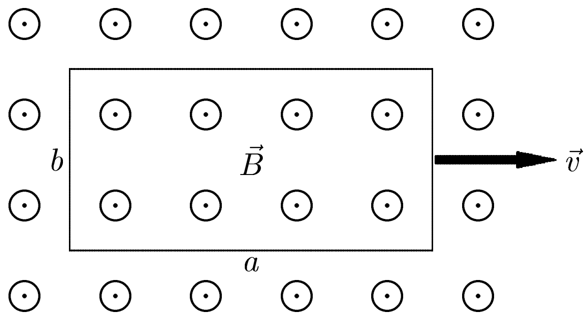
Esercizi svolti di Campi elettromagnetici - Anno 2000

00-1) Esercizio n. 1 del 26/1/2000

Si abbia una spira rettangolare di lati a e b che si muove di moto rettilineo uniforme in un campo di induzione magnetica uniforme, come in figura:



Utilizzando le leggi di trasformazione dei campi, calcolare esplicitamente la f.e.m. indotta nella spira. Si assuma $\gamma = 1$.

———————

Come sappiamo la f.e.m. che agisce su un circuito é data data da:

$$\epsilon = \oint_{\gamma} \vec{E}\,' \cdot d\vec{l}\,'$$

essendo $\vec{E}\,'$ il campo elettrico su ciascun punto del conduttore, valutato rispetto ad un osservatore solidale con il conduttore in moto. Pertanto dobbiamo valutare il campo $\vec{E}\,'$ rispetto ad un sistema $S\,'$ solidale alla spira, cioé che si muove con velocitá $\vec{v}$ rispetto ad un sistema S solidale con il laboratorio.

Sia $x\,' \equiv x$ la direzione di $\vec{v}$ e $y\,' \equiv y$ la direzione di $\vec{B}$.

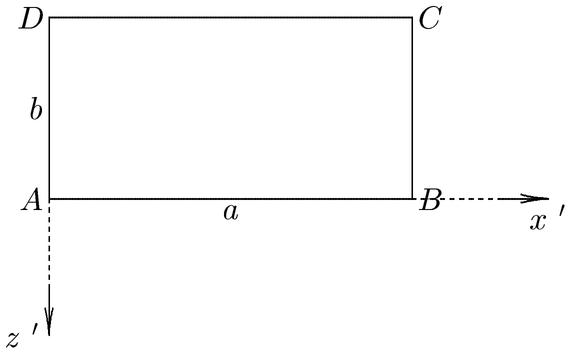
Rispetto al sistema S, si ha:

$$E_x = E_y = E_z = 0; \qquad B_x = 0,\ B_y = B,\ B_z = 0$$

Rispetto al sistema $S\,'$ risulta, allora, nell'ipotesi di $\gamma = 1$:

$$E\,'_x = 0,\ E\,'_y = 0,\ E\,'_z = vB$$

Consideriamo il percorso lungo la spira come indicato in figura:



La f.e.m. indotta risulta, allora:

$$\boxed{\epsilon = \int_{BC} -vBdz\,' + \int_{DA} vBdz\,' = 0}$$

essendo nulli i contributi dei lati AB e CD.

00-2) Esercizio n. 2 del 26/1/2000

La massima potenza che puó trasportare un cavo coassiale é determinata dal valore massimo del modulo del campo elettrico che puó essere sostenuto dal dielettrico. Poiché in un cavo coassiale il modulo del campo elettrico nel dielettrico varia con legge $\frac{1}{r}$, il suo valore massimo E^* si ha per $r = a$, essendo a il raggio del conduttore interno. Se b é il raggio del conduttore esterno, si indichi con ξ il rapporto $\frac{b}{a}$ e si esprima il valore assoluto della differenza di potenziale massima di alimentazione in funzione del valore massimo E^* del modulo del campo, di b e di ξ. Si determini, allora, nel cavo cosí alimentato, la potenza trasportata e si valuti il valore di ξ per cui essa risulti massima.

———————

Il modulo del campo elettrico, in un cavo coassiale, é:

$$|\vec{E}_t| = \frac{|V_0|}{\left|\ln\frac{a}{b}\right|}\frac{1}{r}$$

il cui valore massimo é:

$$|\vec{E}_t|_{max} = \frac{|V_0|}{\left|\ln\frac{a}{b}\right|}\frac{1}{a} = E^*$$

Posto $\xi = \frac{b}{a} > 1$, si ha:

$$E^* = \frac{|V_0|}{\left|\ln\frac{1}{\xi}\right|}\frac{\xi}{b} = \frac{|V_0|\xi}{b\ln\xi}$$

da cui:

$$|V_0| = E^* b\frac{\ln\xi}{\xi}$$

D'altra parte sappiamo che la potenza trasportata dal cavo si puó esprimere come:

$$P = \frac{1}{2}V_0^2\frac{2\pi Y}{\ln\frac{b}{a}}$$

Sostituendo il valora massimo di $|V_0|$ in corrispondenza di cui si ha il campo massimo all'interno del cavo, si ottiene:

$$P_{max} = {E^*}^2 b^2\frac{\ln\xi}{\xi^2}\frac{\pi}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}$$

Per massimizzare tale potenza massima, imponiamo che:

$$\frac{dP_{max}}{d\xi} = E^{*2} b^2 \frac{\pi}{\sqrt{\dfrac{\mu}{\epsilon}}} \frac{\xi - 2\xi \ln \xi}{\xi^4} = 0$$

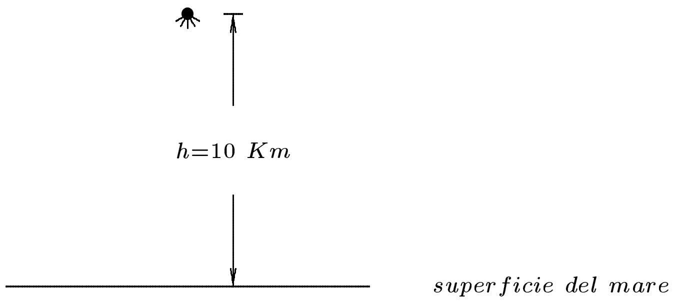
ossia:

$$2 \ln \xi = 1 \Longrightarrow \ln \xi = \frac{1}{2} \Longrightarrow \underline{\underline{\xi = \frac{b}{a} = 1.65}}$$

00-3) Esercizio n. 3 del 26/1/2000

Un sottomarino in immersione tenta di mettersi in contatto radio con un aeroplano dotato di trasmittente VLF che emette ad una frequenza di 20 KHz e che si trova a 10 Km dalla superficie dell'acqua nella direzione verticale rispetto al sottomarino. Se la potenza d'uscita della radiotrasmittente dell'aereo é di 200 KW e la sensibilitá del ricevitore in dotazione al sottomarino é 1 $\mu V/m$, calcolare la massima profonditá del sottomarino affinché esso possa ricevere il segnale dall'aereo. Assumere che la trasmittente irradi isotropicamente, che l'incidenza sia normale e che i parametri costitutivi del mare siano: $\sigma = 4\ S/m$, $\epsilon_r = 81$ e $\mu_r = 1$.

———————



Calcoliamo il valore del campo elettrico associato all'onda elettromagnetica emessa dall'aereo sulla superficie del mare, in aria.

La densitá di potenza su una superficie sferica di raggio h é:

$$\mathscr{P} = \frac{P_T}{4\pi h^2}$$

e poiché:

$$\mathscr{P} = \frac{E_0^2}{2Z}$$

si ha:

$$E_0^2 = 2Z\mathscr{P} = 2Z\frac{P_T}{4\pi h^2}$$

ossia:

$$E_0 = \sqrt{\frac{ZP_T}{2\pi h^2}} = \sqrt{\frac{377 \cdot 200 \cdot 10^3}{2\pi \cdot (10^4)^2}} = \underline{\underline{0.346\ V/m}}$$

All'interno del mare il campo elettrico varia secondo la legge:

$$E = E_2 e^{-\alpha_2 z}$$

essendo E_2 il modulo del campo elettrico immediatamente prossimo alla superficie del mare in acqua e α_2 il coefficiente di attenuazione in mare.

