 del 20/7/2001)

$$\tau = \frac{1}{2}\omega\sqrt{\epsilon\mu_0}\left[\sqrt{1+\frac{\omega_m}{\omega_0+\omega}} - \sqrt{1+\frac{\omega_m}{\omega_0-\omega}}\right]$$

Si ha:

$$\mu_{xx} = \mu_0(1+\chi_{xx}) = \mu_0\left(1+\frac{\omega_0\omega_m}{\omega_0^2-\omega^2}\right) = 1.105\mu_0$$

da cui:

$$\frac{\omega_0\omega_m}{\omega_0^2-\omega^2} = 0.105$$

da cui:

$$\omega_m = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\omega_0}0.105$$

Si ha anche:

$$\omega_0 = -\gamma_e B_0 = 10^{10}\cdot 1 = 10^{10}\ rad/s, \qquad \omega = 2\pi\nu = 2\pi\cdot 10^9\ rad/s$$

Ne segue:

$$\omega_m = \frac{10^{20}-4\pi^2 10^{20}}{10^{10}}0.105 \simeq 6.35\cdot 10^8\ rad/s$$

$$\frac{\omega_m}{\omega_0+\omega} = \frac{6.35\cdot 10^8}{10^{10}+2\pi\cdot 10^9} \simeq 0.039$$

$$\frac{\omega_m}{\omega_0-\omega} = \frac{6.35\cdot 10^8}{10^{10}-2\pi\cdot 10^9} \simeq 0.17$$

Quindi:

$$\sqrt{1+\frac{\omega_m}{\omega_0+\omega}} \simeq \sqrt{1-0.039} \simeq 0.9803$$

$$\sqrt{1+\frac{\omega_m}{\omega_0-\omega}} \simeq \sqrt{1+0.17} \simeq 1.08167$$

In definitiva:

$$\tau = \frac{1}{2}\omega\sqrt{\epsilon\mu_0}\,[0.9803 - 1.08167] = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r}\cdot(-0.10137) = -\frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\sqrt{15}\cdot 0.10137 \simeq$$
$$\simeq -\frac{1}{2}\frac{2\pi\cdot 10^9}{3\cdot 10^8}\cdot 3.87\cdot 0.10137 \simeq -4.1082\ rad/m \simeq -235.38\ gradi/m$$

Poiché, indicando con L la lunghezza della ferrite, deve essere:

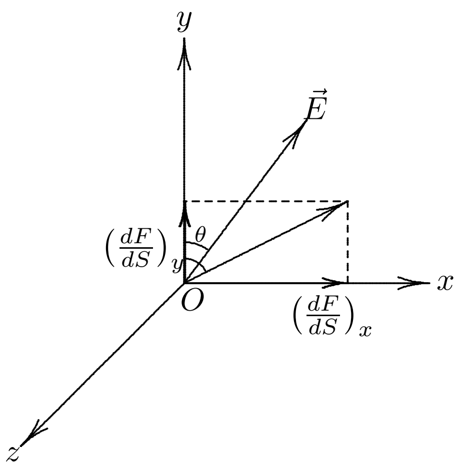
$$\tau L = 90^0$$

risulta:

$$L = \frac{90}{235.38} = \underline{\underline{0.38\ m}} = \underline{\underline{38\ cm}}$$

06-16) Esercizio n. 4 del 26/06/2006

Un piano xz di un sistema di riferimento $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ sia una superficie non conduttrice. In ciascun punto di essa agisce un campo elettrico uniforme $\vec{E}$ che giace nei piani paralleli al piano xy e forma un angolo θ con la direzione dell'asse y. Applicando il tensore degli sforzi di Maxwell calcolare, per unità di area, le componenti, lungo le direzioni dei tre assi, della forza che agisce sulla superficie. Si calcoli, altresì, il modulo di tale forza e l'angolo che essa forma con la direzione dell'asse y. Si commentino i risultati ottenuti discutendo i seguenti casi particolari: a) $\vec{E} = E\hat{y}$; b) $\vec{E} = E\hat{x}$; c) $\vec{E} = -E\hat{y}$; d) $\vec{E} = -E\hat{x}$, individuando in quali casi la forza è di tensione ed in quali di pressione.



Si ha:

$$E_x = E\sin\theta \; ; \quad E_y = E\cos\theta \; ; \quad E_z = 0$$
$$\hat{n} = \hat{y} \; ; \quad \hat{n}_x = \hat{n}_z = 0$$

Applicando il tensore degli sforzi si ha:

$$\left(\frac{d\vec{F}}{dS}\right)_x = \epsilon_0 E^2 \sin\theta\cos\theta\hat{x} = \epsilon_0 \frac{E^2}{2}\sin 2\theta\hat{x}$$

$$\left(\frac{d\vec{F}}{dS}\right)_y = \epsilon_0\left(E^2\cos^2\theta - \frac{E^2}{2}\right)\hat{y} = \epsilon_0 E^2\left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)\hat{y} =$$
$$= \epsilon_0 E^2 \frac{1}{2}\cos 2\theta\hat{y}$$

$$\left(\frac{d\vec{F}}{dS}\right)_z = 0$$

Il modulo di tale forza è:

$$\left|\frac{d\vec{F}}{dS}\right| = \epsilon_0 \frac{E^2}{2}(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) = \epsilon_0 \frac{E^2}{2}$$

Per quanto riguarda l'angolo formato con l'asse y si ha:

$$\cot\alpha = \frac{\left(\dfrac{d\vec{F}}{dS}\right)_y}{\left(\dfrac{d\vec{F}}{dS}\right)_x} = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \cot 2\theta \Longrightarrow \alpha = \underline{\underline{2\theta}}$$

$$\begin{cases} \theta = 0 \ \alpha = 0 & \text{forza di tensione} \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} \ \alpha = \pi & \text{forza di pressione} \\ \theta = \pi \ \alpha = 2\pi & \text{forza di tensione} \\ \theta = \dfrac{3}{2}\pi \ \alpha = 3\pi & \text{forza di pressione} \end{cases}$$

06-17) Esercizio n. 1 del 24/07/2006

Una stazione radio é situata in una localitá in cui a ovest c'é il mare e ad est, ad una distanza di 15 km, una cittá. L'antenna trasmittente puó essere modellata come un dipolo hertziano verticale di momento Il. Quanta potenza deve erogare l'antenna per mantenere lo standard di 25 mV/m per l'intensitá del campo elettrico nella cittá? Se alla prima antenna se ne aggiunge una seconda, sempre di momento Il, a quale distanza d dalla prima, nella direzione est-ovest, essa deve essere posta e con quale differenza di fase essa deve essere alimentata affinché vi sia uno zero nella direzione dell'oceano ($\theta = \pi/2$, $\phi = 180^0$) e un massimo nella direzione della cittá ($\theta = \pi/2$, $\phi = 0^0$)?

(vedi es. n.3 del 23/9/2005)

Il campo elettrico far field emesso da un dipolo hertziano é:

$$\vec{E} = -\widehat{e}_\theta i\omega\mu Il \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\sin\theta$$

Il modulo di $\vec{E}$ é:

$$E = \omega\mu Il \frac{1}{4\pi r}\sin\theta$$

$$E_{max} = \omega\mu Il \frac{1}{4\pi r}$$

Per $r = 15000\ m$ e $\mu = \mu_0$, deve essere:

$$\omega\mu_0 Il \frac{1}{4\pi \cdot 15 \cdot 10^3} = 25\ mV/m$$

da cui:

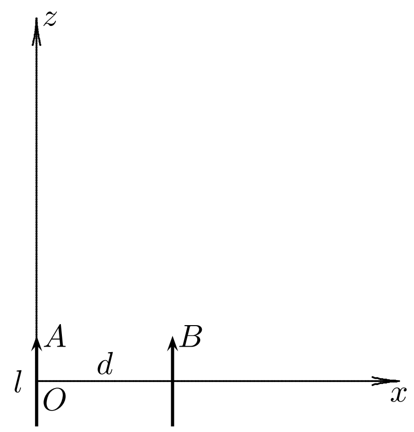
$$\omega Il = \frac{4\pi \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 375 \cdot 10^7$$

