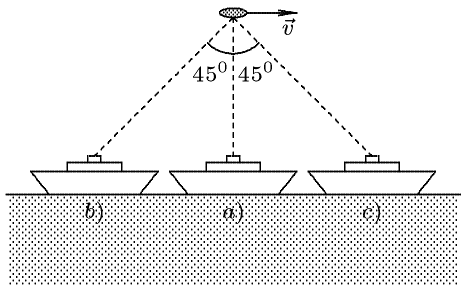
Esercizi svolti di Campi elettromagnetici - Anno 2002

02-1) Esercizio n. 1 del 1/2/2002

Un satellite che si muove con una velocitá $v = 28000\ Km/h$ rispetto al suolo emette un'onda elettromagnetica monocromatica di frequenza $\nu = 400\ MHz$ che viene ricevuta da una nave ferma. Calcolare la differenza in frequenza fra il segnale ricevuto dalla nave e quello emesso dal satellite nei tre casi di figura: a) satellite allo zenith; b) e c) direzione nave-satellite formante un angolo di 45^0 con la verticale. Si applichino le formule relativistiche.



———————

Nel caso di sorgente in moto e osservatore fermo la formula dell'effetto Doppler si scrive:

$$\omega = \gamma \left(\omega\,' + \vec{v} \cdot \vec{k}\,' \right)$$

essendo $\omega\,'$ la frequenza angolare emessa dalla sorgente in moto, ω la frequenza angolare rivelata dalla nave ferma e $k\,' = \omega\,' \sqrt{\epsilon\mu}$ il vettore d'onda del segnale emesso dal satellite.

Quindi, risulta:

$$\omega = \gamma \left(\omega\,' + v k\,' \cos\theta \right)$$

ossia:

$$\omega = \gamma \omega\,' \left(1 + \frac{v}{c} \cos\theta \right)$$

La velocitá del satellite é:

$$v = \frac{28 \cdot 10^6}{36 \cdot 10^3} = 7.78 \cdot 10^3\ m/s$$

Essendo $v^2 << c^2$, si ha:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

Ne segue:

$$\omega = \omega\,' \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta\right) = \omega\,' \left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{2}\frac{v^3}{c^3}\cos\theta\right)$$

Trascurando il termine $\dfrac{v^3}{c^3}\cos\theta$, possiamo scrivere:

$$\boxed{\omega - \omega\,' \simeq \omega\,' \left(\frac{v}{c}\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

Caso a) **Satellite allo zenith**: $\theta = 90^0$

$$\nu - \nu\,' \simeq \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\nu\,' = \frac{1}{2}\frac{60.5\cdot 10^6}{9\cdot 10^{16}}4\cdot 10^8 = \underline{\underline{13.44\cdot 10^{-2}\ Hz = 0.1344\ Hz}}$$

Caso b) **Satellite in allontanamento**: $\theta = 135^0$

$$\nu - \nu\,' \simeq \frac{v}{c}\nu\,'\cos 135^0 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\nu\,' = \frac{7.78\cdot 10^3}{3\cdot 10^8}(-0.707)4\cdot 10^8 + \frac{1}{2}\frac{60.5\cdot 10^6}{9\cdot 10^{16}}4\cdot 10^8 =$$
$$= -7.34\cdot 10^3 + 0.1344 = \underline{\underline{-7339.87\ Hz}}$$

Caso c) **Satellite in avvicinamento**: $\theta = 45^0$

$$\nu - \nu\,' \simeq \frac{v}{c}\nu\,'\cos 45^0 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\nu\,' = \frac{7.78\cdot 10^3}{3\cdot 10^8}(+0.707)4\cdot 10^8 + \frac{1}{2}\frac{60.5\cdot 10^6}{9\cdot 10^{16}}4\cdot 10^8 =$$
$$= +7.34\cdot 10^3 + 0.1344 = \underline{\underline{+7340.13\ Hz}}$$

02-2) Esercizio n. 2 del 1/2/2002

Si consideri una guida d'onda con pareti perfettamente conduttrici eccitata nel modo TE. Si determinino le espressioni delle densitá di energia elettrica e di energia magnetica immagazzinate in guida, mediate in un periodo. Si calcolino, quindi, l'energia elettrica e l'energia magnetica, mediate in un periodo, immagazzinate in una guida di lunghezza unitaria e verificarne l'eguaglianza.

————————

In generale, come sappiamo dalla teoria, le espressioni delle densitá di energia elettrica (mediata in un periodo) e magnetica (mediata in un periodo) sono rispettivamente:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4}\epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* \tag{1}$$

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4}\mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* \tag{2}$$

Consideriamo, adesso, una guida d'onda a pareti perfettamente conduttrici eccitata nel modo TE ($E_z = 0$). In tal caso le densitá di energia si scrivono:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4}\epsilon \vec{E}_t \cdot \vec{E}_t^* \tag{3}$$

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4}\mu \left(\vec{H}_t + H_z \widehat{z}\right) \cdot \left(\vec{H}_t^* + H_z^* \widehat{z}\right) = \frac{1}{4}\mu \left(\vec{H}_t \cdot \vec{H}_t^* + H_z H_z^*\right) \tag{4}$$

Poiché per i modi TE risulta:

$$\vec{E}_t = \frac{i\omega\mu}{h^2} \widehat{z} \times \vec{\nabla}_t H_z \tag{5}$$

$$\vec{H}_t = -\frac{i\beta}{h^2} \vec{\nabla}_t H_z \tag{6}$$

si ha:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4}\epsilon \frac{\omega^2\mu^2}{h^4} \left(\widehat{z} \times \vec{\nabla}_t H_z\right) \cdot \left(\widehat{z} \times \vec{\nabla}_t H_z^*\right) = \frac{1}{4}\epsilon \frac{\omega^2\mu^2}{h^4} \vec{\nabla}_t H_z \cdot \vec{\nabla}_t H_z^* \tag{7}$$

in quanto si é fatto uso dell'identitá vettoriale:

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \left(\vec{C} \times \vec{D}\right) = \left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) \left(\vec{B} \cdot \vec{D}\right) - \left(\vec{A} \cdot \vec{D}\right) \left(\vec{B} \cdot \vec{C}\right) \tag{8}$$

Analogamente:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4}\mu \frac{\beta^2}{h^4} \vec{\nabla}_t H_z \cdot \vec{\nabla}_t H_z^* + \frac{1}{4}\mu H_z H_z^* \tag{9}$$

L'energia immagazzinata in una guida di lunghezza unitaria é:

$$\frac{d\langle U\rangle}{dz} = \frac{1}{4}\epsilon\frac{\omega^2\mu^2}{h^4}\int_\sigma \vec{\nabla}_t H_z \cdot \vec{\nabla}_t H_z^* d\sigma \tag{10}$$

$$\frac{d\langle W\rangle}{dz} = \frac{1}{4}\mu\frac{\beta^2}{h^4}\int_\sigma \vec{\nabla}_t H_z \cdot \vec{\nabla}_t H_z^* d\sigma + \frac{1}{4}\mu\int_\sigma H_z H_z^* d\sigma \tag{11}$$

Poiché per un noto teorema sulla teoria della propagazioner guidata risulta, per guide con pareti perfettamente conduttrici:

$$\int_\sigma \vec{\nabla}_t H_z \cdot \vec{\nabla}_t H_z^* d\sigma = h^2\int_\sigma H_z H_z^* d\sigma \tag{12}$$

si ha:

$$\frac{d\langle U\rangle}{dz} = \frac{1}{4}\epsilon\frac{\omega^2\mu^2}{h^2}\int_\sigma H_z H_z^* d\sigma \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\langle W\rangle}{dz} &= \frac{1}{4}\mu\frac{\beta^2}{h^2}\int_\sigma H_z \cdot \vec{H}_z^* d\sigma + \frac{1}{4}\mu\int_\sigma H_z H_z^* d\sigma = \left[\frac{1}{4}\mu\frac{\omega^2\epsilon\mu - h^2}{h^2} + \frac{1}{4}\mu\right]\int_\sigma H_z H_z^* d\sigma = \\ &= \frac{1}{4}\epsilon\frac{\omega^2\mu^2}{h^2}\int_\sigma H_z H_z^* d\sigma\end{aligned} \tag{14}$$

Ne segue:

$$\boxed{\frac{d\langle U\rangle}{dz} = \frac{d\langle W\rangle}{dz}} \tag{15}$$

02-3) Esercizio n. 3 del 1/2/2002

Calcolare la potenza ohmica dissipata dalle seguenti antenne fatte di filo di rame AWG 20, di raggio $a = 4.06 \cdot 10^{-4}\ m$: a) antenna rettilinea lunga 2 m e operante alla frequenza di 1 MHz; b) antenna rettilinea lunga 1.5 m e operante alla frequenza di 100 MHz. Si assuma $\sigma = 5.7 \cdot 10^{7}\ S/m$.

———————

(vedi es. n. 3 del 27/11/1999 ed es. n. 2 del 5/10/2001)

Cominciamo con il calcolare la profonditá di penetrazione per le due antenne:

$$a) \quad \delta_{(a)} = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} = \sqrt{\frac{2}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5.7 \cdot 10^{7} \cdot 2\pi \cdot 10^{6}}} = 6.67 \cdot 10^{-5}\ m = 66.7\ \mu m$$

$$b) \quad \delta_{(b)} = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} = \sqrt{\frac{2}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5.7 \cdot 10^{7} \cdot 2\pi \cdot 10^{8}}} = 6.67 \cdot 10^{-6}\ m = 6.67\ \mu m$$

Indicando con L la lunghezza della singola antenna, si ha:

$$a) \quad L_{(a)} = 2\ m, \quad \lambda_{(a)} = \frac{c}{\nu_{(a)}} = \frac{3 \cdot 10^{8}}{10^{6}} = 300\ m \Longrightarrow \frac{L_{(a)}}{\lambda_{(a)}} = 6.67 \cdot 10^{-3}$$

$$b) \quad L_{(b)} = 1.5\ m, \quad \lambda_{(b)} = \frac{c}{\nu_{(b)}} = \frac{3 \cdot 10^{8}}{10^{8}} = 3\ m \Longrightarrow \frac{L_{(b)}}{\lambda_{(b)}} = 0.5$$

Ne segue che l'antenna a) puó paragonarsi ad un dipolo hertziano, mentre l'antenna b) é un dipolo a mezz'onda $\left(k\frac{L_{(b)}}{2} = \frac{\pi}{2}\right)$.

La potenza dissipata per effetto Joule é:

$$P_L = \frac{1}{2} R_0 \int |I(z')|^2 dz'$$

essendo R_0 la resistenza ohmica per unitá di lunghezza.

Per le due antenne, si ha:

$a)$ Trattandosi di dipolo hertziano $I(z') = I_0$ e quindi: $P_L = \frac{1}{2} R_0 L_{(a)} I_0^2$.

$$R_0 L_{(a)} = \rho \frac{L_{(a)}}{S} = \frac{1}{\sigma} \frac{2}{2\pi a \delta_{(a)}} = \frac{1}{5.7 \cdot 10^{7}} \frac{1}{2\pi \cdot 4.06 \cdot 10^{-4} \cdot 6.67 \cdot 10^{-5}} = 2.06 \cdot 10^{-1}\ Ohm$$

e, quindi:

$$\underline{\underline{P_{L_{(a)}} = 0.103 I_0^2\ \ W}}$$

b) Trattandosi di antenna a mezz'onda $I(z') = I_0 \sin\left[k\left(l - |z'|\right)\right]$ $\left(l = \dfrac{L_{(b)}}{2}\right)$ e quindi:
$P_L = \dfrac{1}{2} R_0 I_0^2 \displaystyle\int_{-l}^{+l} \sin^2\left[k\left(l - |z'|\right)\right] dz'$.

$$R_0 = \rho \frac{1}{S} = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{2\pi a \delta_{(b)}} = \frac{1}{5.7 \cdot 10^7} \frac{1}{2\pi \cdot 4.06 \cdot 10^{-4} \cdot 6.67 \cdot 10^{-6}} = 1.03\ Ohm/m$$

e, quindi:

$$\begin{aligned} P_L =& \frac{1}{2} R_0 I_0^2 \int_{-l}^{+l} \sin^2\left[\left(\frac{\pi}{2} - k|z'|\right)\right] dz' = \frac{1}{2} R_0 I_0^2 \int_{-l}^{+l} \cos^2\left(k|z'|\right) dz' = \\ =& \frac{1}{2} R_0 I_0^2 \int_{-l}^{+l} \frac{1 + \cos\left(2k|z'|\right)}{2} dz' = \frac{1}{2} R_0 I_0^2 l \left(1 + \frac{1}{2kl} \sin 2kl\right) \end{aligned}$$

Per $kl = \dfrac{\pi}{2}$, risulta:

$$P_L = \frac{1}{2} R_0 I_0^2 l = \frac{1}{2} R_0 I_0^2 \frac{L_{(b)}}{2} = \frac{1}{2} 1.03 \cdot 0.75 I_0^2$$

ossia:

$$\underline{\underline{P_{L_{(b)}} = 0.386 I_0^2\ \ W}}$$

02-4) Esercizio n. 4 del 1/2/2002

Con riferimento al problema precedente calcolare l'efficienza di radiazione delle due antenne.

———————

L'efficienza di un'antenna é:

$$k = \frac{P_r}{P_r + P_L}$$

essendo P_r la potenza totale irradiata dall'antenna e P_L la potenza dissipata per effetto Joule. Calcoliamo la potenza irradiata dalle due antenne:

a) Trattandosi di dipolo hertziano si ha:

$$R_a = \frac{Z\left(kL_{(a)}\right)^2}{6\pi} = \frac{Z 4\pi^2 \left(\frac{L_{(a)}}{\lambda}\right)^2}{6\pi} = Z\frac{2}{3}\pi\left(\frac{L_{(a)}}{\lambda}\right)^2 =$$

$$= 789.59 \cdot \left(6.67 \cdot 10^{-3}\right)^2 = 3.512 \cdot 10^{-2}\ Ohm$$

Quindi:

$$P_r = \frac{1}{2} R_a I_0^2 = \underline{\underline{1.76 \cdot 10^{-2} I_0^2\ \ W}}$$

b) Trattandosi di antenna a mezz'onda si ha:

$$R_a = 73.2\ Ohm$$

Quindi:

$$P_r = \frac{1}{2} R_a I_0^2 = \underline{\underline{36.6 I_0^2\ \ W}}$$

Conseguentemente l'efficienza di radiazione di ciascuna antenna é:

$$\boxed{k_{(a)} = \frac{1.76 \cdot 10^{-2}}{1.76 \cdot 10^{-2} + 0.103} = \underline{\underline{0.1459 = 14.59\%}}}$$

$$\boxed{k_{(b)} = \frac{36.6}{36.6 + 0.386} = \underline{\underline{0.9895 = 98.95\%}}}$$

02-5) Esercizio n. 1 del 22/2/2002

Si consideri un'onda elettromagnetica piana. Dimostrare esplicitamente che la densitá di energia elettrica mediata in un periodo é eguale alla densitá di energia magnetica mediata in un periodo.

———————

(vedi es. n. 2 del 1/2/2002)

In generale, come sappiamo dalla teoria, le espressioni delle densitá di energia elettrica (mediata in un periodo) e magnetica (mediata in un periodo) sono rispettivamente:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4}\epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^*$$

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4}\mu \vec{H} \cdot \vec{H}^*$$

Nel caso di onde elettromagnetiche piane, risulta:

$$\vec{H} = \frac{k}{\omega\mu}\widehat{n} \times \vec{E}$$

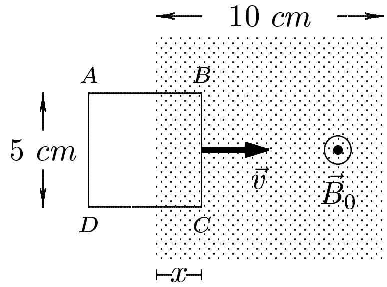
essendo $\widehat{n}$ il vettore unitario lungo la direzione di propagazione.

Pertanto:

$$\langle w \rangle = \frac{\mu}{4}|\vec{H}|^2 = \frac{\mu}{4}\frac{k^2}{\omega^2\mu^2}|\vec{E}|^2 = \frac{\mu}{4}\frac{\omega^2\epsilon\mu}{\omega^2\mu^2}|\vec{E}|^2 = \frac{\epsilon}{4}|\vec{E}|^2 = \langle u \rangle$$

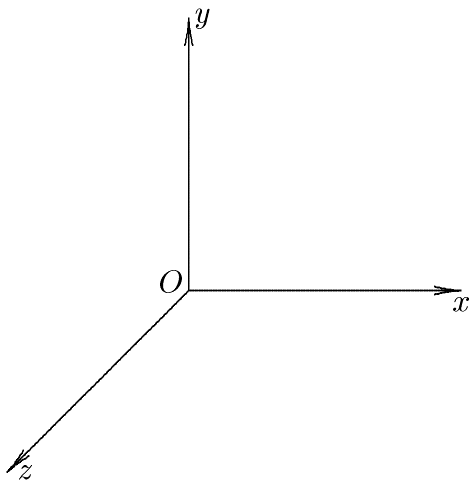
02-6) Esercizio n. 2 del 22/2/2002

Un campo di induzione magnetica uniforme con $B_0 = 1\ Wb/m^2$ é confinato in un'area di forma quadrata di lato 10 cm. Una spira quadrata di lato 5 cm si muove con una velocitá $v = 10\ cm \cdot s^{-1}$ come in figura.