Per incidenza normale, risulta, come sappiamo dalla teoria:

$$\vec{E}_2 = \frac{2k_1}{k_2 + k_1}\vec{E}_0$$

essendo $k_2 = \beta_2 + i\alpha_2$ la costante di propagazione nel mare e $k_1 = \beta_1$ quella in aria.

Il modulo di $\vec{E}_2$ é:

$$E_2 = \frac{2\beta_1}{\sqrt{(\beta_1+\beta_2)^2 + \alpha_2^2}}E_0$$

Si ha:

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{4}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 81 \cdot 2\pi \cdot 20 \cdot 10^3} = 4.43 \cdot 10^4$$

Pertanto, essendo:

$$\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2 >> 1$$

si ha:

$$\alpha_2 \simeq \beta_2 \simeq \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4}{2}} = \underline{\underline{0.562}}$$

e:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} = 4.189 \cdot 10^{-4}$$

Pertanto:

$$E_2 = \frac{2 \cdot 4.189 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{(4.189 \cdot 10^{-4} + 0.562)^2 + (0.562)^2}}0.346 = \frac{8.378 \cdot 10^{-4}}{0.795}0.346 = 0.364 \cdot 10^{-3}$$

$$E = 0.364 \cdot 10^{-3} e^{-0.562 \cdot z}$$

La condizione per trovare la profonditá al di sotto della quale il sommergibile non riceve alcun segnale é:

$$10^{-6} = 0.364 \cdot 10^{-3} e^{-0.562 \cdot z^*}$$

ossia:

$$e^{-0.562 \cdot z^*} = 2.747 \cdot 10^{-3}$$

e, ancora:

$$-0.562 \cdot z^* = -5.897$$

da cui:

$$\underline{\underline{z^* = 10.49\ m}}$$

00-4) Esercizio n. 4 del 26/1/2000

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 20\ MHz$ incide normalmente su un suolo umido caratterizzato dai seguenti parametri costitutivi: $\sigma = 10^{-2}\ S/m$, $\epsilon_r = 10$ e $\mu_r = 1$. Si calcoli il coefficiente di attenuazione dell'onda, la profonditá di penetrazione, la costante di propagazione e la lunghezza d'onda nel mezzo. Si ripeta il calcolo nel caso in cui la stessa onda incida su un suolo asciutto di parametri costitutivi: $\sigma = 10^{-4}\ S/m$, $\epsilon_r = 3$ e $\mu_r = 1$.

———————

Suolo umido: $\sigma = 10^{-2}\ S/m$, $\epsilon_r = 10$, $\mu_r = 1$, $\omega = 2\pi \cdot 20 \cdot 10^6\ rad/s \Longrightarrow \lambda_0 = 15\ m$
Si ha:

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{10^{-2}}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 10 \cdot 2\pi \cdot 20 \cdot 10^6} = 0.9 \Longrightarrow \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} = 0.8$$

In tal caso non si possono applicare le formule approssimate. Si ha, allora:

$$\begin{aligned}\alpha =& \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}-1\right]} = 2\pi \cdot 20 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{10}{2c^2}[0.3416]} = \\ =& 1.256 \cdot 10^8 \cdot 4.356 \cdot 10^{-9} = \underline{\underline{0.547\ m^{-1}}} \\ \delta =& \frac{1}{\alpha} = \underline{\underline{1.827\ m}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta =& \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}+1\right]} = 2\pi \cdot 20 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{10}{2c^2}[2.3416]} = \\ =& 1.256 \cdot 10^8 \cdot 1.140 \cdot 10^{-8} = \underline{\underline{1.432\ rad/m}} \\ \lambda =& \frac{2\pi}{\beta} = \underline{\underline{4.386\ m}}\end{aligned}$$

Suolo asciutto: $\sigma = 10^{-4}\ S/m$, $\epsilon_r = 3$, $\mu_r = 1$, $\omega = 2\pi \cdot 20 \cdot 10^6\ rad/s \Longrightarrow \lambda_0 = 15\ m$
Si ha:

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{10^{-4}}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 2\pi \cdot 20 \cdot 10^6} = 3 \cdot 10^{-2} \Longrightarrow \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} = 9 \cdot 10^{-4} << 1$$

Quindi possiamo utilizzare le formule approssimate.

$$\alpha = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad e \quad \beta \simeq \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

$$\alpha = \frac{10^{-4}}{2}\sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 3}} = \underline{\underline{1.087 \cdot 10^{-2}\ m^{-1}}}$$

$$\delta = \underline{\underline{91.9\ m}}$$

$$\beta = \frac{1}{c} 2\pi \cdot 20 \cdot 10^{6} \sqrt{3} = \underline{\underline{0.7255\ rad/m}}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \underline{\underline{8.66\ m}}$$

00-5) Esercizio n. 1 del 23/2/2000

Si abbia un'antenna costituita da un certo numero di sottili spire strettamente sovrapposte, ciascuna di raggio $a = 0.02\lambda$, che irradia in aria. Calcolare il numero di spire affinché la resistenza di radiazione (far field) dell'antenna sia $R_a = 25\ Ohm$.

———————

(vedi Compiti Campi elettromagnetici: es. 2 del 9/9/95, es. 3 del 24/7/96 ed es. 4 del 12/4/97)

Sia N il numero di spire di cui é composta l'antenna.

I campi (elettrico e magnetico) far-field generati dall'antenna si ottengono moltiplicando per N i campi generati da una singola spira; si ha, cioé:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \widehat{e}_\phi \omega\mu_0 k I N \pi a^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\sin\theta$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\widehat{e}_\theta k^2 I N \pi a^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\sin\theta$$

La densitá di potenza mediata in un periodo é:

$$<\vec{S}>= \frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^* = \frac{1}{32\pi^2 r^2}\omega\mu_0 k^3 I^2 N^2 \pi^2 a^4 \sin^2\theta \widehat{e}_r$$

Moltiplicando e dividendo per k, la densitá di potenza diventa:

$$<\vec{S}>= \frac{1}{32\pi^2 r^2}\omega\mu_0 \frac{k^4}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} I^2 N^2 \pi^2 a^4 \sin^2\theta\widehat{e}_r = \frac{1}{32 r^2} Z_0 (2\pi)^4 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I^2 N^2 \sin^2\theta\widehat{e}_r$$

avendo posto $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

La potenza totale irradiata attraverso una superficie sferica é:

$$P = \int_{sfera} <\vec{S}> \cdot\widehat{n} d^2 r = \int_{sfera} |<\vec{S}>| r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \frac{1}{32} Z_0 (2\pi)^4 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I^2 N^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta =$$
$$= \frac{1}{32} Z_0 (2\pi)^5 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I^2 N^2 \frac{4}{3} = \frac{1}{24} Z_0 (2\pi)^5 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I^2 N^2$$

La resistenza di radiazione é:

$$R_a = \frac{2P}{|I|^2} = \frac{1}{12} Z_0 (2\pi)^5 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 N^2$$

che, per $Z_0 \simeq 377 Ohm$, si puó scrivere:

$$R_a = 3.076 \cdot 10^5 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 N^2$$

Affinché R_a sia 25 *Ohm* occorre che:

$$N^2 = \frac{25}{3.076 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4} = \frac{25}{3.076 \cdot 10^5 \cdot (0.02)^4} = 508$$

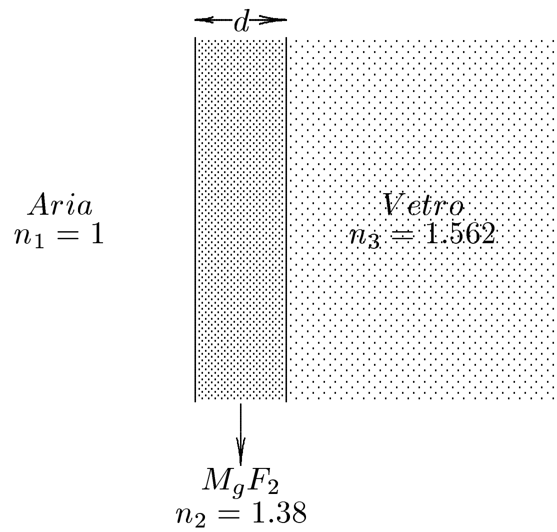
da cui:

$$\underline{\underline{N = 22.5 \; spire}}$$

00-6) Esercizio n. 2 del 23/2/2000

La lente di una macchina fotografica ha un rivestimento antiriflettente di MgF_2 ($n = 1.38$). Se la lente di vetro (supposta di spessore infinito) ha un indice di rifrazione $n = 1.562$, in corrispondenza della lunghezza d'onda $\lambda_0 = 520\ nm$, calcolare lo spessore minimo del rivestimento nonché la percentuale di potenza luminosa incidente che arriva sulla lente confrontandola con quella che arriverebbe in assenza di rivestimento.