La potenza irradiata, per $\epsilon = \epsilon_0$, é:

$$P = \frac{4}{3}\pi Z \left(\frac{kIl}{4\pi}\right)^2 = \frac{4}{3}\pi\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\frac{\omega^2\epsilon_0\mu_0 I^2 l^2}{16\pi^2} = \frac{4}{3}\pi\frac{\mu_0}{c}\frac{\omega^2 I^2 l^2}{16\pi^2}$$

ossia:

$$P = \frac{16\pi^2 \cdot 10^{-7} \cdot \left(375 \cdot 10^7\right)^2}{9 \cdot 10^8 \cdot 16\pi^2} = \frac{(375)^2}{9}10^{-1} = \underline{\underline{1.5625 \cdot 10^3\ W = 1562.5\ W}}$$



La densitá di corrente totale che scorre nel sistema di antenne é:

$$\vec{J}_T = \vec{J}_A + \vec{J}_B$$

Risulta:

$$\vec{J}_A = \hat{z} J_0 \delta(x)\delta(y)$$
$$\vec{J}_B = \hat{z} J_0 e^{-i\gamma}\delta(x-d)\delta(y)$$

Il vettore di radiazione é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} J(\vec{r}\,')d^3r\,' =$$
$$= \hat{z}J_0 \int e^{-ik(x\,'\sin\theta\cos\phi + y\,'\sin\theta\sin\phi + z\,'\cos\theta)}[\delta(x\,')\delta(y\,') +$$
$$+ e^{-i\gamma}\delta(x\,'-d)\delta(y\,')\Big] dx\,'dy\,'dz\,'$$

Quindi, si ha:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} J(\vec{r}\,')d^3r\,' =$$
$$= \hat{z}J_0 \int_{-l/2}^{+l/2} e^{-ikz\,'\cos\theta} dz\,' +$$
$$+ \hat{z}J_0 e^{-i\,(kd\sin\theta\cos\phi + \gamma)} \int_{-l/2}^{+l/2} e^{-ikz\,'\cos\theta} dz\,'$$

ossia:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} J(\vec{r}\,')d^3r\,' =$$
$$= \hat{z}J_0 \left[1 + e^{-i\,(kd\sin\theta\cos\phi + \gamma)}\right] \int_{-l/2}^{+l/2} e^{-ikz\,'\cos\theta} dz\,'$$

Ne segue:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} J(\vec{r}\,')d^3r\,' =$$
$$= \widehat{z} J_0 \left[1 + e^{-i\,(kd\sin\theta\cos\phi + \gamma)}\right] \frac{1}{-ik\cos\theta} \left[-2i\sin\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right)\right]$$

Tenendo conto che:

$$\widehat{z} = \widehat{e}_r \cos\theta - \widehat{e}_\theta \sin\theta$$

si ha:

$$N_\theta(\theta,\phi) = -\,J_0 \left[1 + e^{-i\,(kd\sin\theta\cos\phi + \gamma)}\right] \frac{1}{-ik\cos\theta} \left[-2i\sin\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right)\right] \sin\theta$$

Consideriamo il rapporto:

$$\frac{\sin\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right)}{\cos\theta}$$

Per $\theta = \pi/2$ esso é una forma indeterminata $\frac{0}{0}$
Si ha:

$$\lim_{\theta\to\pi/2} \left\{ \frac{kl}{2}\sin\theta \frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right\} = \frac{kl}{2}$$

Nel piano $\theta = \pi/2$ si ha:

$$N_\theta(\pi/2,\phi) = -\,J_0 \left[1 + e^{-i\,(kd\cos\phi + \gamma)}\right] \frac{1}{-ik} \left[-2i\frac{kl}{2}\right]$$

che si puó ancora scrivere:

$$N_\theta(\pi/2,\phi) = -\,J_0 l \left[1 + e^{-i\,(kd\cos\phi + \gamma)}\right]$$

Il vettore di Poynting far field, mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2 \left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2\right) \widehat{e}_r$$

ossia:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2 J_0^2 l^2 \left[2 + e^{-i\,(kd\cos\phi + \gamma)} + e^{+i\,(kd\cos\phi + \gamma)}\right]$$

e, ancora:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2 J_0^2 l^2 \left[2 + 2\cos\left(kd\cos\phi + \gamma\right)\right]$$

Affinché vi sia uno zero per $\phi = 180^0$ occorre che:

$$\cos(-kd + \gamma) = -1 \Longrightarrow -kd + \gamma = \pi$$

Affinché vi sia un massimo per $\phi = 0^0$ occorre che:

$$kd + \gamma = 0$$

ossia:

$$2kd + \pi = 0$$

e, ancora:

$$\underline{\underline{kd = -\frac{\pi}{2}}}$$

da cui segue:

$$\underline{\underline{\gamma = +\frac{\pi}{2}}}$$

06-18) Esercizio n. 2 del 24/07/2006

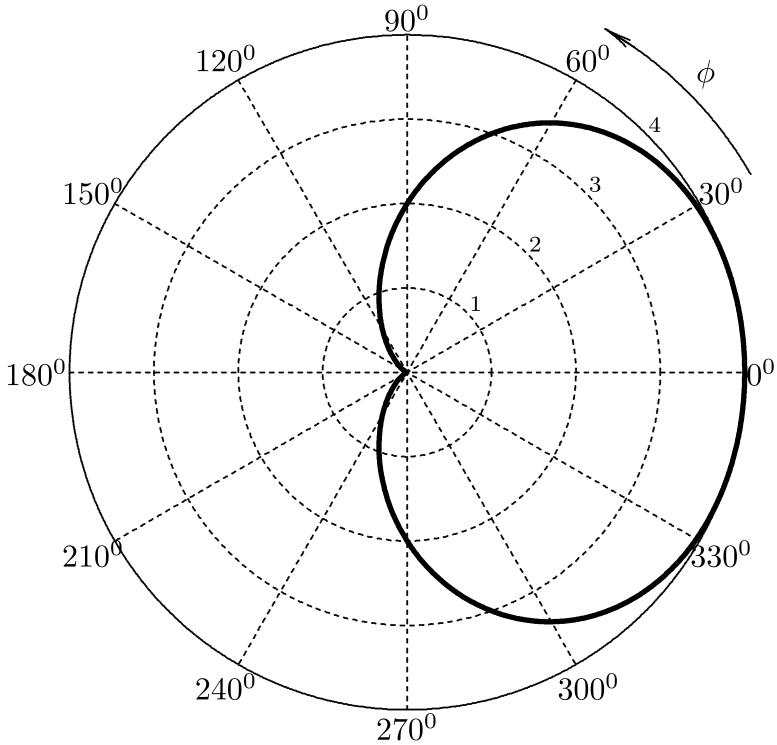
Con riferimento al problema precedente graficare il diagramma di radiazione del sistema dei due dipoli nel piano $\theta = \pi/2$.

Il fattore di forma per graficare il diagramma di radiazione é:

$$F(\phi) = [2 + 2\cos(kd\cos\phi + \gamma)]$$

con $\gamma = +\dfrac{\pi}{2}$ e $kd = -\dfrac{\pi}{2}$

Diagramma di radiazione per $\theta = \pi/2$



06-19) Esercizio n. 3 del 24/07/2006

Una guida d'onda rettangolare vuota ed infinitamente estesa, di dimensioni 10 cm per 5 cm, é eccitata nel modo TE_{10}. Si supponga che ad una certa distanza dall'origine si tagli la guida e si copra la sezione aperta con una lamina di materiale conduttore ($\epsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$ e $\sigma = 10^{-3}$ S/m). Se la frequenza di eccitazione é $\nu = 2$ GHz, calcolare il coefficiente di riflessione sulla lamina.

La costante di propagazione di un'onda elettromagnetica che si propaga all'interno di una guida d'onda é:

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \epsilon\mu - h^2}$$

essendo n l'indice di rifrazione del dielettrico interno alla guida. L'autovalore h, nel caso di guida rettangolare é:

$$h = \sqrt{\frac{p^2\pi^2}{a^2} + \frac{q^2\pi^2}{b^2}}$$

La frequenza angolare di cutoff é:

$$\omega_c = \frac{hc}{n}$$

da cui:

$$h = \frac{\omega_c \cdot n}{c}$$

Ne segue che la costante di propagazione si puó, in generale, scrivere:

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \epsilon\mu - \frac{\omega_c^2 \cdot n^2}{c^2}}$$

Poiché la guida é vuota, si ha:

$$\beta = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}$$

Per il modo TE_{10}, si ha:

$$h_{TE_{10}} = \frac{\pi}{a} \quad e \quad \omega_{cTE_{10}} = c\frac{\pi}{a} \simeq 9.424777961 \cdot 10^9/rad/s$$

Ne segue che, per $\nu = 2$ GHz si ha:

$$\beta \simeq 27.706\ rad/m$$

Consideriamo, ora, il mezzo di cui é costituita la lamina.