Calcolare la f.e.m. indotta sulla spira e graficarne il valore in funzione della distanza x, per $0 \leq x \leq 15\ cm$.

———————



La spira si muova lungo l'asse x positivo ed il vettore induzione magnetica sia orientato lungo l'asse z positivo.

Applichiamo le leggi di trasformazione dei campi in caso di moto lungo l'asse x:

$$\begin{cases} E_x{}' = E_x \\ E_y{}' = \gamma\left[E_y - vB_z\right] \\ E_z{}' = \gamma\left[E_z + vB_y\right] \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x{}' = B_x \\ B_y{}' = \gamma\left[B_y + \dfrac{v}{c^2}E_z\right] \\ B_z{}' = \gamma\left[B_z - \dfrac{v}{c^2}E_y\right] \end{cases}$$

Pertanto, se S' é un sistema di riferimento solidale alla spira, ponendo $\gamma = 1$, si ha:

$$\begin{cases} E_x{}' = 0 \\ E_y{}' = -vB_z \\ E_z{}' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x{}' = 0 \\ B_y{}' = 0 \\ B_z{}' = B_z \end{cases}$$

Ossia il campo elettrico che agisce su ciascun punto della spira é:

$$\vec{E}\,' = -vB\widehat{y}$$

e, quindi, la f.e.m. indotta sulla spira é:

$$\epsilon\,' = -\oint_C Bv\widehat{y} \cdot d\vec{l}$$

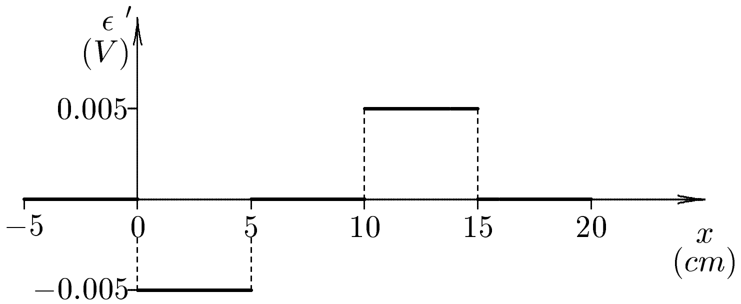
É chiaro, quindi, che il contributo all'integrale é dato soltanto dai lati orientati secondo la direzione $\widehat{y}$ (ossia la direzione ortogonale al vettore $\vec{v}$) e cioé dai lati $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$. Pertanto, risulta:

Per $x < 0 \Longrightarrow \epsilon\,' = 0$ essendo $\vec{B} = 0$

Per $0 \leq x \leq 5 \Longrightarrow \epsilon\,' = -Bv \cdot \overline{BC} = -0.005\ V$ in quanto il lato $\overline{AD}$ é fuori dalla zona del campo.

Per $10 \leq x \leq 15 \Longrightarrow \epsilon\,' = Bv \cdot \overline{AD} = 0.005\ V$ in quanto il lato interno alla zona del campo é $\overline{AD}$.

Il grafico di $\epsilon\,'$ in funzione di x é il seguente:



02-7) Esercizio n. 3 del 22/2/2002

Un array uniforme di due antenne a mezz'onda verticali é disposto con il suo asse orientato nella direzione est-ovest. Sia d la loro distanza e γ la differenza di fase fra le correnti. Determinare γ e d (in unitá di lunghezze d'onda) in modo tale che il diagramma di radiazione orizzontale abbia un massimo nella direzione est ed uno zero nella direzione $\phi = 120^0$ misurata dalla direzione est. Graficare il diagramma di radiazione.

———————

(vedi es. n. 4 del 26/1/2001)

L'array factor normalizzato di un sistema uniforme di due antenne a mezz'onda, per $\theta = 90^0$ ossia nel piano orizzontale, é:

$$K(\phi) = \frac{1}{2}\left|\frac{\sin(kd\cos\phi + \gamma)}{\sin[(kd\cos\phi + \gamma)/2]}\right|$$

che, in questo caso particolare, si puó scrivere:

$$K(\phi) = \frac{1}{2}\left|\frac{2\sin[(kd\cos\phi + \gamma)/2]\cos[(kd\cos\phi + \gamma)/2]}{\sin[(kd\cos\phi + \gamma)/2]}\right| =$$

$$= \left|\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\phi + \frac{\gamma}{2}\right)\right| = \left|\cos\left(\frac{\pi d}{\lambda}\cos\phi + \frac{\gamma}{2}\right)\right|$$

La condizione che l'array factor abbia un massimo nella direzione est ($\phi = 0^0$) é:

$$\frac{\pi d}{\lambda} + \frac{\gamma}{2} = 0 \quad ossia \quad \frac{d}{\lambda} = -\frac{\gamma}{2\pi} \tag{1}$$

La condizione che l'array factor abbia uno zero nella direzione $\phi = 120^0$ é:

$$\frac{\pi d}{\lambda}\cos 120^0 + \frac{\gamma}{2} = \pm\frac{\pi}{2} \quad ossia \quad -\frac{\pi d}{2\lambda} + \frac{\gamma}{2} = \pm\frac{\pi}{2} \tag{2}$$

Sostituendo nella (2) il valore $\frac{\gamma}{2}$ ricavato dalla (1), ossia:

$$\frac{\gamma}{2} = -\pi\frac{d}{\lambda} \tag{3}$$

si ha:

$$-\frac{\pi d}{2\lambda} - \frac{\pi d}{\lambda} = \pm\frac{\pi}{2} \qquad ossia \qquad \frac{d}{\lambda} = \frac{1}{3} \tag{4}$$

avendo scartato il valore $\frac{d}{\lambda}$ negativo.

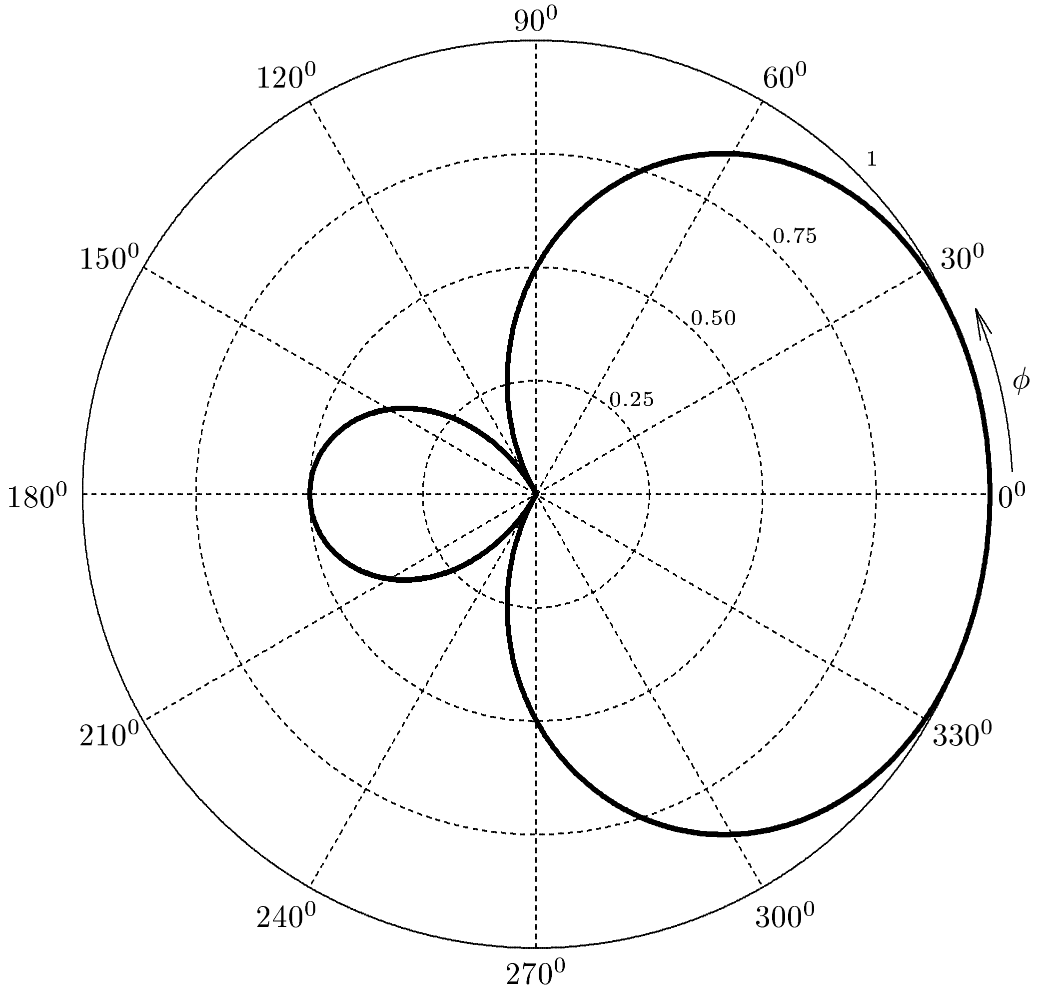
Sostituendo tale valore di $\frac{d}{\lambda}$ nella (1), risulta:

$$\gamma = -\frac{2\pi}{3} \tag{5}$$

La soluzione del problema é quindi:

$$\begin{cases} \gamma = -\dfrac{2\pi}{3} \\ \dfrac{d}{\lambda} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

ϕ	$K(\phi)$	ϕ	$K(\phi)$	ϕ	$K(\phi)$
0^0	1.0000	5^0	1.0000	10^0	0.9999
15^0	0.9994	20^0	0.9980	25^0	0.9952
30^0	0.9902	35^0	0.9821	40^0	0.9701
45^0	0.9533	50^0	0.9308	55^0	0.9019
60^0	0.8660	65^0	0.8227	70^0	0.7719
75^0	0.7136	80^0	0.6484	85^0	0.5769
90^0	0.5000	95^0	0.4190	100^0	0.3351
105^0	0.2499	110^0	0.1647	115^0	0.0809
120^0	0.0000	125^0	0.0770	130^0	0.1490
135^0	0.2152	140^0	0.2750	145^0	0.3280
150^0	0.3740	155^0	0.4128	160^0	0.4443
165^0	0.4688	170^0	0.4862	175^0	0.4965
180^0	0.5000	185^0	0.4965	190^0	0.4862
195^0	0.4688	200^0	0.4443	205^0	0.4128
210^0	0.3740	215^0	0.3280	220^0	0.2750
225^0	0.2152	230^0	0.1490	235^0	0.0770
240^0	0.0000	245^0	0.0809	250^0	0.1647
255^0	0.2499	260^0	0.3351	265^0	0.4190
270^0	0.5000	275^0	0.5769	280^0	0.6484
285^0	0.7136	290^0	0.7719	295^0	0.8227
300^0	0.8660	305^0	0.9019	310^0	0.9308
315^0	0.9533	320^0	0.9701	325^0	0.9821
330^0	0.9902	335^0	0.9952	340^0	0.9980
345^0	0.9994	350^0	0.9999	355^0	1.0000
360^0	1.0000				


90⁰
120⁰
60⁰
1
0.75
150⁰
30⁰
0.50
φ
0.25
180⁰
0⁰
210⁰
330⁰
240⁰
300⁰
270⁰

02-8) Esercizio n. 4 del 22/2/2002

Con riferimento al problema precedente determinare la condizione sulla distanza d in modo tale che il diagramma di radiazione orizzontale non si annulli mai per qualsiasi direzione mantenendo il massimo nella direzione est. Graficare il diagramma di radiazione per un valore d intermedio fra i valori trovati.

———————

Per continuare a mantenere il massimo nella direzione est, deve sempre essere:

$$\frac{d}{\lambda} = -\frac{\gamma}{2\pi} \tag{1}$$

La condizione che l'array factor abbia uno zero nella direzione ϕ é:

$$\frac{\pi d}{\lambda}\cos\phi + \frac{\gamma}{2} = -\frac{\pi}{2} \tag{2}$$

Sostituendo nella (2) il valore di $\frac{\gamma}{2}$ dato dalla (1), la (2) diventa:

$$\frac{\pi d}{\lambda}\cos\phi - \frac{\pi d}{\lambda} = -\frac{\pi}{2} \tag{3}$$

da cui:

$$\cos\phi = 1 - \frac{\lambda}{2d} \tag{4}$$

Dalla (4) si deduce che:

Per $\frac{\lambda}{d} > 4$ *ossia per* $\frac{d}{\lambda} < \frac{1}{4}$ *risulta* $|\cos\phi| > 1$ *e questo non é possibile per angoli reali.*

Non vi sará alcuna direzione nel diagramma di radiazione orizzontale in cui l'array factor si annulla se la distanza fra le antenne é minore di un quarto di lunghezza d'onda.

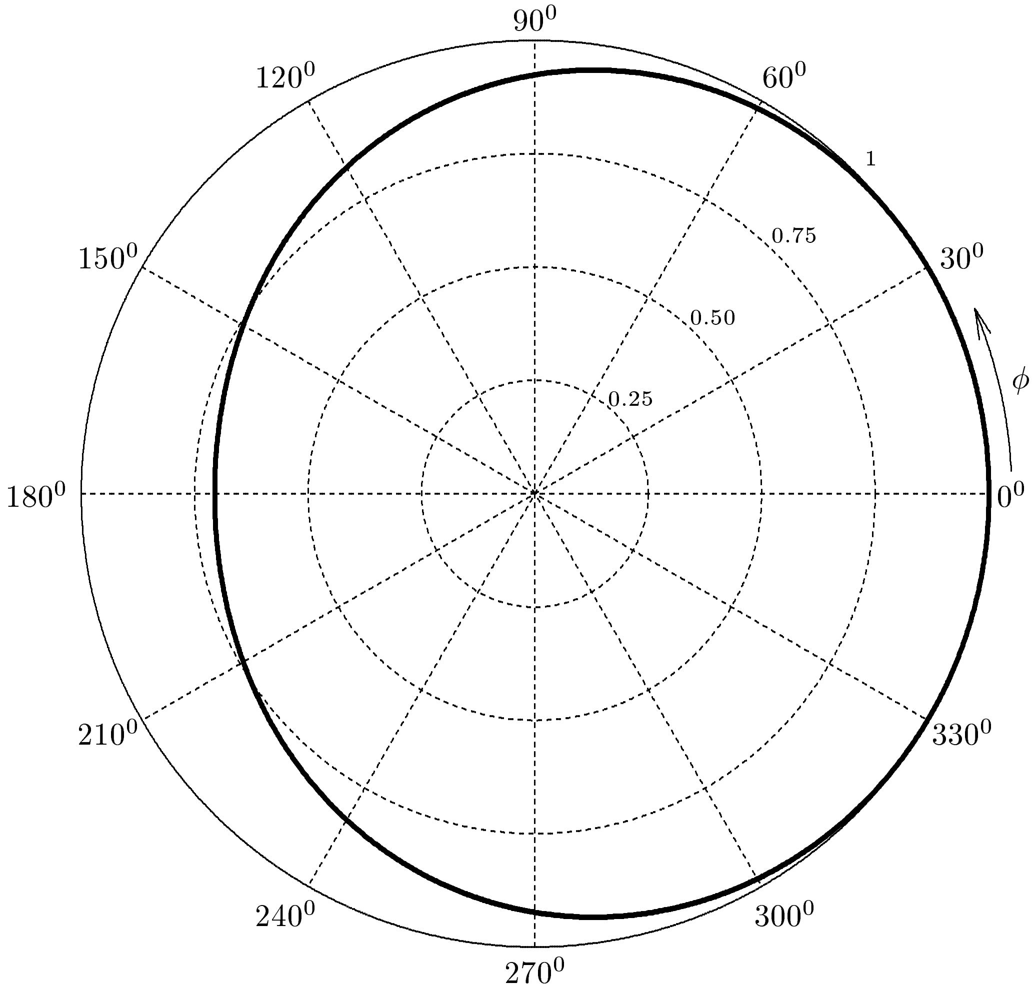
Consideriamo, a titolo d'esempio, $\frac{d}{\lambda} = \frac{1}{8}$. Ad esso corrisponde il valore di γ dato dalla (1):

$$\gamma = -2\pi\frac{d}{\lambda} = -\frac{\pi}{4} \tag{5}$$

Grafichiamo il diagramma di radiazione orizzontale per i valori cosí trovati:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{\lambda} = \dfrac{1}{8} \\ \gamma = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

ϕ	$K(\phi)$	ϕ	$K(\phi)$	ϕ	$K(\phi)$
0^0	1.0000	5^0	1.0000	10^0	1.0000
15^0	0.9999	20^0	0.9997	25^0	0.9993
30^0	0.9986	35^0	0.9975	40^0	0.9958
45^0	0.9934	50^0	0.9902	55^0	0.9860
60^0	0.9808	65^0	0.9744	70^0	0.9668
75^0	0.9579	80^0	0.9478	85^0	0.9364
90^0	0.9239	95^0	0.9102	100^0	0.8957
105^0	0.8803	110^0	0.8643	115^0	0.8480
120^0	0.8315	125^0	0.8151	130^0	0.7990
135^0	0.7836	140^0	0.7690	145^0	0.7555
150^0	0.7433	155^0	0.7326	160^0	0.7237
165^0	0.7165	170^0	0.7113	175^0	0.7082
180^0	0.7071	185^0	0.7082	190^0	0.7113
195^0	0.7165	200^0	0.7237	205^0	0.7326
210^0	0.7433	215^0	0.7555	220^0	0.7690
225^0	0.7836	230^0	0.7990	235^0	0.8151
240^0	0.8315	245^0	0.8480	250^0	0.8643
255^0	0.8803	260^0	0.8957	265^0	0.9102
270^0	0.9239	275^0	0.9364	280^0	0.9478
285^0	0.9579	290^0	0.9668	295^0	0.9744
300^0	0.9808	305^0	0.9860	310^0	0.9902
315^0	0.9934	320^0	0.9958	325^0	0.9975
330^0	0.9986	335^0	0.9993	340^0	0.9997
345^0	0.9999	350^0	1.0000	355^0	1.0000
360^0	1.0000				


90^0
120^0
60^0
1
0.75
150^0
30^0
0.50
ϕ
0.25
180^0
0^0
210^0
330^0
240^0
300^0
270^0

02-9) Esercizio n. 1 del 27/4/2002

La regione $z \geq 0$ é occupata da un gas ionizzato con un campo magnetostatico uniforme applicato lungo la direzione dell'asse z. Un'onda elettromagnetica piana TEM, viaggiante nella regione $z < 0$, polarizzata lungo l'asse x, incide sulla superficie $z = 0$ secondo la direzione normale. Calcolare il coefficiente di riflessione. I parametri del plasma sono: $n = 10^6$ $elettroni/cm^3$, $\omega_{eff} = 0$, $B = 0.5$ G. La pulsazione dell'onda elettromagnetica é $\omega = 8.4 \cdot 10^7$ rad/s.