——————



Come sappiamo dalla teoria delle lamine piane, se l'indice di rifrazione n_2 dello strato é piú piccolo dell'indice di rifrazione del terzo mezzo (nell'ipotesi che l'indice di rifrazione del primo mezzo sia $n_1 = 1$), la riflettivitá é minima per

$$n_2 d = m\frac{\lambda_0}{4} \qquad \text{m dispari}$$

Pertanto lo spessore minimo del rivestimento affinché si abbia la minima riflettivitá si ottiene per $m = 1$ e risulta:

$$d = \frac{\lambda_0}{4n_2} = \frac{520 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 1.38} = \underline{\underline{9.42 \cdot 10^{-8}\ m}}$$

Il valore della riflettivitá non puó annullarsi in quanto nel nostro caso non é soddisfatta la condizione $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$. Essa risulta:

$$R = \left(\frac{n_1 n_3 - n_2^2}{n_1 n_3 + n_2^2}\right)^2 = \left(\frac{1.562 - 1.9044}{1.562 + 1.9044}\right)^2 = \frac{0.1172377}{12.01592896} = 9.75 \cdot 10^{-3}$$

La percentuale di potenza luminosa incidente che arriva sulla lente é data dal coefficiente di trasmissione della lamina che, come sappiamo, risulta essere $T = 1 - R$. Si ha, pertanto:

$$\underline{\underline{T = 99.025\%}}$$

In assenza di strato antiriflettente si ha:

$$T = \frac{4n_1n_3}{(n_1+n_3)^2} = \frac{6.248}{6.563844} = \underline{\underline{95.19\%}}$$

00-7) Esercizio n. 3 del 23/2/2000

Una sorgente in quiete emette un fascio di microonde, di lunghezza d'onda $\lambda_0 = 12\ cm$, che colpisce un aeroplano in avvicinamento. Le onde riflesse dall'aeroplano vengono rivelate da un ricevitore in quiete posto nelle immediate vicinanze della sorgente e la loro frequenza differisce da quella delle microonde emesse dalla sorgente di una quantitá $\Delta\nu = 990\ Hz$. Calcolare la velocitá di avvicinamento dell'aeroplano. Si assuma $\gamma = 1$.

———————

(vedi Compito di campi elettromagnetici: es. 3 del 28/6/97)

Sia $\nu_0 = \dfrac{c}{\lambda_0} = \dfrac{3 \cdot 10^8}{12 \cdot 10^{-2}} = 2.5\ GHz$ la frequenza emessa dalla sorgente in quiete S.

La frequenza osservata da un osservatore solidale ad un sistema di riferimento $S\,'$ in moto rispetto al sistema S, in generale, é data:

$$\omega\,' = \gamma(\omega - \vec{v} \cdot \vec{k}) \tag{1}$$

Nel nostro caso la frequenza osservata da un osservatore solidale con l'aereo in avvicinamento ($\vec{v} \cdot \vec{k} = vk \cos 180^0 = -vk,\ \gamma = 1$) é:

$$\omega\,' = \omega + vk = \omega + v\frac{\omega}{c} = \omega\left(1 + \frac{v}{c}\right) \tag{2}$$

essendo v la velocitá dell'aereo.

Tale frequenza é quella dell'onda riflessa dall'aereo.

L'osservatore solidale al sistema S rivela l'onda riflessa dall'aereo e sia ω'' la frequenza (angolare) misurata. Per calcolare tale frequenza dobbiamo invertire la formula (1) in quanto dobbiamo calcolare la frequenza relativa ad un sistema in quiete in funzione della frequenza relativa ad un sistema in moto. Si ha, quindi:

$$\omega = \gamma(\omega\,' + \vec{v} \cdot \vec{k}\,')$$

che nel nostro caso diventa:

$$\omega'' = \omega\,' + vk\,' = \omega\,' + v\frac{\omega\,'}{c} = \omega\,'\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

in quanto questa volta $\vec{v}$ e $\vec{k}\,'$ sono paralleli.

Sostituendo ad $\omega\,'$ la sua espressione in funzione di ω data dalla (2), si ha:

$$\omega'' = \omega\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2 \tag{3}$$

Poiché certamente $v << c$, la (3) puó scriversi:

$$\omega'' \simeq \omega\left(1 + 2\frac{v}{c}\right) = \omega + 2\omega\frac{v}{c}$$

ossia:

$$\nu'' - \nu = 2\nu \frac{v}{c}$$

da cui:

$$v = \frac{\nu'' - \nu}{2\nu} c = \frac{990}{2 \cdot 2.5 \cdot 10^9} 3 \cdot 10^8 = \underline{\underline{59.4\ m/s = 213.84\ Km/h}}$$

00-8) Esercizio n. 4 del 23/2/2000

Una stella pulsar emette contemporaneamente dei segnali a 300 MHz e 900 MHz rispettivamente. Il segnale a bassa frequenza arriva ritardato di 0.1 s rispetto a quello a piú alta frequenza. Se il ritardo é causato dalla presenza di elettroni nello spazio, calcolare la quantitá NL essendo N la densitá volumica degli elettroni e L la distanza percorsa dalla radiazione elettromagnetica.

(vedi Esercizi di Campi elettromagnetici: es. 1 del 28/7/94 ed es. 1 del 20/7/99)

Calcoliamo la velocitá di gruppo dell'onda elettromagnetica che si propaga in un plasma omogeneo e privo di collisioni. Si ha:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$$

essendo $\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}$.

Poiché β é una funzione crescente, si puó scrivere:

$$v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1}$$

Si ha, allora:

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}} + \frac{\omega}{c}\frac{2\frac{\omega_P^2}{\omega^3}}{2\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}} = \frac{1}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}} + \frac{1}{c}\frac{\frac{\omega_P^2}{\omega^2}}{\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}} = \frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}}$$

Quindi:

$$v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}$$

Sia L la distanza percorsa dalla radiazione elettromagnetica.