Si ha:

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \simeq \frac{10^{-3}}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^{9}} \simeq 8.9877 \cdot 10^{-3}$$

Quindi, essendo $\dfrac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} \simeq 8.08 \cdot 10^{-5} << 1$, si ha:

$$\alpha \simeq \frac{Z_0}{2}\sigma\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = 0.1885\ S/m \quad e \quad \beta_2 \simeq \frac{\omega}{c} = 41.887\ rad/m$$

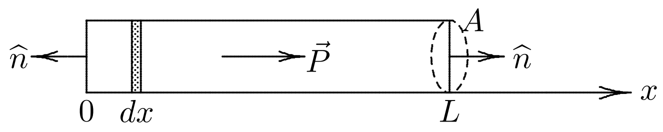
Il coefficiente di riflessione é:

$$R = \left|\frac{\mu_2 k_1 - \mu_1 k_2}{\mu_2 k_1 + \mu_1 k_2}\right|^2 = \left|\frac{\beta - (\beta_2 + i\alpha)}{\beta + (\beta_2 + i\alpha)}\right|^2 = \left|\frac{(\beta - \beta_2) - i\alpha}{(\beta + \beta_2) + i\alpha}\right|^2 = \left|\frac{(\beta - \beta_2)^2 + \alpha^2}{(\beta + \beta_2)^2 + \alpha^2}\right| =$$

$$= \frac{201.1363}{4843.2} = \underline{\underline{0.0415 = 4.15\ \%}}$$

06-20) Esercizio n. 4 del 24/07/2006

Una sottile sbarra di dielettrico, con sezione trasversale A, si estende lungo l'asse x da $x = 0$ a $x = L$. La sbarra è polarizzata (elettricamente) longitudinalmente e la polarizzazione elettrica è data da $P_x = ax^2 + b$. Trovare la densità di volume della carica di polarizzazione e la carica di polarizzazione superficiale su ciascuna estremità. Mostrare *esplicitamente* che la carica legata totale è nulla.



Si ha:

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \widehat{n}$$

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \qquad \sigma_{P_{(x=L)}} = aL^2 + b \quad \sigma_{P_{(x=0)}} = -b$$

$$\vec{P} = \widehat{x}(ax^2 + b)$$

Chiaramente $\rho_P = -\dfrac{\partial}{\partial x}(ax^2 + b) = -2ax$

La carica totale di polarizzazione è:

$$Q_P = \int_{V_0} \left(-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}\right) dv + \oint_{S_0} \vec{P} \cdot \widehat{n}\, da =$$

$$= \int_0^L -2axA\, dx + aL^2 A = -2aA\frac{1}{2}L^2 + aAL^2 = 0$$

con $dv = Adx$.

06-21) Esercizio n. 1 del 28/09/2006

Un'onda piana, viaggiante nel vuoto, incide in direzione della normale sulla superficie di un buon conduttore. L'onda elettromagnetica sosterrá nel conduttore una densitá di corrente $\vec{J}_c$. Si definisca una densitá di corrente superficiale equivalente $\vec{J}_{sc} = \int_0^\infty \vec{J}_c(z)dz$. Si calcoli il rapporto $\dfrac{|\vec{J}_{sc}|}{|\vec{J}_s|}$ essendo $\vec{J}_s$ la densitá di corrente superficiale competente ad un conduttore perfetto.

L'onda elettromagnetica nel vuoto é caratterizzata dai seguenti campi:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 e^{ikz - i\omega t}$$

$$\vec{H}_i = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,\widehat{z} \times \vec{E}_0 e^{ikz - i\omega t}$$

L'onda che viaggia nel mezzo conduttore é:

$$\vec{E}_c = T'\vec{E}_0 e^{ik_c z - i\omega t}$$

essendo T' il coefficiente di Fresnel competente alla trasmissione.

La corrente sostenuta dal campo nel mezzo conduttore é:

$$\vec{J}_c = \sigma\vec{E} = \sigma T'\vec{E}_0 e^{ik_c z - i\omega t}$$

Poiché il mezzo é un buon conduttore, ossia: $\sigma >> \epsilon\omega$, si ha:

$$\alpha_c = \beta_c = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad \text{e quindi} \quad k_c = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}(1+i)$$

Inoltre nell'ipotesi che $\mu_2 = \mu_1$ e per incidenza normale, il coefficiente di Fresnel diventa:

$$T' = \frac{2k_1}{k_1 + k_c}$$

Pertanto la densitá di corrente nel mezzo conduttore si scrive:

$$\vec{J}_c = \sigma\vec{E} = \sigma\frac{2k_1}{k_1 + k_c}\vec{E}_0 e^{ik_c z - i\omega t}$$

Ne segue:

$$\vec{J}_{sc} = \int_0^\infty \vec{J}_c(z)dz = -\frac{1}{ik_c}\sigma\frac{2k_1}{k_1 + k_c}\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

Nel caso di conduttore perfetto, la condizione al contorno impone che:

$$\vec{J}_s = -\left[\widehat{z} \times (\vec{H}_i + \vec{H}_r)\right]_{z=0}$$

ossia:

$$\vec{J}_s = -2\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\widehat{z} \times \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

In definitiva:

$$\frac{|\vec{J}_{sc}|}{|\vec{J}_s|} = \frac{\left|-\dfrac{1}{ik_c}\sigma\dfrac{2k_1}{k_1+k_c}\vec{E}_0 e^{-i\omega t}\right|}{\left|2\sqrt{\dfrac{\epsilon_0}{\mu_0}}\vec{E}_0 e^{-i\omega t}\right|} = \frac{\left|-\dfrac{1}{ik_c}\sigma\dfrac{2k_1}{k_1+k_c}\right|}{\left|2\sqrt{\dfrac{\epsilon_0}{\mu_0}}\right|} =$$

$$= \left| i\sigma\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\frac{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} + \sqrt{\dfrac{\omega\mu_0\sigma}{2}}(1+i)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\omega\mu_0\sigma}{2}}(1+i)}\right|$$

Si ha:

$$\frac{|\vec{J}_{sc}|}{|\vec{J}_s|} = \sqrt{\frac{i\sigma\omega\mu_0}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\sqrt{\dfrac{\omega\mu_0\sigma}{2}}(1+i) + \dfrac{\omega\mu_0\sigma}{2}(1+i)^2} \cdot \frac{-i\sigma\omega\mu_0}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\sqrt{\dfrac{\omega\mu_0\sigma}{2}}(1-i) + \dfrac{\omega\mu_0\sigma}{2}(1-i)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sigma^2\omega^2\mu_0^2}{2\omega^2\epsilon_0\mu_0\dfrac{\omega\mu_0\sigma}{2} + 2\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\sqrt{\dfrac{\omega\mu_0\sigma}{2}}\dfrac{\omega\mu_0\sigma}{2}(1-i) + 2\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\sqrt{\dfrac{\omega\mu_0\sigma}{2}}\dfrac{\omega\mu_0\sigma}{2}(1+i) + \omega^2\mu_0^2\sigma^2}}$$

avendo posto:

$$(1+i)(1-i) = 2$$
$$(1+i)(1-i)^2 = 2(1-i)$$
$$(1+i)^2(1-i) = 2(1+i)$$

Ne segue:

$$\frac{|\vec{J}_{sc}|}{|\vec{J}_s|} = \sqrt{\frac{\sigma^2\omega^2\mu_0^2}{2\omega^2\epsilon_0\mu_0\dfrac{\omega\mu_0\sigma}{2} + 4\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\sqrt{\dfrac{\omega\mu_0\sigma}{2}}\dfrac{\omega\mu_0\sigma}{2} + \omega^2\mu_0^2\sigma^2}}$$

che si puó ancora scrivere:

$$\frac{|\vec{J}_{sc}|}{|\vec{J}_s|} = \sqrt{\frac{1}{\dfrac{\omega\epsilon_0}{\sigma} + 2\sqrt{\dfrac{\omega\epsilon_0}{2\sigma}} + 1}}$$

É interessante notare che per $\sigma \to +\infty$, il rapporto fra le due densitá di corrente tende a 1.