———————

(vedi es. n. 2 del 21/7/98)

Sia $\vec{E} = E_0 \widehat{x} e^{ik_0 z}$ il campo elettrico associato all'onda elettromagnetica incidente. É conveniente considerare tale onda come due onde circolarmente polarizzate in verso opposto:

$$\vec{E} = \frac{1}{2} E_0 \left(\widehat{x} + i\widehat{y} \right) e^{ik_0 z} + \frac{1}{2} E_0 \left(\widehat{x} - i\widehat{y} \right) e^{ik_0 z}$$

Per ciascuna di queste onde il mezzo presenta due costanti di propagazione diverse, ${k_0}'$ per l'onda polarizzata circolarmente destra $\frac{1}{2} E_0 \left(\widehat{x} - i\widehat{y} \right) e^{ik_0 z}$ e ${k_0}''$ per l'onda polarizzata circolarmente sinistra $\frac{1}{2} E_0 \left(\widehat{x} + i\widehat{y} \right) e^{ik_0 z}$

Indichiamo con R_L il coefficiente di riflessione per l'onda polarizzata circolarmente sinistra e R_R il coefficiente di riflessione per l'onda polarizzata circolarmente destra. Ciascuno di essi é dato a sua volta dalla somma del coefficiente di riflessione $R_\perp$ competente alla componente ortogonale al piano di incidenza e del coefficiente di riflessione $R_\parallel$ competente alla componente parallela al piano di incidenza. Poiché l'angolo di incidenza é 0^0 si ha, per entrambe le onde:

$$R_{\perp(\theta_0 = 0^0)} = R_{\parallel(\theta_0 = 0^0)}$$

Onda polarizzata circolarmente destra

$$R'_{\perp(\theta_0=0^0)} = R'_{\parallel(\theta_0=0^0)} = \left| \frac{\mu_2 k_1 - \mu_1 {k'}_0}{\mu_1 {k'}_0 + \mu_1 k_1} \right|^2 = \left| \frac{k_0 - {k'}_0}{k_0 + {k'}_0} \right|^2 =$$

$$= \left| \frac{\dfrac{\omega}{c} - \dfrac{\omega}{c}\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega\left(\omega - \omega_g\right)}}}{\dfrac{\omega}{c} + \dfrac{\omega}{c}\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega\left(\omega - \omega_g\right)}}} \right|^2 = \left| \frac{1 - \sqrt{1 - \dfrac{X}{1+Y}}}{1 + \sqrt{1 - \dfrac{X}{1+Y}}} \right|^2$$

Quindi:

$$R_R = \frac{1}{2}R'_{\perp(\theta_0=0^0)} + \frac{1}{2}R'_{\parallel(\theta_0=0^0)} = \left| \frac{1-\sqrt{1-\dfrac{X}{1+Y}}}{1+\sqrt{1-\dfrac{X}{1+Y}}} \right|^2$$

Onda polarizzata circolarmente sinistra

$$R''_{\perp(\theta_0=0^0)} = R''_{\parallel(\theta_0=0^0)} = \left| \frac{\mu_2 k_1 - \mu_1 k''_0}{\mu_1 k''_0 + \mu_1 k_1} \right|^2 = \left| \frac{k_0 - k''_0}{k_0 + k''_0} \right|^2 =$$

$$= \left| \frac{\dfrac{\omega}{c} - \dfrac{\omega}{c}\sqrt{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega\left(\omega+\omega_g\right)}}}{\dfrac{\omega}{c} + \dfrac{\omega}{c}\sqrt{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega\left(\omega+\omega_g\right)}}} \right|^2 = \left| \frac{1-\sqrt{1-\dfrac{X}{1-Y}}}{1+\sqrt{1-\dfrac{X}{1-Y}}} \right|^2$$

Quindi:

$$R_L = \frac{1}{2}R''_{\perp(\theta_0=0^0)} + \frac{1}{2}R''_{\parallel(\theta_0=0^0)} = \left| \frac{1-\sqrt{1-\dfrac{X}{1-Y}}}{1+\sqrt{1-\dfrac{X}{1-Y}}} \right|^2$$

I dati sono:
$n = 10^6\ cm^{-3}$, $B = 0.5\ G = 0.5 \cdot 10^{-4}\ \dfrac{Wb}{m^2}$, $\omega = 8.4 \cdot 10^7\ rad/s$, $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} C$, $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\ Kg$.
Risulta:

$$\begin{cases} \omega_p^2 = \dfrac{nq_e^2}{\epsilon_0 m} = \dfrac{10^{12} \cdot \left(1.6 \cdot 10^{-19}\right)^2}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}} = 3.1738 \cdot 10^{15}\ (rad/s)^2 \\ \omega_p = 5.63365 \cdot 10^7\ rad/s \\ X = \left(\dfrac{\omega_p}{\omega}\right)^2 = 0.4498 \\ \omega_g = \dfrac{q_e B}{m_e} = -\dfrac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.5 \cdot 10^{-4}}{9.11 \cdot 10^{-31}} = -8.78156 \cdot 10^6\ rad/s \\ Y = -\dfrac{\omega_g}{\omega} = 0.1045 \\ \dfrac{X}{1-Y} = \dfrac{0.4498}{1-0.1045} = \dfrac{0.4498}{0.8955} = 0.5 \\ \dfrac{X}{1+Y} = \dfrac{0.4498}{1+0.1045} = \dfrac{0.4498}{1.1045} = 0.407 \end{cases}$$

Ne segue:

$$R_L = \left| \frac{1-\sqrt{0.5}}{1+\sqrt{0.5}} \right|^2 = \left| \frac{0.29}{1.71} \right|^2 = \underline{\underline{0.0287}}$$

$$R_R = \left| \frac{1-\sqrt{0.593}}{1+\sqrt{0.593}} \right|^2 = \left| \frac{0.23}{1.77} \right|^2 = \underline{\underline{0.0169}}$$

Il coefficiente di riflessione risulta, quindi:

$$R = R_L + R_R = 0.0456 = \underline{\underline{4.56\%}}$$

02-10) Esercizio n. 2 del 27/4/2002

Calcolare la resistenza di radiazione di un'antenna rettilinea, alimentata con corrente stazionaria, di lunghezza $2l = \frac{3}{2}\lambda$.

———————

(vedi es. n. 2 del 27/2/1993 ed es. n. 4 del 23/11/1996)

La resistenza di radiazione é:

$$R_a = \frac{2P_r}{|I_0|^2}$$

dove:

$$\begin{aligned} P_r =& \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi}\left\{C + \ln(2kl) - C_i(2kl) + \frac{\sin(2kl)}{2}\left[S_i(4kl) - 2S_i(2kl)\right]\right\} + \\ &+ \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi}\left\{\frac{\cos(2kl)}{2}\left[C + \ln(kl) + C_i(4kl) - 2C_i(2kl)\right]\right\} \end{aligned} \tag{1}$$

Ricordando che:

$$C + \ln x - C_i(x) = C_{in}(x)$$

la (1) si puó scrivere:

$$\begin{aligned} P_r =& \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi}\left\{C_{in}(2kl) + \frac{\sin(2kl)}{2}\left[S_i(4kl) - 2S_i(2kl)\right]\right\} + \\ &+ \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi}\left\{\frac{\cos(2kl)}{2}\left[\cancel{C} + \ln(kl) + \cancel{C} + \ln(4kl) - C_{in}(4kl) - 2\cancel{C} - 2\ln(2kl) + 2C_{in}(2kl)\right]\right\} \end{aligned} \tag{2}$$

Poiché:

$$\ln(kl) + \ln(4kl) - 2\ln(2kl) = \ln(2kl)^2 - 2\ln(2kl) = 0$$

risulta:

$$\begin{aligned} P_r =& \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi}\left\{C_{in}(2kl) + \frac{\sin(2kl)}{2}\left[S_i(4kl) - 2S_i(2kl)\right]\right\} + \\ &+ \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I_0^2}{4\pi}\left\{\frac{\cos(2kl)}{2}\left[-C_{in}(4kl) + 2C_{in}(2kl)\right]\right\} \end{aligned} \tag{3}$$

Nel nostro caso si ha $2l = \frac{3}{2}\lambda$, pertanto:

$$kl = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{3}{4}\lambda = \frac{3}{2}\pi$$

e, quindi:

$$\sin(2kl) = \sin(3\pi) = 0 \qquad e \qquad \cos(2kl) = \cos(3\pi) = -1$$

Ne segue:

$$P_r = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{4\pi} \left\{ C_{in}(\cancel{2kl}) + \frac{1}{2} C_{in}(4kl) - C_{in}(\cancel{2kl}) \right\} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{4\pi} \frac{1}{2} C_{in}(4kl) \tag{4}$$

Si ha:

$$4kl = 6\pi \Longrightarrow C_{in}(6\pi) = 3.516$$

Quindi:

$$P_r = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{4\pi} \left(\frac{3.516}{2} \right) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{4\pi} 1.758 \tag{5}$$

da cui:

$$R_a = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1.758}{2\pi} = \underline{\underline{105.48\ Ohm}}$$

02-11) Esercizio n. 3 del 27/4/2002

Una guida rettangolare riempita di dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 3$ ed eccitata nel modo TE_{10} ad una frequenza di $5.7\ GHz$, trasporta una potenza di $100\ W$. Le dimensioni trasversali della guida sono: $a = 2.25\ cm$ e $b = 1\ cm$. Calcolare il valore massimo della densitá superficiale di carica sulle superfici interne della guida.

———————

(vedi es. n. 1 del 15/9/1998)

La frequenza di cutoff relativa al modo TE_{10} per una guida rettangolare é:

$$\nu_{c_{10}} = \frac{c/n}{2a} = \frac{3 \cdot 10^8/\sqrt{3}}{2 \cdot 2.25 \cdot 10^{-2}} = \underline{\underline{3.85\ GHz}}$$

Nel caso di modo TE_{10} in guida rettangolare, i campi sono:

$$E_x = 0, \quad E_y = -\frac{i\omega\mu a}{\pi} A \sin\frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} e^{i\omega t}, \quad E_z = 0$$

$$H_x = \frac{i\beta a}{\pi} A \sin\frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} e^{i\omega t}, \quad H_y = 0, \quad H_z = A\cos\frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} e^{i\omega t}$$

La valutazione della costante A si effettua imponendo che la potenza convogliata all'interno della guida sia $100\ Watt$.

$$P_{TE_{10}} = A^2 \frac{\omega\mu\sqrt{\omega^2\epsilon\mu - h_{10}^2}}{4h_{10}^2} ab$$

Poiché:

$$h^2 = \frac{\omega_c^2 n^2}{c^2}$$

si ha:

$$P_{TE_{10}} = A^2 \frac{\omega\mu\sqrt{\frac{\omega^2 n^2}{c^2} - \frac{\omega_{c_{10}}^2 n^2}{c^2}}}{4\frac{\omega_{c_{10}}^2 n^2}{c^2}} ab = A^2 \frac{\frac{\omega^2\mu n}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_{c_{10}}^2}{\omega^2}}}{4\frac{\omega_{c_{10}}^2 n^2}{c^2}} ab =$$

$$= A^2 \frac{\omega^2 c\mu}{4\omega_{c_{10}}^2 n}\sqrt{1 - \frac{\omega_{c_{10}}^2}{\omega^2}} ab$$

Ponendo $\mu \simeq \mu_0$, risulta:

$$c\mu = \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_0$$

Ne segue:

$$P_{TE_{10}} = A^2 \frac{\omega^2}{4\omega_{c_{10}}^2 n} Z_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_{c_{10}}^2}{\omega^2}} ab$$

Si ha:

$$\frac{\omega^2}{\omega_{c_{10}}^2} = \left(\frac{5.7}{3.85}\right)^2 = 2.1919$$

$$\frac{\omega_{c_{10}}^2}{\omega^2} = 0.4562$$

Quindi:

$$P_{TE_{10}} = A^2 \frac{2.1919}{4\sqrt{3}} 377 \sqrt{1 - 0.4562} \cdot 2.25 \cdot 10^{-4} = 0.0198 A^2$$

da cui:

$$A = \sqrt{\frac{P_{TE_{10}}}{1.98}} = 71 \ A/m$$

Per quanto riguarda la densitá superficiale di carica, si ha:

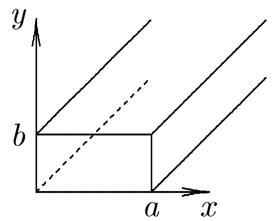
$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \widehat{n} = \sigma$$

indicando come mezzo 1 il dielettrico all'interno della guida e come mezzo 2 il metallo che circonda il dielettrico. Il versore $\widehat{n}$ sia orientato dal mezzo 1 al mezzo 2.

Poiché il mezzo 2 é un conduttore perfetto, risulta $\vec{D}_2 = 0$.

Ne segue che sulle superfici interne della guida risulta:

$$-\epsilon_1 \vec{E}_1 \cdot \widehat{n} = \sigma$$



Faccia $x = 0$ e $x = a$:

Su di esse il campo elettrico risulta:

$$E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad E_z = 0$$

e, quindi:

$$\boxed{\sigma_{(x=0,\ x=a)} = 0}$$

Faccia $y = 0$ e $y = b$:

Su di esse il campo elettrico risulta:

$$E_x = 0, \quad E_y = -\frac{i\omega\mu a}{\pi} A \sin\frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} e^{i\omega t}, \quad E_z = 0$$

e, quindi:

$$\boxed{\sigma_{(y=0,\ y=b)} = \pm\epsilon_1 \Re\left(-\frac{i\omega\mu a}{\pi} A \sin\frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} e^{i\omega t}\right)}$$

Il valore massimo si ha per $x = \dfrac{a}{2}$ e vale:

$$\left(\sigma_{(y=0,\ y=b)}\right)_{max} = \pm\frac{\epsilon_1 \omega\mu a}{\pi} A =$$
$$= \pm\frac{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 2\pi \cdot 5.7 \cdot 10^{9} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2.25 \cdot 10^{-2}}{\pi} 71 \simeq \underline{\underline{\pm 6.08 \cdot 10^{-7}\ C/m^2}}$$

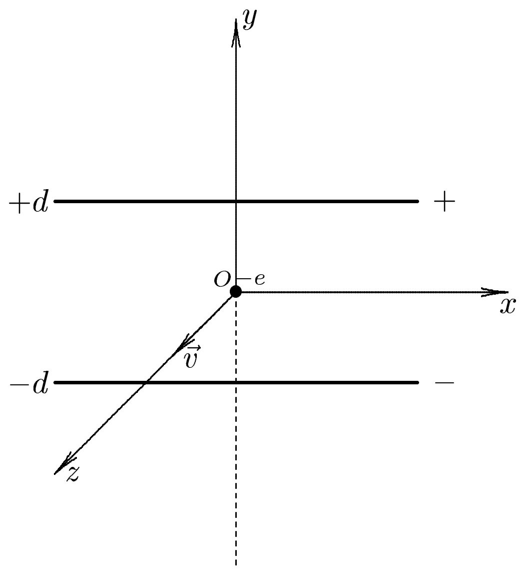
Il segno $\pm$ indica che le cariche depositate sulle due facce hanno segno opposto.

