

Esercizi svolti di Campi elettromagnetici - Anno 2005

05-1) Esercizio n. 1 del 28/1/2005

Un'onda elettromagnetica piana viaggiante in aria, la cui densità di potenza sia $\mathcal{P}_0 = 1W/m^2$, incide secondo la normale su un mezzo infinitamente esteso i cui parametri costitutivi sono $\epsilon = 10\epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ e $\sigma = 10^{-4} S/m$. Determinare l'espressione esplicita della densità di potenza trasmessa in funzione della frequenza e della distanza dall'interfaccia.

(vedi es. n.2 del 21/2/2003)

La densità di potenza trasmessa nel secondo mezzo é, per definizione:

$$\mathcal{P}_t = T \mathcal{P}_0 e^{-2\alpha z} \cos^2(-\beta_2 z)$$

avendo ommesso la dipendenza del tempo ed essendo T il coefficiente di trasmissione che risulta, per incidenza normale:

$$T = 1 - R = 1 - \rho_{\perp}^2 = 1 - \rho_{\parallel}^2$$

Per $\theta_0 = 0$, risulta:

$$\rho_{\perp}^2 = \frac{(q - \beta_1)^2 + p^2}{(q + \beta_1)^2 + p^2}$$

essendo, sempre per $\theta_0 = 0$:

$$p = \alpha_2, \quad q = \beta_2 \quad \text{e} \quad \beta_1 = \frac{\omega}{c}$$

Quindi:

$$\rho_{\perp}^2 = \frac{(\beta_2 - \beta_1)^2 + \alpha^2}{(\beta_2 + \beta_1)^2 + \alpha^2}$$

05-2) Esercizio n. 2 del 28/1/2005

Con riferimento al problema precedente, graficare la densità di potenza trasmessa in funzione della frequenza ad una distanza $d = 100 \text{ m}$ dall'interfaccia e calcolare il valore della frequenza per cui la densità di potenza risulti massima.

Un metodo elegante e semplice per determinare l'esistenza di un valore massimo per la potenza trasmessa è il seguente.

Si ha:

$$\frac{\sigma_2}{\epsilon_2 \omega} = \frac{10^{-4}}{8.854 \cdot 10 \cdot 10^{-12} \cdot 2\pi \cdot \nu} = \frac{1.7975 \cdot 10^5}{\nu}$$

Per $\nu < 10^5 \text{ Hz}$ risulta approssimativamente:

$$\frac{\sigma_2^2}{\epsilon_2^2 \omega^2} \gg 1$$

In tal caso:

$$\alpha_2 = \beta_2 \simeq \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$$

ν (Hz)	β_1 (rad/s)	β_2 (rad/s)	α_2 (m ⁻¹)	ρ_{\perp}^2	$e^{-2\alpha_2 d}$	\mathcal{P}_t
10 ¹	2.0944 · 10 ⁻⁷	6.2832 · 10 ⁻⁵	6.2832 · 10 ⁻⁵	9.9336 · 10 ⁻¹	9.8751 · 10 ⁻¹	6.6515 · 10 ⁻³
10 ²	2.0944 · 10 ⁻⁶	1.9869 · 10 ⁻⁴	1.9869 · 10 ⁻⁴	9.7914 · 10 ⁻¹	9.6104 · 10 ⁻¹	2.0048 · 10 ⁻²
10 ³	2.0944 · 10 ⁻⁵	6.2832 · 10 ⁻⁴	6.2832 · 10 ⁻⁴	9.3552 · 10 ⁻¹	8.8191 · 10 ⁻¹	5.6867 · 10 ⁻²
10 ⁴	2.0944 · 10 ⁻⁴	1.9869 · 10 ⁻³	1.9869 · 10 ⁻³	8.1024 · 10 ⁻¹	6.7208 · 10 ⁻¹	1.2753 · 10 ⁻¹
2 · 10 ⁴	4.1888 · 10 ⁻⁴	2.8099 · 10 ⁻³	2.8099 · 10 ⁻³	7.4302 · 10 ⁻¹	5.7008 · 10 ⁻¹	1.4650 · 10 ⁻¹
3 · 10 ⁴	6.2832 · 10 ⁻⁴	3.4414 · 10 ⁻³	3.4414 · 10 ⁻³	6.9552 · 10 ⁻¹	5.0244 · 10 ⁻¹	1.5298 · 10 ⁻¹
4 · 10 ⁴	8.3776 · 10 ⁻⁴	3.9738 · 10 ⁻³	3.9738 · 10 ⁻³	6.5805 · 10 ⁻¹	4.5169 · 10 ⁻¹	1.5445 · 10 ⁻¹
5 · 10 ⁴	1.0472 · 10 ⁻³	4.4429 · 10 ⁻³	4.4429 · 10 ⁻³	6.2690 · 10 ⁻¹	4.1124 · 10 ⁻¹	1.5343 · 10 ⁻¹

Per $\nu < 10^5 \text{ Hz}$ la densità di potenza trasmessa alla distanza $d = 100 \text{ m}$ dall'interfaccia è, al variare della frequenza, inizialmente crescente e presenta un massimo che approssimativamente è $\nu \simeq 4 \cdot 10^4 \text{ Hz}$.

Per $\nu > 1 \text{ MHz}$ risulta approssimativamente:

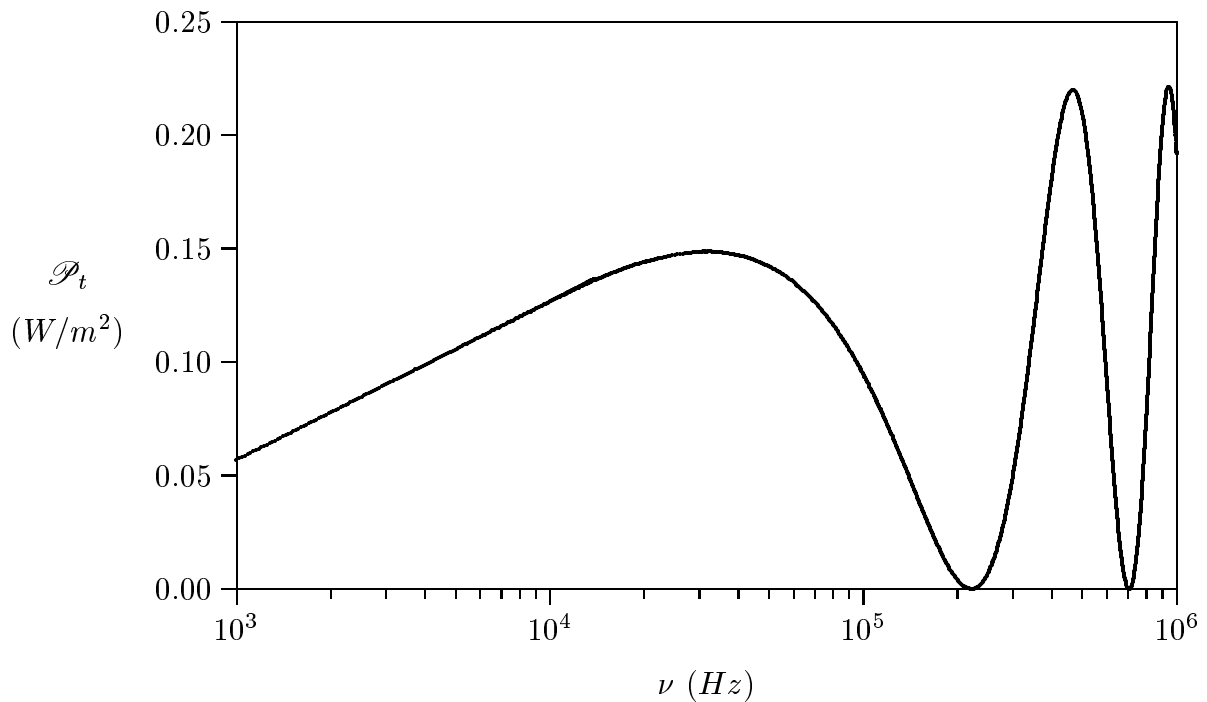
$$\frac{\sigma_2^2}{\epsilon_2^2 \omega^2} \ll 1$$

In tal caso:

$$\alpha_2 \simeq 188.3 \frac{\sigma_2}{\epsilon_{r2}} \quad \text{e} \quad \beta_2 \simeq \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{r2}}$$

$$\rho_{\perp}^2 = \frac{\frac{\omega^2}{c^2}(\sqrt{\epsilon_{r2}} - 1)^2 + \left(188.3 \frac{\sigma_2}{\epsilon_{r2}}\right)^2}{\frac{\omega^2}{c^2}(\sqrt{\epsilon_{r2}} + 1)^2 + \left(188.3 \frac{\sigma_2}{\epsilon_{r2}}\right)^2}$$

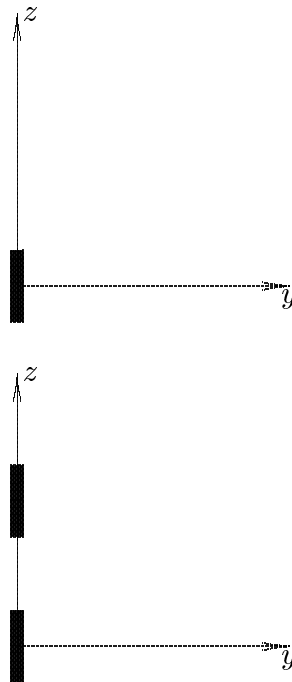
Ne segue che per alte frequenze ($\nu > 1 \text{ MHz}$) α é circa zero e ρ_{\perp}^2 é praticamente indipendente dalla frequenza, quindi il mezzo si comporta come un dielettrico perfetto; pertanto la densità di potenza trasmessa sará armonica e avrá minimi e massimi. Ripor-tiamo il grafico di \mathcal{P}_t calcolata con le formule esatte in un range di frequenze comprese fra $\nu = 1 \text{ KHz}$ e $\nu = 1 \text{ MHz}$. Si vede che per $\nu < 10^5 \text{ Hz}$ i valori graficati sono quasi uguali ai valori riportati nella tabella precedente.



05-3) Esercizio n. 3 del 28/1/2005

Una stazione trasmittente é costituita da un'antenna dipolare verticale lunga $\lambda/4$. Calcolare il campo elettrico far field ad una distanza di 15 Km dal centro dell'antenna in direzione orizzontale. Si sostituisca l'antenna con due antenne dipolari, ciascuna avente la stessa lunghezza della precedente, disposte entrambe lungo la verticale ad una distanza fra loro di $\lambda/2$. Calcolare il campo elettrico far field ad una distanza di 15 Km dal centro del sistema in direzione orizzontale.

I sistemi di antenne sono rappresentate nelle due figure seguenti.



Per una singola antenna posta sull'asse z di un sistema di riferimento, il campo elettrico far field é:

$$E_{\theta} = -i \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{e^{ikr}}{2\pi r} I_0 \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos kl}{\sin \theta}$$

Per $2l = \lambda/4$ risulta $kl = \pi/4$ e, quindi:

$$E_{\theta_{(2l=\lambda/4)}} = -i \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{e^{ikr}}{2\pi r} I_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} \cos \theta\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin \theta}$$

La direzione orizzontale coincide con la direzione $\theta = \pi/2$ e, quindi:

$$E_\theta \begin{cases} 2l = \lambda/4 \\ \theta = \pi/2 \end{cases} = -i \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{e^{ikr}}{2\pi r} I_0 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -i \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{e^{ikr}}{2\pi r} I_0(0.2929)$$

il cui modulo, per $r = 15 \text{ Km}$, é:

$$\left| E_\theta \begin{cases} 2l = \lambda/4 \\ \theta = \pi/2 \end{cases} \right| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{2\pi r} I_0(0.2929) \simeq \underline{\underline{I_0 1.1719 \cdot 10^{-3} \text{ V/m}}}$$

Il vettore di radiazione relativo al secondo sistema di antenne, é:

$$\vec{N} = \hat{z} \frac{2}{k} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} \cos\theta\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin^2\theta} \right] \sum_{p=0}^{n-1} A_p e^{-ikz_p \cos\theta}$$

che si é ottenuta sostituendo, nella formula relativa ad un sistema di antenne a mezz'onda con i centri situati sull'asse x , al posto di $\cos\psi = \sin\theta \cos\phi$, $\cos\theta$ ed al posto di x_p, z_p .

Ne segue:

$$N_\phi = 0, \quad e \quad N_\theta = -\frac{2}{k} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} \cos\theta\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\theta} \right] \sum_{p=0}^{n-1} A_p e^{-ikz_p \cos\theta}$$

ossia:

$$\begin{aligned} N_\theta &= -\frac{2}{k} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} \cos\theta\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\theta} \right] \left(A_0 + A_1 e^{-ik\frac{\lambda}{2} \cos\theta} \right) = \\ &= -\frac{2}{k} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} \cos\theta\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\theta} \right] \left(A_0 + A_1 e^{-i\pi \cos\theta} \right) \end{aligned}$$

Posto $A_0 = A_1 = I_0$, si ha:

$$N_\theta = -\frac{2}{k} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} \cos\theta\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\theta} \right] I_0 \left(1 + e^{-i\pi \cos\theta} \right)$$

Quindi il campo elettrico far field é:

$$\vec{E}_{rad} = -i\omega\mu \frac{e^{ikr}}{4\pi r} (\hat{e}_\theta N_\theta + \hat{e}_\phi N_\phi)$$

ossia:

$$E_{\theta(2 \text{ antenne})} = -i\omega\mu \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \frac{2}{k} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} \cos\theta\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\theta} \right] I_0 (1 + e^{-i\pi \cos\theta})$$

$$E_{\theta(2 \text{ antenne})} = -i\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{e^{ikr}}{2\pi r} I_0 \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} \cos\theta\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\theta} \right] (1 + e^{-i\pi \cos\theta})$$

La direzione orizzontale coincide con la direzione $\theta = \pi/2$ e, quindi:

$$E_\theta \begin{cases} (2 \text{ antenne}) \\ \theta = \pi/2 \end{cases} = -i\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{e^{ikr}}{2\pi r} I_0 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) (1 + 1)$$

Il campo elettrico far field, per $\theta = \pi/2$, di due antenne verticali distanziate $\lambda/2$ e uniformemente alimentate é il doppio di quello competente ad una sola antenna verticale alimentata con la stessa intensitá di corrente.

05-4) Esercizio n. 4 del 28/1/2005

Con riferimento al problema precedente, graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = \pi/2$ e $\phi = \pi/2$.

Per graficare il diagramma di radiazione relativo al sistema di due antenne verticali, cominciamo con l'osservare che il vettore di radiazione non dipende da ϕ e, quindi, nel piano $\theta = \pi/2$ tale diagramma é isotropo, ossia al variare di ϕ la densità di potenza é uniforme ed in un diagramma polare é rappresentata da una circonferenza.

Il vettore di radiazione é:

$$N_\theta = -\frac{2}{k} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} \cos \theta\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin \theta} \right] I_0 \left(1 + e^{-i\pi \cos \theta}\right)$$

Il vettore di Poynting, mediato in un periodo, é:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2 \left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2\right) \hat{e}_r$$

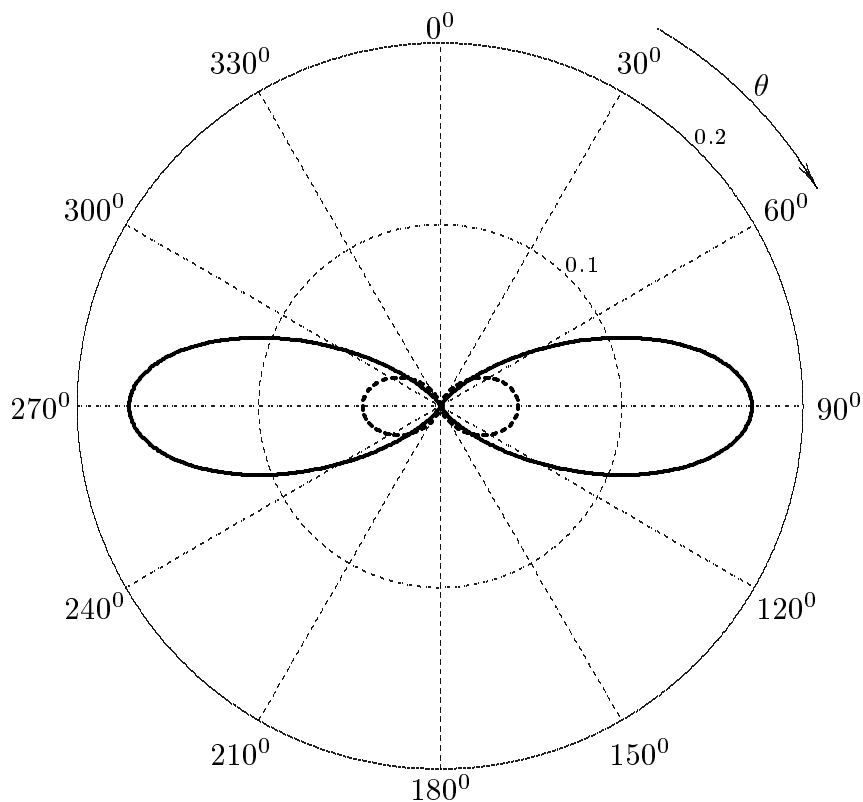
ossia:

$$|\langle \vec{S} \rangle| = Z \frac{I_0^2}{4\pi^2 r^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} \cos \theta\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin \theta} \right]^2 [1 + \cos(\pi \cos \theta)]$$

Grafichiamo il fattore di forma

$$F(\theta) = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} \cos \theta\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin \theta} \right]^2 [1 + \cos(\pi \cos \theta)]$$

che risulta sempre lo stesso in qualunque piano $\phi = \alpha$ con $0 \leq \alpha \leq 2\pi$



La curva a tratto continuo rappresenta il fattore di forma relativo al sistema delle due antenne; in tal caso il valore massimo di $F(\theta)$ é 0.17157.