Indicando con ω_1 la frequenza piú bassa e con ω_2 la frequenza piú alta, i tempi impiegati a percorrere la distanza L sono rispettivamente:

$$\tau_1 = \frac{L}{c\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega_1^2}}} \qquad e \qquad \tau_2 = \frac{L}{c\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega_2^2}}}$$

Poiché sicuramente risulta:

$$\omega_P^2 << \omega_1^2 \qquad e \qquad \omega_P^2 << \omega_2^2$$

si ha:

$$\tau_1 \simeq \frac{L}{c}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\omega_P^2}{\omega_1^2}\right) \qquad e \qquad \tau_2 \simeq \frac{L}{c}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\omega_P^2}{\omega_2^2}\right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\tau_1 - \tau_2 = \frac{L}{2c}\omega_P^2\left(\frac{1}{\omega_1^2}-\frac{1}{\omega_2^2}\right) &= \frac{LN}{2c}\frac{e^2}{m\epsilon_0}\left(\frac{1}{\omega_1^2}-\frac{1}{\omega_2^2}\right) = \\
&= 1.34\cdot 10^{-7}LN\left[\frac{1}{(3\cdot 10^8)^2}-\frac{1}{(9\cdot 10^8)^2}\right] = \\
&= 1.34\cdot 10^{-7}LN\left(1.1111\cdot 10^{-17} - 1.2346\cdot 10^{-18}\right) = \\
&= 1.34\cdot 10^{-7}\cdot 9.8765\cdot 10^{-18}LN = \\
&= 1.3235\cdot 10^{-24}LN
\end{aligned}$$

Per $\tau_1 - \tau_2 = 0.1$, si ha:

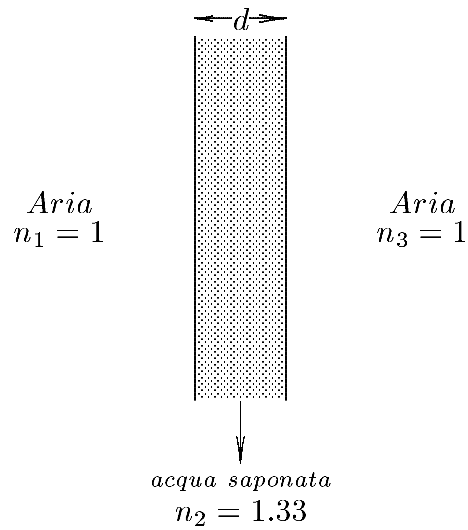
$$LN = \frac{0.1}{1.3235\cdot 10^{-24}} = \underline{\underline{7.56\cdot 10^{22}\ elettroni/m^2}}$$

00-9) Esercizio n. 1 del 6/5/2000

Un fascetto di luce rossa monocromatica, di lunghezza d'onda relativa al vuoto $\lambda_0 =$ 6000 Å, incide normalmente su una sottilissima lamina di acqua saponata di indice di rifrazione $n_2 = 1.33$. Calcolare il minimo spessore della lamina affinché la riflettivitá sia minima nei seguenti due casi: a) la lamina é immersa in aria; b) la lamina é depositata su una superficie di vetro di indice di rifrazione $n_3 = 1.5$ ed il mezzo da cui proviene la luce é l'aria. Valutare, nei due casi, il valore della riflettivitá. Con il valore dello spessore calcolato nel punto a), si determini la riflettivitá nel caso in cui la lamina é depositata sul vetro.

———————

a) Lamina immersa in aria.



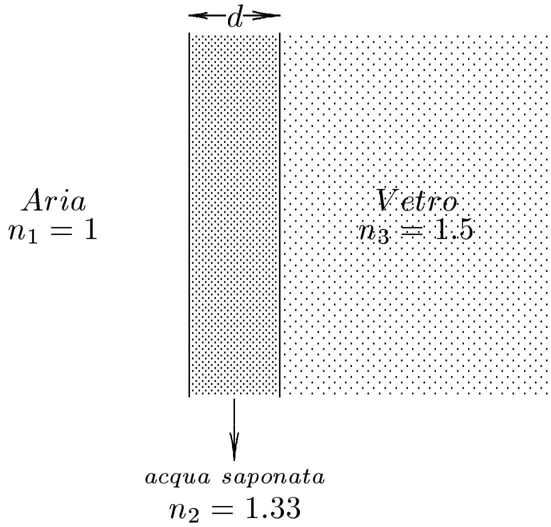
In questo caso la riflettivitá é minima per $n_2 d = m\dfrac{\lambda_0}{4}$ con m pari.

Quindi:

$$d_{min} = m_{pari}\frac{\lambda_0}{4n_2} = m_{pari}\frac{6000}{5.32}. \quad \text{Per } m = 2 \Longrightarrow d_{min} = \frac{6000}{2.66}\ \mathring{A} = \underline{\underline{2255.64\ \mathring{A}}}$$

Il valore della riflettivitá é zero.

b) Lamina depositata su superficie di vetro.



In questo caso la riflettivitá é minima per $n_2 d = m\dfrac{\lambda_0}{4}$ con m dispari.
Quindi:

$$d_{min} = m_{dispari}\frac{\lambda_0}{4n_2} = m_{dispari}\frac{6000}{5.32}. \quad \text{Per } m = 1 \Longrightarrow d_{min} = \frac{6000}{5.32}\ \mathring{A} = 1127.82\ \mathring{A}$$

Il valore della riflettivitá é:

$$R_{min} = \left(\frac{n_1 n_3 - n_2^2}{n_1 n_3 + n_2^2}\right)^2 = \frac{0.072307}{10.6857} = 0.0067 = \underline{\underline{0.67\%}}$$

Consideriamo, adesso, una lamina di spessore $d = \dfrac{\lambda_0}{2n_2}$, come calcolato nel punto a) e la depositiamo sul vetro. La riflettivitá é:

$$R = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\beta_2 d}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\beta_2 d}$$

Si ha:

$$\beta_2 d = 2\pi\frac{n_2 d}{\lambda_0} = \pi$$

Quindi la riflettivitá é massima e risulta:

$$R_{max} = \frac{(r_{12} + r_{23})^2}{(1 + r_{12}r_{23})^2}$$

Si ha:

$$r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \qquad r_{23} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}$$

ossia:

$$r_{12} = \frac{1 - 1.33}{1 + 1.33} = -\frac{0.33}{2.33} = -0.141631, \qquad r_{23} = \frac{1.33 - 1.5}{1.33 + 1.5} = -\frac{0.17}{2.83} = -0.060071$$

Quindi:

$$R_{max} = \frac{0.04068}{1.01709} = 0.03999 = \underline{\underline{3.999\%}}$$

00-10) Esercizio n. 2 del 6/5/2000

Un'onda elettromagnetica piana lineramente polarizzata é diffusa da una sfera dielettrica immersa in aria di raggio $a = 1\ mm$ i cui parametri costitutivi sono: $\epsilon = 81\epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ e $\sigma = 0$. Calcolare la sezione totale di diffusione e la sezione di backscattering (ossia il rapporto fra la densitá di potenza diffusa all'indietro e la densitá di potenza dell'onda piana incidente, moltiplicato per $4\pi r^2$) per le seguenti frequenze: $\nu = 1\ KHz$, $\nu = 1\ MHz$, $\nu = 1\ GHz$, $\nu = 10\ GHz$.

———————

La sezione totale di diffusione (vedi Appunti di Campi elettromagnetici) é:

$$\sigma_d = \frac{8}{3}\pi k^4 a^6 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}\right)^2 = \frac{128}{3}\pi^5 \cdot 10^{-18} \left(\frac{80}{83}\right)^2 \cdot \frac{1}{\lambda^4} = 1.213 \cdot 10^{-14} \cdot \frac{1}{\lambda^4}$$

ν	λ	$\frac{a}{\lambda}$	σ_d
$1\ KHz$	$300000\ m$	$3.3 \cdot 10^{-9}$	$1.4975 \cdot 10^{-36}\ m^2$
$1\ MHz$	$300\ m$	$3.3 \cdot 10^{-6}$	$1.4975 \cdot 10^{-24}\ m^2$
$1\ GHz$	$0.3\ m$	$3.3 \cdot 10^{-3}$	$1.4975 \cdot 10^{-12}\ m^2$
$10\ GHz$	$0.03\ m$	$3.3 \cdot 10^{-2}$	$1.4975 \cdot 10^{-8}\ m^2$

La densitá di potenza diffusa dalla sfera, nell'ipotesi di diffusione di Rayleigh é:

$$\mathscr{P} = \frac{k^4 c a^6 \epsilon_0}{2r^2} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}\right)^2 E_0^2 \sin^2\theta = \frac{k^4 a^6}{2Z_0 r^2} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}\right)^2 E_0^2 \sin^2\theta$$

essendo $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$.