06-22) Esercizio n. 2 del 28/09/2006

Un'antenna é costituita da N piccole spire circolari, ciascuna di raggio $a = 0.01\lambda$. Calcolare N affinché la resistenza di radiazione sia 5 Ohm.

(vedi Compiti Campi elettromagnetici: es. 2 del 9/9/95, es. 3 del 24/7/96, es. 4 del 12/4/97 ed es. 1 del 23/2/2000)

Sia N il numero di spire (che supponiamo sovrapposte) di cui é composta l'antenna.

I campi (elettrico e magnetico) far-field generati dall'antenna si ottengono moltiplicando per N i campi generati da una singola spira; si ha, cioé:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \widehat{e}_\phi \omega\mu_0 k I N \pi a^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\sin\theta$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\widehat{e}_\theta k^2 I N \pi a^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\sin\theta$$

La densitá di potenza mediata in un periodo é:

$$< \vec{S} >= \frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^* = \frac{1}{32\pi^2 r^2}\omega\mu_0 k^3 I^2 N^2 \pi^2 a^4 \sin^2\theta\widehat{e}_r$$

Moltiplicando e dividendo per k, la densitá di potenza diventa:

$$< \vec{S} >= \frac{1}{32\pi^2 r^2}\omega\mu_0 \frac{k^4}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} I^2 N^2 \pi^2 a^4 \sin^2\theta\widehat{e}_r = \frac{1}{32 r^2} Z_0 (2\pi)^4 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I^2 N^2 \sin^2\theta\widehat{e}_r$$

avendo posto $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

La potenza totale irradiata attraverso una superficie sferica é:

$$P = \int_{sfera} < \vec{S} > \cdot\widehat{n} d^2 r = \int_{sfera} |< \vec{S} >| r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \frac{1}{32} Z_0 (2\pi)^4 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I^2 N^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta =$$

$$= \frac{1}{32} Z_0 (2\pi)^5 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I^2 N^2 \frac{4}{3} = \frac{1}{24} Z_0 (2\pi)^5 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I^2 N^2$$

La resistenza di radiazione é:

$$R_a = \frac{2P}{|I|^2} = \frac{1}{12} Z_0 (2\pi)^5 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 N^2$$

che, per $Z_0 \simeq 377 Ohm$, si puó scrivere:

$$R_a = 3.076\cdot 10^5 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 N^2$$

Affinché R_a sia 5 Ohm occorre che:

$$N^2 = \frac{5}{3.076\cdot 10^5\cdot\left(\dfrac{a}{\lambda}\right)^4} = \frac{5}{3.076\cdot 10^5\cdot (0.01)^4} = 1625.487$$

da cui:

$$\underline{\underline{N = 40.3\ spire}}$$

06-23) Esercizio n. 3 del 28/09/2006

Sia dato un sistema uniforme di cinque antenne a mezz'onda parallele, alimentate in fase ed equidistanti $\lambda/4$. Graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = \pi/2$ e calcolare la larghezza a metá potenza del lobo principale.

Dalla teoria dei sistemi di antenne si ha:

$$S_r = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{8\pi^2 r^2} |F(\theta) A(\theta, \phi)|^2$$

essendo:

$$|F(\theta)| = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right| \qquad \text{e} \qquad |A(\theta, \phi)| = \left| \frac{\sin[n(kd\cos\phi\sin\theta + \gamma)/2]}{\sin[(kd\cos\phi\sin\theta + \gamma)/2]} \right|$$

Per $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ risulta:

$$|F(\theta)| = 1 \qquad \text{e} \qquad |A(\pi/2, \phi)| = \left| \frac{\sin[n(kd\cos\phi + \gamma)/2]}{\sin[(kd\cos\phi + \gamma)/2]} \right|$$

Per n=5, $\gamma = 0$ e d=$\lambda/4$ (ossia $kd = \pi/2$), si ha:

$$|A(\pi/2, \phi)| = \left| \frac{\sin\left[5\left(\frac{\pi}{4}\cos\phi\right)\right]}{\sin\left[\left(\frac{\pi}{4}\cos\phi\right)\right]} \right|$$

Grafichiamo, quindi, il fattore di forma che coincide con:

$$|A(\pi/2, \phi)|^2 = \left| \frac{\sin\left[5\left(\frac{\pi}{4}\cos\phi\right)\right]}{\sin\left[\left(\frac{\pi}{4}\cos\phi\right)\right]} \right|^2$$

Poiché $\gamma = 0$, il diagramma di radiazione é simmetrico rispetto all'origine e pertanto riportiamo i valori da 0^0 a 90^0.

ϕ	$\lvert A(\phi)\rvert$	ϕ	$\lvert A(\phi)\rvert$	ϕ	$\lvert A(\phi)\rvert$	$\lvert A(\phi)\rvert$	ϕ
0^0	1	5^0	0.97595	10^0	0.90250	15^0	0.77714
20^0	0.60068	25^0	0.38527	30^0	0.16618	35^0	0.015689
40^0	0.055173	45^0	0.45783	50^0	1.4325	55^0	3.1809
60^0	5.8284	65^0	9.3433	70^0	13.473	75^0	17.737

80^0	21.490	85^0	24.077	90^0	25

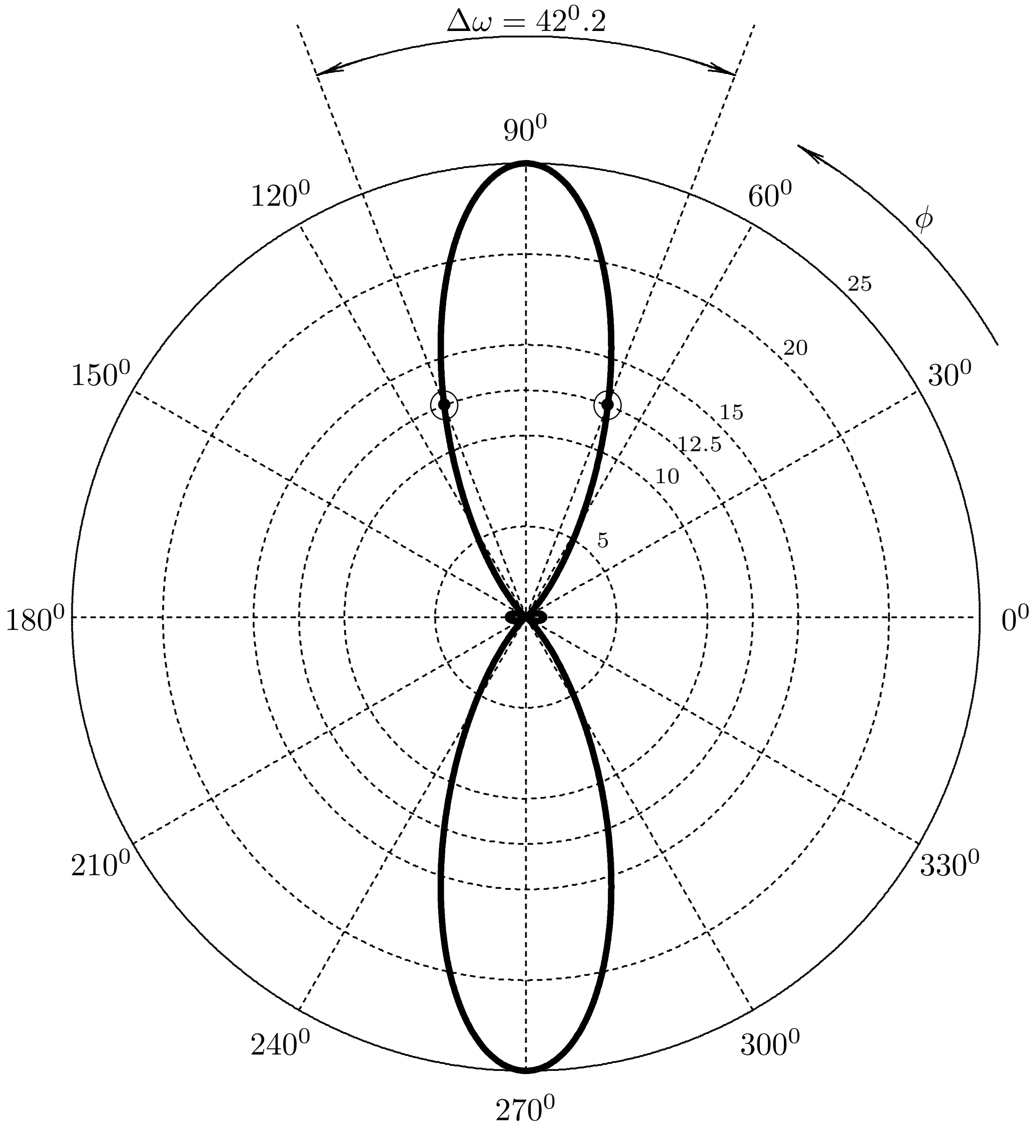
L'angolo per cui il lobo assume la meta del valore massimo, ossia 12.5, si trova compreso fra $\phi = 65^0$ e $\phi = 70^0$.