La curva tratteggiata rappresenta il fattore di forma relativo ad una singola antenna verticale; in tal caso il valore massimo di $F(\theta)$ é 0.042893 ossia un quarto di quello relativo al sistema delle due antenne.

05-5) Esercizio n. 1 del 25/2/2005

Calcolare le ampiezze delle correnti di eccitazione di un sistema di antenne Dolph-Chebychev costituito da sette antenne a mezz'onda, alimentate in fase ed equidistanti $d = \lambda/2$, se si vuole che il livello dei lobi secondari del diagramma di radiazione sia 0.03 di quello del lobo principale. Si assuma che l'antenna centrale del sistema abbia ampiezza unitaria di corrente.

(vedi Esercizi di Campi elettromagnetici es. n. 1 del 17/4/1993)

Nel caso di sette elementi, si ha:

$$|A(\psi)| = 2 \left| \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \alpha + a_2 \cos 2\alpha + a_3 \cos 3\alpha \right| \quad (1)$$

dove si è posto $\alpha = -kd \cos \psi - \gamma$.

L'eq. (1) si può scrivere:

$$|A(\psi)| = 2 \left| \frac{a_0}{2} + a_1 \cos 2\frac{\alpha}{2} + a_2 \cos 4\frac{\alpha}{2} + a_3 \cos 6\frac{\alpha}{2} \right| \quad (2)$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \cos 6\delta &= 2 \cos 5\delta \cos \delta - \cos 4\delta = 2(16 \cos^5 \delta - 20 \cos^3 \delta + 5 \cos \delta) \cos \delta - \\ &- (8 \cos^4 \delta - 8 \cos^2 \delta + 1) = 32 \cos^6 \delta - 48 \cos^4 \delta + 18 \cos^2 \delta - 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Sviluppando l'equazione (2) in potenze di $\cos \frac{\alpha}{2}$, si ha:

$$\begin{aligned} |A(\psi)| &= 2 \left| \frac{a_0}{2} + a_1 \left(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right) + a_2 \left(8 \cos^4 \frac{\alpha}{2} - 8 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 1 \right) + \right. \\ &+ \left. a_3 \left(32 \cos^6 \frac{\alpha}{2} - 48 \cos^4 \frac{\alpha}{2} + 18 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \right| = \\ &= 2 \left| 32a_3 \cos^6 \frac{\alpha}{2} - 8(6a_3 - a_2) \cos^4 \frac{\alpha}{2} - (8a_2 - 18a_3 - 2a_1) \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{a_0}{2} - a_1 + a_2 - a_3 \right| \end{aligned} \quad (4)$$

Consideriamo il polinomio di Chebychev di sesto grado $T_6(x)$ che si ottiene dalla formula ricorrente:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Risulta:

$$T_6(x) = 2xT_5(x) - T_4(x) = 32x^6 - 40x^4 + 10x^2 - 8x^4 + 8x^2 - 1 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

Posto $x = x_0 \cos \frac{\alpha}{2}$, risulta:

$$x_0 = \frac{1}{2} \left(b + \sqrt{b^2 - 1} \right)^{1/n} + \frac{1}{2} \left(b - \sqrt{b^2 - 1} \right)^{1/n}$$

essendo $n = 6$ il grado del polinomio.

Per $b = (0.03)^{-1}$ si ha:

$$x_0 \simeq 1.2551$$

Imponiamo che:

$$|A(\psi)| = |KT_6(x)|$$

essendo K una costante arbitraria, e cerchiamo di conseguenza i coefficienti a_0, a_1, a_2 e a_3 .

Si ha:

$$\begin{cases} 64a_3 = K32x_0^6 \\ -96a_3 + 16a_2 = -K48x_0^4 \\ -16a_2 + 36a_3 + 4a_1 = K18x_0^2 \\ a_0 - 2a_1 + 2a_2 - 2a_3 = -K \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_3 = Kx_0^6 \\ -6a_3 + a_2 = -K3x_0^4 \\ -8a_2 + 18a_3 + 2a_1 = K9x_0^2 \\ a_0 - 2a_1 + 2a_2 - 2a_3 = -K \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} a_3 = \frac{1}{2}Kx_0^6 \\ a_2 = K(-3x_0^4 + 3x_0^6) \\ a_1 = \frac{1}{2}K(15x_0^6 - 24x_0^4 + 9x_0^2) \\ a_0 = K(10x_0^6 - 18x_0^4 + 9x_0^2 - 1) \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} a_3 \simeq 1.9545K \\ a_2 \simeq 4.2827K \\ a_1 \simeq 6.6288K \\ a_0 \simeq 7.6012K \end{cases}$$

Scegliendo K in modo che a_0 risulti eguale a uno, si ha:

$$K = \frac{1}{7.6011} \simeq 0.13156$$

e, quindi:

$$\begin{cases} a_3 \simeq 0.2571 \\ a_2 \simeq 0.5634 \\ a_1 \simeq 0.8721 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

Se si fosse scelto per K il valore 1, il livello dei lobi secondari sarebbe stato 1 e quello dei lobi principali b . K , cioè, rappresenta il livello dei lobi secondari.

05-6) Esercizio n. 2 del 25/2/2005

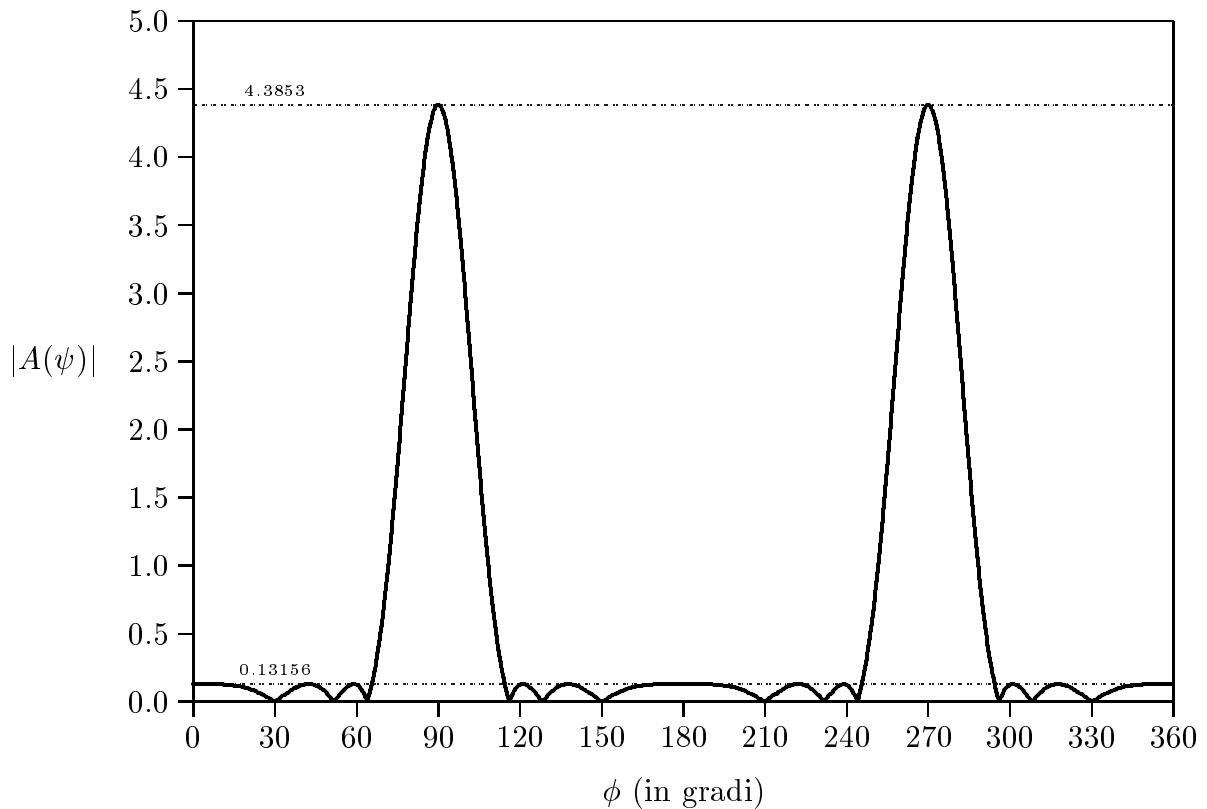
Con riferimento al problema precedente graficare in forma cartesiana il diagramma di radiazione nel piano $\theta = 90^\circ$ e verificare che il rapporto fra l'ampiezza del lobo principale e quella del lobo secondario sia quella richiesta.

Grafichiamo l'array factor

$$|A(\psi)| = 2 \left| \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \alpha + a_2 \cos 2\alpha + a_3 \cos 3\alpha \right|$$

ponendo i valori calcolati alle quantità a_0 , a_1 , a_2 e a_3 nonché $\theta = 90^\circ$ e $\gamma = 0$ e quindi $\alpha = -kd \cos \phi = -\pi \cos \phi$.

Sistema di antenne Dolph-Chebychev a 7 elementi



Il valore massimo del lobo principale é 4.3853. Il rapporto fra tale valore massimo e quello relativo ai lobi secondari 0.13156 é:

$$\frac{4.3853}{0.13156} \simeq 33.333$$

come richiesto dal problema.

05-7) Esercizio n. 3 del 25/2/2005

La costante dielettrica complessa di un materiale di conducibilit  nulla, alla frequenza di 2.5 GHz ,   $\epsilon_c = 40(1+i0.3)\epsilon_0$. Se esso viene irradiato da un'onda elettromagnetica piana viaggiante in aria ed incidente nella direzione della normale alla superficie del mezzo e la cui densit  di potenza mediata in un periodo   $\langle \mathcal{P} \rangle = 1\text{ KW/m}^2$, calcolare il coefficiente di attenuazione della radiazione elettromagnetica e la relativa profondit  di penetrazione nonch  la costante di propagazione. Si calcoli il coefficiente di riflessione e la densit  di potenza mediata in un periodo assorbita dal mezzo in un tratto pari alla profondit  di penetrazione.

$$k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon'_r} = \beta_2 + i\alpha_2 \implies \left[\frac{\omega}{c} \sqrt{40 + i12} \right]^2 = \beta_2^2 - \alpha_2^2 + 2i\alpha_2\beta_2$$

ossia:

$$\begin{cases} \beta_2^2 - \alpha_2^2 = 40 \frac{\omega^2}{c^2} \\ \alpha_2\beta_2 = 6 \frac{\omega^2}{c^2} \end{cases} \quad (1)$$

Dividendo membro a membro, si ha:

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{40}{6}$$

Moltiplicando ciascun termine per $\frac{\beta_2}{\alpha_2}$ si ha:

$$\frac{\beta_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{20}{3} \frac{\beta_2}{\alpha_2} - 1 = 0$$

da cui

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{10}{3} + \sqrt{\frac{100}{9} + 1} = 6.8134 \quad (2)$$

Dividendo la (2) per la (1) si ha:

$$\frac{1}{\alpha_2^2} = \frac{6.8134}{6} \frac{c^2}{\omega^2} \implies \alpha_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{6}{6.8134}} = \underline{\underline{49.135\text{ N}_p/m}}$$

$$\delta = \underline{\underline{2.03\text{ cm}}}$$

Dalla (2):

$$\beta_2 = 6.8134 \cdot \alpha_2 = \underline{\underline{334.7764\text{ rad/m}}}$$

Il coefficiente di riflessione, nell'ipotesi $\mu_1 \simeq \mu_2 \simeq \mu_0$ e per $\theta_0 = 0^0$, é:

$$R = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2 = \left| \frac{\beta_1 - (\beta_2 + i\alpha_2)}{\beta_1 + (\beta_2 + i\alpha_2)} \right|^2 = \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2 + \alpha_2^2}{(\beta_1 + \beta_2)^2 + \alpha_2^2}$$

essendo:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} = 52.36 \text{ rad/m}$$

Ne segue:

$$R = \frac{(52.36 - 334.7764)^2 + 49.135^2}{(52.36 + 334.7764)^2 + 49.135^2} = \frac{8.2173 \cdot 10^4}{1.5229 \cdot 10^5} = \underline{\underline{0.5396}}$$

La densità di potenza, mediata in un periodo, trasmessa nel secondo mezzo é allora:

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = (1 - R) \langle \mathcal{P}_0 \rangle e^{-2\alpha_2 z}$$

La densità di potenza, mediata in un periodo, assorbita dal mezzo in un tratto lungo δ é:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_a \rangle &= (1 - R) \langle \mathcal{P}_0 \rangle \frac{1}{\delta} \int_0^\delta e^{-2\alpha_2 z} dz = (1 - R) \langle \mathcal{P}_0 \rangle \cdot 2\alpha_2 \cdot \left(\frac{1}{-2\alpha_2} \right) (e^{-2\alpha_2 \delta} - 1) = \\ &= (1 - R) \langle \mathcal{P}_0 \rangle (1 - e^{-2}) = (1 - 0.5396) \cdot 10^3 \cdot (1 - 0.1353) = \\ &= \underline{\underline{398.11 \text{ W/m}^2}} \end{aligned}$$

che é equivalente a:

$$\langle \mathcal{P}_a \rangle = \langle \mathcal{P}_t \rangle_{z=0} - \langle \mathcal{P}_t \rangle_{z=\delta}$$

ossia:

$$\langle \mathcal{P}_a \rangle = (1 - R) \langle \mathcal{P}_0 \rangle - (1 - R) \langle \mathcal{P}_0 \rangle e^{-2} = (1 - R) \langle \mathcal{P}_0 \rangle (1 - e^{-2}) = \underline{\underline{398.11 \text{ W/m}^2}}$$

05-8) Esercizio n. 4 del 25/2/2005

Un segnale radio emesso da una stella pulsar impiega un certo tempo, dipendente dalla frequenza, ad arrivare sulla terra. Ciò é dovuto alla presenza del mezzo interstellare che é idrogeno ionizzato con densità elettronica $N_e \simeq 10^5 \text{ m}^{-3}$ e $\omega_{eff} \simeq 0$. Se l'intervallo di tempo di arrivo fra due impulsi consecutivi di frequenza 151 MHz e 408 MHz é $\Delta t = 4.18 \text{ s}$, calcolare la distanza della stella pulsar dalla terra.

Il tempo di viaggio é dato da:

$$t = \frac{L}{v_g}$$

essendo L il percorso dell'onda elettromagnetica nel mezzo e v_g la velocità di gruppo data da:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$$

Si ha:

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Poiché β é una funzione sempre crescente all'aumentare di ω , la velocità di gruppo si può scrivere:

$$v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1}$$

Risulta:

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{c} \left[\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} + \frac{\omega \left(\frac{2\omega_p^2}{\omega^3} \right)}{2\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \right] = \frac{1}{c} \left(\frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \right)$$

Ne segue, nell'ipotesi che $\omega^2 \gg \omega_p^2$:

$$v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \simeq c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

Si ha:

$$t_1 = \frac{L}{v_{g1}} \quad e \quad t_2 = \frac{L}{v_{g2}}$$

Ne segue:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = L \left(\frac{1}{v_{g1}} - \frac{1}{v_{g2}} \right)$$

Sempre nell'ipotesi che $\omega^2 \gg \omega_p^2$, si può scrivere:

$$\frac{1}{v_g} \simeq \frac{1}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

Ne segue:

$$\Delta t = \frac{L}{c} \left(\frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2} - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_2^2} \right) = \frac{L}{c} \frac{\omega_p^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2} \right)$$

Si ha, nel nostro caso:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} = \frac{10^5 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}} \simeq 3.1738 \cdot 10^8 \text{ (rad/s)}^2$$

ed é quindi verificata, secondo i dati del problema, la condizione $\omega^2 \gg \omega_p^2$.