02-12) Esercizio n. 4 del 27/4/2002

Un condensatore piano ha le armature coincidenti con i piani $y = -d$ e $y = +d$ di un sistema di riferimento $Oxyz$. Un elettrone si trova all'istante $t = 0$ nell'origine delle coordinate ed ha una velocitá istantanea $v = 0.9c$ in direzione dell'asse z positivo. Se al condensatore é applicata una differenza di potenziale di 300 V e $d = 1$ cm, calcolare il campo elettrico ed il campo magnetico sull'elettrone.

———————

Consideriamo un sistema di riferimento $S' \equiv (O', x', y', z')$ che si muove con la stessa velocitá dell'elettrone rispetto al sistema di riferimento S solidale al condensatore. L'origine di S' coincide con la posizione dell'elettrone. All'istante $t = 0$ le due origini coincidono.



Un osservatore solidale al sistema S osserva i seguenti campi:

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -\dfrac{V}{2d} = -\dfrac{300}{2 \cdot 10^{-2}} = -1.5 \cdot 10^4 \; V/m \\ E_z = 0 \\ B_x = B_y = B_z = 0 \end{cases}$$

I campi osservati da un osservatore solidale al sistema S' e precisamente posto nella posizione dell'elettrone all'istante $t = 0$, sono:

$$\begin{cases} E'_x = \gamma\,(E_x - vB_y) \\ \\ E'_y = \gamma\,(E_y + vB_y) \\ \\ E'_z = E_z \end{cases} \qquad \begin{cases} B'_x = \gamma\left(B_x + \dfrac{v}{c^2}E_y\right) \\ B'_y = \gamma\left(B_y - \dfrac{v}{c^2}E_x\right) \\ B'_z = B_z \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} E'_x = 0 \\ \\ E'_y = \gamma E_y \\ \\ E'_z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B'_x = \gamma \dfrac{v}{c^2}E_y \\ B'_y = 0 \\ \\ B'_z = 0 \end{cases}$$

Si ha:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.9)^2}} = 2.294$$

$$\frac{v}{c^2}E_y = -0.9\frac{1.5\cdot 10^4}{3\cdot 10^8} = -4.5\cdot 10^{-5}$$

Ne segue:

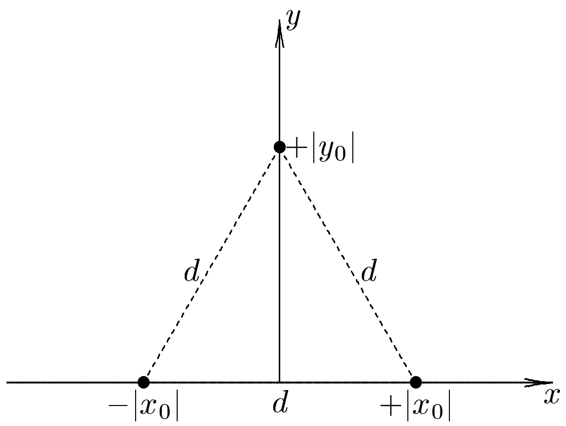
$$\begin{cases} E'_y = -2.294\cdot 1.5\cdot 10^4 = \underline{\underline{-3.4410\cdot 10^4\ V/m}} \\ \\ B'_x = -2.294\cdot 4.5\cdot 10^{-5} = \underline{\underline{-1.0323\cdot 10^{-4}\ Wb/m^2 = -1.0323\ G}} \end{cases}$$

02-13) Esercizio n. 1 del 21/6/2002

Si abbia un sistema uniforme di antenne verticali a mezz'onda parallele alimentate in fase ed i cui centri sono disposti sui vertici di un triangolo equilatero di lato $d = \frac{\lambda}{2}$. Si determini l'espressione del vettore di radiazione e del modulo dell'array factor.

———————

Si dispongano le antenne secondo la seguente figura:



La densitá di corrente totale che scorre nel sistema di antenne é:

$$\vec{J} = \widehat{z}A_0\delta(x + |x_0|)\delta(y)\cos kz + \widehat{z}A_0\delta(x - |x_0|)\delta(y)\cos kz + \widehat{z}A_0\delta(x)\delta(y - |y_0|)\cos kz$$

per $-l \leq z \leq +l$.

Il vettore di radiazione é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} J(\vec{r}\,')d^3r\,' =$$
$$= \widehat{z}A_0 \int e^{-ik(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)}[\delta(x' + |x_0|)\delta(y') + \delta(x' - |x_0|)\delta(y') +$$
$$+ \delta(x')\delta(y' - |y_0|)]\cos kz' dx'dy'dz' =$$
$$= \widehat{z}A_0 \int e^{-ik(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)}\delta(x' + |x_0|)\delta(y')\cos kz' dx'dy'dz' +$$
$$+ \widehat{z}A_0 \int e^{-ik(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)}\delta(x' - |x_0|)\delta(y')\cos kz' dx'dy'dz' +$$
$$+ \widehat{z}A_0 \int e^{-ik(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)}\delta(x')\delta(y' - |y_0|)\cos kz' dx'dy'dz'$$

Si ha:

$$\int e^{-ik(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)}\delta(x'+|x_0|)\delta(y')\cos kz'dx'dy'dz' =$$
$$=\int e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\delta(x'+|x_0|)dx'\int e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\delta(y')dy'\int e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz'=$$
$$= e^{+ik|x_0|\sin\theta\cos\phi}\int e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz'$$

$$\int e^{-ik(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)}\delta(x'-|x_0|)\delta(y')\cos kz'dx'dy'dz' =$$
$$=\int e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\delta(x'-|x_0|)dx'\int e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\delta(y')dy'\int e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz'=$$
$$= e^{-ik|x_0|\sin\theta\cos\phi}\int e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz'$$

$$\int e^{-ik(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)}\delta(x')\delta(y'-|y_0|)\cos kz'dx'dy'dz' =$$
$$=\int e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\delta(x')dx'\int e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\delta(y'-|y_0|)dy'\int e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz' =$$
$$= e^{-ik|y_0|\sin\theta\sin\phi}\int e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz'$$

Ne segue:

$$\vec{N}(\theta,\phi) =$$
$$=\widehat{z}A_0\left[e^{+ik|x_0|\sin\theta\cos\phi}+e^{-ik|x_0|\sin\theta\cos\phi}+e^{-ik|y_0|\sin\theta\sin\phi}\right]\int e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz'$$

Poiché, per un'antenna a mezz'onda, risulta:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

si ha:

$$\vec{N}(\theta,\phi)=\widehat{z}2A_0\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{k\sin^2\theta}\left[e^{+ik|x_0|\sin\theta\cos\phi}+e^{-ik|x_0|\sin\theta\cos\phi}+e^{-ik|y_0|\sin\theta\sin\phi}\right]$$

Essendo:

$$\widehat{z} = \widehat{e}_r\cos\theta - \widehat{e}_\theta\sin\theta$$

si ha:

$$N_\phi(\theta,\phi) = 0$$
$$N_\theta(\theta,\phi) =$$
$$=-2A_0\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{k\sin\theta}\left[e^{+ik|x_0|\sin\theta\cos\phi}+e^{-ik|x_0|\sin\theta\cos\phi}+e^{-ik|y_0|\sin\theta\sin\phi}\right]$$

Il vettore di Poynting, mediato in un periodo, é:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k}{4\pi r} \right)^2 |N_\theta|^2 \widehat{e}_r$$

Sostituendo:

$$\langle \vec{S} \rangle = Z \left(\frac{A_0^2}{8\pi^2 r^2} \right) \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \left[e^{+ik|x_0|\sin\theta\cos\phi} + e^{-ik|x_0|\sin\theta\cos\phi} + e^{-ik|y_0|\sin\theta\sin\phi} \right] \right|^2 \widehat{e}_r$$

Pertanto il modulo dell'array factor é:

$$|A(\theta,\phi)| = \left| e^{+ik|x_0|\sin\theta\cos\phi} + e^{-ik|x_0|\sin\theta\cos\phi} + e^{-ik|y_0|\sin\theta\sin\phi} \right| =$$
$$= \sqrt{\left[2\cos\left(k|x_0|\sin\theta\cos\phi\right) + \cos\left(k|y_0|\sin\theta\sin\phi\right)\right]^2 + \sin^2\left(k|y_0|\sin\theta\sin\phi\right)}$$

Si ha:

$$2|x_0| = \frac{\lambda}{2} \ e, \ quindi \ k|x_0| = k\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Analogamente:

$$|y_0| = \frac{\sqrt{3}\lambda}{4} \ e, \ quindi \ k|y_0| = k\frac{\sqrt{3}\lambda}{4} = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$$

Quindi:

$$|A(\theta,\phi)| = \sqrt{\left[2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)\right]^2 + \sin^2\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}$$

02-14) Esercizio n. 2 del 21/6/2002

Con riferimento al problema precedente si grafichi il diagramma di radiazione nel piano orizzontale.

———————

Si ha:

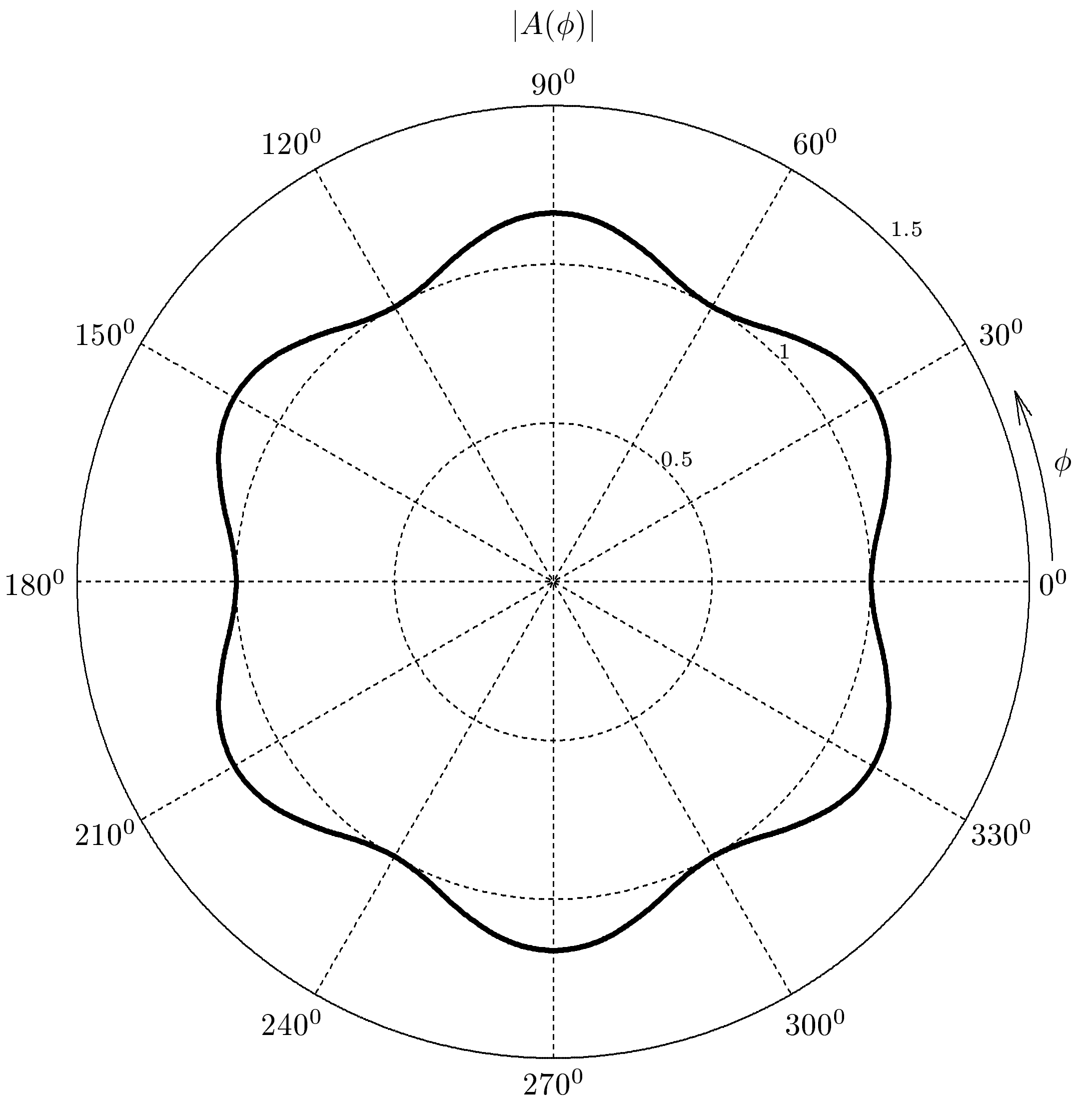
$$|A(\theta,\phi)| = \sqrt{\left[2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)\right]^2 + \sin^2\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)}$$

che, nel piano orizzontale, ossia per $\theta = \frac{\pi}{2}$, diventa:

$$|A(\theta,\phi)| = \sqrt{\left[2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2}\sin\phi\right)\right]^2 + \sin^2\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2}\sin\phi\right)}$$

ϕ	$\vert A(\phi)\vert$	ϕ	$\vert A(\phi)\vert$	ϕ	$\vert A(\phi)\vert$
0^0	1.0000	5^0	1.0116	10^0	1.0427
15^0	1.0838	20^0	1.1233	25^0	1.1514
30^0	1.1615	35^0	1.1514	40^0	1.1233
45^0	1.0838	50^0	1.0427	55^0	1.0116
60^0	1.0000	65^0	1.0116	70^0	1.0427
75^0	1.0838	80^0	1.1233	85^0	1.1514
90^0	1.1615	95^0	1.1514	100^0	1.1233
105^0	1.0838	110^0	1.0427	115^0	1.0116
120^0	1.0000	125^0	1.0116	130^0	1.0427
135^0	1.0838	140^0	1.1233	145^0	1.1514
150^0	1.1615	155^0	1.1514	160^0	1.1233
165^0	1.0838	170^0	1.0427	175^0	1.0116
180^0	1.0000	185^0	1.0116	190^0	1.0427
195^0	1.0838	200^0	1.1233	205^0	1.1514
210^0	1.1615	215^0	1.1514	220^0	1.1233
225^0	1.0838	230^0	1.0427	235^0	1.0116
240^0	1.0000	245^0	1.0116	250^0	1.0427
255^0	1.0838	260^0	1.1233	265^0	1.1514
270^0	1.1615	275^0	1.1514	280^0	1.1233
285^0	1.0838	290^0	1.0427	295^0	1.0116
300^0	1.0000	305^0	1.0116	310^0	1.0427
315^0	1.0838	320^0	1.1233	325^0	1.1514
330^0	1.1615	335^0	1.1514	340^0	1.1233

345^0	1.0838	350^0	1.0427	355^0	1.0116
360^0	1.0000				



02-15) Esercizio n. 3 del 21/6/2002

Un rivestimento in quarto d'onda per adattamento é progettato per sopprimere la riflessione di onde a 3000 MHz che, provenendo dal vuoto, entrano in un materiale con costante dielettrica relativa 16 con incidenza normale. Calcolare lo spessore del rivestimento e la costante dielettrica relativa di questo. Con i dati cosí trovati, calcolare e diagrammare il coefficente di riflessione in funzione della frequenza per onde incidenti normalmente nel campo di frequenze da 1000 MHz a 5000 MHz.