ϕ	$\|A(\phi)\|$	ϕ	$\|A(\phi)\|$	ϕ	$\|A(\phi)\|$	$\|A(\phi)\|$	ϕ
66^0	10.132	67^0	10.944	68^0	11.774	69^0	12.618

Per $\phi = 68^0.9$ risulta $|A(\phi)| = 12.533$

Pertanto la larghezza del lobo a metá potenza é circa:

$$\Delta\omega \simeq 2 \cdot (90^0 - 68^0.9) = \underline{\underline{42^0.2}}$$



06-24) Esercizio n. 4 del 28/09/2006

Se si vuole che il lobo principale del sistema di antenne, descritto nel precedente problema, sia nella direzione $\phi = 0^0$ e $\theta = \pi/2$, calcolare la differenza di fase progressiva di alimentazione delle antenne. Graficare, in tal caso, il diagramma di radiazione nel piano $\theta = \pi/2$ e calcolare la larghezza a metá potenza del lobo principale.

La condizione affinché l'array factore di un sistema di antenne a mezz'onda parallele abbia un massimo é:

$$(kd \cos\phi \sin\theta + \gamma)/2 = 2m\pi$$

con m intero.

Affinché il sistema diventi end-fire con il massimo lungo la direzione $\phi = 0^0$ e $\theta = \pi/2$ deve, quindi, essere:

$$(kd + \gamma)/2 = 2m\pi$$

che per $kd = \dfrac{\pi}{2}$ diventa:

$$\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)/2 = 2m\pi$$

da cui:

$$\gamma = 4m\pi - \frac{\pi}{2}$$

ossia:

$$\gamma = -\frac{\pi}{2}$$

Il diagramma di radiazione é dato, quindi, dalla formula:

$$|A(\pi/2, \phi)|^2 = \left| \frac{\sin\left[5\left(\frac{\pi}{4}\cos\phi - \frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sin\left[\left(\frac{\pi}{4}\cos\phi - \frac{\pi}{4}\right)\right]} \right|^2$$

Poiché il diagramma di radiazione é simmetrico scambiando ϕ con $180^0 - \phi$, riportiamo i valori da 0^0 a 180^0.

ϕ	$\|A(\phi)\|$	ϕ	$\|A(\phi)\|$	ϕ	$\|A(\phi)\|$	$\|A(\phi)\|$	ϕ
0^0	25	5^0	24.998	10^0	24.972	15^0	24.857
20^0	20.554	25^0	23.935	30^0	22.861	35^0	21.212
40^0	18.924	45^0	16.028	50^0	12.679	55^0	9.157
60^0	5.8284	65^0	3.0656	70^0	1.1474	75^0	0.17339
80^0	0.02921	85^0	0.42581	90^0	1	95^0	1.4363
100^0	1.5587	105^0	1.3581	110^0	0.95239	115^0	0.50941
120^0	0.17157	125^0	0.012028	130^0	0.030291	135^0	0.17586
140^0	0.38095	145^0	0.58668	150^0	0.75616	155^0	0.87536

160^0	0.94708	165^0	0.98291	170^0	0.99659	175^0	0.99979
180^0	1						

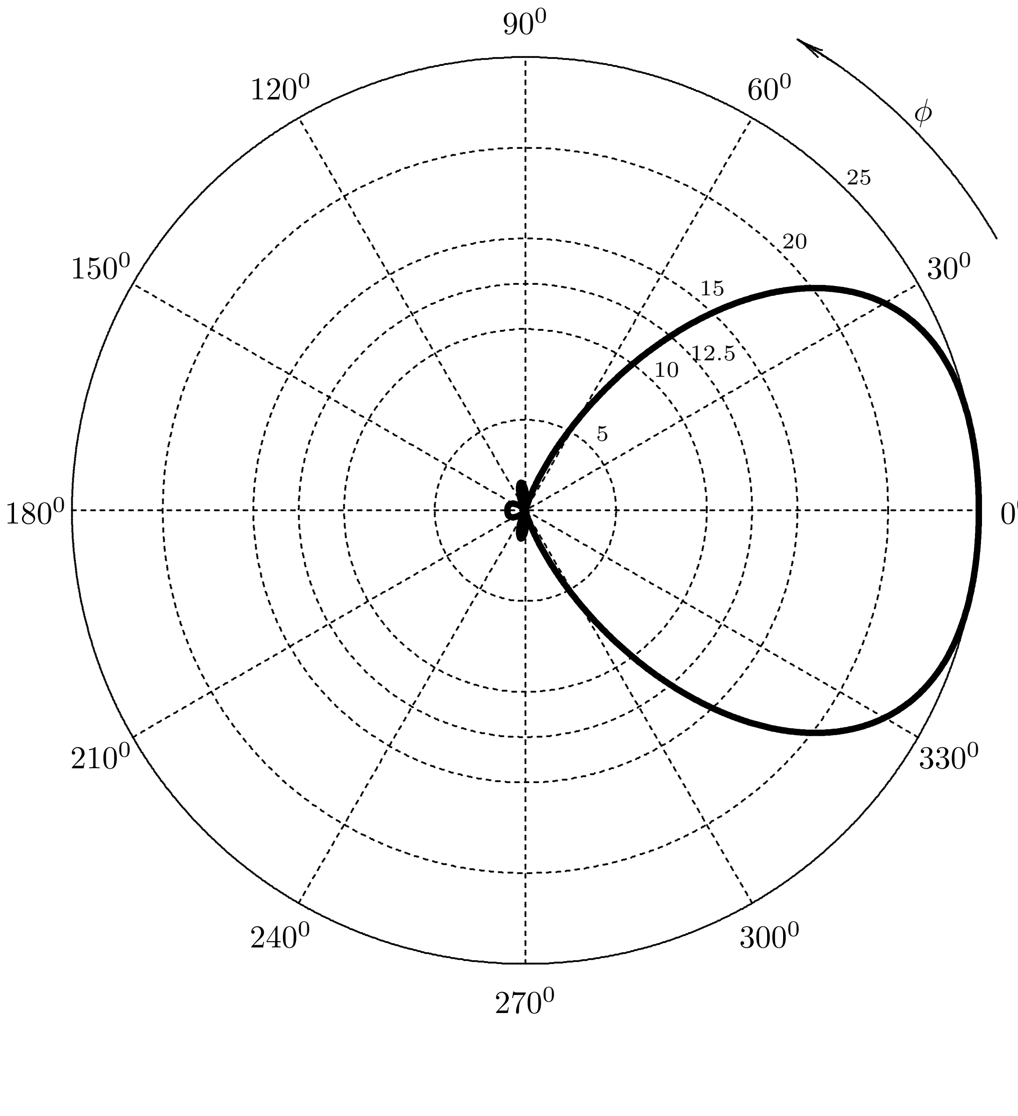
L'angolo per cui il lobo assume la meta del valore massimo, ossia 12.5, si trova prossimo a $\phi = 50^0$.

ϕ	$\|A(\phi)\|$	ϕ	$\|A(\phi)\|$	ϕ	$\|A(\phi)\|$
$50^0.1$	12.609	$50^0.2$	12.539	$50^0.3$	12.469

Per $\phi = 50^0.3$ risulta $|A(\phi)| = 12.469$

Pertanto la larghezza del lobo a metá potenza é circa:

$$\Delta\omega \simeq 2 \cdot 50^0.3 = \underline{\underline{100^0.6}}$$



06-25) Esercizio n. 1 del 1/12/2006

Determinare i modi che si possono propagare in una guida d'onda, riempita d'aria, a sezione circolare e di diametro 16 cm, se la frequenza di eccitazione é 3 GHz.