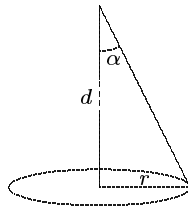
Quindi:

$$\begin{aligned} \Delta t &= 1.34 \cdot 10^{-2} L \left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2} \right) = 1.34 \cdot 10^{-14} L \left(\frac{1}{151^2} - \frac{1}{408^2} \right) = \\ &= 1.34 \cdot 10^{-14} L \cdot 3.785 \cdot 10^{-5} = 5.0719 \cdot 10^{-19} L \end{aligned}$$

da cui:

$$L = \frac{\Delta t}{5.0719 \cdot 10^{-19}} = \frac{4.18}{5.0719 \cdot 10^{-19}} = \underline{\underline{8.2415 \cdot 10^{18} \text{ m}}}$$

É d'uso e conveniente esprimere queste lunghissime distanze in *parsec*. Il parsec é $3.086 \cdot 10^{16} \text{ m}$; esso é la distanza dalla quale il raggio dell'orbita terrestre, $1.496 \cdot 10^{11}$ metri, sottende un angolo di 1 secondo, cioè $1 \text{ parsec} = 1.496 \cdot 10^{11} \cdot 180 \cdot 3600/\pi$.



$$r = d \tan \alpha, \quad \text{per } \alpha \simeq 0 \implies \tan \alpha \simeq \alpha \implies d \simeq \frac{r}{\alpha}$$

$$\alpha = 1'' = \left(\frac{1}{3600} \right)^0 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ (rad)}$$

Quindi:

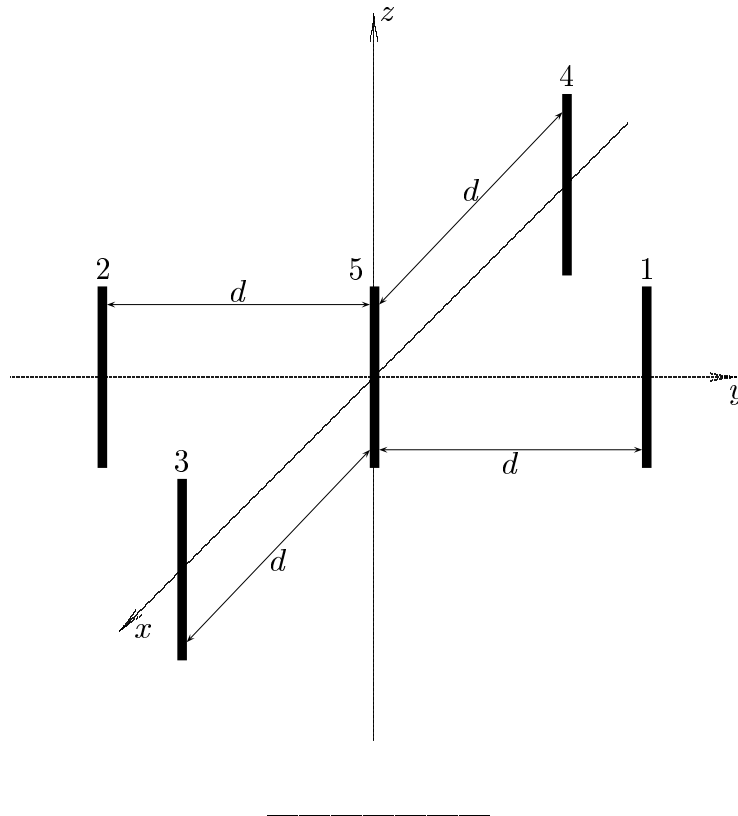
$$d = 1.496 \cdot 10^{11} \cdot 3600 \cdot 180/\pi = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ (m)}$$

Ne segue:

$$L = \frac{8.2415 \cdot 10^{18}}{3.086 \cdot 10^{16}} \simeq \underline{\underline{267 \text{ parsec}}}$$

05-9) Esercizio n. 1 del 22/4/2005

Si abbia il sistema radiante disegnato in figura. I dipoli hanno tutti lunghezza pari alla lunghezza d'onda e le distanze indicate con d sono anch'esse pari alla lunghezza d'onda. I dipoli sono alimentati con correnti della stessa ampiezza e fase. Determinare l'espressione del vettore di Poynting far field.



La distribuzione spaziale della corrente su ciascuna antenna é:

$$I(z') = I_0 \sin k(l - |z'|) = I_0 \sin \left(\pi - \frac{2\pi}{\lambda} |z'| \right) = I_0 \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} |z'| \right)$$

essendo per tutte le antenne $l = \lambda/2$.

Il vettore di radiazione di tale sistema é:

$$\vec{N}(\theta, \phi) = \int_V \vec{J}(\vec{r}') e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}'} d^3r'$$

essendo $\vec{J}(\vec{r}')$ la somma delle densità di corrente $\vec{J}_1(\vec{r}')$, $\vec{J}_2(\vec{r}')$, $\vec{J}_3(\vec{r}')$, $\vec{J}_4(\vec{r}')$ e $\vec{J}_5(\vec{r}')$ su ciascuna delle cinque antenne. Esse sono:

$$\vec{J}_1 = \hat{z} I_0 \delta(x) \delta(y - \lambda) \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} |z'| \right) \quad -\frac{\lambda}{2} \leq z' \leq \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

$$\vec{J}_2 = \hat{z}I_0\delta(x)\delta(y + \lambda)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}|z'|\right) \quad -\frac{\lambda}{2} \leq z' \leq \frac{\lambda}{2} \quad (2)$$

$$\vec{J}_3 = \hat{z}I_0\delta(x - \lambda)\delta(y)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}|z'|\right) \quad -\frac{\lambda}{2} \leq z' \leq \frac{\lambda}{2} \quad (3)$$

$$\vec{J}_4 = \hat{z}I_0\delta(x + \lambda)\delta(y)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}|z'|\right) \quad -\frac{\lambda}{2} \leq z' \leq \frac{\lambda}{2} \quad (4)$$

$$\vec{J}_5 = \hat{z}I_0\delta(x)\delta(y)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}|z'|\right) \quad -\frac{\lambda}{2} \leq z' \leq \frac{\lambda}{2} \quad (5)$$

Tenendo conto che:

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta \\ \vec{r}' &= x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z} \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \vec{N}(\theta, \phi) &= \hat{z}\int_V I_0\delta(x)\delta(y - \lambda)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}|z'|\right)\left[e^{-ik(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)}\right]dx'dy'dz' + \\ &+ \hat{z}\int_V I_0\delta(x)\delta(y + \lambda)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}|z'|\right)\left[e^{-ik(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)}\right]dx'dy'dz' + \\ &+ \hat{z}\int_V I_0\delta(x - \lambda)\delta(y)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}|z'|\right)\left[e^{-ik(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)}\right]dx'dy'dz' + \\ &+ \hat{z}\int_V I_0\delta(x + \lambda)\delta(y)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}|z'|\right)\left[e^{-ik(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)}\right]dx'dy'dz' + \\ &+ \hat{z}\int_V I_0\delta(x)\delta(y)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}|z'|\right)\left[e^{-ik(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)}\right]dx'dy'dz' \end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned} \vec{N}(\theta, \phi) &= \hat{z}I_0e^{-ik\lambda\sin\theta\sin\phi}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} e^{-ikz'\cos\theta}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}|z'|\right)dz' + \\ &+ \hat{z}I_0e^{+ik\lambda\sin\theta\sin\phi}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} e^{-ikz'\cos\theta}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}|z'|\right)dz' + \\ &+ \hat{z}I_0e^{-ik\lambda\sin\theta\cos\phi}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} e^{-ikz'\cos\theta}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}|z'|\right)dz' + \\ &+ \hat{z}I_0e^{+ik\lambda\sin\theta\cos\phi}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} e^{-ikz'\cos\theta}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}|z'|\right)dz' + \\ &+ \hat{z}I_0\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} e^{-ikz'\cos\theta}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}|z'|\right)dz' \end{aligned}$$

In definitiva:

$$\begin{aligned} \vec{N}(\theta, \phi) &= \hat{z}I_0\left\{e^{-ik\lambda\sin\theta\sin\phi} + e^{+ik\lambda\sin\theta\sin\phi} + e^{-ik\lambda\sin\theta\cos\phi} + e^{+ik\lambda\sin\theta\cos\phi} + 1\right\} \cdot \\ &\cdot \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} e^{-ikz'\cos\theta}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}|z'|\right)dz' \end{aligned}$$

Dalla teoria delle antenne rettilinee, sviluppata negli Appunti di Campi elettromagnetici, si ha:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikz' \cos \theta} \sin k(l - |z'|) dz' = \frac{2}{k \sin^2 \theta} [\cos(kl \cos \theta) - \cos kl]$$

Si ha, quindi:

$$\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} e^{-ikz' \cos \theta} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} |z'| \right) dz' = \frac{2}{k \sin^2 \theta} [\cos(\pi \cos \theta) + 1]$$

Per cui:

$$\begin{aligned} \vec{N}(\theta, \phi) &= \hat{z} I_0 \left\{ e^{-ik\lambda \sin \theta \sin \phi} + e^{+ik\lambda \sin \theta \sin \phi} + e^{-ik\lambda \sin \theta \cos \phi} + e^{+ik\lambda \sin \theta \cos \phi} + 1 \right\} \cdot \\ &\cdot \frac{2}{k \sin^2 \theta} [\cos(\pi \cos \theta) + 1] \end{aligned}$$

Ricordando che:

$$\hat{z} = \hat{e}_r \cos \theta - \hat{e}_\theta \sin \theta$$

si ha:

$$\begin{aligned} N_\phi &= 0 \\ N_\theta &= -I_0 \left\{ e^{-ik\lambda \sin \theta \sin \phi} + e^{+ik\lambda \sin \theta \sin \phi} + e^{-ik\lambda \sin \theta \cos \phi} + e^{+ik\lambda \sin \theta \cos \phi} + 1 \right\} \cdot \\ &\cdot \frac{2}{k \sin \theta} [\cos(\pi \cos \theta) + 1] \end{aligned}$$

da cui:

$$\langle \vec{S} \rangle = \hat{e}_r \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r} \right)^2 |N_\theta|^2$$

ossia:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \hat{e}_r 2Z \left(\frac{I_0}{4\pi r} \right)^2 \left| e^{-ik\lambda \sin \theta \sin \phi} + e^{+ik\lambda \sin \theta \sin \phi} + e^{-ik\lambda \sin \theta \cos \phi} + e^{+ik\lambda \sin \theta \cos \phi} + 1 \right|^2 \\ &\cdot \left| \frac{\cos(\pi \cos \theta) + 1}{\sin \theta} \right|^2 \end{aligned}$$

In definitiva:

$$\langle \vec{S} \rangle = \hat{e}_r 2Z \left(\frac{I_0}{4\pi r} \right)^2 \left| \frac{\cos(\pi \cos \theta) + 1}{\sin \theta} \right|^2 \cdot \left| 1 + 2 \cos(2\pi \sin \theta \sin \phi) + 2 \cos(2\pi \sin \theta \cos \phi) \right|^2$$

05-10) Esercizio n. 2 del 22/4/2005

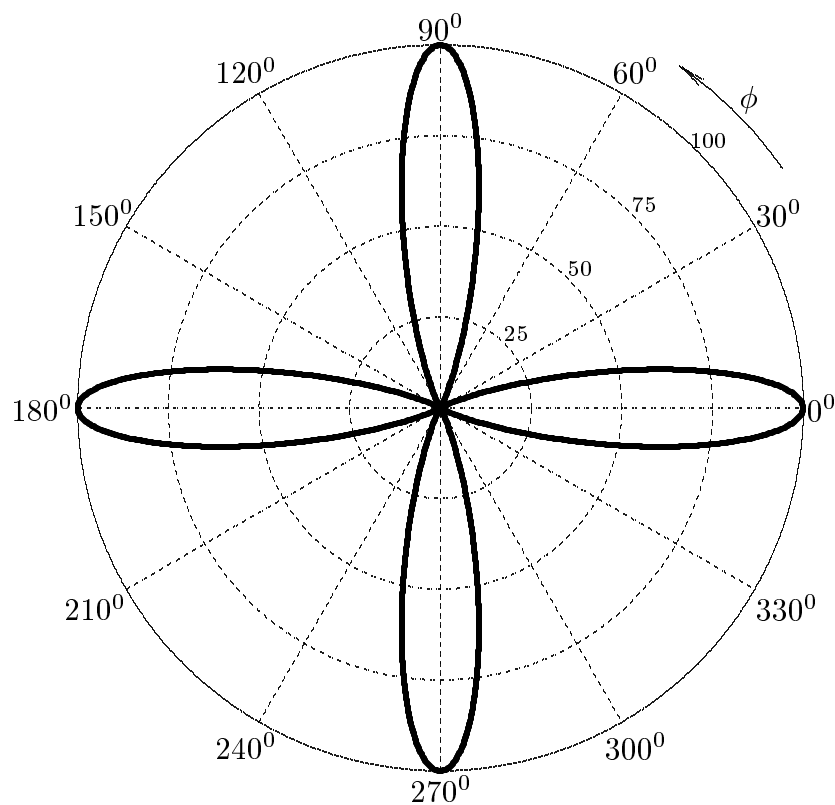
Con riferimento al problema precedente, graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = \pi/2$ e nel piano $\phi = \pi/2$.

Grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\theta, \phi) = \left| \frac{\cos(\pi \cos \theta) + 1}{\sin \theta} \right|^2 \cdot \left| 1 + 2 \cos(2\pi \sin \theta \sin \phi) + 2 \cos(2\pi \sin \theta \cos \phi) \right|^2$$

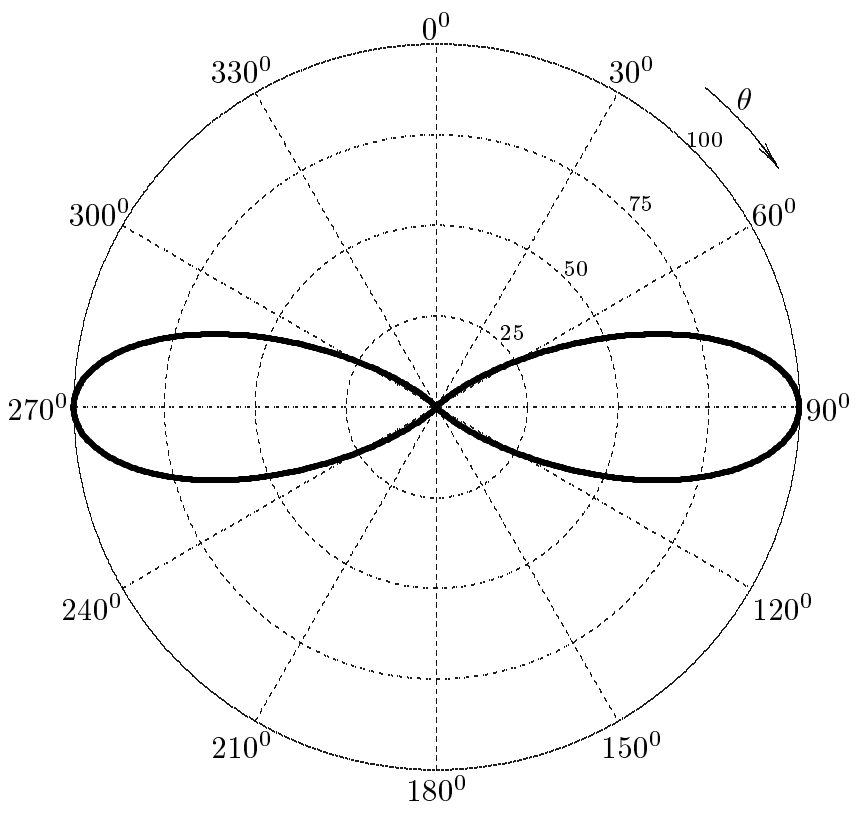
Per $\theta = \pi/2$:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) = 4 \left| 1 + 2 \cos(2\pi \sin \phi) + 2 \cos(2\pi \cos \phi) \right|^2$$



Per $\phi = \pi/2$:

$$F\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) = \left| \frac{\cos(\pi \cos \theta) + 1}{\sin \theta} \right|^2 \cdot \left| 3 + 2 \cos(2\pi \sin \theta) \right|^2$$



05-11) Esercizio n. 3 del 22/4/2005

Una radiotrasmittente, posta in aria, irradia microonde di frequenza $\nu = 10 \text{ GHz}$; essa deve essere protetta da un 'radome' ossia da un involucro di dielettrico di costante dielettrica $\epsilon = 4\epsilon_0$. Calcolare lo spessore dell'involucro affinché la radiazione emessa sia tutta trasmessa. Se, per imperfetta costruzione, lo spessore dell'involucro è diverso dell'1% dal suo valore calcolato, valutare il coefficiente di riflessione del radome.

(vedi esercizi di Campi elettromagnetici n.3 e n.4 del 23/7/04)

L'indice di rifrazione dell'involucro è più grande dell'indice di rifrazione del terzo mezzo (aria). Quindi affinché la radiazione venga tutta trasmessa attraverso il radome, lo spessore dello involucro deve soddisfare alla relazione:

$$n_2 d = m \frac{\lambda_0}{4} \quad \text{con } m \text{ pari}$$

da cui:

$$d = m \frac{\lambda_0}{4n_2} \quad \text{con } m \text{ pari}$$

Poiché risulta $\lambda_0 = c/\nu = 3 \cdot 10^8 / 10^{10} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 3 \text{ cm}$, il minimo valore dello spessore, che si ha per $m = 2$, risulta:

$$d_{min} = 2 \frac{3 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 2} = 0.75 \text{ cm}$$

Il coefficiente di riflessione di una lamina piana dielettrica fra due mezzi dielettrici perfetti è:

$$R = \frac{|E_1|^2}{|E_2|^2} = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \beta_2 d}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \beta_2 d} \quad (1)$$

essendo d lo spessore della lamina e:

$$r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = -0.3333, \quad r_{23} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3} = +0.3333$$

Se la frequenza della trasmittente è sintonizzata a 10 GHz , risulta:

$$\sin^2 \beta_2 d = \sin^2 \left(\frac{2\pi n_2}{\lambda_0} m \frac{\lambda_0}{4n_2} \right) = 0 \quad \text{con } m \text{ pari}$$

e, quindi, la riflettività, essendo $r_{12} = -r_{23}$, è nulla come peraltro avevamo imposto.

Se, tuttavia, lo spessore della lamina varia, $\sin^2 \beta_2 d \neq 0$ e, quindi, la riflettività sarà diversa da zero.