La densita di potenza diffusa all'indietro (backscattered) si ottiene ponendo $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{3}{2}\pi$, ottenendo:

$$\mathscr{P}_{BS} = \frac{k^4 a^6}{2Z_0 r^2} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}\right)^2 E_0^2$$

Poiché la densitá di potenza incidente é:

$$\mathscr{P}_i = \frac{1}{2Z_0} E_0^2$$

la sezione di backscattering risulta:

$$\sigma_{BS} = 4\pi r^2 \frac{\mathscr{P}_{BS}}{\mathscr{P}_i} = 4\pi \left[k^4 a^6 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}\right)^2\right] = \frac{3}{2}\sigma_d$$

Ne segue:

ν	λ	$\dfrac{a}{\lambda}$	σ_{BS}
$1\ KHz$	$300000\ m$	$3.3 \cdot 10^{-9}$	$2.2462 \cdot 10^{-36}\ m^2$
$1\ MHz$	$300\ m$	$3.3 \cdot 10^{-6}$	$2.2462 \cdot 10^{-24}\ m^2$
$1\ GHz$	$0.3\ m$	$3.3 \cdot 10^{-3}$	$2.2462 \cdot 10^{-12}\ m^2$
$10\ GHz$	$0.03\ m$	$3.3 \cdot 10^{-2}$	$2.2462 \cdot 10^{-8}\ m^2$

00-11) Esercizio n. 3 del 6/5/2000

Un sistema di antenne rettilinee a mezz'onda é costituito da n elementi equidistanziati. Dimostrare che nel piano $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ la direttivitá risulta:

$$\frac{\left(\sum_{m=0}^{n-1} a_m\right)^2}{\sum_{m=0}^{n-1} a_m^2}$$

essendo a_m l'ampiezza (reale) della corrente nell'antenna m-esima.

Per un sistema di n antenne a mezz'onda equidistanziate, l'array factor si scrive:

$$A(\psi) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p e^{ip\alpha} = \sum_{p=0}^{n-1} a_p \xi^p$$

avendo posto $\xi = e^{i\alpha}$ con $\alpha = -kdcos(\psi) - \gamma$. Il coefficiente a_p é l'ampiezza (reale) della corrente nell'antenna p-esima. Si ha:

$$|A(\psi)| = \left|a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_{n-1}\xi^{n-1}\right| \le |a_0| + |a_1\xi| + \left|a_2\xi^2\right| + \cdots + \left|a_{n-1}\xi^{n-1}\right| =$$
$$= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = \sum_{p=0}^{n-1} a_p$$

ossia:

$$|A(\psi)|_{max} = \sum_{p=0}^{n-1} a_p$$

La direttivitá é:

$$D = \frac{4\pi r^2 (S_r)_{max}}{\int_0^{4\pi} S_r(r,\theta,\phi) r^2 d\Omega}$$

Per $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, si ha:

$$S_r = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{8\pi^2 r^2} \left| A\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right)\right|^2$$

Quindi:

$$(S_r)_{max} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{8\pi^2 r^2} \left(\sum_{p=0}^{n-1} a_p\right)^2$$

Ne segue:

$$D = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{p=0}^{n-1} a_p \right)^2}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{4\pi} \left| A\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) \right|^2 d\Omega}$$

Si ha:

$$\int_0^{4\pi} \left| A\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) \right|^2 d\Omega = \int_0^{4\pi} A\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) \cdot A^*\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) d\Omega =$$

$$= \int_0^{4\pi} \left(a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_{n-1}\xi^{n-1}\right) \left(a_0 + a_1\xi^* + a_2{\xi^*}^2 + \cdots + a_{n-1}{\xi^*}^{n-1}\right) d\Omega =$$

$$= \int_0^{4\pi} \sum_{p=0}^{n-1} a_p^2 d\Omega + \int_0^{4\pi} \left(a_0 a_1 \xi^* + a_0 a_2 {\xi^*}^2 + \cdots + a_0 a_{n-1} {\xi^*}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\xi^{n-1} a_{n-2} {\xi^*}^{n-2}\right) d\Omega$$

Il secondo integrale é nullo perché é costituito da termini contenenti funzioni trigonometriche; quindi:

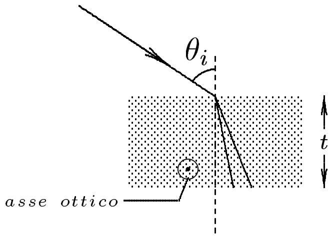
$$\int_0^{4\pi} \left| A\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) \right|^2 d\Omega = \int_0^{4\pi} \sum_{p=0}^{n-1} a_p^2 d\Omega = 4\pi \sum_{p=0}^{n-1} a_p^2$$

Pertanto, in definitiva:

$$D = \frac{\left(\sum_{p=0}^{n-1} a_p \right)^2}{\sum_{p=0}^{n-1} a_p^2}$$

00-12) Esercizio n. 4 del 6/5/2000

Uno stretto fascio di luce incide su un cristallo di calcite, tagliato con l'asse ottico come in figura.



Per $t = 1.12\ cm$ e $\theta_i = 45^0$, calcolare la distanza fra i due raggi emergenti. Per la calcite si ha: $n_o = 1.658$ e $n_s = 1.486$.

(vedi esercizio n. 2 del 1/2/1997)

Il cristallo di calcite é un cristallo uniassico negativo. Si ha, quindi:

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_s^2 \end{pmatrix}$$

con $n_o = 1.658$ e $n_s = 1.486$.

Dalla teoria della propagazione delle onde piane in un mezzo anisotropo, la condizione di propagazione é espressa dalla seguente equazione:

$$\vec{E}_0 - \left(\widehat{n} \cdot \vec{E}_0\right) \widehat{n} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{v^2}{c^2} \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \vec{E}_0 \tag{1}$$

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ tale che l'asse z sia parallelo all'asse ottico ed il piano xy contenga $\widehat{n}$. L'angolo che la direzione di propagazione dell'onda elettromagnetica nel mezzo anisotropo forma con l'asse y lo indichiamo con θ.

Tenendo conto che:

$$\left(\widehat{n} \cdot \vec{E}_0\right) \widehat{n} = \left(E_{0_x} \cos\theta + E_{0_y} \sin\theta\right) \widehat{n} =$$
$$= \widehat{x} \left(E_{0_x} \cos\theta + E_{0_y} \sin\theta\right) \cos\theta + \widehat{y} \left(E_{0_x} \cos\theta + E_{0_y} \sin\theta\right) \sin\theta$$

proiettiamo la (1) sui tre assi coordinati, ottenendo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} E_{0_x} - E_{0_x} \cos^2\theta - E_{0_y} \sin\theta\cos\theta = \dfrac{v^2}{c^2} n_o^2 E_{0_x} \\ E_{0_y} - E_{0_x} \sin\theta\cos\theta - E_{0_y} \sin^2\theta = \dfrac{v^2}{c^2} n_o^2 E_{0_y} \\ E_{0_z} = \dfrac{v^2}{c^2} n_s^2 E_{0_z} \end{cases}$$

da cui, ordinando, si ricava:

$$\begin{cases} E_{0_x}\left(\sin^2\theta - \dfrac{v^2}{c^2}n_o^2\right) - E_{0_y}\sin\theta\cos\theta = 0 \\ E_{0_x}\left(-\sin\theta\cos\theta\right) + E_{0_y}\left(\cos^2\theta - \dfrac{v^2}{c^2}n_o^2\right) = 0 \\ E_{0_z}\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}n_s^2\right) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Affinché tale sistema omogeneo ammetta soluzioni diverse da quella banale, deve essere:

$$\frac{v^2}{c^2}n_s^2 = 1$$

ossia:

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{n_s}$$

da cui:

$$\boxed{k'' = \frac{\omega}{c}n_s}$$

che rappresenta la costante di propagazione dell'onda straordinaria.