Calcoliamo la frequenza critica dei modi nella guida circolare:

$$\nu_c = \frac{hc}{2\pi n}$$

essendo h l'autovalore del modo, c la velocitá della luce nel vuoto e n l'indice di rifrazione del mezzo interno alla guida. Nel caso del presente problema $n = 1$.

Sappiamo che:

$$h_{\nu r} = \frac{x_{\nu r}}{a} \qquad \text{per i modi } TM$$

$$h_{\nu r} = \frac{x'_{\nu r}}{a} \qquad \text{per i modi } TE$$

dove $x_{\nu r}$ e $x'_{\nu r}$ sono rispettivamente le radici della funzione di Bessel $J_\nu(x)$ e della sua derivata prima $J'_\nu(x)$.

Riportiamo nelle tabelle seguenti i valori di alcune di tali radici.

Modi TM - Valori di $x_{\nu r}$

ν	$x_{\nu 1}$	$x_{\nu 2}$	$x_{\nu 3}$
0	$\underline{2.405}$	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

Modi TE - Valori di $x'_{\nu r}$

ν	$x'_{\nu 1}$	$x'_{\nu 2}$	$x'_{\nu 3}$
0	3.832	7.016	10.174
1	$\underline{1.841}$	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

Ordinandole in modo crescente si ha:

Radici	1.841	2.405	3.054	3.832	3.832	5.135
$Modo$	TE_{11}	TM_{01}	TE_{21}	TE_{01}	TM_{11}	TM_{21}
$h_{\nu r}$	23.012	30.062	38.175	47.9	47.9	64.188
$\nu_{c\nu r}/10^9$	1.0987	1.4354	1.8227	2.2871	2.2871	3.0648

Quindi i modi che si possono propagare nella guida sono quelli la cui frequenza di cutoff é inferiore alla frequenza operativa $\nu_{op} = 3\ GHz$:

$$TE_{11} \quad TM_{01} \quad TE_{21} \quad TE_{01} \quad TM_{11}$$

06-26) Esercizio n. 2 del 1/12/2006

In un gas ionizzato immerso in un campo magnetico esterno $B_0 = 0.5\ G$, la frequenza di cutoff per il raggio ordinario che si propaga nella stessa direzione del campo é 20 MHz. Calcolare la frequenza di cutoff per il raggio straordinario, sempre nell'ipotesi che la propagazione avvenga nella stessa direzione del campo magnetico applicato.

La frequenza critica per il raggio ordinario è data dall'essere:

$$k_0' = \frac{\omega_c}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_c(\omega_c - \omega_g)}} = 0 \qquad \omega_c = 2\pi \cdot 20 \cdot 10^6\, rad/s$$

Segue dalla precedente che:

$$\omega_c(\omega_c - \omega_g) = \omega_p^2$$

Calcoliamo ω_g:

$$\omega_g = -\frac{e}{m}B_0 = -8.78 \cdot 10^6\, rad/s$$

Per cui

$$2\pi \cdot 20 \cdot 10^6(2\pi \cdot 20 \cdot 10^6 + 8.78 \cdot 10^6) = 1.69 \cdot 10^{16} = \omega_p^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \omega_p = 1.3 \cdot 10^8\, rad/s$$

Per il raggio straordinario si ha:

$$\omega_c(\omega_c + \omega_g) = \omega_p^2$$

$$\omega_c^2 + \omega_c\omega_g - \omega_p^2 = 0$$

$$\omega_c^{st} = \frac{-\omega_g \pm \sqrt{\omega_g^2 + 4\omega_p^2}}{2} = \begin{cases} \dfrac{8.78 \cdot 10^6 + 2.6 \cdot 10^8}{2} = 1.344 \cdot 10^8 \\ \text{si scarta} \end{cases}$$

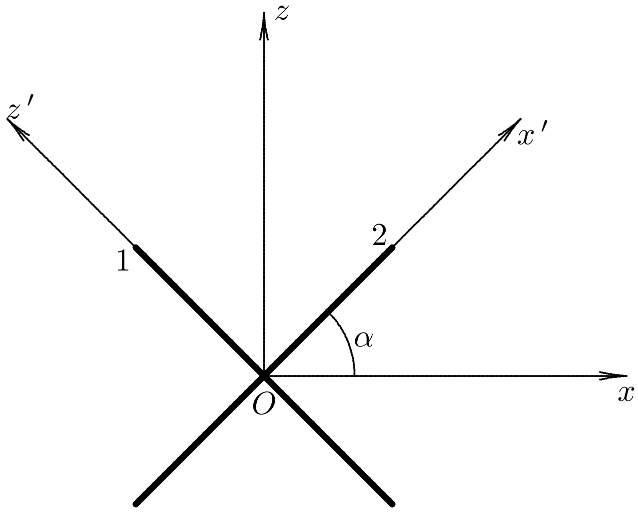
Quindi

$$f_{c_{\text{straord.}}} = \frac{1.344 \cdot 10^8}{2\pi} = 2.140 \cdot 10^7 = \underline{\underline{21.40 \cdot 10^6\, Hz}}$$

$$\Delta f = \underline{\underline{1.4 \cdot 10^6}}$$

06-27) Esercizio n. 3 del 1/12/2006

Due antenne a mezz'onda, alimentate con la stessa ampiezza massima di corrente, sono orientate secondo le bisettrici del piano xz. Determinare l'espressione del vettore di radiazione e del vettore di Poynting nel caso in cui le correnti siano in fase e nel caso in cui le correnti siano sfasate di 90^0.



Supponiamo che le due antenne siano orientate come in figura e siano alimentate indipendentemente. Un metodo elegante per risolvere il problema é il seguente.

Consideriamo un nuovo sistema di riferimento $S' \equiv Ox'yz'$ con l'asse z' coincidente con l'antenna 1 e con l'asse x' coincidente con l'antenna 2.

Indichiamo con α l'angolo compreso fra l'asse x e l'asse x' che é lo stesso di quello compreso fra l'asse z e l'asse z'

Rispetto al nuovo sistema di riferimento il vettore di radiazione del sistema di antenne é (vedi Esercizi svolti di Campi elettromagnetici - Esercizio n. 1 del 27/6/2003):

$$\vec{N}(\theta', \phi') = \widehat{x}' A_1 \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\psi'\right)}{\sin^2\psi'} + \widehat{z}' A_2 \frac{2}{k} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta'\right)}{\sin^2\theta'} \tag{1}$$

I versori di un sistema di coordinate sferiche di un generico punto P dello spazio sono:

$$\begin{cases} \widehat{e}_r, \; \widehat{e}_\theta, \; \widehat{e}_\phi & \text{rispetto a S} \\ \\ \widehat{e}_r, \; \widehat{e}_\theta{}', \; \widehat{e}_\phi{}' & \text{rispetto a S'} \end{cases} \tag{2}$$

Si ha:

$$\cos\theta = \widehat{z} \cdot \widehat{e}_r \tag{3}$$

$$\cos\theta\,' = \widehat{z}\,' \cdot \widehat{e}_r \tag{4}$$

$$\cos\psi = \widehat{x} \cdot \widehat{e}_r \tag{5}$$

$$\cos\psi\,' = \widehat{x}\,' \cdot \widehat{e}_r \tag{6}$$

$$x\,' = x\cos\alpha + z\sin\alpha \tag{7}$$

$$z\,' = -x\sin\alpha + z\cos\alpha \tag{8}$$

ossia:

$$\widehat{x}\,' = \widehat{x}\cos\alpha + \widehat{z}\sin\alpha \tag{9}$$

$$\widehat{z}\,' = -\widehat{x}\sin\alpha + \widehat{z}\cos\alpha \tag{10}$$

Ne segue:

$$\cos\theta\,' = (-\widehat{x}\sin\alpha + \widehat{z}\cos\alpha) \cdot \widehat{e}_r = -\cos\psi\sin\alpha + \cos\theta\cos\alpha \tag{11}$$

$$\cos\psi\,' = (\widehat{x}\cos\alpha + \widehat{z}\sin\alpha) \cdot \widehat{e}_r = \cos\psi\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha \tag{12}$$