Sia d' il nuovo spessore del radome; esso, come richiesto dal testo, é:

$$d' = d \pm 0.01d = d(1 \pm 0.01) = \begin{cases} 1.01d \\ 0.99d \end{cases}$$

In tal caso, per $m = 2$:

$$\sin^2 \beta_2 d' = \sin^2 \left(\frac{2\pi n_2}{\lambda_0} d' \right) = \begin{cases} \sin^2(1.01\pi) = 9.866358 \cdot 10^{-4} & \text{per } d' = 1.01d \\ \sin^2(0.99\pi) = 9.866358 \cdot 10^{-4} & \text{per } d'_0 = 0.99d \end{cases}$$

La riflettività é, rispettivamente per le due lunghezze d'onda:

$$R' = \begin{cases} \frac{4 \cdot (0.3333)^2 \cdot 9.866358 \cdot 10^{-4}}{[1 - (0.3333)^2]^2 - 4 \cdot (0.3333)^2 \cdot 9.866358 \cdot 10^{-4}} = \frac{0.00043842}{0.79016 - 0.00043842} = \underline{\underline{5.55 \cdot 10^{-4}}} \\ \frac{4 \cdot (0.3333)^2 \cdot 9.866358 \cdot 10^{-4}}{[1 - (0.3333)^2]^2 - 4 \cdot (0.3333)^2 \cdot 9.866358 \cdot 10^{-4}} = \frac{0.00043842}{0.79016 - 0.00043842} = \underline{\underline{5.55 \cdot 10^{-4}}} \end{cases}$$

05-12) Esercizio n. 4 del 22/4/2005

Una guida d'onda rettangolare, riempita d'aria, é utilizzata per trasferire potenza ad un'antenna radar. La guida deve avere le seguenti specifiche: 1) i due modi piú bassi sono TE_{10} e TE_{20} ; 2) la frequenza operativa é 3 GHz e deve giacere esattamente a metà fra le frequenze di cutoff di questi due modi; 3) il massimo campo elettrico all'interno della guida deve essere il campo di breakdown dell'aria 3 MV/m . Calcolare le dimensioni a e b della guida se la potenza trasmessa deve essere $P_T = 1\text{ MW}$.

(vedi esercizi di Campi elettromagnetici n.1 del 10/9/04)

In una guida rettangolare la frequenza di cutoff é:

$$f_c = \frac{h_{pq}c}{2\pi}$$

essendo h_{pq} l'autovalore del modo:

$$h_{pq} = \pi \sqrt{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}}$$

ossia:

$$f_c = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}} \quad (1)$$

Per il modo TE_{10} risulta:

$$f_{c_{TE_{10}}} = \frac{c}{2a}$$

Per il modo TE_{20} si ha:

$$f_{c_{TE_{20}}} = \frac{c}{a}$$

La frequenza operativa deve essere:

$$f_{op} = f_{c_{TE_{10}}} + \frac{1}{2} [f_{c_{TE_{20}}} - f_{c_{TE_{10}}}] = \frac{c}{2a} + \frac{1}{2} \left[\frac{c}{a} - \frac{c}{2a} \right] = \frac{c}{2a} + \frac{c}{4a} = \frac{3c}{4a}$$

da cui:

$$a = \frac{3c}{4f_{op}} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 10^8}{4 \cdot 3 \cdot 10^9} = 7.5 \cdot 10^{-2} \text{ m} = \underline{\underline{7.5 \text{ cm}}}$$

L'espressione della componente lungo l'asse y del campo elettrico in una guida rettangolare eccitata nel modo TE_{pq} é:

$$E_y = -A \frac{i\omega\mu}{h_{TE_{pq}}^2} \frac{p\pi}{a} \sin \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} e^{-i\beta z} e^{i\omega t}$$

Per il modo TE_{10} risulta:

$$E_y = -A \frac{i\omega\mu}{h_{TE_{10}}} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} e^{i\omega t}$$

essendo $h_{TE_{10}} = \frac{\pi}{a}$.

Il valore massimo del modulo del campo elettrico é, allora:

$$|E_y|_{max} = A \frac{\omega\mu}{h_{TE_{10}}}$$

Valutiamo il valore della costante A imponendo la condizione estrema che:

$$|E_y|_{max} = |E|_{breakdown}$$

ossia:

$$A = \frac{h_{TE_{10}} |E|_{breakdown}}{\omega\mu}$$

Dagli Appunti di Campi elettromagnetici si ha che la potenza convogliata in guida competente a modi TE_{10} é data dalla seguente espressione:

$$P_{TE_{10}} = A^2 \frac{\omega\mu \sqrt{\omega^2\epsilon\mu - h_{TE_{10}}^2}}{4h_{TE_{10}}^2} ab$$

Sostituendo l'espressione di A precedentemente trovata, si ha:

$$P_{TE_{10}} = |E|_{breakdown}^2 \frac{\sqrt{\omega^2\epsilon\mu - h_{TE_{10}}^2}}{4\omega\mu} ab$$

da cui:

$$b = \frac{4\omega\mu P_{TE_{10}}}{|E|_{breakdown}^2 \sqrt{\omega^2\epsilon\mu - h_{TE_{10}}^2} a}$$

Si ha:

$$\sqrt{\omega^2\epsilon\mu - h_{10}^2} = \sqrt{4\pi^2 \cdot (3 \cdot 10^9)^2 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} - \frac{\pi^2}{(0.075)^2}} = 46.890$$

Quindi:

$$b = \frac{4 \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{9 \cdot 10^{12} \cdot 46.890 \cdot 0.075} P_{TE_{10}} = 2.9936 \cdot 10^{-9} P_{TE_{10}}$$

$$\text{Per } P_{TE_{10}} = 10^6 \text{ W} \implies b = \underline{\underline{2.9936 \cdot 10^{-3} \text{ m} \simeq 0.3 \text{ cm}}}$$

05-13) Esercizio n. 1 del 29/6/2005

Una carica elettrica e si muove nel vuoto sotto l'influenza di un campo elettrico uniforme \vec{E} e di un campo di induzione magnetica uniforme \vec{B} . Si assuma $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ e $\vec{v} \cdot \vec{B} = 0$. A quale velocità la carica deve muoversi affinché la sua accelerazione risulti nulla? Qual'è il modulo della velocità della particella quando $|\vec{E}| = |\vec{B}|$?

La forza alla quale è soggetta la particella di carica e in moto in un campo elettrico uniforme ed in un campo di induzione magnetica anch'esso uniforme è data dalla forza di Lorentz:

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}$$

Sia $B = B_0\hat{z}$ e quindi, dovendo essere $\vec{v} \cdot \vec{B} = 0$ e $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, risulta:

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y}$$

Si ha, allora:

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = v_y B_0 \hat{x} - v_x B_0 \hat{y}$$

Le componenti della forza sono allora:

$$\begin{aligned} F_x &= eE_x + ev_y B_0 \\ F_y &= eE_y - ev_x B_0 \end{aligned}$$

Affinché l'accelerazione della carica sia nulla, ossia la forza deve essere eguale a zero, le componenti della velocità devono essere:

$$\begin{aligned} v_x &= +\frac{E_y}{B_0} \\ v_y &= -\frac{E_x}{B_0} \end{aligned}$$

Il modulo quadro della velocità è, allora:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \frac{E_x^2 + E_y^2}{B_0^2} = \frac{E^2}{B_0^2}$$

Se $|\vec{B}| = |\vec{E}|$, risulta:

$$v^2 = 1$$

Un metodo piú generale e nello stesso tempo piú elegante é il seguente:

Si moltiplichí vettorialmente a sinistra per \vec{B} ciascun termine dell'espressione della forza; si ha:

$$\vec{B} \times \vec{F} = e \left[\vec{B} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \vec{B} \times \vec{E} \right] \quad (1)$$

La condizione che l'accelerazione sia nulla significa porre $\vec{F} = 0$ nella (1). Ne segue:

$$0 = \left[\vec{B} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \vec{B} \times \vec{E} \right] \quad (2)$$

Dalla relazione vettoriale:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

si ha:

$$\vec{B} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{B}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{B}) \vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{B}) \vec{v} = |\vec{B}|^2 \vec{v}$$

avendo posto $\vec{v} \cdot \vec{B} = 0$ come richiesto dal testo.

Sostituendo nella (2) si ha:

$$0 = |\vec{B}|^2 \vec{v} + \vec{B} \times \vec{E}$$

da cui:

$$\vec{v} = -\frac{\vec{B} \times \vec{E}}{|\vec{B}|^2}$$

Il modulo di \vec{v} é:

$$|\vec{v}| = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}$$

essendo $\vec{v} \perp \vec{E}$ come richiesto dal testo.

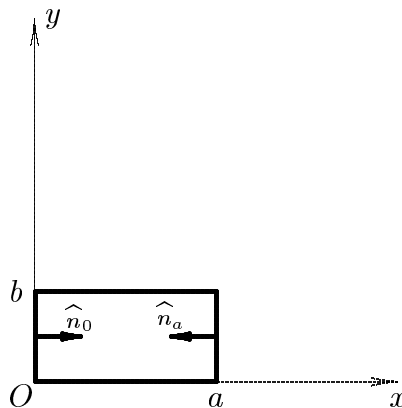
Se $|\vec{E}| = |\vec{B}|$ risulta:

$$|\vec{v}| = 1$$

05-14) Esercizio n. 2 del 29/6/2005

Una guida rettangolare di dimensioni $a = 2 \text{ cm}$ e $b = 1 \text{ cm}$ é eccitata nel modo TE_{10} . Se in essa si propaga un potenza di 10^8 W , determinare l'ampiezza massima del campo elettrico, quella del campo magnetico e la densità di forza, mediata in un periodo, che si esercita sulle pareti della guida. Si supponga $f/f_c = 1.3$.

(vedi es. n.4 del 21/7/1998, n.2 del 26/2/1999, n. 1 del 13/9/2001)



I campi elettrici e magnetici all'interno di una guida d'onda rettangolare eccitata nel modo TE_{10} sono:

$$\begin{aligned}
 E_x &= 0 \\
 E_y &= -\frac{i\omega\mu_0}{h_{10}} A \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_{10}z} e^{i\omega t} \\
 E_z &= 0 \\
 H_x &= \frac{i\beta_{10}}{h_{10}} A \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_{10}z} e^{i\omega t} \\
 H_y &= 0 \\
 H_z &= A \cos \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_{10}z} e^{i\omega t}
 \end{aligned}$$

Consideriamo le pareti della guida che giacciono sui piani $x = 0$ e $x = a$. Su di esse i campi elettrici e magnetici sono:

$$\begin{aligned}
 E_x &= E_y = E_z = 0 \\
 H_x &= H_y = 0 \\
 H_z &= \pm A e^{-i\beta_{10}z} e^{i\omega t} \begin{cases} + \text{ per } x = 0 \\ - \text{ per } x = a \end{cases}
 \end{aligned}$$

I corrispondenti tensori degli sforzi sono:

$$\overline{\overline{S}}^{(e)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \overline{\overline{S}}^{(m)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{S}}^{(e)} + \overline{\overline{S}}^{(m)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 \end{pmatrix}$$

La densità superficiale di forza che si esercita su ciascuna delle pareti giacenti sui piani $x = 0$ e $x = a$ é:

$$\vec{t} = \overline{\overline{S}} \cdot \hat{n}_0 \quad \text{su } x = 0$$

$$\vec{t} = \overline{\overline{S}} \cdot \hat{n}_a \quad \text{su } x = a$$

ossia:

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 \hat{x} \quad \underline{\underline{\text{su } x = 0}}$$

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 \hat{x} \quad \underline{\underline{\text{su } x = a}}$$

La densità superficiale di forza mediata in un periodo é:

$$\langle \vec{t} \rangle = \begin{cases} -\frac{1}{2}\mu_0 \langle \Re(H_z) \cdot \Re(H_z) \rangle \hat{x} = -\frac{1}{4}\mu_0 H_z H_z^* \hat{x} = -\frac{1}{4}\mu_0 A^2 \hat{x} & \underline{\underline{\text{su } x = 0}} \\ +\frac{1}{2}\mu_0 \langle \Re(H_z) \cdot \Re(H_z) \rangle \hat{x} = +\frac{1}{4}\mu_0 H_z H_z^* \hat{x} = +\frac{1}{4}\mu_0 A^2 \hat{x} & \underline{\underline{\text{su } x = a}} \end{cases}$$

La forza tende a spingere le pareti verso l'esterno.

Per valutare tale forza bisogna conoscere la costante A^2 in funzione della potenza convogliata all'interno della guida. Si ha:

$$\begin{aligned}
 P_{TE10} &= A^2 \frac{\omega \mu_0 \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu_0 - h_{10}^2}}{4h_{10}^2} ab = A^2 \frac{\omega \mu_0 \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu_0 - \omega_{c10}^2 \epsilon \mu_0}}{4\omega_{c10}^2 \epsilon \mu_0} ab = \\
 &= A^2 \frac{\omega^2 \mu_0 \sqrt{\epsilon \mu_0} \sqrt{1 - \frac{\omega_{c10}^2}{\omega^2}}}{4\omega_{c10}^2 \epsilon \mu_0} ab = \frac{A^2}{4} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \frac{\omega^2}{\omega_{c10}^2} \sqrt{1 - \frac{\omega_{c10}^2}{\omega^2}} ab = \\
 &= \frac{A^2}{4} 377 \cdot (1.3)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1.3}\right)^2} 2 \cdot 10^{-4} \simeq 2 \cdot 10^{-2} A^2
 \end{aligned}$$

da cui:

$$A^2 = \frac{P_{TE10}}{2 \cdot 10^{-2}} = \frac{10^8}{2 \cdot 10^{-2}} \simeq 5 \cdot 10^9$$

Pertanto il modulo della densità di forza che agisce sulle pareti della guida giacenti nel piano $x = 0$ e $x = a$ è:

$$|\langle \vec{t} \rangle| = \frac{1}{4} \mu_0 A^2 = \frac{1}{4} 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^9 \simeq \underline{\underline{1.57 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2}}$$

La forza, mediata in un periodo, che si esercita su una superficie dS di ciascuna parete è:

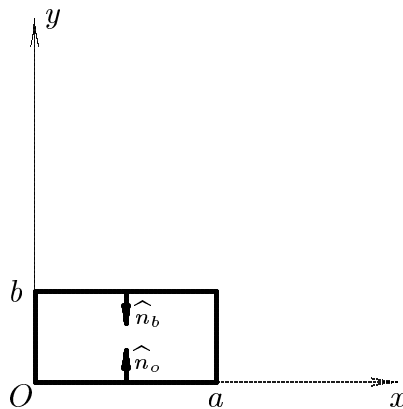
$$d^2 \langle \vec{F} \rangle = \langle \vec{t} \rangle dS = \langle \vec{t} \rangle dy dz$$

ossia la forza per unità di lunghezza della guida è:

$$\frac{d \langle \vec{F} \rangle}{dz} = \int_0^b \langle \vec{t} \rangle dy = \begin{cases} -\frac{1}{4} \mu_0 A^2 b \hat{x} = \underline{\underline{-15.7 \hat{x} \text{ N/m}}} & \underline{\underline{su x=0}} \\ +\frac{1}{4} \mu_0 A^2 b \hat{x} = \underline{\underline{+15.7 \hat{x} \text{ N/m}}} & \underline{\underline{su x=a}} \end{cases}$$

La forza, come abbiamo già fatto notare, è repulsiva e questo è dovuto al fatto che l'unico contributo a codesta forza è il campo magnetico sulle superfici interne delle pareti in oggetto ossia la repulsione è determinata dalle correnti che circolano sulle pareti, ovviamente in senso opposto.

Consideriamo, ora, la densità di forza che si esercita sui lati lunghi della guida.