Il sistema costituito dalle due prime equazioni del sistema (2) ammette soluzione diversa da quella banale se:

$$\begin{vmatrix} \left(\sin^2\theta - \dfrac{v^2}{c^2}n_o^2\right) & (-\sin\theta\cos\theta) \\ (-\sin\theta\cos\theta) & \left(\cos^2\theta - \dfrac{v^2}{c^2}n_o^2\right) \end{vmatrix} = 0$$

ossia:

$$\underline{\sin^2\theta\cos^2\theta} - \sin^2\theta\frac{v^2}{c^2}n_o^2 - \cos^2\theta\frac{v^2}{c^2}n_o^2 + \left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 n_o^4 - \underline{\sin^2\theta\cos^2\theta} = 0$$

Semplificando:

$$-\frac{v^2}{c^2}n_o^2 + \left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 n_o^4 = 0$$

da cui, scartando la soluzione banale $\dfrac{v^2}{c^2} = 0$, si ha:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{n_o^2}$$

da cui:

$$\boxed{k' = \frac{\omega}{c} n_o}$$

che rappresenta la costante di propagazione dell'onda ordinaria.

Indichiamo con θ'_2 e con θ''_2 gli angoli di rifrazione competenti all'onda ordinaria e all'onda straordinaria, rispettivamente; allora, in virtú della legge di Snell, si ha, per l'onda ordinaria:

$$k_1 \sin\theta_i = k'_2 \sin\theta'_2$$

dove θ_i é l'angolo di incidenza dell'onda elettromagnetica e k_1 é la costante di propagazione nel primo mezzo.

Sostituendo le espressioni delle costanti di propagazione, si ha:

$$\frac{\omega}{c}\sin\theta_i = \frac{\omega}{c} n_o \sin\theta'_2$$

ossia:

$$\sin\theta'_2 = \frac{1}{n_o} sin\theta_i$$

Analogamente per l'onda straordinaria si ha:

$$k_1 \sin\theta_i = k''_2 \sin\theta''_2$$

da cui:

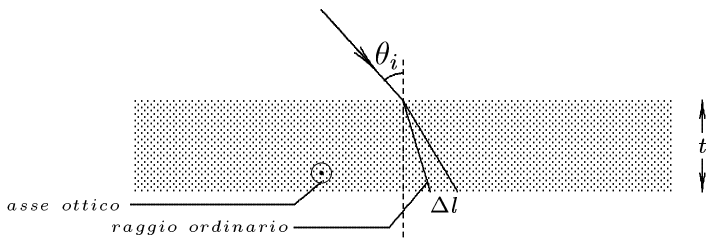
$$\frac{\omega}{c}\sin\theta_i = \frac{\omega}{c} n_s \sin\theta''_2$$

ossia:

$$\sin\theta''_2 = \frac{1}{n_s} sin\theta_i$$

Poiché la calcite é un cristallo uniassico negativo ($n_s < n_o$) allora si ha $\sin\theta''_2 > \sin\theta'_2$ e, quindi:

$$\theta''_2 > \theta'_2$$



Dalla figura si ha che la distanza Δl fra i due raggi emergenti risulta:

$$\Delta l = t\tan\theta''_2 - t\tan\theta'_2 = t\,(\tan\theta''_2 - \tan\theta'_2) \tag{3}$$

essendo t lo spessore del cristallo.

La (3) si puó anche scrivere:

$$\Delta l = t\left(\frac{\sin\theta''_2}{\sqrt{1-\sin^2\theta''_2}} - \frac{\sin\theta'_2}{\sqrt{1-\sin^2\theta'_2}}\right)$$

In virtú della legge di Snell, segue:

$$\Delta l = t\left(\frac{\frac{1}{n_s}\sin\theta_i}{\sqrt{1-\frac{1}{n_s^2}\sin^2\theta_i}} - \frac{\frac{1}{n_o}\sin\theta_i}{\sqrt{1-\frac{1}{n_o^2}\sin^2\theta_i}}\right) = t\left(\frac{\sin\theta_i}{\sqrt{n_s^2-\sin^2\theta_i}} - \frac{\sin\theta_i}{\sqrt{n_o^2-\sin^2\theta_i}}\right)$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\theta_i = 45^0,\ t = 1.12\ cm,\ n_o = 1.658,\ ns = 1.486$$

si ha:

$$\begin{aligned}\Delta l =&(1.12\cdot 10^{-2})\left(\frac{\sin 45^0}{\sqrt{(1.486)^2-\sin^2 45^0}} - \frac{\sin 45^0}{\sqrt{(1.658)^2-\sin^2 45^0}}\right) = \\ =&(1.12\cdot 10^{-2})\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{(1.486)^2-\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{(1.658)^2-\frac{1}{2}}}\right) = 7.78\cdot 10^{-4}\ m = \underline{\underline{0.778\ mm}}\end{aligned}$$

00-13) Esercizio n. 1 del 26/6/2000

Un'onda elettromagnetica piana, viaggiante in aria (considerata dielettrico perfetto), incide normalmente su un mezzo infinitamente esteso di parametri costitutivi: $\epsilon = 10\epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 10^{-4}\ S/m$. Esprimere il coefficiente di riflessione in potenza in funzione esplicita del coefficiente di attenuazione α e della costante di propagazione β nel mezzo. Calcolare i coefficienti α e β per ciascuna delle seguenti frequenze: $\nu_1 = 1.8 \cdot 10^4\ Hz$, $\nu_2 = 1.8 \cdot 10^5\ Hz$ e $\nu_3 = 1.8 \cdot 10^6\ Hz$, utilizzando per ciascuna di esse le formule appropriate. Calcolare per ciascuna frequenza il coefficiente di riflessione.

———————

Nel caso di incidenza normale risulta:

$$R_\perp = R_\parallel = R$$

Nel caso di incidenza normale i parametri p e q che figurano nelle formule complete di $R_\perp$ e $R_\parallel$ diventano:

$$p_{(\theta_0=0^0)} = \alpha \qquad\qquad q_{(\theta_0=0^0)} = \beta_2$$

Pertanto, per $\theta_0 = 0^0$ e per $\mu_2 \simeq \mu_1$, il coefficiente R si scrive:

$$R = \frac{(\beta_2 - \beta_1)^2 + \alpha^2}{(\beta_2 + \beta_1)^2 + \alpha^2}$$

Per ciascuna delle frequenze indicate indicate nel testo, calcoliamo il rapporto $\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega}$.

$$\nu_1 = 1.8 \cdot 10^4\ Hz \Longrightarrow \frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{1.8 \cdot 10^5}{\nu_1} \simeq 10$$

$$\nu_2 = 1.8 \cdot 10^5\ Hz \Longrightarrow \frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{1.8 \cdot 10^5}{\nu_2} \simeq 1$$

$$\nu_3 = 1.8 \cdot 10^6\ Hz \Longrightarrow \frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{1.8 \cdot 10^5}{\nu_3} \simeq 0.1$$

Per $\nu = \nu_1 = 1.8 \cdot 10^4\ Hz$, si ha:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} = 3.7698 \cdot 10^{-4}\ rad/m$$

$$\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} \simeq 100 >> 1 \Longrightarrow \alpha = \beta_2 = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \underline{\underline{2.66 \cdot 10^{-3}\ m^{-1}}}$$

Quindi:

$$R = \frac{(\beta_2 - \beta_1)^2 + \alpha^2}{(\beta_2 + \beta_1)^2 + \alpha^2} = \frac{5.2122 \cdot 10^{-6} + 7.0756 \cdot 10^{-6}}{9.2232 \cdot 10^{-6} + 7.0756 \cdot 10^{-6}} = \frac{1.2288 \cdot 10^{-5}}{1.6299 \cdot 10^{-5}} = \underline{\underline{0.7539}}$$