Quindi il vettore di radiazione, relativo al sistema S, si scrive:

$$\begin{aligned} \vec{N}(\theta,\phi) = (\widehat{x}\cos\alpha + \widehat{z}\sin\alpha)\, A_1 \frac{2}{k} \frac{\cos\left[\dfrac{\pi}{2}(\cos\psi\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)\right]}{1 - (\cos\psi\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)^2} + \\ + (-\widehat{x}\sin\alpha + \widehat{z}\cos\alpha)\, A_2 \frac{2}{k} \frac{\cos\left[\dfrac{\pi}{2}(-\cos\psi\sin\alpha + \cos\theta\cos\alpha)\right]}{1 - (-\cos\psi\sin\alpha + \cos\theta\cos\alpha)^2} \end{aligned} \tag{13}$$

Tenendo conto che:

$$\begin{aligned} \widehat{x} &= \widehat{e}_r \sin\theta\cos\phi + \widehat{e}_\theta \cos\theta\cos\phi - \widehat{e}_\phi \sin\phi \\ \widehat{z} &= \widehat{e}_r \cos\theta - \widehat{e}_\theta \sin\theta \end{aligned} \tag{14}$$

risulta:

$$\begin{aligned} N_\theta(\theta,\phi) = (\cos\theta\cos\phi\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha)\, A_1 \frac{2}{k} \frac{\cos\left[\dfrac{\pi}{2}(\cos\psi\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)\right]}{1 - (\cos\psi\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)^2} + \\ + (-\cos\theta\cos\phi\sin\alpha - \sin\theta\cos\alpha)\, A_2 \frac{2}{k} \frac{\cos\left[\dfrac{\pi}{2}(-\cos\psi\sin\alpha + \cos\theta\cos\alpha)\right]}{1 - (-\cos\psi\sin\alpha + \cos\theta\cos\alpha)^2} \end{aligned} \tag{15}$$

$$
\begin{aligned}
N_\phi(\theta,\phi) = & \left(-\sin\phi\cos\alpha\right) A_1 \frac{2}{k} \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\cos\psi\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha\right)\right]}{1-\left(\cos\psi\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha\right)^2} + \\
& + \left(\sin\phi\sin\alpha\right) A_2 \frac{2}{k} \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(-\cos\psi\sin\alpha+\cos\theta\cos\alpha\right)\right]}{1-\left(-\cos\psi\sin\alpha+\cos\theta\cos\alpha\right)^2}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

essendo $\cos\psi = \cos\phi\sin\theta$.

Se le correnti, aventi la stessa ampiezza, sono in fase si deve assumere $A_1 = A_2 = I_0$; se le correnti, aventi la stessa ampiezza, sono sfasate di $\pi/2$ si deve assumere $A_1 = iI_0$ e $A_2 = I_0$ per esempio.

06-28) Esercizio n. 4 del 1/12/2006

Con riferimento al problema precedente, graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = \pi/2$ e nel piano $\phi = \pi/2$.

Per $\theta = \pi/2$ si ha:

$$\begin{aligned} N_\theta(\pi/2, \phi) = &(-\sin\alpha)\, A_1 \frac{2}{k} \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\cos\phi\cos\alpha\right)\right]}{1-\left(\cos\phi\cos\alpha\right)^2} + \\ &+(-\cos\alpha)\, A_2 \frac{2}{k} \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(-\cos\phi\sin\alpha\right)\right]}{1-\left(-\cos\phi\sin\alpha\right)^2} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} N_\phi(\pi/2, \phi) = &(-\sin\phi\cos\alpha)\, A_1 \frac{2}{k} \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\cos\phi\cos\alpha\right)\right]}{1-\left(\cos\phi\cos\alpha\right)^2} + \\ &+(\sin\phi\sin\alpha)\, A_2 \frac{2}{k} \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(-\cos\phi\sin\alpha\right)\right]}{1-\left(-\cos\phi\sin\alpha\right)^2} \end{aligned} \tag{2}$$

Per $\phi = \pi/2$ si ha:

$$\begin{aligned} N_\theta(\theta, \pi/2) = &(-\sin\theta\sin\alpha)\, A_1 \frac{2}{k} \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\cos\theta\sin\alpha\right)\right]}{1-\left(\cos\theta\sin\alpha\right)^2} + \\ &+(-\sin\theta\cos\alpha)\, A_2 \frac{2}{k} \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\cos\theta\cos\alpha\right)\right]}{1-\left(\cos\theta\cos\alpha\right)^2} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} N_\phi(\theta, \pi/2) = &(-\cos\alpha)\, A_1 \frac{2}{k} \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\cos\theta\sin\alpha\right)\right]}{1-\left(\cos\theta\sin\alpha\right)^2} + \\ &+(\sin\alpha)\, A_2 \frac{2}{k} \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\cos\theta\cos\alpha\right)\right]}{1-\left(\cos\theta\cos\alpha\right)^2} \end{aligned} \tag{4}$$

Posto $\alpha = 45^0$ ossia $\cos\alpha = \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$
\begin{aligned}
N_\theta(\pi/2,\phi) =& \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) A_1 \frac{2}{k} \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)\right]}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)^2} + \\
&+ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) A_2 \frac{2}{k} \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)\right]}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)^2} = \\
&= -\frac{2}{k}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_1+A_2\right) \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)\right]}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)^2}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
N_\phi(\pi/2,\phi) =& \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\phi\right) A_1 \frac{2}{k} \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)\right]}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)^2} + \\
&+ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\phi\right) A_2 \frac{2}{k} \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)\right]}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)^2} = \\
&= \frac{2}{k}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_2-A_1\right)\sin\phi \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)\right]}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)^2}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
N_\theta(\theta,\pi/2) =& \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right) A_1 \frac{2}{k} \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\right]}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)^2} + \\
&+ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right) A_2 \frac{2}{k} \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\right]}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)^2} = \\
&= -\frac{2}{k}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_1+A_2\right)\sin\theta \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\right]}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)^2}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$\begin{aligned}N_\phi(\theta,\pi/2)=&\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)A_1\frac{2}{k}\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\right]}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)^2}+\\&+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)A_2\frac{2}{k}\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\right]}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)^2}=\\&=\frac{2}{k}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_2-A_1\right)\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\right]}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)^2}\end{aligned}\tag{8}$$

Sappiamo che il vettore di Poynting far field, mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle=\frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2\left(|N_\theta|^2+|N_\phi|^2\right)\widehat{e}_r\tag{9}$$

Per $\theta=\pi/2$:

$$|N_\theta(\pi/2,\phi)|^2=\frac{2}{k^2}\left(A_1+A_2\right)\left(A_1^*+A_2^*\right)\left\{\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)\right]}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)^2}\right\}^2\tag{10}$$

$$|N_\phi(\pi/2,\phi)|^2=\frac{2}{k^2}\left(A_2-A_1\right)\left(A_2^*-A_1^*\right)\left\{\sin\phi\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)\right]}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)^2}\right\}^2\tag{11}$$

Per $\phi=\pi/2$:

$$|N_\theta(\theta,\pi/2)|^2=\frac{2}{k^2}\left(A_1+A_2\right)\left(A_1^*+A_2^*\right)\left\{\sin\theta\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\right]}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)^2}\right\}^2\tag{12}$$

$$|N_\phi(\theta,\pi/2)|^2=\frac{2}{k^2}\left(A_2-A_1\right)\left(A_2^*-A_1^*\right)\left\{\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\right]}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)^2}\right\}^2\tag{13}$$