Consideriamo le pareti della guida che giacciono sui piani $y = 0$ e $y = b$. Su di esse i campi elettrici e magnetici sono:

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= -\frac{i\omega\mu_0}{h_{10}} A \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_{10}z} e^{i\omega t} \\ E_z &= 0 \\ H_x &= \frac{i\beta_{10}}{h_{10}} A \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_{10}z} e^{i\omega t} \\ H_y &= 0 \\ H_z &= A \cos \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_{10}z} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

I corrispondenti tensori degli sforzi sono:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{S}}^{(e)} &= \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon_0}{2} E_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon_0}{2} E_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\epsilon_0}{2} E_y^2 \end{pmatrix} e \\ \overline{\overline{S}}^{(m)} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mu_0 H_x^2 - \frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 & 0 & \mu_0 H_x H_z \\ 0 & -\frac{1}{2}\mu_0 H_x^2 - \frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 & 0 \\ \mu_0 H_x H_z & 0 & -\frac{1}{2}\mu_0 H_x^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{S}} &= \overline{\overline{S}}^{(e)} + \overline{\overline{S}}^{(m)} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon_0}{2} E_y^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H_x^2 - \frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 & 0 & \mu_0 H_x H_z \\ 0 & \frac{\epsilon_0}{2} E_y^2 - \frac{1}{2}\mu_0 H_x^2 - \frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 & 0 \\ \mu_0 H_x H_z & 0 & -\frac{\epsilon_0}{2} E_y^2 - \frac{1}{2}\mu_0 H_x^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La densità superficiale di forza che si esercita su ciascuna delle pareti giacenti sui piani $y = 0$ e $y = b$ è:

$$\begin{aligned} \vec{t} &= \overline{\overline{S}} \cdot \hat{n}_0 & \text{su } y = 0 \\ \vec{t} &= \overline{\overline{S}} \cdot \hat{n}_b & \text{su } y = b \end{aligned}$$

ossia:

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} S_{xx} & 0 & S_{xz} \\ 0 & S_{yy} & 0 \\ S_{zx} & 0 & S_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\epsilon_0}{2} E_y^2 - \frac{1}{2}\mu_0 H_x^2 - \frac{1}{2}\mu_0 H_z^2 \right) \hat{y} \quad \underline{\underline{\text{su } y = 0}}$$

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} S_{xx} & 0 & S_{xz} \\ 0 & S_{yy} & 0 \\ S_{zx} & 0 & S_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \left(\frac{\epsilon_0}{2} E_y^2 - \frac{1}{2} \mu_0 H_x^2 - \frac{1}{2} \mu_0 H_z^2 \right) \hat{y} \quad \underline{\underline{\text{su } y = b}}$$

La densità superficiale di forza mediata in un periodo é:

$$\begin{aligned} \langle \vec{t} \rangle &= - \left(\frac{\epsilon_0}{2} \langle \Re(E_y) \cdot \Re(E_y) \rangle - \frac{1}{2} \mu_0 \langle \Re(H_x) \cdot \Re(H_x) \rangle - \frac{1}{2} \mu_0 \langle \Re(H_z) \cdot \Re(H_z) \rangle \right) \hat{y} = \\ &= - \left(\frac{\epsilon_0}{4} E_y \cdot E_y^* - \frac{1}{4} \mu_0 H_x \cdot H_x^* - \frac{1}{4} \mu_0 \langle H_z \cdot H_z^* \rangle \right) \hat{y} \quad \underline{\underline{\text{su } y = b}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{t} \rangle &= + \left(\frac{\epsilon_0}{2} \langle \Re(E_y) \cdot \Re(E_y) \rangle - \frac{1}{2} \mu_0 \langle \Re(H_x) \cdot \Re(H_x) \rangle - \frac{1}{2} \mu_0 \langle \Re(H_z) \cdot \Re(H_z) \rangle \right) \hat{y} = \\ &= + \left(\frac{\epsilon_0}{4} E_y \cdot E_y^* - \frac{1}{4} \mu_0 H_x \cdot H_x^* - \frac{1}{4} \mu_0 \langle H_z \cdot H_z^* \rangle \right) \hat{y} \quad \underline{\underline{\text{su } y = 0}} \end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni dei campi si ha:

Su $y = b$

$$\langle \vec{t} \rangle = - \left\{ + \frac{\epsilon_0}{4} \frac{\omega^2 \mu_0^2}{h_{10}^2} A^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} - \frac{1}{4} \mu_0 \frac{\beta_{10}^2}{h_{10}^2} A^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} - \frac{1}{4} \mu_0 A^2 \cos^2 \frac{\pi x}{a} \right\} \hat{y}$$

Tenendo conto che:

$$\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 = h_{10}^2 + \beta_{10}^2$$

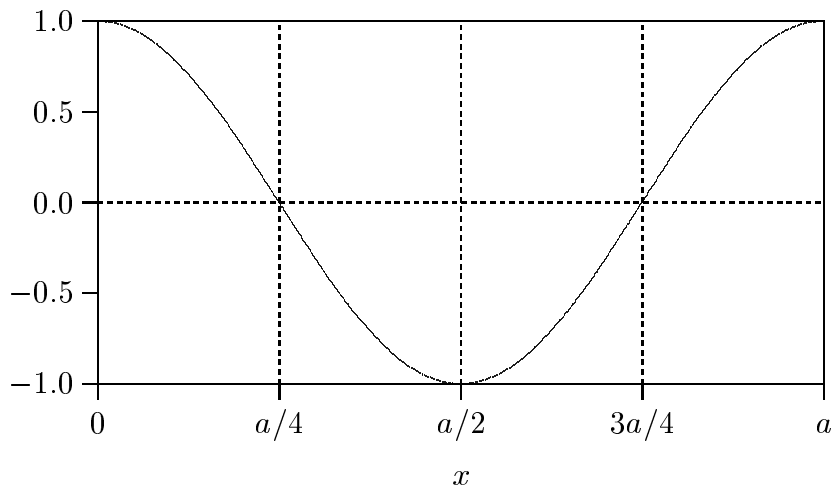
si ha:

$$\langle \vec{t} \rangle = - \frac{1}{4} \mu_0 \left\{ A^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} - A^2 \cos^2 \frac{\pi x}{a} \right\} \hat{y} = + \frac{1}{4} \mu_0 A^2 \left(\cos 2 \frac{\pi x}{a} \right) \hat{y}$$

Su $y = 0$

$$\langle \vec{t} \rangle = + \frac{1}{4} \mu_0 \left\{ A^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} - A^2 \cos^2 \frac{\pi x}{a} \right\} \hat{y} = - \frac{1}{4} \mu_0 A^2 \left(\cos 2 \frac{\pi x}{a} \right) \hat{y}$$

Grafico della funzione $\cos 2 \frac{\pi x}{a}$



Per $0 < x < a/4$ e $3a/4 < x < a$ la forza é repulsiva, per $a/4 < x < 3a/4$ la forza é attrattiva.

La forza, mediata in un periodo, che si esercita su una superficie dS di ciascuna parete é:

$$d^2\langle\vec{F}\rangle = \langle\vec{t}\rangle dS = \langle\vec{t}\rangle dx dz$$

ossia la forza per unità di lunghezza della guida é:

$$\frac{d\langle\vec{F}\rangle}{dz} = \int_0^a \langle\vec{t}\rangle dx = 0$$

05-15) Esercizio n. 3 del 29/6/2005

Sia dato un sistema binomiale di antenne costituito da sette antenne a mezz'onda parallele equidistanziate $d = \lambda/2$, orientate lungo l'asse z di un sistema di riferimento ed i cui centri siano disposti lungo l'asse x . Graficare il diagramma di radiazione nel piano $\theta = 90^\circ$ e nel piano $\phi = 0^\circ$. Calcolare la larghezza a metà altezza del lobo principale irradiato.

Dalla teoria dei sistemi di antenne a mezz'onda parallele si ha che il vettore di Poynting risulta:

$$S_r = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{8\pi^2 r^2} |F(\theta)A(\theta, \phi)|^2$$

essendo:

$$F(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \quad e \quad A(\theta, \phi) = \sum_{p=0}^{n-1} A_p e^{-ikx_p \sin\theta \cos\phi}$$

$F(\theta)$ é il fattore di forma di ciascun dipolo come se fosse solo nello spazio, $A(\theta, \phi)$ rappresenta il fattore di forma di tutto il sistema e prende il nome di array factor.

Il diagramma di radiazione di tutto il sistema é quindi rappresentato dalla funzione:

$$U(\theta, \phi) = |F(\theta)A(\theta, \phi)|^2 = |F(\theta)|^2 |A(\theta, \phi)|^2$$

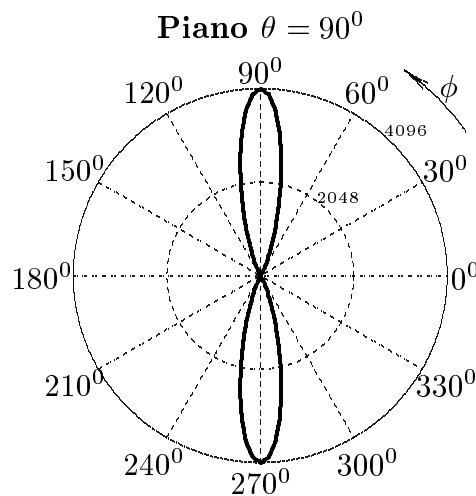
Nel caso di un sistema binomiale di antenne a mezz'onda risulta:

$$|A(\theta, \phi)| = 2^{n-1} \left| \cos^{n-1} \left[\frac{(kd \cos\psi + \gamma)}{2} \right] \right|$$

Grafichiamo la funzione $U(\pi/2, \phi)$ per $\gamma = 0$ e $kd = \pi$, ossia:

$$U(\pi/2, \phi) = 2^{2n-2} \left| \cos^{n-1} \left[\frac{(\pi \cos\phi)}{2} \right] \right|^2$$

essendo $F(\pi/2) = 1$.



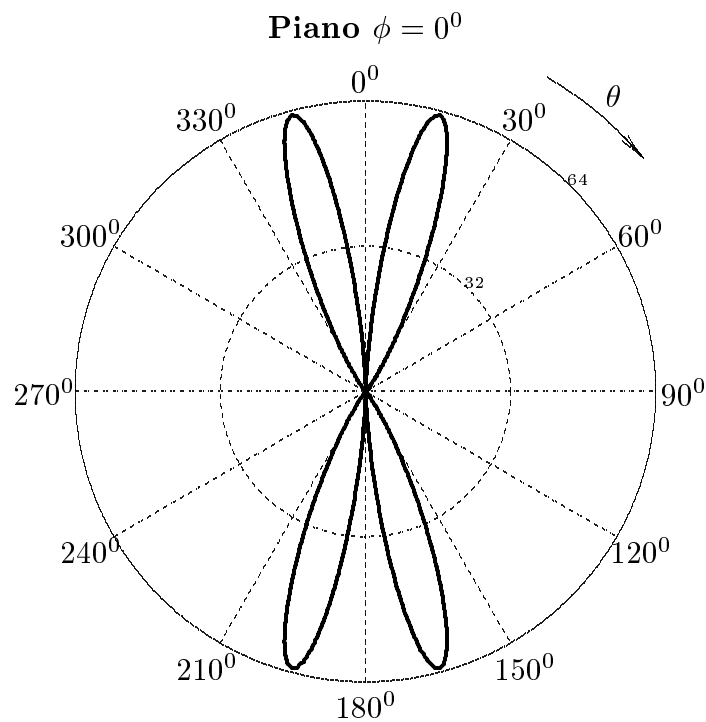
Per valutare l'ampiezza del lobo a metà altezza, riportiamo alcuni valori intorno alla direzione di massima ampiezza $\phi = 90^\circ$.

ϕ	90°	$87^\circ.5$	85°	$82^\circ.5$	80°	$77^\circ.5$
$U(\pi/2, \phi)$	4096	3982	3659	3177	2606	2019

Pertanto la larghezza del lobo a metà altezza é circa $2 \cdot (90^\circ - 77^\circ.5) = 25^\circ$

Grafichiamo, ora, la funzione $U(\theta, 0)$ per $\gamma = 0$ e $kd = \pi$, ossia:

$$U(\theta, 0) = 2^{2n-2} \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right|^2 \left| \cos^{n-1} \left[\frac{(\pi \sin \theta)}{2} \right] \right|^2$$



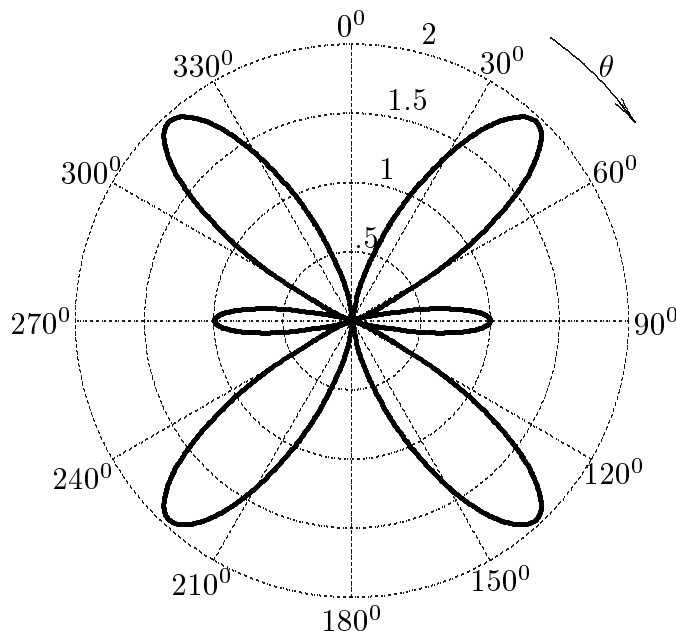
Il valore massimo dei lobi (secondari) é circa 63.09.

05-16) Esercizio n. 4 del 29/6/2005

Sia data un'antenna rettilinea di lunghezza $2l = \frac{3}{2}\lambda$. Calcolare la frazione della potenza totale irradiata contenuta nel lobo centrato a $\theta = 90^\circ$.

Per un'antenna rettilinea lunga $2l = \frac{3}{2}\lambda$ uno dei lobi secondari é orientato a $\theta = 90^\circ$ (vedi Appunti di Campi elettromagnetici).

Antenna rettilinea: $kl = \frac{3}{2}\pi$



Siano $\theta_1 = 70^\circ.5$ e $\theta_2 = 109^\circ.5$ gli angoli di zero del lobo centrato a 90° (come si deduce dal libro di teoria). Risulta $\cos \theta_1 = -\cos \theta_2$. La potenza irradiata in questo lobo é data da:

$$2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{8\pi^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{[\cos(kl \cos \theta) - \cos(kl)]^2}{\sin \theta} d\theta$$

Poniamo $u = kl \cos \theta$; i limite di integrazione sono:

$$u_1 = kl \cos \theta_1 \text{ per } \theta = \theta_1, \quad \text{e} \quad u_2 = kl \cos \theta_2 = -kl \cos \theta_1 \text{ per } \theta = \theta_2$$

Ne segue:

$$P_{\text{lobo}} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{8\pi^2} \int_{-kl \cos \theta_1}^{+kl \cos \theta_1} (\cos u - \cos kl)^2 \frac{du}{kl - u}$$

Poniamo $v = kl - u$

$$P_{lobo} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{8\pi^2} \int_{kl(1-\cos\theta_1)}^{kl(1+\cos\theta_1)} [\cos(kl - v) - \cos kl]^2 \frac{dv}{v}$$

In definitiva:

$$\begin{aligned} P_{lobo} = & 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{8\pi^2} \left\{ \int_{kl(1-\cos\theta_1)}^{kl(1+\cos\theta_1)} \frac{1 - \cos v}{v} dv + \int_{kl(1-\cos\theta_1)}^{kl(1+\cos\theta_1)} \cos 2kl \left(\frac{1 - \cos v}{v} \right) dv - \right. \\ & - \int_{kl(1-\cos\theta_1)}^{kl(1+\cos\theta_1)} \frac{\cos 2kl}{2} \left(\frac{1 - \cos 2v}{v} \right) dv - \int_{kl(1-\cos\theta_1)}^{kl(1+\cos\theta_1)} \sin 2kl \frac{\sin v}{v} dv + \\ & \left. + \int_{kl(1-\cos\theta_1)}^{kl(1+\cos\theta_1)} \frac{\sin 2kl}{2} \frac{\sin 2v}{v} dv \right\} \end{aligned}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \int_{kl(1-\cos\theta_1)}^{kl(1+\cos\theta_1)} \frac{1 - \cos v}{v} dv &= \int_0^{kl(1+\cos\theta_1)} \frac{1 - \cos v}{v} dv - \int_0^{kl(1-\cos\theta_1)} \frac{1 - \cos v}{v} dv \\ \int_{kl(1-\cos\theta_1)}^{kl(1+\cos\theta_1)} \frac{1 - \cos 2v}{v} dv &= \int_0^{kl(1+\cos\theta_1)} \frac{1 - \cos 2v}{v} dv - \int_0^{kl(1-\cos\theta_1)} \frac{1 - \cos 2v}{v} dv \\ \int_{kl(1-\cos\theta_1)}^{kl(1+\cos\theta_1)} \frac{\sin v}{v} dv &= \int_0^{kl(1+\cos\theta_1)} \frac{\sin v}{v} dv - \int_0^{kl(1-\cos\theta_1)} \frac{\sin v}{v} dv \\ \int_{kl(1-\cos\theta_1)}^{kl(1+\cos\theta_1)} \frac{\sin 2v}{v} dv &= \int_0^{kl(1+\cos\theta_1)} \frac{\sin 2v}{v} dv - \int_0^{kl(1-\cos\theta_1)} \frac{\sin 2v}{v} dv \end{aligned}$$

In definitiva, si può scrivere:

$$P_{lobo} = P_1 - P_2$$

$$\begin{aligned} P_1 = & \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{4\pi} \left\{ Cin[kl(1 + \cos\theta_1)] + \frac{\sin 2kl}{2} \{ Si[2kl(1 + \cos\theta_1)] - 2Si[kl(1 + \cos\theta_1)] \} \right\} + \\ & + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{4\pi} \left\{ \frac{\cos 2kl}{2} \{ -Cin[2kl(1 + \cos\theta_1)] + 2Cin[kl(1 + \cos\theta_1)] \} \right\} \\ P_2 = & \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{4\pi} \left\{ Cin[kl(1 - \cos\theta_1)] + \frac{\sin 2kl}{2} \{ Si[2kl(1 - \cos\theta_1)] - 2Si[kl(1 - \cos\theta_1)] \} \right\} + \\ & + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{4\pi} \left\{ \frac{\cos 2kl}{2} \{ -Cin[2kl(1 - \cos\theta_1)] + 2Cin[kl(1 - \cos\theta_1)] \} \right\} \end{aligned}$$

Si ha:

$$kl = \frac{3}{2}\pi; \quad \sin 2kl = 3\pi = 0; \quad \cos 2kl = \cos 3\pi = -1$$