———————

Supponiamo che il rivestimento abbia un indice di rifrazione piú piccolo dell'indice di rifrazione del terzo mezzo che risulta $n_3 = \sqrt{16} = 4$. La riflettivitá é minima se:

$$n_2 d = m\frac{\lambda_0}{4} \text{ (m dispari)}$$

Essa si annulla se:

$$n_2 = \sqrt{n_1 n_3} \text{ ossia } n_2 = 2$$

Per $m = 1$ il minimo valore di d é:

$$d = \frac{\lambda_0}{8} = \frac{c}{8\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{8 \cdot 3 \cdot 10^9} = \underline{\underline{1.25\ cm}}$$

Il coefficiente di riflessione é:

$$R = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\beta_2 d}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\beta_2 d}$$

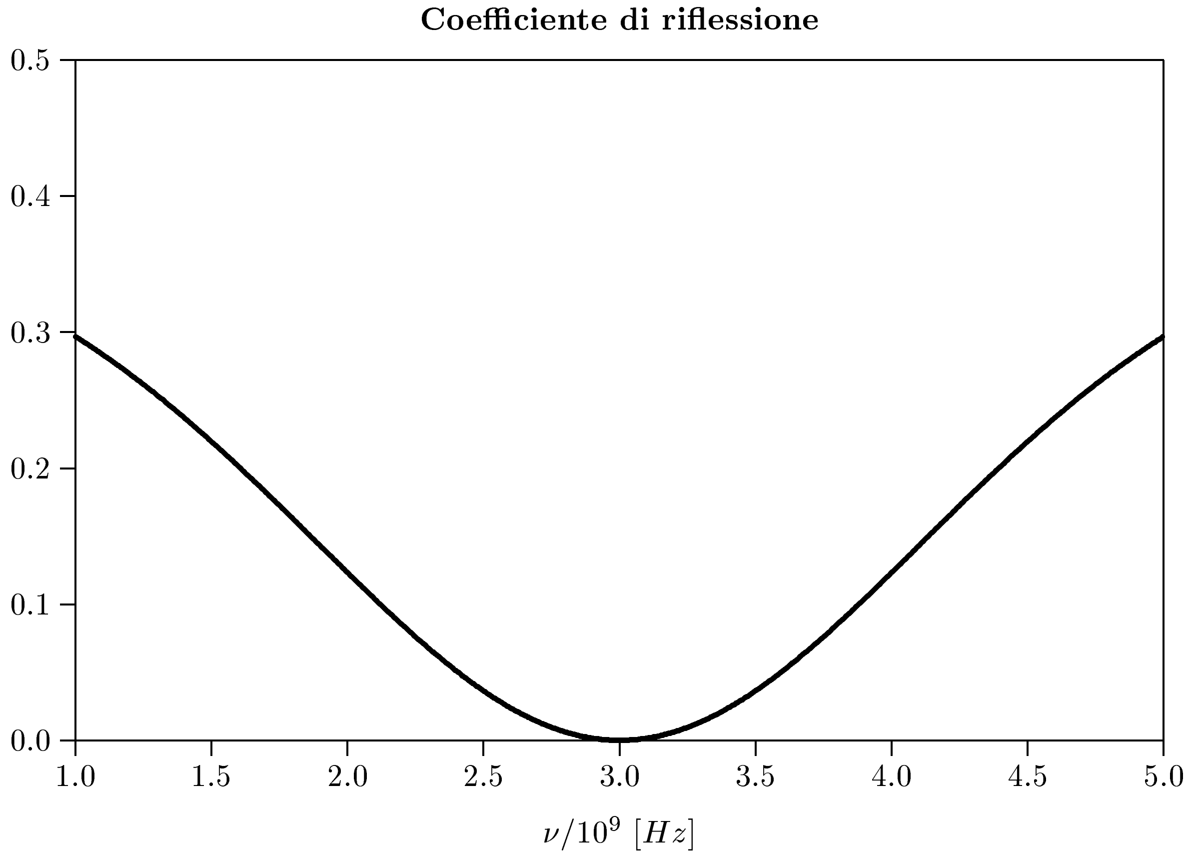
Si ha:

$$\beta_2 d = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_2 d$$

e

$$r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1-2}{1+2} = -0.3333 \qquad r_{23} = \frac{2-4}{2+4} = -0.3333$$

ν (GHz)	1	2	3	4	5
R	0.2967	0.1233	0	0.1233	0.2967


Coefficiente di riflessione
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
4.5
5.0
$\nu/10^9$ [Hz]

02-16) Esercizio n. 4 del 21/6/2002

Con i dati del problema precedente si valuti il coefficiente di riflessione nel caso in cui l'onda incidente penetra nel secondo mezzo con un angolo di incidenza $\theta_0 = 30^0$ e con il vettore campo elettrico polarizzato in direzione della normale al piano di incidenza. Si effettui, anche in questo caso, il grafico del coefficente di riflessione in funzione della frequenza nel campo di frequenze da 1000 MHz a 5000 MHz.

———————

(vedi Compito Campi e.m. es. n.1 del 6/5/2000 ed es. n.4 del 15/9/2000).

Per calcolare, in caso di incidenza obliqua il coefficiende di riflessione é sufficiente sostituire al posto dell'indice di rifrazione n_j la quantitá $n_j \cos\theta_j$.

Si ha:

$$n_1 \sin\theta_0 = n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3$$

da cui:

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_0}$$

e:

$$\cos\theta_3 = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_3^2}\sin^2\theta_0}$$

Il coefficiente di riflessione é:

$$R = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\beta_2 d}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\beta_2 d}$$

Si ha:

$$\beta_2 d = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_2 \cos\theta_2 d = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_2 d\sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_0}$$

e

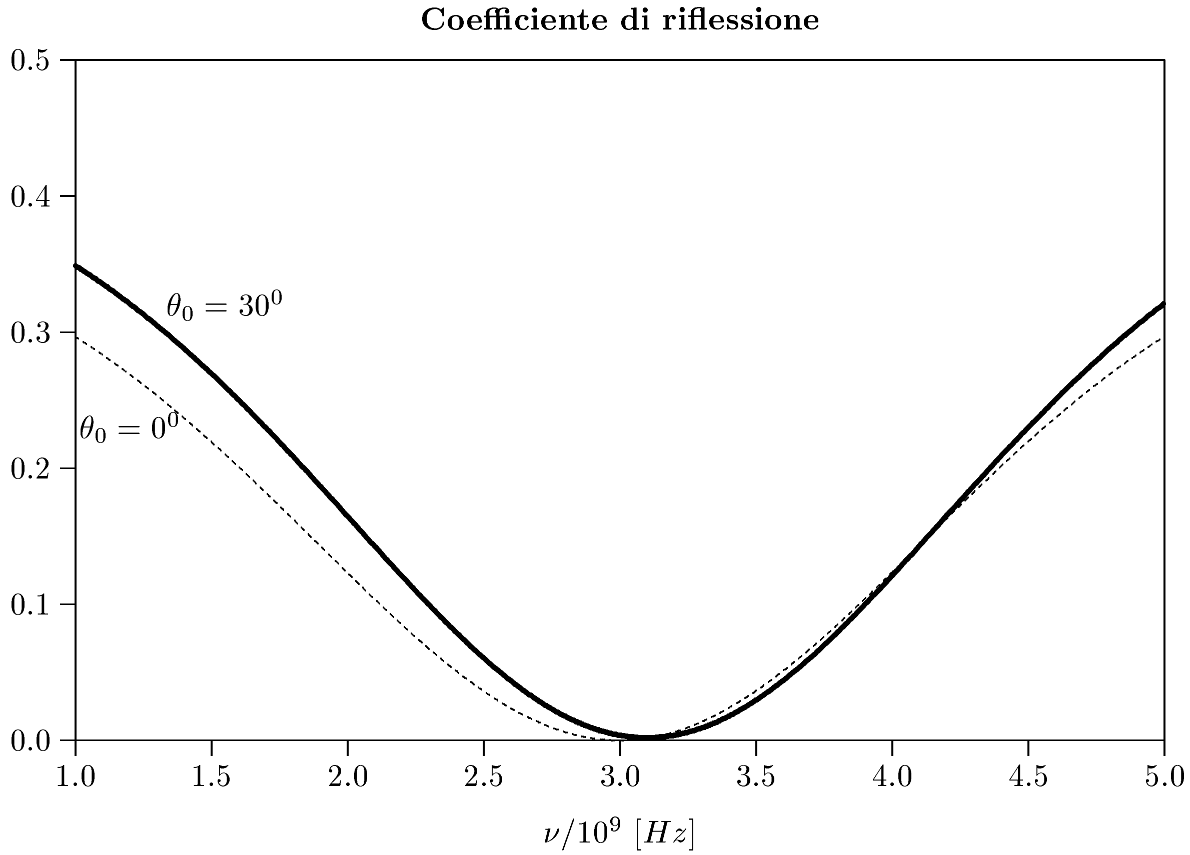
$$r_{12} = \frac{n_1\cos\theta_0 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_0 + n_2\cos\theta_2} = \frac{n_1\cos\theta_0 - n_2\sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_0}}{n_1\cos\theta_0 + n_2\sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_0}}$$

$$r_{23} = \frac{n_2\cos\theta_2 - n_3\cos\theta_3}{n_2\cos\theta_2 + n_3\cos\theta_3} = \frac{n_2\sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_0} - n_3\sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_3^2}\sin^2\theta_0}}{n_2\sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_0} + n_3\sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_3^2}\sin^2\theta_0}}$$

Per $\theta_0 = 30^0$ risulta:

$\cos\theta_2 = 0.96825 \qquad \cos\theta_3 = 0.99216 \qquad r_{12} = -0.38197 \qquad r_{23} = -0.34413$

ν (GHz)	1	2	3	4	5
R	0.3488	0.1645	0.0036	0.1212	0.3212



02-17) Esercizio n. 1 del 19/7/2002

La densitá di potenza far field irradiata da un'antenna puó essere adeguatamente rappresentata dalla funzione $S_r(r,\theta,\phi) = \dfrac{B_0}{r^2}\sin\theta\sin^2\phi$ definita per $0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le \pi$ e zero altrove. Calcolarne la direttivitá.

———————

(vedi es. n.4 del 1/2/1997 ed es. n.4 del 19/7/1997)

$$S_r = \begin{cases} B_0 \dfrac{1}{r^2}\sin\theta\sin^2\phi & \text{per} \quad 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le \pi \\ 0 \quad \text{altrove} \end{cases}$$

$$D = \frac{4\pi r^2 (S_r)_{max}}{\int_0^{4\pi} S_r(r,\theta,\phi) r^2 d\Omega}$$

$$\int_0^{4\pi} S_r(r,\theta,\phi) r^2 d\Omega = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} B_0 \sin^2\theta\sin^2\phi d\theta d\phi = B_0 \int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta \int_0^{\pi}\sin^2\phi d\phi$$

Risulta:

$$\int_0^{\pi}\sin^2\phi d\phi = \int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta = \int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\left[\sin 2\theta\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

Ne segue:

$$\int_0^{4\pi} S_r(r,\theta,\phi) r^2 d\Omega = B_0 \frac{\pi^2}{4}$$

Quindi:

$$D = \frac{4\pi B_0}{B_0 \dfrac{\pi^2}{4}} = \frac{16}{\pi} = \underline{\underline{5.1}}$$

02-18) Esercizio n. 2 del 19/7/2002

La conducibilitá statica dell'argento é $6.8 \cdot 10^7$ S/m. Assumendo che i portatori di carica siano elettroni liberi di densitá $5.86 \cdot 10^{28}$ m^{-3}, calcolare la parte reale e la parte immaginaria dell'indice di rifrazione nonché la riflettivitá alla lunghezza d'onda $\lambda = 1$ μm.

———————

(vedi es. n.1 del 23/11/1996 ed es. n.2 del 5/10/1998)

Si ha:

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r} = \beta + i\alpha$$

Poiché l'indice di rifrazione é:

$$n = \sqrt{\epsilon_r}$$

risulta:

$$n = \frac{c}{\omega}(\beta + i\alpha)$$

La conducibilitá di un metallo in funzione della frequenza é:

$$\sigma\,' = \frac{N\dfrac{e^2}{m}}{\gamma - i\omega}$$

Per $\omega = 0$ si ottiene la conducibilitá statica, dalla quale possiamo ricavare il coefficiente γ. Si ha:

$$\sigma_{statica} = \frac{N\dfrac{e^2}{m}}{\gamma}$$

da cui:

$$\gamma = \frac{N\dfrac{e^2}{m}}{\sigma_{statica}} = \frac{5.86 \cdot 10^{28} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 6.8 \cdot 10^7} = 2.4216 \cdot 10^{13} \ (rad/s)$$

Procediamo con il calcolo di β e di α; sappiamo che:

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}\right) \\ 2\alpha\beta = \dfrac{\omega\gamma}{c^2}\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} \end{cases}$$

essendo:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} = 1.8599 \cdot 10^{32} \ (rad/s)^2$$

Risulta:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} = 3.9478 \cdot 10^{13}, \quad \omega^2 + \gamma^2 = 3.5536 \cdot 10^{30}, \quad \frac{\omega\gamma}{c^2} = 5.0719 \cdot 10^{11}, \quad \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} = 52.337$$

Pertanto:

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = a = -2.0267 \cdot 10^{15} \\ \alpha\beta = \dfrac{b}{2} = \dfrac{2.6545 \cdot 10^{13}}{2} \end{cases}$$

Dividendo membro a membro la prima per la seconda equazione del sistema, si ha:

$$\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} = 2\frac{a}{b}$$

Moltiplicando ambo i membri per $\dfrac{\beta}{\alpha}$, si ha:

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 2\frac{a}{b}\frac{\beta}{\alpha} - 1 = 0$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}$$

Moltiplicando per ciascun termine della seconda equazione, si ha:

$$\beta^2 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right) = 8.6913 \cdot 10^{10} \ (rad/m)^2$$

e, dalla prima equazione:

$$\alpha^2 = \beta^2 - a = 2.0267 \cdot 10^{15} \ (m^{-2})$$

Ne segue:

$$\begin{cases} \beta = 2.9481 \cdot 10^5 \ (rad/m) \\ \alpha = 4.5019 \cdot 10^7 \ (m^{-1}) \end{cases}$$

Poiché $\dfrac{c}{\omega} = \dfrac{\lambda}{2\pi} = 1.5915 \cdot 10^{-7}$ risulta:

$$\Re(n) = \frac{c}{\omega}\beta = 0.04692$$

$$\Im(n) = \frac{c}{\omega}\alpha = 7.165$$

Quindi:

$$\boxed{n = 0.04692 + i7.165}$$

Risulta:

$$R = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2 = \left|\frac{\beta_1 - \beta_2 - i\alpha}{\beta_1 + \beta_2 + i\alpha}\right|^2 = \left|\frac{1 - \Re(n) - i\Im(n)}{1 + \Re(n) + i\Im(n)}\right|^2$$

ossia:

$$R = \frac{[1 - \Re(n)]^2 + [\Im(n)]^2}{[1 + \Re(n)]^2 + [\Im(n)]^2} = \underline{\underline{0.99642}}$$

02-19) Esercizio n. 3 del 19/7/2002

Un'onda elettromagnetica piana con componenti del campo elettrico parallelo e perpendicolare eguali incide dall'aria su un plasma omogeneo indefinito privo di collisioni con un angolo di incidenza $\theta_0 = 37^0$. Calcolare per quale frequenza in unitá di frequenza di plasma, l'onda riflessa é polarizzata circolarmente.

———————

Per un plasma senza collisioni l'indice di rifrazione é:

$$n_2 = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Affinché l'onda riflessa sia polarizzata circolarmente l'onda stessa deve essere riflessa totalmente. In tal caso se δ é la differenza di fase fra le componenti del campo elettrico riflesso, si ha:

$$\tan\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\theta_0\sqrt{\sin^2\theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\sin^2\theta_0}$$

Affinché l'onda riflessa sia polarizzata circolarmente deve essere $\delta = \frac{\pi}{2}$, ossia:

$$\frac{\cos\theta_0\sqrt{\sin^2\theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\sin^2\theta_0} = 1$$

$$\cos^2\theta_0\left[\sin^2\theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right] = \sin^4\theta_0$$

$$-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0\cos^2\theta_0 = \sin^4\theta_0$$

da cui:

$$\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = \frac{\sin^2\theta_0\cos^2\theta_0 - \sin^4\theta_0}{\cos^2\theta_0}$$

Per $\theta_0 = 37^0$ risulta:

$$\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = 0.1565 \Longrightarrow \underline{\underline{\frac{n_2}{n_1} = 0.39562}}$$

L'angolo limite corrispondente é:

$$\theta_L = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 23^0.304$$

Dalla formula dell'indice di rifrazione segue:

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = n_2^2$$

ossia:

$$\frac{\omega^2}{\omega_p^2} = \frac{1}{1 - n_2^2} = 1.1856$$

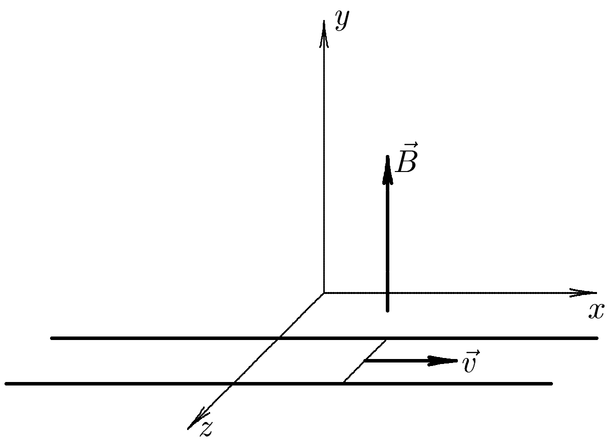
Quindi:

$$\underline{\underline{\frac{f}{f_p} = 1.0889}}$$

02-20) Esercizio n. 4 del 19/7/2002

Due binari ferroviari sono isolati l'uno dall'altro e dalla terra. Essi sono connessi solo da un millivoltmetro. Utilizzando esclusivamente le leggi di trasformazione dei campi, calcolare la differenza di potenziale indicata dallo strumento quando passa un treno viaggiante ad una velocitá di 100 Km/h. La distanza di separazione fra le rotaie é 1.435 m e la componente verticale del campo magnetico terrestre é di 0.15 G.