Per $\nu = \nu_2 = 1.8 \cdot 10^5 \; Hz$, si ha:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} = 3.7698 \cdot 10^{-3} \; rad/m$$

$$\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} \simeq 1 \Longrightarrow \alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} - 1\right]} =$$

$$= \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \cdot 0.4142} = \frac{\omega}{c} 1.44 = 3.7698 \cdot 10^{-3} \cdot 1.44 = \underline{\underline{5.43 \cdot 10^{-3} \; m^{-1}}}$$

$$\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} \simeq 1 \Longrightarrow \beta_2 = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}} + 1\right]} =$$

$$= \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \cdot 2.4142} = \frac{\omega}{c} 3.4743 = 3.7698 \cdot 10^{-3} \cdot 3.4743 = \underline{\underline{1.31 \cdot 10^{-2} \; rad/m}}$$

Quindi:

$$R = \frac{(\beta_2 - \beta_1)^2 + \alpha^2}{(\beta_2 + \beta_1)^2 + \alpha^2} = \frac{8.7 \cdot 10^{-5} + 2.9485 \cdot 10^{-5}}{2.846 \cdot 10^{-4} + 2.9485 \cdot 10^{-5}} = \frac{1.164 \cdot 10^{-4}}{3.1408 \cdot 10^{-4}} = \underline{\underline{0.37}}$$

Per $\nu = \nu_3 = 1.8 \cdot 10^6 \; Hz$, si ha:

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} = 3.7698 \cdot 10^{-2} \; rad/m$$

$$\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} = 10^{-2} << 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{Z_0}{2}\sigma\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = 1.885 \cdot 10^{-2}\sqrt{\frac{1}{10}} = \underline{\underline{5.96 \cdot 10^{-3} \; m^{-1}}}$$

$$\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} = 10^{-2} << 1 \Longrightarrow \beta_2 \simeq \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{c}\sqrt{10} = 3.7698 \cdot 10^{-2} \cdot 3.16 = \underline{\underline{1.192 \cdot 10^{-1} \; rad/m}}$$

Quindi:

$$R = \frac{(\beta_2 - \beta_1)^2 + \alpha^2}{(\beta_2 + \beta_1)^2 + \alpha^2} = \frac{6.6426 \cdot 10^{-3} + 3.55 \cdot 10^{-5}}{2.4617 \cdot 10^{-2} + 3.55 \cdot 10^{-5}} = \frac{6.678 \cdot 10^{-3}}{2.4652 \cdot 10^{-2}} = \underline{\underline{0.27}}$$

00-14) Esercizio n. 2 del 26/6/2000

Si consideri un'onda elettromagnetica il cui vettore campo elettrico é descritto da: $\vec{E} = \widehat{x}E_1 cos(\omega t - \beta z + \Psi_x) + \widehat{y}E_2 cos(\omega t - \beta z + \Psi_y)$. Se $E_1 = 2\ V/m$, $E_2 = 1\ V/m$, $\Psi_x = \pi/2$ e $\Psi_y = \pi/4$, determinare analiticamente le caratteristiche di polarizzazione dell'onda e graficarne il luogo geometrico descrivente tale stato.

————————

Si ha:

$$\vec{E} = \widehat{x}E_1 cos(\omega t - \beta z + \Psi_x) + \widehat{y}E_2 cos(\omega t - \beta z + \Psi_y)$$

con:

$$E_1 = 2\ V/m, \quad E_2 = 1\ V/m, \quad \Psi_x = \frac{\pi}{2} \quad e \quad \Psi_y = \frac{\pi}{4}$$

Si ha:

$$\delta = \Psi_y - \Psi_x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} \Longrightarrow \sin\delta = -0.707 < 0$$

Quindi l'onda elettromagnetica é polarizzata **ellitticamente levogira**.

L'angolo di orientazione Ψ dell'asse maggiore dell'ellisse di polarizzazione rispetto all'asse x di un sistema di riferimento si calcola dalla:

$$\tan 2\Psi = \frac{2E_1E_2}{E_1^2 - E_2^2}\cos\delta = \frac{4}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0.9428 \Longrightarrow 2\Psi = 43^0.31 \Longrightarrow \Psi = \underline{\underline{21^0.66}}$$

Per la valutazione del rapporto fra le lunghesse dei semiassi (b/a), valutiamo l'angolo ausiliario χ; si ha:

$$\sin 2\chi = \frac{2a_1b_1}{a_1^2 + b_1^2}\sin\delta = \frac{2E_1E_2}{E_1^2 + E_2^2}\sin\delta = \frac{4}{5}\frac{\sqrt{2}}{2} = -0.5657$$

D'altra parte si ha:

$$\sin 2\chi = \frac{2\tan\chi}{1 + \tan^2\chi} \Longrightarrow \tan^2\chi - \frac{2}{\sin 2\chi}\tan\chi + 1 = 0$$

ossia:

$$\tan\chi = \frac{1}{\sin 2\chi} \pm \sqrt{\frac{1}{\sin^2 2\chi} - 1} = -1.7677 \pm 1.45768$$

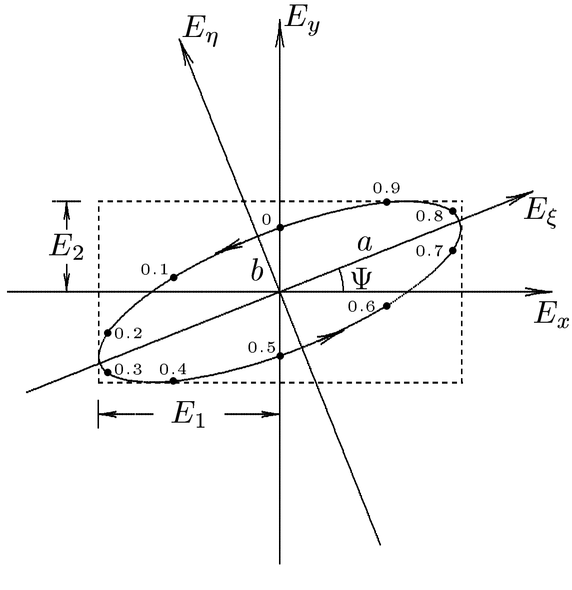
Scartando la soluzione con il segno $-$ in quanto $\tan\chi$ deve essere ≤ 1, si ha:

$$\tan\chi = -\frac{b}{a} = -\underline{\underline{0.31}}$$

Grafico dell'ellisse di polarizzazione nel piano $z = 0$

$$E_x = E_1 cos(2\pi\tau + \Psi_x), \qquad E_y = E_2 cos(2\pi\tau + \Psi_y) \qquad 0 \le \tau = \frac{t}{T} \le 1$$

τ	E_x	E_y
0	0	+0.707
0.1	−1.1755	+0.156
0.2	−1.9021	−0.4539
0.3	−1.9021	−0.8909
0.4	−1.1765	−0.9877
0.5	0	−0.707
0.6	+1.1755	−0.1565
0.7	+1.9021	+0.4539
0.8	+1.9021	+0.8909
0.9	+1.1755	+0.9877
1	0	+0.707



É interessante calcolare i valori assoluti di a e di b; dalla:

$$a^2 + b^2 = E_1^2 + E_2^2$$

insieme alla:

$$\frac{b}{a} = 0.31$$

segue:

$$a^2 + (0.31)^2 a^2 = 5 \Longrightarrow a^2(1 + 0.0961) = 5$$

ossia:

$$a^2 = \frac{5}{1.096} = 4.5616 \Longrightarrow a = 2.1357, \quad b = 0.6621$$

00-15) Esercizio n. 3 del 26/6/2000

Si consideri un plasma omogeneo in cui la frequenza di collisione é data dalla espressione: $\omega_{eff} \simeq NT^{-\frac{3}{2}}$ essendo N la densitá elettronica e T la temperatura assoluta. Se $N = 10^{12}\ m^{-3}$ e $T = 300\ ^0K$, calcolare la costante dielettrica e la conducibilitá del plasma nell'ipotesi che in esso si propaghi un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 10$ MHz. Calcolare, quindi, il coefficiente di attenuazione e la costante di propagazione del campo elettromagnetico.