Le formule diventano:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{4\pi} \left\{ Cin[kl(1 + \cos \theta_1)] \right\} + \\
 &+ \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \{-Cin[2kl(1 + \cos \theta_1)] + 2Cin[kl(1 + \cos \theta_1)]\} \right\} = \\
 &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2} Cin[2kl(1 + \cos \theta_1)] \right\} \\
 P_2 &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{4\pi} \left\{ Cin[kl(1 - \cos \theta_1)] \right\} + \\
 &+ \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \{-Cin[2kl(1 - \cos \theta_1)] + 2Cin[kl(1 - \cos \theta_1)]\} \right\} = \\
 &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2} Cin[2kl(1 - \cos \theta_1)] \right\}
 \end{aligned}$$

Si ha, inoltre:

$$1 + \cos \theta_1 \simeq 1.3338; \quad 1 - \cos \theta_1 \simeq 0.6662$$

ossia:

$$\begin{aligned}
 kl(1 + \cos \theta_1) &\simeq \frac{3}{2} \cdot 1.3338 \cdot \pi = 2.0007 \cdot \pi \\
 kl(1 - \cos \theta_1) &\simeq \frac{3}{2} \cdot 0.6662 \cdot \pi = 0.9993 \cdot \pi
 \end{aligned}$$

Dalle tavole, si ha:

$$\begin{aligned}
 Cin[2kl(1 - \cos \theta_1)] &= Cin(2 \cdot 0.9993 \cdot \pi) \simeq 2.4376 \\
 Cin[2kl(1 + \cos \theta_1)] &= Cin(2 \cdot 2.0007 \cdot \pi) \simeq 3.1143
 \end{aligned}$$

Per cui:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{8\pi} 3.1143 \\
 P_2 &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{8\pi} 2.4376 \\
 P_{loto} &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{8\pi} (3.1143 - 2.4376) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{8\pi} \cdot 0.6767
 \end{aligned}$$

La potenza totale irradiata é:

$$\begin{aligned}
 P_{totale} &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{8\pi} Cin(4kl) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{8\pi} Cin(6\pi) \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{8\pi} \cdot 3.5165 \\
 \frac{P_{loto}}{P_{totale}} &= \frac{0.6767}{3.5165} = \underline{\underline{0.192 = 19.2\%}}
 \end{aligned}$$

05-17) Esercizio n. 1 del 22/7/2005

Si abbia un'antenna rettilinea (conduttore perfetto) lunga $2l$ posta in un plasma omogeneo e senza collisioni. Determinare le espressioni del campo elettrico, del campo magnetico e del vettore di Poynting della radiazione far field emessa dall'antenna. Se l'antenna é lunga $2l = \frac{\lambda_0}{2}$ (λ_0 é la lunghezza d'onda relativa al vuoto), $\nu_p = 0.5 \cdot 10^9 \text{ Hz}$ e $\nu = 1 \cdot 10^9 \text{ Hz}$, graficare il diagramma di radiazione dell'antenna nel plasma e quello relativo alla stessa antenna nel vuoto (nella stessa carta polare), nell'ipotesi che in entrambe l'ampiezza massima della corrente sia la stessa.

La teoria di base della radiazione emessa dall'antenna in un mezzo dielettrico omogeneo ed isotropo é stata svolta negli Appunti di Campi elettromagnetici. Tutto quello che dobbiamo fare é di sostituire al posto di ϵ la quantità $\epsilon_0(1 - X)$ ed al posto di k la quantità $\frac{\omega}{c}\sqrt{1 - X}$, essendo $X = \omega_p^2/\omega^2$.

Tuttavia poiché le espressioni del campo irradiato sono valide solo nella far zone, dobbiamo essere certi di non violare la condizione $\frac{\omega}{c}\sqrt{1 - X}r \gg 1$. Chiaramente questa condizione può essere soddisfatta per $0 \leq X < 1$ rendendo r , che é la distanza dal centro dell'antenna al punto di osservazione, sufficientemente grande; ma per $X = 1$ (risonanza di plasma) la condizione é violata. Tuttavia, per $X = 1$ si ha il cutoff, ossia nessuna onda si può propagare nel plasma, e la potenza che alimenta l'antenna si trasforma in calore all'interno del plasma.

Poniamo l'antenna lungo l'asse z di un sistema di riferimento cartesiano con un capo dell'antenna a $z = -l$ e l'altro capo a $z = +l$. Le componenti del campo far field, in coordinate sferiche, irradiato dall'antenna immersa in un plasma omogeneo ed isotropo sono, allora:

$$E_\theta = -i \frac{1}{\sqrt{1 - X}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{e^{i(\omega/c)\sqrt{1 - X}r}}{2\pi r} I_0(X) F(\theta, X) \quad (1)$$

$$H_\phi = -i \frac{e^{i(\omega/c)\sqrt{1 - X}r}}{2\pi r} I_0(X) F(\theta, X) \quad (2)$$

e la componente radiale del vettore di Poynting mediato in un periodo nella far zone é:

$$S_r = \frac{1}{\sqrt{1 - X}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2(X)}{8\pi^2 r^2} F^2(\theta, X) \quad (3)$$

Il fattore di forma del pattern di radiazione é dato da:

$$F(\theta, X) = \frac{\cos [(\omega/c)\sqrt{1 - X}l \cos \theta] - \cos [(\omega/c)\sqrt{1 - X}l]}{\sin \theta} \quad (4)$$

Per $X = 0$, ossia per $\nu_p = 0$, le espressioni dei campi e del vettore di Poynting coincidono con quelle competenti all'antenna in aria. Grafichiamo allora la funzione:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - X}} F^2(\theta, X)$$

per $X = 0$ e per $X = \left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2 = (0.5)^2 = 0.25$.

Nel nostro caso si ha:

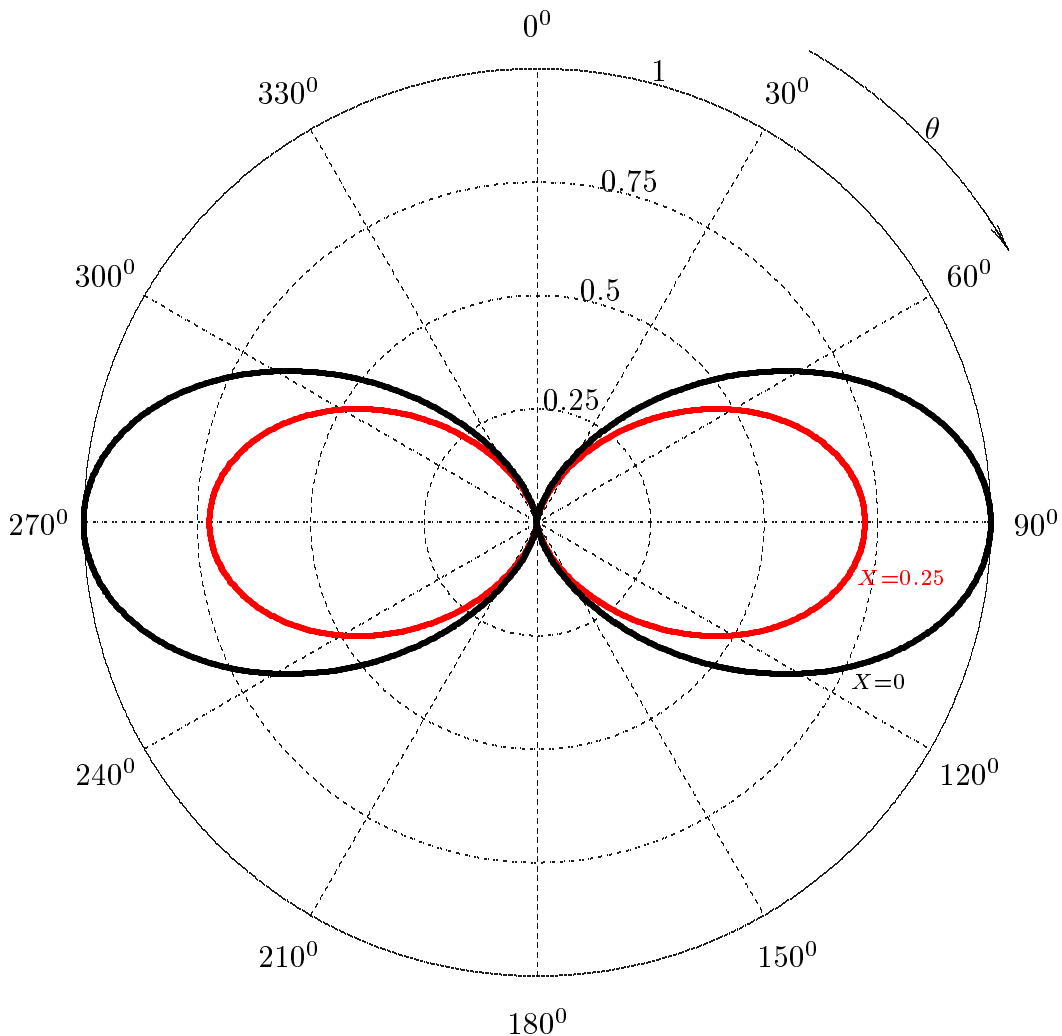
$$\frac{\omega}{c}\sqrt{1-X}l = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{1-X}\frac{\lambda_0}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{1-X} \simeq 0.433\pi$$

Quindi l'equazione (4) si scrive:

$$F(\theta, X) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1-X}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1-X}\right)}{\sin\theta} \quad (5)$$

La funzione da graficare é, allora:

$$F(\theta, X) = \frac{1}{\sqrt{1-X}} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1-X}\cos\theta\right) - \cos\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{1-X}\right]}{\sin\theta} \right]^2 \quad (6)$$



Il valore massimo per $X = 0.25$ é 0.72266.

05-18) Esercizio n. 2 del 22/7/2005

Con riferimento al problema precedente, calcolare il rapporto fra la potenza di alimentazione dell'antenna posta nel plasma e quella relativa all'antenna posta nel vuoto affinché il valore della corrente ai terminali delle due antenne sia lo stesso.

La corrente I_0 nel punto di alimentazione dipende dalla potenza reale, mediata in un periodo, P_i immessa nei terminali d'ingresso dell'antenna e dai parametri X che completamente descrive il plasma in cui l'antenna irradia; notiamo che poiché il plasma è assunto essere senza perdite, la potenza mediata in un periodo P irradiata dall'antenna deve essere eguale a P_i . L'espressione di P , come sappiamo è:

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (1)$$

ed eguagliando P a P_i , troviamo la relazione fra I_0 e P_i :

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{1-X}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2(X)}{4\pi} \int_0^\pi F^2(\theta, X) \sin \theta d\theta \quad (2)$$

ossia:

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{1-X}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2(X)}{4\pi} \left\{ C_{in} \left(2\frac{\omega}{c} \sqrt{1-X}l \right) + \frac{\sin \left(2\frac{\omega}{c} \sqrt{1-X}l \right)}{2} \left[S_i \left(4\frac{\omega}{c} \sqrt{1-X} \right) - 2S_i \left(2\frac{\omega}{c} \sqrt{1-X} \right) \right] + \frac{\cos \left(2\frac{\omega}{c} \sqrt{1-X}l \right)}{2} \left[-C_{in} \left(4\frac{\omega}{c} \sqrt{1-X}l \right) + 2C_{in} \left(2\frac{\omega}{c} \sqrt{1-X}l \right) \right] \right\}$$

Si ha:

$$2\frac{\omega}{c} \sqrt{1-X}l = 2\frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{1-X} \frac{\lambda_0}{4} = 2 \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{1-X} \right) = \pi \sqrt{1-X} \simeq 0.866\pi$$

$$2\frac{\omega}{c} \sqrt{1-X}l = 0.866\pi \implies S_i(0.866\pi) \simeq 1.8170 \implies C_{in}(0.866\pi) \simeq 1.3638$$

$$4\frac{\omega}{c} \sqrt{1-X}l = 1.732\pi \implies S_i(1.732\pi) \simeq 1.4781 \implies C_{in}(1.732\pi) \simeq 2.4191$$

$$\frac{\sin \left(2\frac{\omega}{c} \sqrt{1-X}l \right)}{2} = \frac{\sin(0.866\pi)}{2} \simeq 0.2043$$

$$\frac{\cos\left(2\frac{\omega}{c}\sqrt{1-X}l\right)}{2} = \frac{\cos(0.866\pi)}{2} \simeq -0.4563$$

Ne segue che:

$$\begin{aligned} P_{i_{plasma}} &= \frac{1}{\sqrt{1-X}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2(X)}{4\pi} \left\{ 1.3638 + 0.2043 [1.4781 - 2 \cdot 1.8179] - \right. \\ &\quad \left. -0.4563 [-2.4191 + 2 \cdot 1.3638] \right\} \simeq \frac{1}{\sqrt{1-X}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2(X)}{4\pi} \cdot 0.7822 \simeq \\ &\simeq \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2(0.25)}{4\pi} \cdot 0.9032 \end{aligned}$$

Nel caso di antenna a mezz'onda nel vuoto risulta (vedi Appunti di Campi elettromagnetici):

$$P_{i_{vuoto}} \simeq \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0^2}{4\pi} \cdot 1.22$$

Quindi affinché in un'antenna posta in un plasma possa essere sostenuta la stessa ampiezza massima di corrente occorre che essa sia alimentata con una potenza più piccola.

Ossia:

$$P_{i_{plasma}} = P_{i_{vuoto}} \cdot \frac{0.9032}{1.22} \simeq 0.74 P_{i_{vuoto}}$$

In termini di resistenza di radiazione si ha:

$$R_{a_{plasma}} = \frac{2P_{i_{plasma}}}{I_0^2(0.25)} = 2\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{0.9032}{4\pi} \simeq 54.19 \Omega$$

$$R_{a_{vuoto}} = \frac{2P_{i_{vuoto}}}{I_0^2} = 2\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1.22}{4\pi} \simeq 73.20 \Omega$$

$$\frac{P_{i_{plasma}}}{P_{i_{vuoto}}} = \frac{R_{a_{plasma}}}{R_{a_{vuoto}}} = 0.74$$

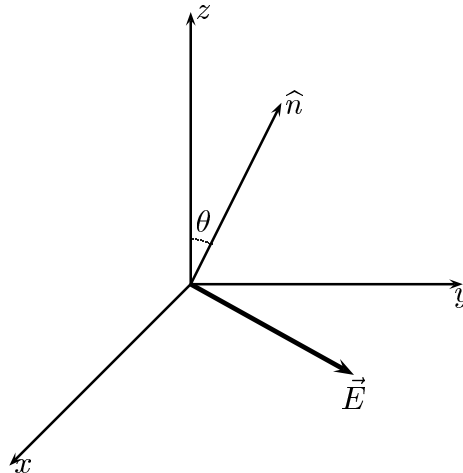
05-19) Esercizio n. 3 del 22/7/2005

Un mezzo dielettrico anisotropo é caratterizzato dal seguente tensore dielettrico:

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}' & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy}' & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{yy}' \end{pmatrix}$$

Determinare esplicitamente, ossia mediante applicazione diretta delle equazioni di Maxwell, l'espressione dell'indice di rifrazione relativo all'onda ordinaria e quella relativo all'onda straordinaria in funzione dell'angolo θ che la direzione di propagazione forma con l'asse z di un sistema di riferimento.

Consideriamo il seguente sistema di riferimento:



Come risulta dalla teoria, nel caso di matrice diagonale, le equazioni per le ampiezze dei campi sono:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{xx}'}{\epsilon_0}\right) E_{0x} &= 0 \\ \left(\cos^2 \theta - \frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{yy}'}{\epsilon_0}\right) E_{0y} + (-\cos \theta \sin \theta) E_{0z} &= 0 \\ (-\cos \theta \sin \theta) E_{0y} + \left(\sin^2 \theta - \frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{zz}'}{\epsilon_0}\right) E_{0z} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Dalla seconda e terza equazione possiamo ricavare la relazione di dispersione ossia dobbiamo imporre che il determinante dei coefficienti sia nullo affinché il sistema delle due equazioni ammetta soluzioni diverse da quella banale.

$$\left(\cos^2 \theta - \frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{yy}'}{\epsilon_0}\right) \left(\sin^2 \theta - \frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{zz}'}{\epsilon_0}\right) - \sin^2 \theta \cos^2 \theta = 0$$

ossia:

$$-\frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{zz}'}{\epsilon_0} \cos^2 \theta - \frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{yy}'}{\epsilon_0} \sin^2 \theta + \frac{v^4}{c^4} \frac{\epsilon_{yy}'}{\epsilon_0} \frac{\epsilon_{zz}'}{\epsilon_0} = 0$$

$$-\frac{\epsilon_{zz}'}{\epsilon_0} \cos^2 \theta - \frac{\epsilon_{yy}'}{\epsilon_0} \sin^2 \theta + \frac{v^2}{c^2} \frac{\epsilon_{yy}'}{\epsilon_0} \frac{\epsilon_{zz}'}{\epsilon_0} = 0$$

da cui:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\frac{\epsilon_{zz}'}{\epsilon_0} \cos^2 \theta + \frac{\epsilon_{yy}'}{\epsilon_0} \sin^2 \theta}{\frac{\epsilon_{yy}'}{\epsilon_0} \frac{\epsilon_{zz}'}{\epsilon_0}}$$

che si può ancora scrivere:

$$\frac{v^2}{c^2} = \epsilon_0 \frac{\epsilon_{zz}' \cos^2 \theta + \epsilon_{yy}' \sin^2 \theta}{\epsilon_{yy}' \epsilon_{zz}'}$$

ossia:

$$n_e^2 = \frac{\epsilon_{yy}' \epsilon_{zz}'}{\epsilon_0 (\epsilon_{zz}' \cos^2 \theta + \epsilon_{yy}' \sin^2 \theta)}$$

a cui corrisponde la costante di propagazione straordinaria, così chiamata perché dipende dalla direzione di propagazione:

$$k_e^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = \frac{\omega^2}{c^2 \epsilon_0} \frac{\epsilon_{yy}' \epsilon_{zz}'}{\epsilon_{zz}' \cos^2 \theta + \epsilon_{yy}' \sin^2 \theta}$$

Dalla prima equazione si ha:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{xx}'}$$

ossia:

$$n_o^2 = \frac{\epsilon_{xx}'}{\epsilon_0}$$

a cui corrisponde la costante di propagazione ordinaria:

$$k_o^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = \frac{\omega^2}{c^2 \epsilon_0} \epsilon_{xx}'$$

dove gli indici *e* ed *o* indicano rispettivamente l'onda straordinaria (extraordinary) e l'onda ordinaria (ordinary).