———————



Rispetto ad un sistema di riferimento solidale al treno che si muove lungo l'asse x, i campi elettrici e magnetici sono:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma\left(E_y - vB_z\right) & B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) \\ E'_z &= \gamma\left(E_z + vB_y\right) & B'_z &= \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \end{aligned}$$

Poiché risulta:

$$E_x = E_y = E_z = 0 \qquad e \qquad B_x = B_z = 0 \quad e \quad B_y = B$$

i campi sono:

$$\begin{aligned} E'_x &= 0 & B'_x &= 0 \\ E'_y &= 0 & B'_y &= \gamma B_y \\ E'_z &= \gamma v B_y & B'_z &= 0 \end{aligned}$$

La differenza di potenziale che si manifesta fra i binari é:

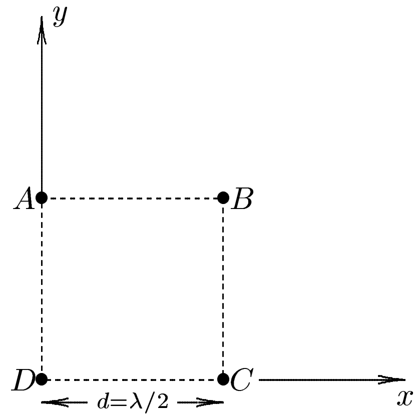
$$\epsilon' = E'_z d = \gamma v B_y d$$

Per $\gamma \simeq 1$, $B_y = B = 0.15 \cdot 10^{-4}\ Wb/m^2$, $v = 27.78\ m/s$ e $d = 1.435\ m$, si ha:

$$\epsilon' = 27.78 \cdot 0.15 \cdot 10^{-4} \cdot 1.435 = \underline{\underline{0.0005976\ V \simeq 0.6\ mV}}$$

02-21) Esercizio n. 1 del 13/9/2002

Quattro dipoli a mezz'onda paralleli sono disposti nei vertici di un quadrato giacente nel piano xy. La corrente, avente la stessa ampiezza su ciascun dipolo, é orientata secondo la direzione dell'asse z. Le correnti in A ed in C sono in fase, mentre le correnti in B ed in D sono in opposizione di fase rispetto alle altre due. Determinare l'espressione (far field) del vettore di Poynting irradiato.



———————–

(vedi es. n. 1 del 21/6/2002)

La densitá di corrente totale che scorre nel sistema di antenne é:

$$\vec{J}_T = \vec{J}_A + \vec{J}_B + \vec{J}_C + \vec{J}_D$$

Risulta:

$$\begin{aligned}
\vec{J}_A &= \widehat{z} A_0 \delta(x)\delta(y-d)\cos kz \\
\vec{J}_B &= -\widehat{z} A_0 \delta(x-d)\delta(y-d)\cos kz \\
\vec{J}_C &= \widehat{z} A_0 \delta(x-d)\delta(y)\cos kz \\
\vec{J}_D &= -\widehat{z} A_0 \delta(x)\delta(y)\cos kz
\end{aligned}$$

per $-l \le z \le +l$.

Il segno meno in $\vec{J}_B$ e $\vec{J}_D$ indica il fatto che queste correnti sono opposte in fase sia a $\vec{J}_A$ che a $\vec{J}_D$.

Il vettore di radiazione é:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} J(\vec{r}\,')d^3r\,' =$$
$$= \widehat{z}A_0\int e^{-ik(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)}[\delta(x')\delta(y'-d) -$$
$$- \delta(x'-d)\delta(y'-d) + \delta(x'-d)\delta(y') - \delta(x')\delta(y')\cos kz'dx'dy'dz' =$$
$$= \widehat{z}A_0\int e^{-ik(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)}\{\delta(y'-d)\,[\delta(x') - \delta(x'-d)] +$$
$$+ \delta(y')\,[\delta(x'-d) - \delta(x')]\}\cos kz'dx'dy'dz'$$

Quindi:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \int e^{-ik\widehat{e}_r \cdot \vec{r}\,'} J(\vec{r}\,')d^3r\,' =$$
$$= \widehat{z}A_0\int e^{-ik(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta)}[\delta(x') - \delta(x'-d)]$$
$$[\delta(y'-d) - \delta(y')]\cos kz'dx'dy'dz' =$$
$$= \widehat{z}A_0\int e^{-ikx'\sin\theta\cos\phi}\,[\delta(x') - \delta(x'-d)]\,dx'\int e^{-iky'\sin\theta\sin\phi}\,[\delta(y'-d) - \delta(y')]\,dy'$$
$$\int e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz' =$$
$$= \widehat{z}A_0\left(1 - e^{-ikd\sin\theta\cos\phi}\right)\left(e^{-ikd\sin\theta\sin\phi} - 1\right)\int e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz'$$

Poiché, per un'antenna a mezz'onda, risulta:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-ikz'\cos\theta}\cos kz'dz' = \frac{2}{k}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

si ha:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = \widehat{z}2A_0\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{k\sin^2\theta}\left(1 - e^{-ikd\sin\theta\cos\phi}\right)\left(e^{-ikd\sin\theta\sin\phi} - 1\right)$$

Essendo:

$$\widehat{z} = \widehat{e}_r\cos\theta - \widehat{e}_\theta\sin\theta$$

si ha:

$$N_\phi(\theta,\phi) = 0$$
$$N_\theta(\theta,\phi) =$$
$$= +2A_0\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{k\sin\theta}\left(1 - e^{-ikd\sin\theta\cos\phi}\right)\left(1 - e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\right)$$

Il vettore di Poynting, mediato in un periodo, é:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Z\left(\frac{k}{4\pi r}\right)^2 |N_\theta|^2 \widehat{e}_r$$

Sostituendo:

$$\langle\vec{S}\rangle = Z\left(\frac{A_0^2}{8\pi^2 r^2}\right)\left|\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\left(1-e^{-ikd\sin\theta\cos\phi}\right)\left(1-e^{-ikd\sin\theta\sin\phi}\right)\right|^2 \widehat{e}_r$$

02-22) Esercizio n. 2 del 13/9/2002

Con riferimento al problema precedente si grafichi il diagramma di radiazione nel piano $z = 0$.

———————

Nel piano $z = 0$ ossia $\theta = \pi/2$, il vettore di Poynting si scrive:

$$\langle \vec{S} \rangle = Z\left(\frac{A_0^2}{8\pi^2 r^2}\right)\left|\left(1 - e^{-ikd\cos\phi}\right)\left(1 - e^{-ikd\sin\phi}\right)\right|^2 \widehat{e}_r$$

il cui modulo é:

$$\left|\langle \vec{S} \rangle\right| = Z\left(\frac{A_0^2}{8\pi^2 r^2}\right)\left|\left(1 - e^{-ikd\cos\phi}\right)\left(1 - e^{-ikd\sin\phi}\right)\right|^2$$

Posto $\alpha = kd\cos\phi$ e $\beta = kd\sin\phi$, si ha:

$$1 - e^{-i\alpha} = 1 - \frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{e^{+i\frac{\alpha}{2}}} = e^{-i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{+i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right) = e^{-i\frac{\alpha}{2}}\left(2i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$1 - e^{-i\beta} = 1 - \frac{e^{-i\frac{\beta}{2}}}{e^{+i\frac{\beta}{2}}} = e^{-i\frac{\beta}{2}}\left(e^{+i\frac{\beta}{2}} - e^{-i\frac{\beta}{2}}\right) = e^{-i\frac{\beta}{2}}\left(2i\sin\frac{\beta}{2}\right)$$

Ne segue:

$$\left|\left(1 - e^{-i\alpha}\right)\left(1 - e^{-i\beta}\right)\right|^2 = 16\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}$$

Poiché:

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos 2\frac{\alpha}{2}$$

possiamo scrivere:

$$\left|\left(1 - e^{-i\alpha}\right)\left(1 - e^{-i\beta}\right)\right|^2 = 4(1 - \cos\alpha)(1 - \cos\beta)$$

In definitiva:

$$\left|\langle \vec{S} \rangle\right| = 4Z\left(\frac{A_0^2}{8\pi^2 r^2}\right)\left[1 - \cos\left(kd\cos\phi\right)\right]\left[1 - \cos\left(kd\sin\phi\right)\right]$$

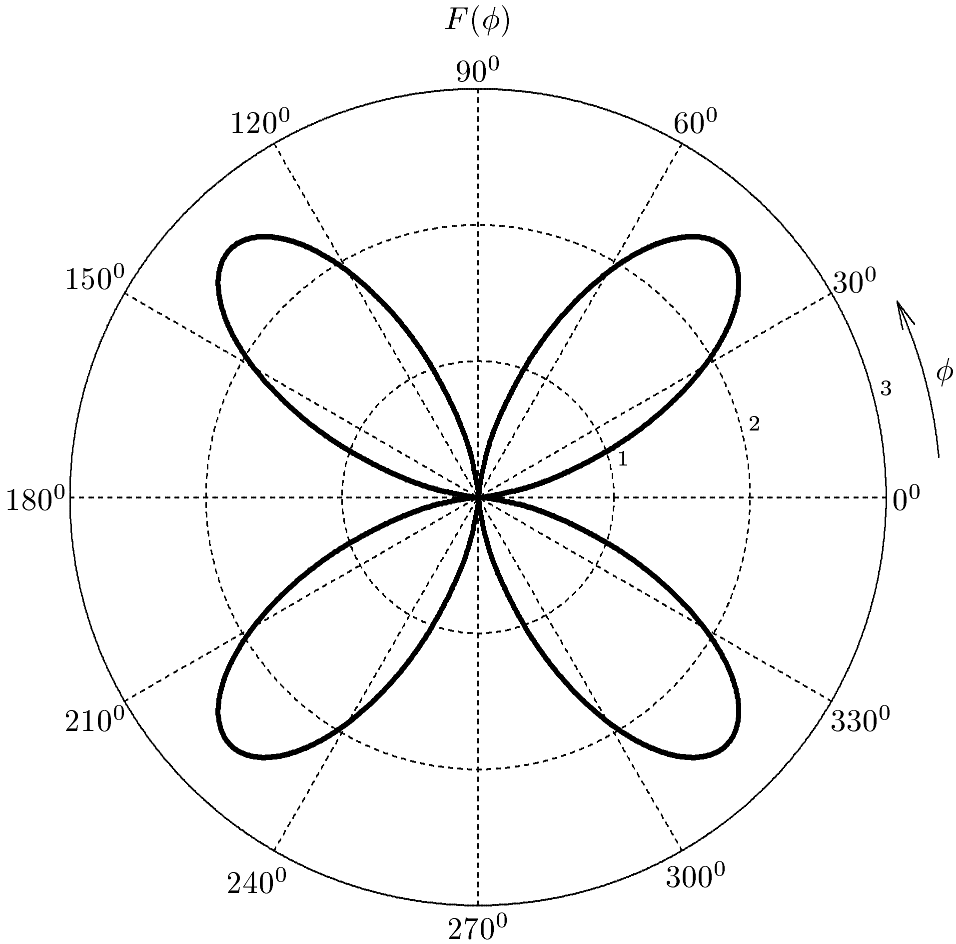
che per $d = \dfrac{\lambda}{2}$ diventa:

$$\left|\langle \vec{S} \rangle\right| = 4Z \left(\frac{A_0^2}{8\pi^2 r^2} \right) \left[1 - \cos\left(\pi \cos\phi\right)\right] \left[1 - \cos\left(\pi \sin\phi\right)\right]$$

Per tracciare il diagramma di radiazione grafichiamo il fattore di forma:

$$F(\phi) = \left[1 - \cos\left(\pi \cos\phi\right)\right] \left[1 - \cos\left(\pi \sin\phi\right)\right]$$

ϕ	$F(\phi)$	ϕ	$F(\phi)$	ϕ	$F(\phi)$
0^0	0.0000	5^0	0.0745	10^0	0.2901
15^0	0.6237	20^0	1.0383	25^0	1.4859
30^0	1.9127	35^0	2.2651	40^0	2.4972
45^0	2.5783	50^0	2.4972	55^0	2.2651
60^0	1.9127	65^0	1.4859	70^0	1.0383
75^0	0.6237	80^0	0.2901	85^0	0.0745
90^0	0.0000	95^0	0.0745	100^0	0.2901
105^0	0.6237	110^0	1.0383	115^0	1.4859
120^0	1.9127	125^0	2.2651	130^0	2.4972
135^0	2.5783	140^0	2.4972	145^0	2.2651
150^0	1.9127	155^0	1.4859	160^0	1.0383
165^0	0.6237	170^0	0.2901	175^0	0.0745
180^0	0.0000	185^0	0.0745	190^0	0.2901
195^0	0.6237	200^0	1.0383	205^0	1.4859
210^0	1.9127	215^0	2.2651	220^0	2.4972
225^0	2.5783	230^0	2.4972	235^0	2.2651
240^0	1.9127	245^0	1.4859	250^0	1.0383
255^0	0.6237	260^0	0.2901	265^0	0.0745
270^0	0.0000	275^0	0.0745	280^0	0.2901
285^0	0.6237	290^0	1.0383	295^0	1.4859
300^0	1.9127	305^0	2.2651	310^0	2.4972
315^0	2.5783	320^0	2.4972	325^0	2.2651
330^0	1.9127	335^0	1.4859	340^0	1.0383
345^0	0.6237	350^0	0.2901	355^0	0.0745
360^0	0.0000				


$F(\phi)$
90^0
120^0
60^0
150^0
30^0
ϕ
3
2
1
180^0
0^0
210^0
330^0
240^0
300^0
270^0

02-23) Esercizio n. 3 del 13/9/2002

Il bisolfuro di carbonio, in corrispondenza della riga D dello spettro del sole $\lambda = 5890$ Å (luce gialla), ha un indice di rifrazione $n_D = 1.6295$ e per la stessa lunghezza d'onda $\dfrac{dn}{d\lambda} = -1820\ cm^{-1}$. Determinare il rapporto fra la velocitá della luce nel vuoto e la velocitá di gruppo nel bisolfuro di carbonio.

———————

(vedi vedi es. n. 2 del 24/7/96 ed es. n. 2 del 22/11/97)

La velocitá di gruppo nei mezzi dispersivi é:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{d\omega}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\beta}$$

Essendo $\omega = \dfrac{2\pi c}{\lambda}$, si ha:

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}$$

Ne segue:

$$v_g = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{d\beta} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}\frac{1}{\left(\dfrac{d\beta}{d\lambda}\right)}$$

La seconda eguaglianza é valida sia in regime di dispersione normale che in quello di dispersione anomala.

Si ha:

$$\beta(\lambda) = \frac{2\pi}{\lambda}n(\lambda)$$

da cui:

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2}n(\lambda) + \frac{2\pi}{\lambda}\frac{dn(\lambda)}{d\lambda}$$

Quindi:

$$\frac{c}{v_g} = -\frac{\lambda^2}{2\pi}\frac{d\beta}{d\lambda} = n(\lambda) - \lambda\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} = 1.6295 + 5890 \cdot 10^{-8} \cdot 1820 = \underline{\underline{1.7367}}$$

02-24) Esercizio n. 4 del 13/9/2002

Un'onda elettromagnetica piana viaggiante in aria, linearmente polarizzata, incide con un angolo $\theta_0 = 60^0$ su una superficie di vetro di indice di rifrazione $n = 1.560$. Il vettore campo elettrico incidente oscilla lungo una direzione che forma un angolo di 20^0 con il piano di incidenza. Calcolare: a) l'angolo che il vettore campo elettrico riflesso forma con tale piano; b) l'angolo che il vettore campo elettrico trasmesso forma con tale piano. Si grafichino le direzioni dei campi elettrici (incidente, riflesso e trasmesso).

———————

Indicando con α l'angolo che il vettore campo elettrico forma con il piano di incidenza, si ha:

$$\tan\alpha_r = -\frac{\cos(\theta_0-\theta_2)}{\cos(\theta_0+\theta_2)}\tan\alpha_i$$
$$\tan\alpha_t = \cos(\theta_0-\theta_2)\tan\alpha_i$$

Per la legge di Snell:

$$\sin\theta_0 = n\sin\theta_2 \Longrightarrow \sin\theta_2 = \frac{1}{n}\sin\theta_0$$

Per $\theta_0 = 60^0$ e $n = 1.560$ si ha:

$$\sin\theta_2 = \frac{1}{1.560}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.55514 \Longrightarrow \theta_2 = 33^0.72$$

Ne segue:

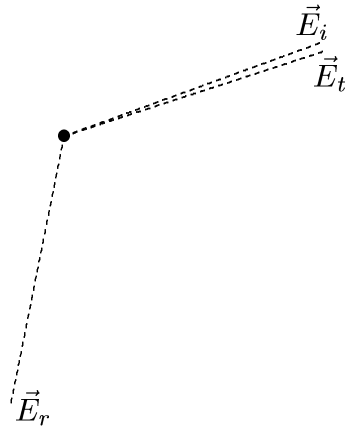
$$\tan\alpha_r = -\frac{\cos(60^0-33^0.72)}{\cos(60^0+33^0.72)}\tan 20^0 = -\frac{\cos(26^0.28)}{\cos(93^0.72)}\tan 20^0 = -\frac{0.8966}{-0.06488}0.3639 = 5.02886$$
$$\tan\alpha_t = \cos(60^0-33^0.72)\tan 20^0 = \cos(26^0.28)\tan 20^0 = 0.8966\cdot 0.3639 = 0.32627$$

Da cui:

$$\alpha_r = \underline{\underline{+78^0.75 \ \textit{oppure} \ +258^0.75}}$$

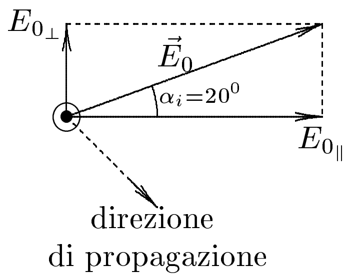
$$\alpha_t = \underline{\underline{18^0.07}}$$

L'angolo α_r é $+258^0.75$ in quanto, come si puó facilmente verificare, l'angolo di incidenza é maggiore dell'angolo di Brewster che risulta $57^0.339$.