Grafichiamo nei due piani $\theta = \pi/2$ e $\phi = \pi/2$ i fattori di forma:

$$F(\pi/2, \phi) = \left(\left(|N_\theta(\pi/2, \phi)|^2 + |N_\phi(\pi/2, \phi)|^2\right) \tag{14}$$

$$F(\theta, \pi/2) = \left(\left(|N_\theta(\phi, \pi/2)|^2 + |N_\phi(\phi, \pi/2)|^2\right) \tag{15}$$

nel caso di correnti in fase e nel caso di correnti sfasate di 90^0

a) Correnti in fase $A_1 = A_2 = I_0$

$$F(\pi/2, \phi) = \frac{8}{k^2} I_0^2 \left\{ \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)\right]}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)^2} \right\}^2 \tag{16}$$

$$F(\theta, \pi/2) = \frac{8}{k^2} I_0^2 \left\{ \sin\theta \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\right]}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)^2} \right\}^2 \tag{17}$$

b) Correnti sfasate $A_1 = iI_0$ **e** $A_2 = I_0$

Si ha:

$$(A_1 + A_2)(A_1^* + A_2^*) = I_0^2(i+1)(-i+1) = 2I_0^2 \tag{18}$$

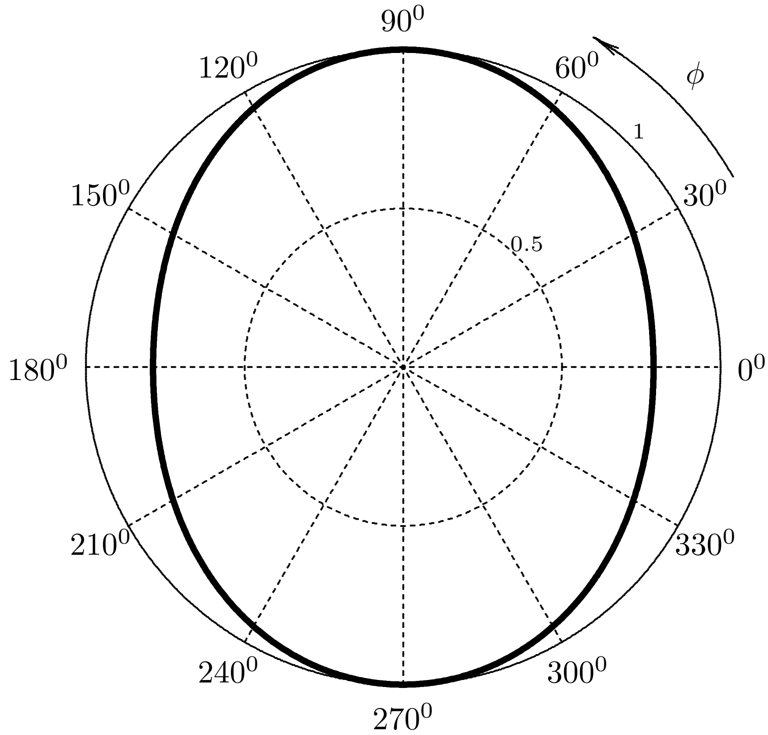
$$(A_2 - A_1)(A_2^* - A_1^*) = I_0^2(1-i)(1+i) = 2I_0^2 \tag{19}$$

$$F(\pi/2, \phi) = \frac{4}{k^2} I_0^2 (1 + \sin^2\phi) \left\{ \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)\right]}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\right)^2} \right\}^2 \tag{20}$$

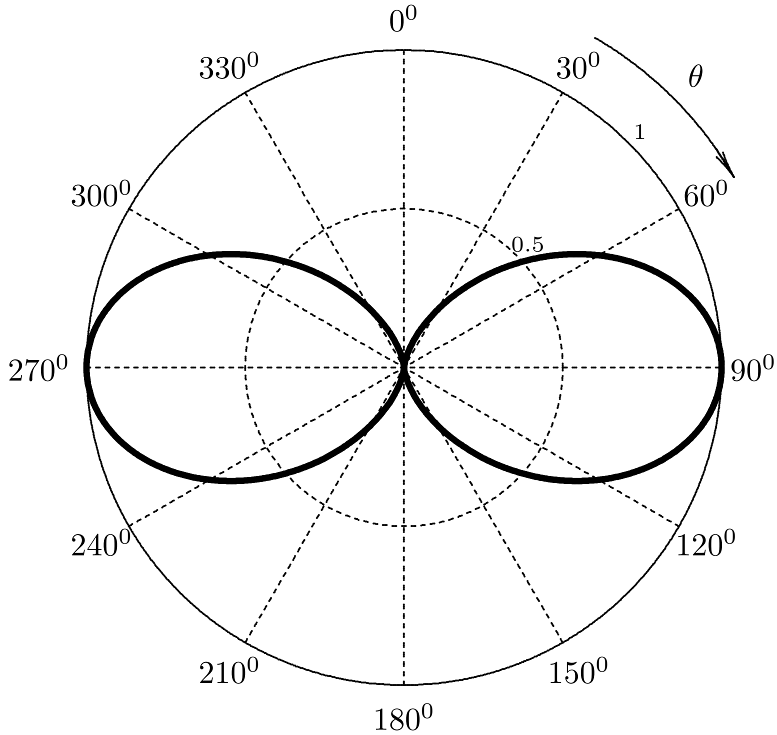
$$F(\theta, \pi/2) = \frac{4}{k^2} I_0^2 (1 + \sin^2\theta) \left\{ \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\right]}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)^2} \right\}^2 \tag{21}$$

CORRENTI IN FASE

a) $\theta = \pi/2$

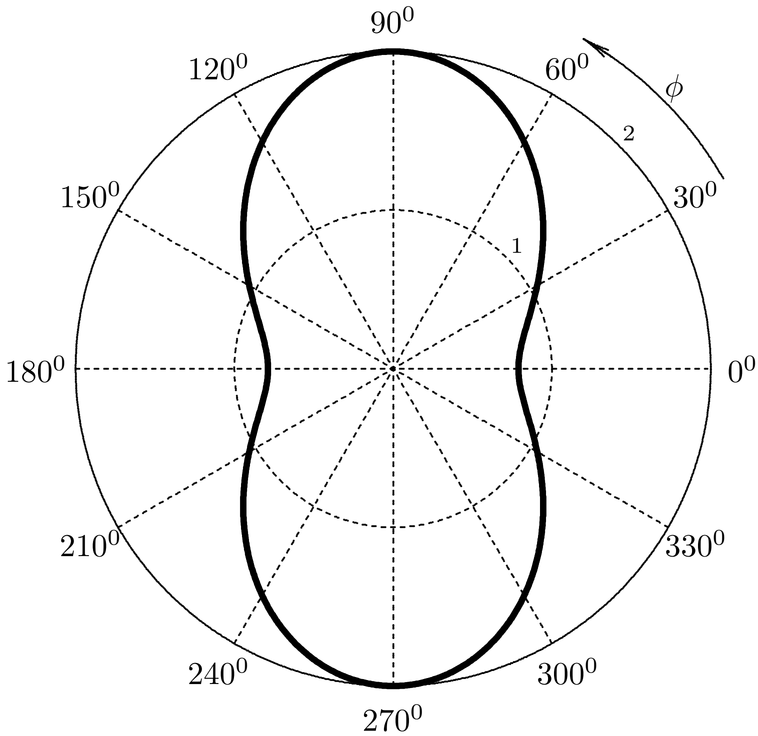


b) $\phi = \pi/2$

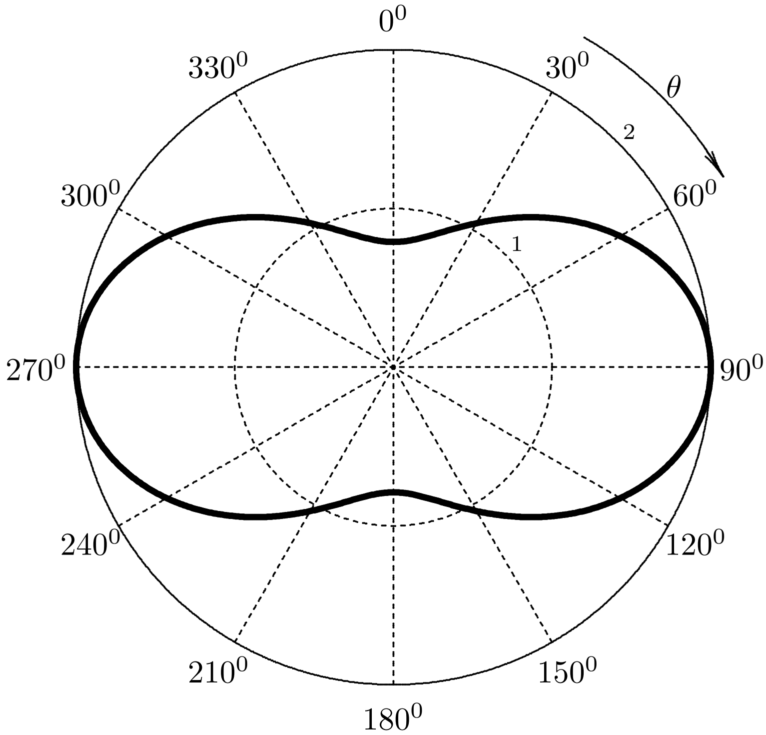


CORRENTI SFASATE DI $\pi/2$

a) $\theta = \pi/2$



b) $\phi = \pi/2$



Fine Esercizi Campi e.m. - 2006