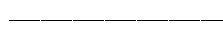
05-20) Esercizio n. 4 del 22/7/2005

Il coefficiente di assorbimento in potenza 2α dell'acqua raggiunge un minimo nella regione dello spettro visibile. Misure recenti del coefficiente di assorbimento hanno dato i seguenti risultati:

- a) $2\alpha = 0.01 \text{ Np/m}$ alla lunghezza d'onda di 380 nm (violetto)
- b) $2\alpha = 0.0044 \text{ Np/m}$ alla lunghezza d'onda di 418 nm (blu)
- c) $2\alpha = 0.5 \text{ Np/m}$ alla lunghezza d'onda di 600 nm (rosso)

Determinare la profondità di penetrazione (in metri) per ciascuna delle tre lunghezze d'onda.

Determinare la profondità in metri alla quale l'intensità della luce (la densità di potenza) si riduce ad $1/10$ e ad $1/100$ del suo valore alla superficie interna dell'acqua per ciascuna delle tre lunghezze d'onda.



La profondità di penetrazione è la distanza percorsa dall'onda elettromagnetica per cui l'ampiezza del campo elettrico si riduca a $1/e$ del suo valore iniziale. Risulta:

$$\delta = \frac{1}{\alpha}$$

Per i tre casi si ha:

- a) $\delta = \frac{2}{0.01} = \underline{200 \text{ m}}$, alla lunghezza d'onda di 380 nm (violetto).
- b) $\delta = \frac{2}{0.0044} = \underline{454.5454\dots \text{ m}}$, alla lunghezza d'onda di 418 nm (blu).
- c) $\delta = \frac{2}{0.5} = \underline{4 \text{ m}}$, alla lunghezza d'onda di 600 nm (rosso).

La componente blu dello spettro penetra maggiormente in acqua.

Si ha:

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} = e^{-2\alpha z}$$

Si ha:

$$e^{-2\alpha z^*} = \frac{1}{10} \implies -2\alpha z^* = -\ln 10$$

ossia:

$$z^* = \frac{\ln 10}{2\alpha} = \frac{2.3}{2\alpha} \begin{cases} \underline{230 \text{ m}} & \text{per } \lambda = 380 \text{ nm (violetto)} \\ \underline{522.72 \text{ m}} & \text{per } \lambda = 418 \text{ nm (blu)} \\ \underline{4.6 \text{ m}} & \text{per } \lambda = 600 \text{ nm (rosso)} \end{cases}$$

Si ha:

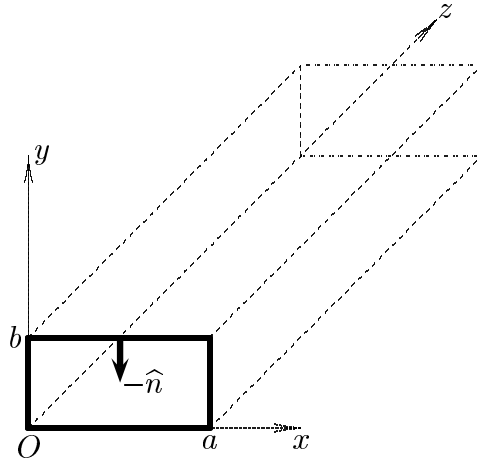
$$e^{-2\alpha z^{**}} = \frac{1}{100} \implies -2\alpha z^{**} = -2 \ln 10$$

ossia:

$$z^{**} = \frac{2 \ln 10}{2\alpha} = 2 \frac{2.3}{2\alpha} \begin{cases} \underline{460 \text{ m}} & \text{per } \lambda = 380 \text{ nm (violetto)} \\ \underline{1045.44 \text{ m}} & \text{per } \lambda = 418 \text{ nm (blu)} \\ \underline{9.2 \text{ m}} & \text{per } \lambda = 600 \text{ nm (rosso)} \end{cases}$$

05-21) Esercizio n. 1 del 23/9/2005

Si abbia una guida d'onda rettangolare vuota di dimensioni $a = 2.5 \text{ cm}$ e $b = 1.25 \text{ cm}$. Essa é eccitata nel modo TE_{10} ad una frequenza $f = 10 \text{ GHz}$. Sapendo che l'intensità massima della corrente che scorre sulla parete larga lungo la direzione longitudinale é 1 A , calcolare la potenza convogliata in guida.



Il campo elettromagnetico all'interno di una guida rettangolare eccitata nel modo TE_{10} é dato in componenti:

$$\begin{aligned}
 E_x &= 0 \\
 E_y &= -\frac{i\omega\mu a}{\pi} A \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} e^{i\omega t} \\
 E_z &= 0 \\
 H_x &= \frac{i\beta a}{\pi} A \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} e^{i\omega t} \\
 H_y &= 0 \\
 H_z &= A \cos \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} e^{i\omega t}
 \end{aligned}$$

La densità di corrente nel caso dei modi TE (vedi Appunti di Campi elettromagnetici) é:

$$\vec{J}_S = \vec{H}_{tan} \times \hat{n} = \vec{H}_t \times \hat{n} + H_z \hat{z} \times \hat{n}$$

dove \hat{n} é il versore normale alla parete della guida verso l'interno del conduttore.

Consideriamo la parete superiore: $\hat{n} = \hat{y}$

$$\vec{J}_S = \vec{H}_{tan} \times \hat{y} = \vec{H}_t \times \hat{y} + H_z \hat{z} \times \hat{y}$$

ossia:

$$\vec{J}_S = H_x \hat{x} \times \hat{y} + H_z \hat{z} \times \hat{y} = \frac{i\beta a}{\pi} A \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} e^{i\omega t} \hat{x} \times \hat{y} + A \cos \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} e^{i\omega t} \hat{z} \times \hat{y}$$

Si ha:

$$\hat{x} \times \hat{y} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{z}$$

$$\hat{z} \times \hat{y} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{x}$$

Pertanto la componente longitudinale della densità di corrente é:

$$J_z = \frac{i\beta a}{\pi} A \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} e^{i\omega t}$$

La corrente che scorre sulla parete larga é:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{z} d^2r = \int_S J_z \delta(y-b) dx dy = \int_S \frac{i\beta a}{\pi} A \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} e^{i\omega t} \delta(y-b) dx dy =$$

$$= \frac{i\beta a}{\pi} A e^{-i\beta z} e^{i\omega t} \int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} dx = \frac{i\beta a}{\pi} A e^{i\omega t} e^{-i\beta z} \frac{2a}{\pi}$$

L'intensità massima della corrente é allora:

$$I_{max} = \frac{2\beta a^2}{\pi^2} A$$

da cui:

$$A = \frac{\pi^2}{2\beta a^2} I_{max}$$

La potenza convogliata in guida nel modo TE_{10} é:

$$P_{TE_{10}} = A^2 \frac{\omega\mu \sqrt{\omega^2\epsilon\mu - h_{10}^2}}{4h_{10}^2} ab$$

Sostituendo l'espressione di A in quella di $P_{TE_{10}}$, tenendo conto che $h_{10}^2 = \frac{\pi^2}{a^2}$ e che $b = \frac{a}{2}$, si ha:

$$P_{TE_{10}} = \frac{\pi^2}{4\beta^2 a^2} \frac{\omega\mu \sqrt{\omega^2\epsilon\mu - h_{10}^2}}{4} ab I_{max}^2 = \frac{\pi^2 \omega\mu b}{16\beta a} I_{max}^2 = \frac{\pi^2 \omega\mu}{32\beta} I_{max}^2$$

Poiché:

$$\beta = \sqrt{\omega^2\epsilon\mu - h^2} = \sqrt{4\pi^2 \cdot (10^{10})^2 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} - \frac{\pi^2}{(2.5 \cdot 10^{-2})^2}} \simeq 168 \text{ rad/m}$$

Ne segue:

$$P_{TE_{10}} = \frac{\pi^2 \omega\mu}{32\beta} I_{max}^2 \simeq \frac{\pi^2 \cdot 2\pi \cdot 10^{10} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{32 \cdot 168} \simeq \underline{\underline{145 \text{ W}}}$$

essendo $I_{max} = 1 \text{ A}$.

05-22) Esercizio n. 2 del 23/9/2005

Si abbia una ferrite magnetizzata ($\epsilon_r = 15$) la cui magnetizzazione di saturazione é $M_0 = 1.59 \cdot 10^5 \text{ A/m}$ in corrispondenza di $H_0 = 3 \cdot 10^4 \text{ A/m}$. Calcolare la velocità di fase e quella di gruppo dell'onda polarizzata circolarmente destra e dell'onda polarizzata circolarmente sinistra, per $\lambda_0 = 3 \text{ cm}$. Si ponga $\gamma_e = -\left|\frac{e}{m}\right|$.

(vedi es. n.2 del 20/7/2001)

Si ha:

$$\omega_0 = -\gamma_e \mu_0 H_0 \simeq 6.62 \cdot 10^9 \text{ rad/s} \quad e \quad \omega_m = -\gamma_e \mu_0 M_0 \simeq 3.51 \cdot 10^{10} \text{ rad/s}$$

Le due costanti di propagazione sono:

$$k_+^2 = \omega^2 \epsilon \mu_{xx} + i \omega^2 \epsilon \mu_{xy} = \omega^2 \epsilon \mu^+$$

$$k_-^2 = \omega^2 \epsilon \mu_{xx} - i \omega^2 \epsilon \mu_{xy} = \omega^2 \epsilon \mu^-$$

essendo:

$$\begin{cases} \mu^+ = (\mu_{xx} + i \mu_{xy}) = \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_0 \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\omega \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 - \omega} \right) \\ \mu^- = (\mu_{xx} - i \mu_{xy}) = \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_0 \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} - \frac{\omega \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 + \omega} \right) \end{cases}$$

La velocità di fase é:

$$v_f^+ = \frac{\omega}{\beta^+} = \frac{\omega}{k^+} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\epsilon \mu^+}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 - \omega} \right)}} \simeq \underline{\underline{1.27 \cdot 10^8 \text{ m/s}}}$$

$$v_f^- = \frac{\omega}{\beta^-} = \frac{\omega}{k^-} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\epsilon \mu^-}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 + \omega} \right)}} \simeq \underline{\underline{6.31 \cdot 10^7 \text{ m/s}}}$$

$$v_g^+ = \frac{d\omega}{dk^+} = \frac{1}{\frac{dk^+}{d\omega}}$$

$$v_g^- = \frac{d\omega}{dk^-} = \frac{1}{\frac{dk^-}{d\omega}}$$

L'invertibilità delle derivate é autorizzata dalla monotonicità delle funzioni k^+ e k^- .

$$\begin{aligned} \frac{dk^+}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega} \left[\omega \sqrt{\epsilon\mu_0 \left(1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 - \omega} \right)} \right] = \sqrt{\epsilon\mu_0 \left(1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 - \omega} \right)} + \\ &+ \frac{\omega}{2\sqrt{\epsilon\mu_0 \left(1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 - \omega} \right)}} \cdot \frac{\epsilon\mu_0\omega_m}{(\omega_0 - \omega)^2} = \\ &= \frac{2\epsilon\mu_0 \left(1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 - \omega} \right) + \frac{\epsilon\mu_0\omega\omega_m}{(\omega_0 - \omega)^2}}{2\sqrt{\epsilon\mu_0 \left(1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 - \omega} \right)}} \simeq 1.5272 \cdot 10^{-8} \text{ s/m} \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} \frac{dk^-}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega} \left[\omega \sqrt{\epsilon\mu_0 \left(1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 + \omega} \right)} \right] = \sqrt{\epsilon\mu_0 \left(1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 + \omega} \right)} + \\ &+ \frac{\omega}{2\sqrt{\epsilon\mu_0 \left(1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 + \omega} \right)}} \cdot \left[-\frac{\epsilon\mu_0\omega_m}{(\omega_0 + \omega)^2} \right] = \\ &= \frac{2\epsilon\mu_0 \left(1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 + \omega} \right) - \frac{\epsilon\mu_0\omega\omega_m}{(\omega_0 + \omega)^2}}{2\sqrt{\epsilon\mu_0 \left(1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 + \omega} \right)}} \simeq 1.344 \cdot 10^{-8} \text{ s/m} \end{aligned}$$

Quindi:

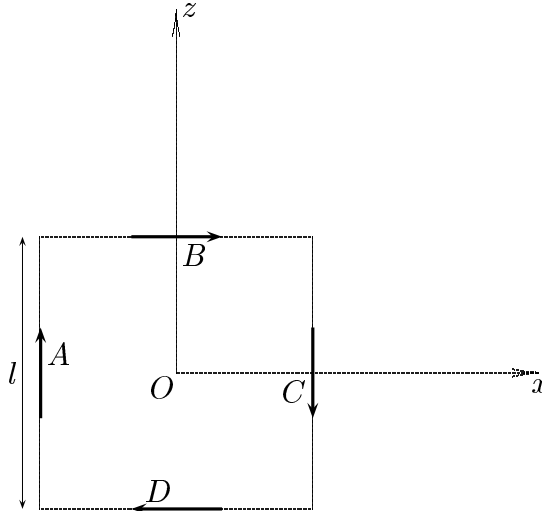
$$v_g^+ \simeq \underline{\underline{6.55 \cdot 10^7 \text{ m/s}}}$$

$$v_g^- \simeq \underline{\underline{7.44 \cdot 10^7 \text{ m/s}}}$$

05-23) Esercizio n. 3 del 23/9/2005

Si consideri una piccola spira quadrata. Essa si può modellizzare come un sistema costituito da quattro dipoli hertziani posti sui lati della spira. Dimostrare che il diagramma di radiazione far field, nel piano della spira, è una circonferenza.

(vedi es. n.3 del 12/11/2004)



La densità di corrente totale che scorre nel sistema di antenne è:

$$\vec{J}_T = \vec{J}_A + \vec{J}_B + \vec{J}_C + \vec{J}_D$$

Risulta:

$$\vec{J}_A = +\hat{z}J_0\delta(x + l/2)\delta(y)$$

$$\vec{J}_B = +\hat{x}J_0\delta(z - l/2)\delta(y)$$

$$\vec{J}_C = -\hat{z}J_0\delta(x - l/2)\delta(y)$$

$$\vec{J}_D = -\hat{x}J_0\delta(z + l/2)\delta(y)$$

per $-l/2 \leq x \leq +l/2$ e $-l/2 \leq z \leq +l/2$.