02-25) Esercizio n. 1 del 4/10/2002

Un'onda elettromagnetica piana viaggiante in aria, linearmente polarizzata, incide con un angolo $\theta_0 = 60^0$ su una superficie di vetro di indice di rifrazione $n = 1.560$. Il vettore campo elettrico incidente, il cui modulo é $E_0 = 3\ mV/m$, oscilla lungo una direzione che forma un angolo di 20^0 con il piano di incidenza, come in figura. Calcolare le componenti (parallela e perpendicolare) del campo elettrico riflesso e trasmesso e graficarle in modo simile alla figura del testo.



———————

(vedi es. n. 4 del 13/9/02)

Per la legge di Snell:

$$n_1 \sin\theta_0 = n_2 \sin\theta_2 \Longrightarrow \sin\theta_2 = \frac{1}{n_2}\sin\theta_0$$

Per $\theta_0 = 60^0$, $n_1 = 1$ e $n_2 = 1.560$, si ha:

$$\sin\theta_2 = \frac{1}{1.560}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.55514 \Longrightarrow \theta_2 = 33^0.72$$

Risulta: $\theta_0 + \theta_2 > 90^0$

Sia $E_0 = 3\ mV/m$ orientato come in figura nella quale sono rapresentati le componenti del campo elettrico incidente. Sia $\widehat{z}$ la direzione di propagazione e conseguentemente $\widehat{x}$ la direzione di $E_{0_\parallel}$ e $\widehat{y}$ la direzione di $E_{0_\perp}$.
Si ha, quindi:

$$\begin{cases} E_{0_\perp} = E_0 \sin 20^0 = 1.02606\ mV/m \\ \\ E_{0_\parallel} = E_0 \cos 20^0 = 2.8191\ mV/m \end{cases}$$

Ne segue:

$$\vec{H}_0 = \frac{k}{\omega\mu}\widehat{z}\times\vec{E}_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\widehat{z}\times\left(E_{0_\parallel}\widehat{x} + E_{0_\perp}\widehat{y}\right) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\left(E_{0_\parallel}\widehat{y} - E_{0_\perp}\widehat{x}\right)$$

Quindi:

$$H_{0_\perp} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}E_{0_\parallel} \quad e \quad H_{0_\parallel} = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}E_{0_\perp}$$

Si ha:

$$E_{1_\perp} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_0)}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_{0_\perp} = \frac{\sin(33^0.72 - 60^0)}{\sin(33^0.72 + 60^0)} E_{0_\perp} = -0.44369 E_{0_\perp} = -0.45525 \ mV/m$$

$$E_{2_\perp} = \frac{2\sin\theta_2 \cos\theta_0}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_{0_\perp} = \frac{2\sin(33^0.72)\cos(60^0)}{\sin(33^0.72 + 60^0)} E_{0_\perp} = 0.55631 E_{0_\perp} = 0.57081 \ mV/m$$

Per valutare la componente parallela del campo elettrico riflesso dobbiamo valutare il campo magnetico riflesso; per questo consideriamo la figura nella quale sono rapresentati le componenti del campo elettrico riflesso. Sia $\widehat{z}$ la direzione di propagazione e conseguentemente $\widehat{x}$ la direzione di $E_{1_\parallel}$ e $\widehat{y}$ la direzione di $E_{1_\perp}$.

Si ha:

$$\vec{E}_1 = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \widehat{z} \times \vec{H}_1 = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \widehat{z} \times \left(H_{1_\parallel} \widehat{x} + H_{1_\perp} \widehat{y} \right) = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(H_{1_\parallel} \widehat{y} - H_{1_\perp} \widehat{x} \right)$$

Ne segue:

$$E_{1_\parallel} = +\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_{1_\perp}$$

Si ha:

$$H_{1_\perp} = \frac{\tan(\theta_0 - \theta_2)}{\tan(\theta_0 + \theta_2)} H_{0_\perp} = \frac{\tan(60^0 - 33^0.72)}{\tan(60^0 + 33^0.72)} H_{0_\perp} = -\frac{0.4938}{15.3804} H_{0_\perp}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} E_{1_\parallel} &= + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_{1_\perp} = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{0.4938}{15.3804} H_{0_\perp} = \\ &= - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{0.4938}{15.3804} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{0_\parallel} = -\frac{0.4938}{15.3804} \cdot 2.8191 = -0.0905 \ mV/m \end{aligned}$$

Per valutare la componente parallela del campo elettrico trasmesso dobbiamo valutare il campo magnetico trasmesso; per questo consideriamo la figura nella quale sono rapresentati le componenti del campo elettrico trasmesso. Sia $\widehat{z}$ la direzione di propagazione e conseguentemente $\widehat{x}$ la direzione di $E_{2_\parallel}$ e $\widehat{y}$ la direzione di $E_{2_\perp}$.

Si ha:

$$\vec{E}_2 = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_2}} \widehat{z} \times \vec{H}_2 = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_2}} \widehat{z} \times \left(H_{2_\parallel} \widehat{x} + H_{2_\perp} \widehat{y} \right) = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_2}} \left(H_{2_\parallel} \widehat{y} - H_{2_\perp} \widehat{x} \right)$$

Ne segue:

$$E_{2_\parallel} = +\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_2}} H_{2_\perp}$$

Si ha:

$$H_{2_\perp} = \frac{2\sin\theta_0\cos\theta_0}{\sin(\theta_0+\theta_2)\cos(\theta_0-\theta_2)} H_{0_\perp} = \frac{2\sin 60^0\cos 60^0}{\sin(60^0+33^0.72)\cos(60^0-33^0.72)} H_{0_\perp} \simeq$$
$$\simeq \frac{0.866}{0.99789\cdot 0.89664} H_{0_\perp} \simeq 0.96787 H_{0_\perp}$$

Quindi:

$$E_{2_\parallel} = +\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_2}} H_{2_\perp} \simeq 0.96787\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_2}} H_{0_\perp} = 0.96787\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_2}}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu}} E_{0_\parallel} =$$
$$= 0.96787\frac{1}{n_2}\cdot 2.8191 = 1.749\ mV/m$$

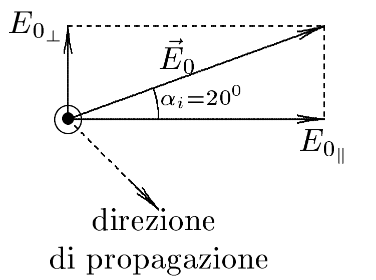
Valutiamo l'angolo di Brewster:

$$\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1} = 1.560 \Longrightarrow \theta_B = 57^0.339$$

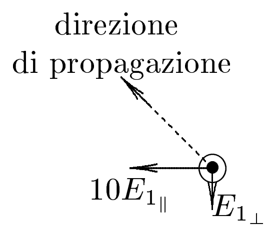
L'angolo di incidenza é maggiore dell'angolo di Brewster.

Configuriamo i vettori del campo elettrico incidente, riflesso e trasmesso:

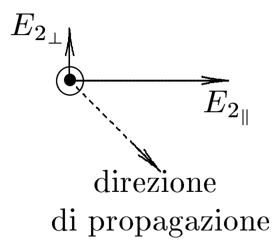
Campo elettrico incidente



Campo elettrico riflesso



Campo elettrico trasmesso



02-26) Esercizio n. 2 del 4/10/2002

Con riferimento al problema precedente si ripetano i calcoli nel caso in cui l'angolo di incidenza sia 45^0.

Per la legge di Snell:

$$n_1 \sin\theta_0 = n_2 \sin\theta_2 \Longrightarrow \sin\theta_2 = \frac{1}{n_2}\sin\theta_0$$

Per $\theta_0 = 45^0$, $n_1 = 1$ e $n_2 = 1.560$, si ha:

$$\sin\theta_2 = \frac{1}{1.560}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.4533 \Longrightarrow \theta_2 = 26^0.95$$

Risulta: $\theta_0 + \theta_2 < 90^0$.

Si ha:

$$E_{1_\perp} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_0)}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_{0_\perp} = \frac{\sin(26^0.95 - 45^0)}{\sin(26^0.95 + 45^0)} E_{0_\perp} = -0.3259 E_{0_\perp} = -0.3344\ mV/m$$
$$E_{2_\perp} = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_0}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_{0_\perp} = \frac{2\sin(26^0.95)\cos(45^0)}{\sin(26^0.95 + 45^0)} E_{0_\perp} = 0.6741 E_{0_\perp} = 0.6917\ mV/m$$

Per valutare la componente parallela del campo elettrico riflesso dobbiamo valutare il campo magnetico riflesso; per questo consideriamo la figura nella quale sono rapresentati le componenti del campo elettrico riflesso. Sia $\widehat{z}$ la direzione di propagazione e conseguentemente $\widehat{x}$ la direzione di $E_{1_\parallel}$ e $\widehat{y}$ la direzione di $E_{1_\perp}$.

Si ha:

$$\vec{E}_1 = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\widehat{z} \times \vec{H}_1 = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\widehat{z} \times \left(H_{1_\parallel}\widehat{x} + H_{1_\perp}\widehat{y}\right) = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left(H_{1_\parallel}\widehat{y} - H_{1_\perp}\widehat{x}\right)$$

Ne segue:

$$E_{1_\parallel} = +\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_{1_\perp}$$

Si ha:

$$H_{1_\perp} = \frac{\tan(\theta_0 - \theta_2)}{\tan(\theta_0 + \theta_2)} H_{0_\perp} = \frac{\tan(45^0 - 26^0.95)}{\tan(45^0 + 26^0.95)} H_{0_\perp} \simeq \frac{0.3259}{3.0686} H_{0_\perp}$$

Quindi:

$$E_{1_\parallel} = +\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_{1_\perp} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{0.3259}{3.0686} H_{0_\perp} =$$
$$= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{0.3259}{3.0686} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{0_\parallel} = \frac{0.3259}{3.0686} \cdot 2.8191 = 0.2994\ mV/m$$

Per valutare la componente parallela del campo elettrico trasmesso dobbiamo valutare il campo magnetico trasmesso; per questo consideriamo la figura nella quale sono rappresentati le componenti del campo elettrico trasmesso. Sia $\widehat{z}$ la direzione di propagazione e conseguentemente $\widehat{x}$ la direzione di $E_{2_\parallel}$ e $\widehat{y}$ la direzione di $E_{2_\perp}$.

Si ha:

$$\vec{E}_2 = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_2}} \widehat{z} \times \vec{H}_2 = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_2}} \widehat{z} \times \left(H_{2_\parallel} \widehat{x} + H_{2_\perp} \widehat{y} \right) = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_2}} \left(H_{2_\parallel} \widehat{y} - H_{2_\perp} \widehat{x} \right)$$

Ne segue:

$$E_{2_\parallel} = +\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_2}} H_{2_\perp}$$

Si ha:

$$H_{2_\perp} = \frac{2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{\sin(\theta_0 + \theta_2)\cos(\theta_0 - \theta_2)} H_{0_\perp} = \frac{2 \sin 45^0 \cos 45^0}{\sin(45^0 + 26^0.95)\cos(45^0 - 26^0.95)} H_{0_\perp} =$$
$$= \frac{1}{0.9508 \cdot 0.9508} H_{0_\perp}$$

Quindi:

$$E_{2_\parallel} = +\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_2}} H_{2_\perp} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_2}} \frac{1}{0.9040} H_{0_\perp} =$$
$$= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_2}} \frac{1}{0.9040} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{0_\parallel} = \frac{1}{n_2} \frac{1}{0.9040} \cdot 2.8191 = 1.9990\ mV/m$$

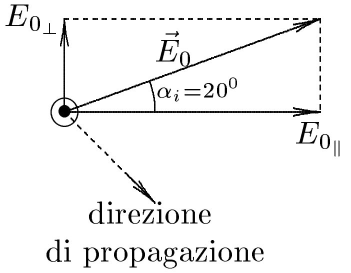
Valutiamo l'angolo di Brewster:

$$\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1} = 1.560 \Longrightarrow \theta_B = 57^0.339$$

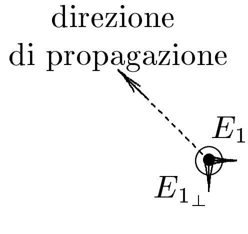
L'angolo di incidenza é minore dell'angolo di Brewster.

Configuriamo i vettori del campo elettrico incidente, riflesso e trasmesso:

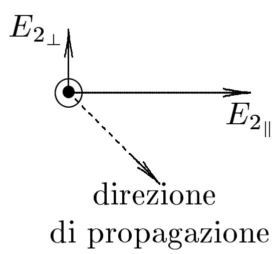
Campo elettrico incidente



Campo elettrico riflesso



Campo elettrico trasmesso



02-27) Esercizio n. 3 del 4/10/2002

Sia dato un array di un certo numero di antenne a mezz'onda parallele ed equidistanti i cui centri sono situati sull'asse x delle coordiante e la direzione della corrente é lungo l'asse z. Utilizzando alimentazione uniforme e in fase si desidera che l'array produca un singolo lobo principale largo 20^0, fra due direzioni di intensitá nulla, in direzione broad-side. Calcolare il numero minimo di antenne. Approssimando il numero cosí trovato al numero intero immediatamente piú grande, valutare il rapporto d/λ che lascia inalterata la larghezza del lobo e con il valore cosí trovato graficare il diagramma di radiazione (l'array factor normalizzato).

———————

L'array factor normalizzato, per un sistema di antenne alimentate in modo uniforme ed in fase, é:

$$K(\psi) = \frac{1}{n}\left[\frac{\sin\left(\dfrac{n\pi d}{\lambda}\cos\psi\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi d}{\lambda}\cos\psi\right)}\right]$$

Nel piano $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, risulta:

$$K(\phi) = \frac{1}{n}\left[\frac{\sin\left(\dfrac{n\pi d}{\lambda}\cos\phi\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi d}{\lambda}\cos\phi\right)}\right]$$

Esso ha un massimo principale per $\phi = 90^0$.

Esso si annulla quando:

$$\frac{n\pi d}{\lambda}\cos\phi^* = \pi$$

ossia:

$$\cos\phi^* = \frac{\lambda}{nd}$$

quindi:

Se indichiamo con Ψ^* l'angolo di semiapertura del lobo, risulta:

$$\Psi^* = 90 - \phi^*$$

e, quindi:

$$\sin\Psi^* = \frac{\lambda}{nd}$$

Poiché deve essere, dai dati del problema:

$$2\Psi^* = 20^=$$

si ha:

$$\sin 10^0 = \frac{\lambda}{nd}$$

da cui:

$$n = \frac{1}{\dfrac{d}{\lambda}\sin 10^0}$$

Poiché desideriamo che ci sia un lobo in direzione broadside, deve essere necessariamente

$$\frac{d}{\lambda} < 1$$

Quindi il minimo valore di n si ha per $\dfrac{d}{\lambda} = 1$ e risulta:

$$n = \frac{1}{\sin 10^0} = \underline{\underline{5.76}}$$

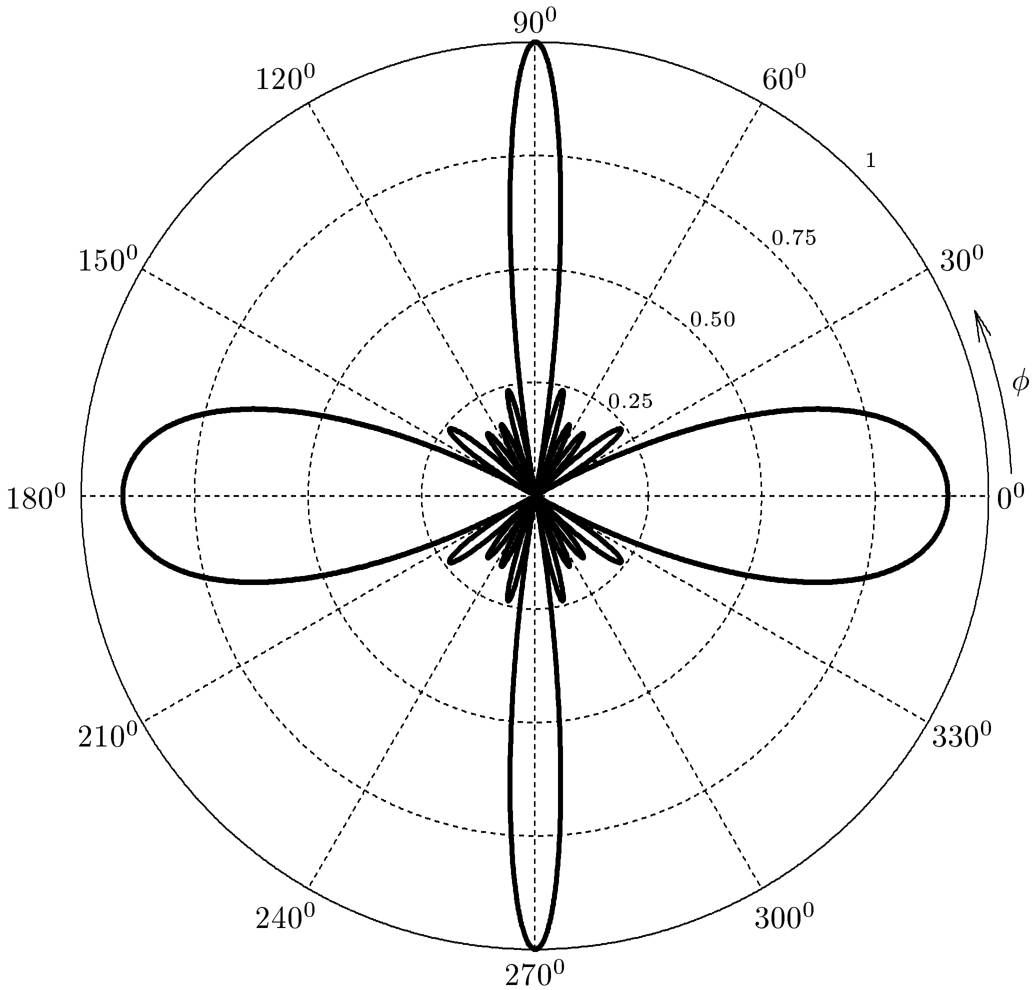
Posto $n = 6$, risulta:

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{1}{n\sin 10^0} = \underline{\underline{0.9598}}$$

Riportiamoin tabella il valore dell'array factor normalizzato riferito a sei antenne con $d/\lambda = 0.9598$.