Il vettore di radiazione è:

$$\begin{aligned} \vec{N}(\theta, \phi) &= \int e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}'} J(\vec{r}') d^3r' = \\ &= \hat{z}J_0 \int e^{-ik(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi + z' \cos \theta)} [\delta(x' + l/2)\delta(y') - \\ &\quad - \delta(x' - l/2)\delta(y')] dx' dy' dz' + \\ &+ \hat{x}J_0 \int e^{-ik(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi + z' \cos \theta)} [\delta(z' - l/2)\delta(y') - \\ &\quad - \delta(z' + l/2)\delta(y')] dx' dy' dz' \end{aligned}$$

Quindi, si ha:

$$\begin{aligned}
 \vec{N}(\theta, \phi) &= \int e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}'} J(\vec{r}') d^3r' = \\
 &= \hat{z} J_0 e^{-ik \left(-\frac{l}{2} \sin \theta \cos \phi \right)} \int_{-l/2}^{+l/2} e^{-ikz' \cos \theta} dz' - \\
 &\quad - \hat{z} J_0 e^{-ik \left(+\frac{l}{2} \sin \theta \cos \phi \right)} \int_{-l/2}^{+l/2} e^{-ikz' \cos \theta} dz' + \\
 &\quad + \hat{x} J_0 e^{-ik \left(+\frac{l}{2} \cos \theta \right)} \int_{-l/2}^{+l/2} e^{-ikx' \sin \theta \cos \phi} dx' - \\
 &\quad - \hat{x} J_0 e^{-ik \left(-\frac{l}{2} \cos \theta \right)} \int_{-l/2}^{+l/2} e^{-ikx' \sin \theta \cos \phi} dx'
 \end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}
 \vec{N}(\theta, \phi) &= \int e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}'} J(\vec{r}') d^3r' = \\
 &= \hat{z} J_0 2i \sin \left(\frac{kl}{2} \sin \theta \cos \phi \right) \int_{-l/2}^{+l/2} e^{-ikz' \cos \theta} dz' - \\
 &\quad - \hat{x} J_0 2i \sin \left(\frac{kl}{2} \cos \theta \right) \int_{-l/2}^{+l/2} e^{-ikx' \sin \theta \cos \phi} dx'
 \end{aligned}$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}
 \vec{N}(\theta, \phi) &= \int e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}'} J(\vec{r}') d^3r' = \\
 &= \hat{z} J_0 2i \sin \left(\frac{kl}{2} \sin \theta \cos \phi \right) \frac{1}{-ik \cos \theta} \left[-2i \sin \left(\frac{kl}{2} \cos \theta \right) \right] - \\
 &\quad - \hat{x} J_0 2i \sin \left(\frac{kl}{2} \cos \theta \right) \frac{1}{-ik \sin \theta \cos \phi} \left[-2i \sin \left(\frac{kl}{2} \sin \theta \cos \phi \right) \right]
 \end{aligned}$$

Tenendo conto che:

$$\begin{aligned}
 \hat{x} &= \hat{e}_r \sin \theta \cos \phi + \hat{e}_\theta \cos \theta \cos \phi - \hat{e}_\phi \sin \phi \\
 \hat{z} &= \hat{e}_r \cos \theta - \hat{e}_\theta \sin \theta
 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
 N_\theta(\theta, \phi) &= - J_0 2i \sin \left(\frac{kl}{2} \sin \theta \cos \phi \right) \frac{1}{k \cos \theta} 2 \sin \left(\frac{kl}{2} \cos \theta \right) \sin \theta - \\
 &\quad - J_0 2i \sin \left(\frac{kl}{2} \cos \theta \right) \frac{1}{k \sin \theta \cos \phi} 2 \sin \left(\frac{kl}{2} \sin \theta \cos \phi \right) \cos \theta \cos \phi \\
 N_\phi(\theta, \phi) &= + J_0 2i \sin \left(\frac{kl}{2} \cos \theta \right) \frac{1}{k \sin \theta \cos \phi} 2 \sin \left(\frac{kl}{2} \sin \theta \cos \phi \right) \sin \phi
 \end{aligned}$$

Nel piano $\phi = 0$ si ha:

$$N_{\theta}(\theta, \phi) = -J_0 2i \sin\left(\frac{kl}{2} \sin \theta\right) \frac{1}{k \cos \theta} 2 \sin\left(\frac{kl}{2} \cos \theta\right) \sin \theta -$$

$$- J_0 2i \sin\left(\frac{kl}{2} \cos \theta\right) \frac{1}{k \sin \theta} 2 \sin\left(\frac{kl}{2} \sin \theta\right) \cos \theta$$

$$N_{\phi}(\theta, \phi) = 0$$

ossia:

$$N_{\theta}(\theta, \phi) = -\frac{i}{k} J_0 4 \sin\left(\frac{kl}{2} \sin \theta\right) \sin\left(\frac{kl}{2} \cos \theta\right) \left[\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right]$$

$$N_{\phi}(\theta, \phi) = 0$$

che si può ancora scrivere:

$$N_{\theta}(\theta, \phi) = -\frac{i}{k} J_0 4 \frac{\sin\left(\frac{kl}{2} \sin \theta\right) \sin\left(\frac{kl}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$N_{\phi}(\theta, \phi) = 0$$

Il vettore di Poynting far field, mediato in un periodo, é:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r} \right)^2 (|N_{\theta}|^2 + |N_{\phi}|^2) \hat{e}_r$$

ossia:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{1}{\pi r} \right)^2 J_0^2 \left| \frac{\sin\left(\frac{kl}{2} \sin \theta\right) \sin\left(\frac{kl}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta \cos \theta} \right|^2 \hat{e}_r$$

Il grafico del fattore di forma

$$F(\theta) = \left| \frac{\sin\left(\frac{kl}{2} \sin \theta\right) \sin\left(\frac{kl}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta \cos \theta} \right|^2$$

mostra una circonferenza, per piccoli valori di kl (in pratica fino a circa $kl = 1.5$).

Infatti, in approssimazione di dipolo hertziano $kl \ll 1$ e, quindi, $\sin\left(\frac{kl}{2} \sin \theta\right) \simeq \frac{kl}{2} \sin \theta$ e $\sin\left(\frac{kl}{2} \cos \theta\right) \simeq \frac{kl}{2} \cos \theta$; conseguentemente:

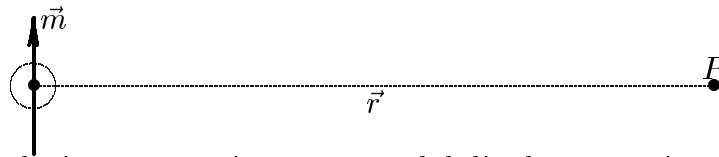
$$F(\theta)_{(kl \ll 1)} \simeq \frac{k^2 l^2}{4}$$

Pertanto la densità di potenza non dipende da θ e quindi il diagramma di radiazione é una circonferenza.

05-24) Esercizio n. 4 del 23/9/2005

Il campo di induzione magnetica generato dalla Terra, a grandi distanze, segue la legge dell'inverso del cubo della distanza. Il campo può, quindi, essere descritto in termini di dipolo magnetico posto al centro della Terra. Se il modulo del campo ad una distanza di 15 raggi terrestri sul piano equatoriale è di $10^{-4} G$, calcolare il modulo del momento di dipolo magnetico della Terra. (Il raggio della Terra è $\simeq 6400 Km$).

Sia \vec{m} il momento di dipolo magnetico della Terra.



Il campo di induzione magnetica generato dal dipolo magnetico di momento \vec{m} è:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right]$$

Nel punto P che si trova nel piano equatoriale si ha $\vec{m} \cdot \vec{r} = 0$ e, quindi:

$$\vec{B}_{equatoriale} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}}{r^3}$$

Il modulo di \vec{m} è, quindi:

$$\begin{aligned} m &= \frac{4\pi r^3 B_{equatoriale}}{\mu_0} = \frac{4\pi (15R_T)^3 \cdot 10^{-8}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 0.1 \cdot (15R_T)^3 = 0.1 \cdot (15 \cdot 6400 \cdot 10^3)^3 = \\ &= \underline{\underline{8.847 \cdot 10^{22} (A \cdot m^2)}} \end{aligned}$$

05-25) Esercizio n. 1 del 19/11/2005

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 650 \text{ MHz}$ si propaga in acqua marina di parametri costitutivi $\epsilon_r \simeq 81$, $\mu_r \simeq 1$ e $\sigma \simeq 3 \text{ S/m}$. Si calcolino la velocità di fase e quella di gruppo.

Si abbia un'onda elettromagnetica piana che si propaga in un mezzo conduttore infinitamente esteso. Si ha:

$$\frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \simeq 1.05$$

Pertanto:

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} \right]} \simeq 135.18 \text{ rad/m}$$

La velocità di fase é:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \simeq \underline{\underline{3.02 \cdot 10^7 \text{ m/s}}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{d\omega} &= \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} \right]} + \omega \frac{1}{2 \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} \right]}} \frac{\mu\epsilon}{2} \frac{1}{2 \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}}} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \left(\frac{-2}{\omega^3} \right) = \\ &= \frac{2 \frac{\mu\epsilon}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} \right] \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} - \frac{\mu\epsilon}{2} \left(\frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)}{2 \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} \right]} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}}} = \\ &= \frac{2 \frac{\mu\epsilon}{2} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} + 2 \frac{\mu\epsilon}{2} + 2 \frac{\mu\epsilon}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} - \frac{\mu\epsilon}{2} \left(\frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)}{2 \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} \right]} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}}} = \\ &= \frac{2 \frac{\mu\epsilon}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} \right] + \frac{\mu\epsilon}{2} \left(\frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)}{2 \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} \right]} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}}} = \frac{2 \frac{\beta^2}{\omega^2} + \frac{\mu\epsilon}{2} \left(\frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)}{2 \frac{\beta}{\omega} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}}} \end{aligned}$$

La velocità di gruppo é:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$$

Poiché β é una funzione crescente con la frequenza, possiamo scrivere:

$$v_g = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}}$$

Pertanto:

$$v_g = \frac{2\frac{\beta}{\omega} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}}}{2\frac{\beta^2}{\omega^2} + \frac{\mu\epsilon}{2} \left(\frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)} \simeq \underline{\underline{3.56 \cdot 10^7 \text{ m/s}}}$$

05-26) Esercizio n. 2 del 19/11/2005

Una linea di trasmissione a lastre piane e parallele, separate da una distanza $d = 1 \text{ cm}$, é riempita di teflon la cui costante dielettrica relativa é $\epsilon_r = 2.1$. Determinare la massima frequenza operativa al di sotto della quale si possa propagare soltanto il modo TEM . Calcolare, altresí, il range di frequenze all'interno del quale si possano propagare i modi TE_1 e TM_1 e nessun altro modo superiore. Si consideri, ora, una frequenza operativa $\nu = 25 \text{ GHz}$. Si calcoli il ritardo temporale fra i modi TE_1 e TE_2 sulla distanza di 1 cm .

La frequenza di cutoff dei modi superiori in strutture a lastre piane e parallele é:

$$\nu_c = \frac{pc/n}{2d}$$

essendo $n = \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{2.1} = 1.45$. I primi modi superiori al modo TEM che si propagano nella guida sono i modi con $p = 1$, ossia i modi TE_1 e TM_1 che hanno la stessa frequenza di cutoff:

$$\nu_{c_{TE_1}} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 1.45 \cdot 10^{-2}} = \underline{\underline{10.34 \cdot 10^9 \text{ Hz}}}$$

che é la massima frequenza al di sotto della quale si puó propagare soltanto il modo TEM .

La frequenza di cutoff per i modi TE_2 e TM_2 é:

$$\nu_{c_{TE_2}} = \underline{\underline{20.68 \cdot 10^9 \text{ Hz}}}$$

Quindi il range di frequenze all'interno del quale si possano propagare i modi TE_1 e TM_1 e nessun altro modo superiore é:

$$10.34 \text{ GHz} < \nu_{op} < 20.68 \text{ GHz}$$

Il tempo impiegato dal modo TE_1 a percorrere la distanza di $l = 1 \text{ cm}$ é:

$$\tau_1 = \frac{l}{v_{g_1}}$$

Il tempo impiegato dal modo TE_2 a percorrere la distanza di $l = 1 \text{ cm}$ é:

$$\tau_2 = \frac{l}{v_{g_2}}$$

essendo v_{g_1} e v_{g_2} le velocità di gruppo competenti ai due modi TE_1 e TE_2 rispettivamente.

La velocità di gruppo di un'onda che si propaga all'interno di una struttura guidante a lastre piane e parallele é:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}}$$

La seconda eguaglianza si può scrivere in quanto la funzione $\beta(\omega)$ è una funzione monotona di ω .

Si ha:

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - h^2} = \sqrt{\frac{\omega^2 n^2}{c^2} - \frac{\omega_c^2 n^2}{c^2}} = \frac{n}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}$$

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{n}{c} \frac{2\omega}{2\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$$

Ne segue:

$$v_g = \frac{c}{n} \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$$

Calcoliamo il rapporto $\frac{\omega_c^2}{\omega^2}$ relativo ai due modi TE_1 e TE_2 per la frequenza operativa di 25 GHz

Si ha:

$$\frac{(10.34)^2}{(25)^2} = 0.171 \quad \text{per il modo } TE_1$$

$$\frac{(20.68)^2}{(25)^2} = 0.684 \quad \text{per il modo } TE_2$$

$$v_{g1} = \frac{c}{n} \sqrt{1 - 0.171} = 0.91 \frac{c}{n}$$

$$v_{g2} = \frac{c}{n} \sqrt{1 - 0.684} = 0.56 \frac{c}{n}$$

$$\Delta\tau = \frac{l}{v_{g1}} - \frac{l}{v_{g2}} = \frac{n}{c} \left(\frac{10^{-2}}{0.91} - \frac{10^{-2}}{0.56} \right) = \frac{n}{c} (-6.87 \cdot 10^{-3}) = \underline{\underline{-3.32 \cdot 10^{-11} \text{ s}}}$$

Il modo TE_2 è più lento.

05-27) Esercizio n. 3 del 19/11/2005

Si consideri una spira circolare di rame di 1 m di diametro e di spessore 10 mm. Sapendo che la conducibilità del rame è $\sigma = 5.7 \cdot 10^7 \text{ S/m}$, si calcoli l'efficienza di radiazione della spira nel caso in cui la frequenza di eccitazione è: a) $\nu = 1 \text{ MHz}$ e b) $\nu = 10 \text{ MHz}$.

Le lunghezze d'onda, relative al vuoto, corrispondenti alle due frequenze operative sono rispettivamente:

$$\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = 300 \text{ m}, \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{c}{\nu_2} = 30 \text{ m}$$

Pertanto risulta:

$$a = \frac{d}{2} = 0.5 \text{ m} \ll \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases}$$

e, quindi, la corrente sulla spira si può ritenere spazialmente uniforme.

In questo caso l'efficienza di radiazione della spira si scrive (vedi Appunti di Campi elettromagnetici):

$$k = \frac{P_r}{P_r + P_L} = \frac{R_r}{R_r + R_L}$$

La potenza totale irradiata dalla spira è (vedi esercizio n. 1 del 4/10/2000):

$$P_r = Z \frac{I^2 \pi^5}{12} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^4$$

e, quindi la resistenza di radiazione R_r è:

$$R_r = \frac{2P_r}{I^2}$$

ossia:

$$R_r = Z \frac{\pi^5}{6} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^4 \simeq \frac{1.92 \cdot 10^4}{\lambda^4} \simeq \begin{cases} 2.37 \cdot 10^{-6} \text{ Ohm} & \text{per } \nu = 1 \text{ MHz} \\ 2.37 \cdot 10^{-2} \text{ Ohm} & \text{per } \nu = 10 \text{ MHz} \end{cases}$$

Per calcolare la potenza dissipata per effetto Joule dobbiamo calcolare la profondità di penetrazione del campo elettromagnetico nel rame alle frequenze date dal problema.

$$\begin{aligned} \delta &= \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} = \sqrt{\frac{2}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5.7 \cdot 10^7 \cdot 2\pi \cdot \nu}} \simeq \frac{6.67 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{\nu}} \simeq \\ &\simeq \begin{cases} 6.67 \cdot 10^{-5} \text{ m} & \text{per } \nu = 1 \text{ MHz} \\ 2.11 \cdot 10^{-5} \text{ m} & \text{per } \nu = 10 \text{ MHz} \end{cases} \end{aligned}$$

La resistenza R_L si calcola:

$$R_L = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S}$$

essendo $l = \pi d = \pi m$ la circonferenza della spira ed S l'area della corona circolare di spessore δ . Tenendo conto che $\delta \ll d$, possiamo scrivere $S = 2\pi r\delta$, essendo $r = 5 \text{ mm}$ il raggio della sezione circolare della spira.

Ne segue:

$$R_L = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{2r\delta} \simeq \frac{1.75 \cdot 10^{-6}}{\delta} \simeq \begin{cases} 2.63 \cdot 10^{-2} \text{ Ohm} & \text{per } \nu = 1 \text{ MHz} \\ 8.31 \cdot 10^{-2} \text{ Ohm} & \text{per } \nu = 10 \text{ MHz} \end{cases}$$

L'efficienza di radiazione é allora:

$$k \simeq \begin{cases} \underline{\underline{9 \cdot 10^{-5}}} & \text{per } \nu = 1 \text{ MHz} \\ \underline{\underline{0.22}} & \text{per } \nu = 10 \text{ MHz} \end{cases}$$

05-28) Esercizio n. 4 del 19/11/2005

Sia dato un sistema di riferimento $Oxyz$. Un aeroplano viaggia con velocità $v = 800 \text{ Km/h}$ nella direzione del verso positivo dell'asse x in una zona in cui il campo magnetico terrestre è dato da: $\vec{B} = (B_0 \sin 30^0)\hat{x} - (B_0 \cos 30^0)\hat{y}$ con $B_0 = 0.4 \text{ Gauss}$. Calcolare il modulo, la direzione ed il verso del campo elettrico esistente in un sistema di riferimento solidale con l'aeroplano. Se l'apertura alare è di 10 m , calcolare la f.e.m. fra le estremità delle ali.

Applichiamo le formule per la trasformazione dei campi in caso di moto lungo l'asse \vec{x} , per $E_x = E_y = E_z = 0$ e $B_x = B_0 \sin 30^0$, $B_y = -B_0 \cos 30^0$, $B_z = 0$ si ha:

$$E'_x = E_x ; \quad E'_y = \gamma(E_y - vB_z) ; \quad E'_z = \gamma(E_z + vB_y)$$

$$B'_x = B_x ; \quad B'_y = \gamma(B_y - \frac{v}{c^2}E_z) ; \quad B'_z = \gamma(B_z + \frac{v}{c^2}E_y)$$

Nel nostro caso:

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_x = 0 \\ E'_y = 0 \\ E'_z = \gamma v B_y \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma B_y \\ B'_z = 0 \end{array} \right.$$

$$v = 800 \text{ Km/h} = 2.2 \cdot 10^4 \text{ cm/s} = 2.2 \cdot 10^2 \text{ m/s}$$

Bisogna usare unità M.K.S., così

$$B_0 = 0.4 \text{ Gauss} = 0.4 \cdot 10^{-4} \text{ Wb/m}^2$$

Segue in definitiva:

$$\vec{E}'_z = -vB_0 \cos 30^0 \hat{z} = 2.2 \cdot 10^2 \cos 30^0 \cdot 0.4 \cdot 10^{-4} = \underline{\underline{7.62 \cdot 10^{-3} \text{ V/m}}}$$

La f.e.m. risulta

$$f.e.m. = 7.69 \cdot 10^{-3} \cdot 10 = \underline{\underline{76.9 \text{ mV}}}$$