ϕ	$K(\phi)$	ϕ	$K(\phi)$	ϕ	$K(\phi)$
0^0	0.9094	5^0	0.8928	10^0	0.8356
15^0	0.7200	20^0	0.5284	25^0	0.2665
30^0	0.0132	35^0	0.2078	40^0	0.2168
45^0	0.0442	50^0	0.1439	55^0	0.1375
60^0	0.0618	65^0	0.1705	70^0	0.0185
75^0	0.2368	80^0	0.0000	85^0	0.6415
90^0	1.0000	95^0	0.6415	100^0	0.0000
105^0	0.2368	110^0	0.0185	115^0	0.1705
120^0	0.0618	125^0	0.1375	130^0	0.1439
135^0	0.0442	140^0	0.2168	145^0	0.2078
150^0	0.0132	155^0	0.2665	160^0	0.5284
165^0	0.7200	170^0	0.8356	175^0	0.8928
180^0	0.9094	185^0	0.8928	190^0	0.8536
195^0	0.7200	200^0	0.5284	205^0	0.2665
210^0	0.0132	215^0	0.2078	220^0	0.2168
225^0	0.0442	230^0	0.1439	235^0	0.1375
240^0	0.0618	245^0	0.1705	250^0	0.0185
255^0	0.2368	260^0	0.0000	265^0	0.6415

270^0	1.0000	275^0	0.6415	280^0	0.0000
285^0	0.2368	290^0	0.0185	295^0	0.1705
300^0	0.0618	305^0	0.1375	310^0	0.1439
315^0	0.0442	320^0	0.2168	325^0	0.2078
330^0	0.0132	335^0	0.2665	340^0	0.5284
345^0	0.7200	350^0	0.8356	355^0	0.8928
360^0	0.9094				



Gli zeri nel grafico sono a $\phi = 80^0$ e $\phi = 100^0$. Quindi, come volevamo, l'apertura del lobo é 20^0.

02-28) Esercizio n. 4 del 4/10/2002

Gli indici di rifrazione del bisolfuro di carbonio a 4900 $\mathring{A}$ e a 6200 $\mathring{A}$ sono di 1.65338 e di 1.62425 rispettivamente. Assumendo che la relazione fra l'indice di rifrazione n e la lunghezza d'onda λ sia data dall'equazione di Cauchy:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2},$$

calcolare la velocitá di fase e la velocitá di gruppo nel bisolfuro di carbonio alla lunghezza d'onda di 5550 $\mathring{A}$.

(vedi es. n. 3 del 13/9/2002)

Indichiamo:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 4900 \ \mathring{A} \\ n_1 = 1.65338 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_2 = 6200 \ \mathring{A} \\ n_2 = 1.62425 \end{cases}$$

Si ha:

$$\begin{cases} n_1 = A + \dfrac{B}{\lambda_1^2} \\ n_2 = A + \dfrac{B}{\lambda_2^2} \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} A = \dfrac{\dfrac{n_1}{\lambda_2^2} - \dfrac{n_2}{\lambda_1^2}}{\dfrac{1}{\lambda_2^2} - \dfrac{1}{\lambda_1^2}} = 1.5758 \\ \\ B = \dfrac{n_2 - n_1}{\dfrac{1}{\lambda_2^2} - \dfrac{1}{\lambda_1^2}} = 1.8632 \cdot 10^{-14} \ m^2 \end{cases}$$

Quindi la relazione di dispersione é:

$$n(\lambda) = 1.5758 + \frac{1.8632 \cdot 10^{-14}}{\lambda^2}$$

Risulta:

$$\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{3.7264 \cdot 10^{-14}}{\lambda^3}$$

Per $\lambda = 5550 \ \mathring{A}$, si ha:

$$n(5550 \ \mathring{A}) = 1.6363 \qquad \frac{dn(\lambda)}{d\lambda}_{(\lambda = 5550 \ \mathring{A})} = -2.1798 \cdot 10^5 \ (m^{-1})$$

La velocitá di gruppo nei mezzi dispersivi é:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{d\omega}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\beta}$$

Essendo $\omega = \dfrac{2\pi c}{\lambda}$, si ha:

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}$$

Ne segue:

$$v_g = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{d\beta} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}\frac{1}{\left(\dfrac{d\beta}{d\lambda}\right)}$$

La seconda eguaglianza é valida sia in regime di dispersione normale che in quello di dispersione anomala.

Si ha:

$$\beta(\lambda) = \frac{2\pi}{\lambda}n(\lambda)$$

da cui:

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2}n(\lambda) + \frac{2\pi}{\lambda}\frac{dn(\lambda)}{d\lambda}$$

Per $\lambda = 5550\ \mathring{A}$ risulta:

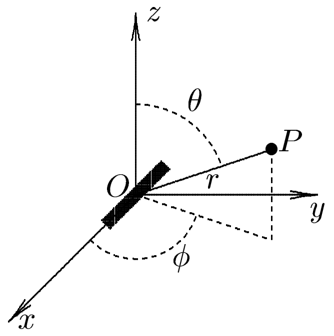
$$\frac{d\beta}{d\lambda}_{(\lambda=5550\ \mathring{A})} = -3.5845 \cdot 10^{13}\ m^{-2} \qquad v_{g_{(\lambda=5550\ \mathring{A})}} = \underline{\underline{1.7072 \cdot 10^{8}\ m/s}}$$

La velocitá di fase é:

$$v_{f_{(\lambda=5550\ \mathring{A})}} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi c}{\lambda}\frac{\lambda}{2\pi n(\lambda)} = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^{8}}{1.6363} = \underline{\underline{1.8334 \cdot 10^{8}\ m/s}}$$

02-29) Esercizio n. 1 del 23/11/2002

Un dipolo elettrico hertziano é posto sull'asse x di un sistema di riferimento cartesiano come illustrato in figura. Determinare l'espressione del vettore campo elettrico irradiato in un generico punto-campo P.



———————

Se indichiamo con ψ l'angolo formato fra la direzione del dipolo e la direzione dello osservatore (OP), il campo elettrico generato dal dipolo, in approssimazione far field, é dato da:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -i\omega\mu Il \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \sin\psi \widehat{\psi}$$

Si ha:

$$\widehat{x} \cdot \widehat{e}_r = \cos\psi$$

Poiché (vedi Formulario del corso di Campi elettromagnetici):

$$\widehat{x} = \widehat{e}_r \sin\theta\cos\phi + \widehat{e}_\phi \cos\theta\cos\phi - \widehat{e}_\phi \sin\phi$$

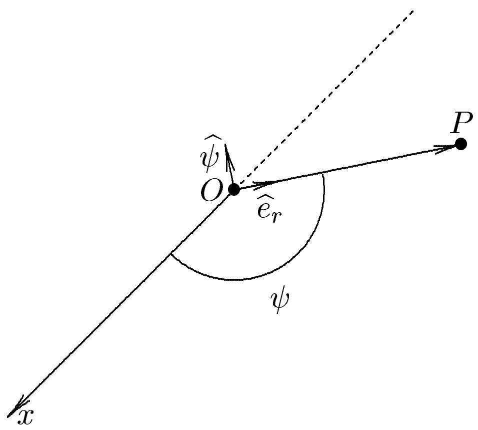
segue:

$$\cos\psi = \sin\theta\cos\phi$$

e, quindi:

$$\sin\psi = \sqrt{1-\cos^2\psi} = \sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}$$

Per valutare l'espressione di $\widehat{\psi}$ in funzione di θ e ϕ, consideriamo la seguente figura rappresentante il piano contenente l'asse x ed il vettore OP:



Si ha:

$$\widehat{x} = -\widehat{e}_r \cos(180^0 - \psi) - \widehat{\psi} \cos(\psi - 90^0) = \widehat{e}_r \cos\psi - \widehat{\psi} \sin\psi$$

da cui:

$$\widehat{\psi} = \frac{-\widehat{x} + \widehat{e}_r \cos\psi}{\sin\psi} = \frac{-\widehat{e}_\theta \cos\theta \cos\phi + \widehat{e}_\phi \sin\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\theta \cos^2\phi}}$$

Ne segue che il campo é:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -i\omega\mu Il \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left(-\widehat{e}_\theta \cos\theta \cos\phi + \widehat{e}_\phi \sin\phi\right)$$

02-30) Esercizio n. 2 del 23/11/2002

Si consideri un sistema costituito da un dipolo elettrico hertziano disposto lungo l'asse x di un sistema di riferimento cartesiano e da un dipolo elettrico hertziano disposto lungo l'asse z dello stesso sistema di riferimento. I dipoli sono alimentati in modo tale che la corrente su uno di essi sia sfasata di $\pi/2$ rispetto all'altra. Determinare l'espressione del vettore campo elettrico irradiato in un generico punto-campo P. Valutare lo stato di polarizzazione della radiazione emessa in un generico punto P situato sull'asse y.

———————

Il campo elettrico competente al dipolo lungo l'asse z, la cui corrente é sfasata di $\pi/2$ rispetto a quella che scorre nel dipolo orientato lungo l'asse x del precedente problema, é:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -i\omega\mu Il\frac{e^{ikr}}{4\pi r} i \sin\theta \widehat{e}_\theta$$

Ne segue che il campo elettrico totale generato da tutto il sistema é

$$\vec{E}(\vec{r}) = -i\omega\mu Il\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left[-\widehat{e}_\theta\left(\cos\theta\cos\phi - i\sin\theta\right) + \widehat{e}_\phi \sin\phi\right]$$

Sull'asse y risulta $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$, quindi:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -i\omega\mu Il\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left(i\widehat{e}_\theta + \widehat{e}_\phi\right)$$

L'onda é, quindi, polarizzata circolarmente.

02-31) Esercizio n. 3 del 23/11/2002

Si consideri una fibra ottica, il cui nucleo abbia raggio a, eccitata nel modo TE_{01}. Si determini l'espressione della potenza (mediata in un periodo) convogliata nel nucleo della fibra. Si utilizzi l'integrale di Lommel:

$$\int_0^a x[J_\nu(kx)]^2 dx = \frac{1}{2}a^2 \left\{[J'_\nu(ka)]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{k^2a^2}\right)[J_\nu(ka)]^2\right\}$$

———————

(vedi es. n. 2 del 25/11/2000)

Le componenti del campo elettromagnetico nel nucleo di una fibra ottica rivestita sono:

$$E_z = A_\nu J_\nu(hr)e^{i\nu\phi}e^{-i\beta z}$$

$$H_z = B\nu J_\nu(hr)e^{i\nu\phi}e^{-i\beta z}$$

$$E_r = -\frac{i}{h^2}\left[\beta h A_\nu J'_\nu(hr) + i\omega\mu_0\frac{\nu}{r}B_\nu J_\nu(hr)\right]e^{i\nu\phi}e^{-i\beta z}$$
$$E_\phi = -\frac{i}{h^2}\left[i\beta\frac{\nu}{r}A_\nu J_\nu(hr) - h\omega\mu_0 B_\nu J'_\nu(hr)\right]e^{i\nu\phi}e^{-i\beta z}$$
$$H_r = -\frac{i}{h^2}\left[-i\omega\epsilon_1\frac{\nu}{r}A_\nu J_\nu(hr) + h\beta B_\nu J'_\nu(hr)\right]e^{i\nu\phi}e^{-i\beta z}$$
$$H_\phi = -\frac{i}{h^2}\left[h\omega\epsilon_1 A_\nu J'_\nu(hr) + i\beta\frac{\nu}{r}B\nu J_\nu(hr)\right]e^{i\nu\phi}e^{-i\beta z}$$

dove $J'_\nu(hr)$ indica la derivata prima della funzione di Bessel J_ν rispetto ad hr.

La relazione fra l'autovalore h e la costante di propagazione β é:

$$h^2 = \omega^2\epsilon_1\mu_0 - \beta^2$$

Posto $k_1^2 = \omega^2\epsilon_1\mu_0$ si ha:

$$h^2 = k_1^2 - \beta^2$$

La costante dielettrica del core é correlata all'indice di rifrazione dall'equazione:

$$n_1^2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}$$

Per il modo TE_{01}, si ha:

$$E_z = 0$$

$$H_z = B_0 J_0(hr)e^{-i\beta z}$$

$$E_r = -\frac{i}{h^2}\left[\beta h A_0 J_0'(hr)\right] e^{-i\beta z}$$
$$E_\phi = -\frac{i}{h^2}\left[-h\omega\mu_0 B_0 J_0'(hr)\right] e^{-i\beta z}$$
$$H_r = -\frac{i}{h^2}\left[h\beta B_0 J_0'(hr)\right] e^{-i\beta z}$$
$$H_\phi = -\frac{i}{h^2}\left[h\omega\epsilon_1 A_0 J_0'(hr)\right] e^{-i\beta z}$$

L'espressione del vettore di Poynting complesso, mediato in un periodo,é:

$$< \vec{S}_c >= \frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^*$$

Consideriamo il prodotto vettoriale $\vec{A}\times\vec{B}$ in coordinate cilindriche:

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_\phi B_z - A_z B_\phi)\,\widehat{e}_\rho + (A_z B_\rho - A_\rho B_z)\,\widehat{e}_\phi + (A_\rho B_\phi - A_\phi B_\rho)\,\widehat{z}$$

Quindi:

$$< \vec{S}_c >= \frac{1}{2}\left\{\frac{i}{h}\omega\mu_0 B_0 J_0'(hr) B_0 J_0(hr)\right\}\widehat{e}_\rho - \frac{1}{2}\left\{\frac{i}{h}\beta A_0 J_0'(hr) B_0 J_0(hr)\right\}\widehat{e}_\phi +$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{i}{h}\beta A_0 J_0'(hr)\right]\left[-\frac{i}{h}\omega\epsilon_1 A_0 J_0'(hr)\right] - \left[\frac{i}{h}\omega\mu_0 B_0 J_0'(hr)\right]\left[-\frac{i}{h}\beta B_0 J_0'(hr)\right]\right\}\widehat{e}_z$$

la cui parte reale é, ovviamente, la componente lungo l'asse z.

$$< \vec{S} >= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{h^2}\beta\omega J_0'^2(hr)\left[\epsilon_1 A_0^2 + \mu_0 B_0^2\right]\right\}\widehat{e}_z$$

La potenza trasmessa é allora:

$$P = \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{h^2}\beta\omega\left[\epsilon_1 A_0^2 + \mu_0 B_0^2\right]\right\}\int_\sigma J_0'^2(hr)d\sigma$$

Ma:

$$\int_\sigma J_0'^2(hr)d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^a J_0'^2(hr) r dr d\phi$$

Ricordiamo l'espressione ricorrente per le funzioni di Bessel:

$$xJ'_\nu(x) = \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x)$$

Ne segue:

$$J'_0(x) = -J_1(x)$$

e, quindi:

$$\int_\sigma J_0'^2(hr)d\sigma = -\int_0^{2\pi}\int_0^a J_1^2(hr) r dr d\phi$$

Applicando il risultato dell'integrale di Lommel si ha:

$$\int_0^a J_1^2(hr) r dr = \frac{1}{2}a^2\left[J'^2_0(ha) + J_0^2(ha)\right]$$

In definitiva:

$$P = \frac{1}{2}\pi a^2\left\{\frac{1}{h_{01}^2}\beta\omega\left[\epsilon_1 A_0^2 + \mu_0 B_0^2\right]\right\}\left[J'^2_0(h_{01}a) + J_0^2(h_{01}a)\right]$$

02-32) Esercizio n. 4 del 23/11/2002

Una piccola particella di raggio a é sottoposta all'interazione gravitazionale del Sole ed alla prerssione di radiazione da esso esercitata. Se la potenza irradiata dal Sole é $3.8 \cdot 10^{26}$ W, calcolare il valore di a al di sotto del quale la particella viene respinta dal Sole. Si assuma che la particella sia assorbente ed abbia una massa volumica di 5000 Kg/m^3. La massa del sole é $M_s = 1.98596 \cdot 10^{30}$ Kg e la costante gravitazionale é $G = 6.672 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

———————

(É identico all'esercizio n. 2 del 4/10/2000)

Fine Esercizi Campi e.m. - 2002