———————

Per un plasma omogeneo, si ha:

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}\right), \qquad \sigma = \frac{\epsilon_0 \omega_{eff} \omega_p^2}{\omega^2 + \omega_{eff}^2}$$

Nel nostro caso:

$$\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} = \frac{10^{12} \cdot \left(1.6 \cdot 10^{-19}\right)^2}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}} = 3.1738 \cdot 10^{15} \quad (rad/s)^2$$

$$\omega_{eff} = N \frac{1}{\sqrt{T^3}} = \frac{10^{12}}{\sqrt{(300)^3}} = 1.9245 \cdot 10^8 \quad rad/s$$

$$\omega^2 = (2\pi\nu)^2 = 3.9476 \cdot 10^{15} \quad (rad/s)^2$$

Quindi:

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 - \frac{3.1738 \cdot 10^{15}}{3.9476 \cdot 10^{15} + 3.7037 \cdot 10^{16}}\right) = \epsilon_0 \left(1 - 0.077439\right) = \underline{\underline{0.923\epsilon_0}}$$

$$\sigma = \frac{5.408 \cdot 10^{12}}{4.09846 \cdot 10^{16}} = \underline{\underline{1.32 \cdot 10^{-4}}} \quad (S/m)$$

Risulta:

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{1.32 \cdot 10^{-4}}{0.923\epsilon_0 \cdot 2\pi \cdot 10^7} = 0.257 \Longrightarrow \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} = 0.066 << 1$$

Quindi:

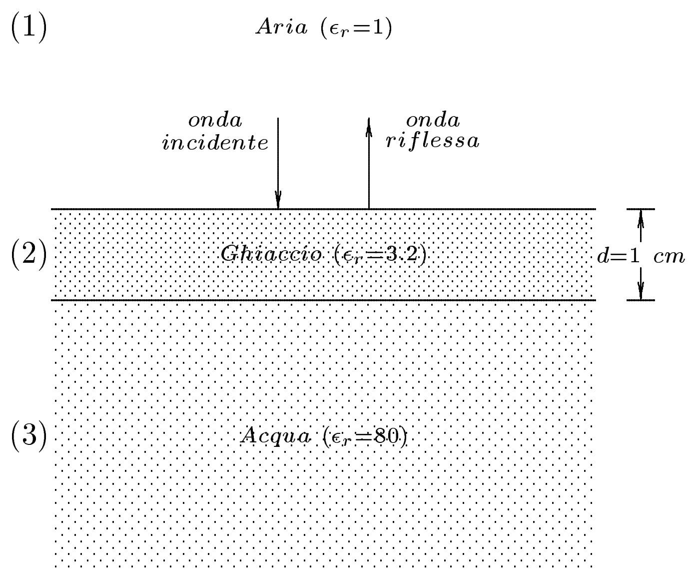
$$\alpha = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} = \frac{1.32 \cdot 10^{-4}}{2}\sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{0.923\epsilon_0}} = \underline{\underline{2.59 \cdot 10^{-2}}} \quad \left(m^{-1}\right)$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon} = 2\pi \cdot 10^7 \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0.923\epsilon_0} = \underline{\underline{0.2}} \quad (rad/m)$$

00-16) Esercizio n. 4 del 26/6/2000

La superficie di un lago é ricoperta da uno strato di ghiaccio di spessore $d = 1\ cm$. Se la costante dielettrica del ghiaccio é $\epsilon = 3.2\epsilon_0$ e quella dell'acqua del lago é $\epsilon = 80\epsilon_0$ alla frequenza $\nu = 1\ GHz$, calcolare il coefficiente di riflessione di un'onda elettromagnetica che incide normalmente sulla superficie del ghiaccio.

———————



Si ha:

$$R = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\beta_2 d}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\beta_2 d}$$

$$r_{12} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}} - \sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}} + \sqrt{\epsilon_{r2}}} = \frac{1 - 1.7888}{1 + 1.7888} = \frac{-0.7888}{2.7888} = -0.2828$$

$$r_{23} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}} - \sqrt{\epsilon_{r3}}}{\sqrt{\epsilon_{r2}} + \sqrt{\epsilon_{r3}}} = \frac{1.7888 - 8.9443}{1.7888 + 8.9443} = \frac{-7.1555}{10.733} = -0.6667$$

$$\sin^2\beta_2 d = \sin^2\left[\frac{2\pi}{\lambda_0}(n_2 d)\right] = \sin^2\left[\left(\frac{2\pi}{0.3}\right)\left(\sqrt{3.2}\cdot 10^{-2}\right)\right] = 0.1339$$

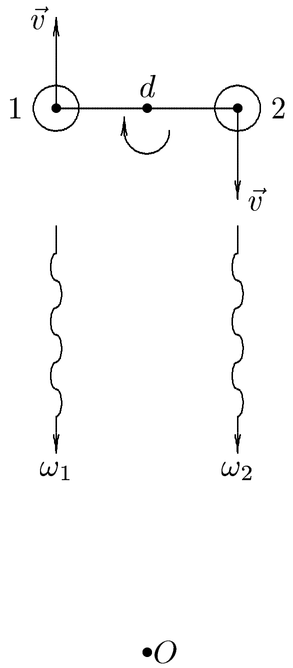
essendo $\lambda_0 = \dfrac{c}{\nu} = \dfrac{3\cdot 10^8}{10^9} = 0.3\ m$. Quindi:

$$R = \frac{0.9016 - 0.1}{1.4126 - 0.1} = \frac{0.8016}{1.3126} = \underline{\underline{0.61}}$$

00-17) Esercizio n. 1 del 21/7/2000

Una stella binaria é costituita da due stelle distanti d e ruotanti attorno al loro comune centro di massa con velocitá angolare Ω. Valutare la massima differenza $\Delta\lambda$, dovuta a effetto Doppler, fra le lunghezze d'onda delle linee spettrali emesse dalle due stelle.

La massima differenza fra le lunghezze d'onda delle linee spettrali emesse dalle due stelle si ha nella configurazione illustrata in figura in cui per la stella 1 la quantitá $\vec{v} \cdot \vec{k} = -|\vec{v}|k$ e per la stella 2 la quantitá $\vec{v} \cdot \vec{k} = |\vec{v}|k$.



Nel caso di sorgente in moto rispetto all'osservatore, la formula dell'effetto Doppler, per velocitá non relativistica, si scrive:

$$\omega = \omega\,' + |\vec{v}| \cdot \vec{k}\,'$$

essendo $\omega\,'$ la frequenza angolare misurata nel sistema di riferimento solidale alla sorgente e $\vec{k}\,'$ il vettore d'onda riferito al sistema solidale alla sorgente.

La frequenza emessa dalla stella 1 osservata da un osservatore lontano O é, allora:

$$\omega_1 = \omega\,' - |\vec{v}|\frac{\omega\,'}{c} \quad \text{(sorgente e osservatore in allontanamento)}$$

che in funzione della lunghezza d'onda si scrive:

$$2\pi\frac{c}{\lambda_1} = 2\pi\frac{c}{\lambda\,'} - |\vec{v}|2\pi\frac{1}{\lambda\,'} \Longrightarrow \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda\,'} - \frac{|\vec{v}|}{c}\frac{1}{\lambda\,'} = \frac{1}{\lambda\,'}\left(1 - \frac{|\vec{v}|}{c}\right)$$

ossia:

$$\lambda_1 = \frac{\lambda'}{\left(1 - \dfrac{|\vec{v}|}{c}\right)}$$

La frequenza emessa dalla stella 2 osservata da un osservatore lontano O é, analogamente:

$$\omega_2 = \omega' + |\vec{v}|\frac{\omega'}{c} \quad \text{(sorgente e osservatore in avvicinamento)}$$

che in funzione della lunghezza d'onda si scrive:

$$2\pi\frac{c}{\lambda_2} = 2\pi\frac{c}{\lambda'} + |\vec{v}|2\pi\frac{1}{\lambda'} \Longrightarrow \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda'} + \frac{|\vec{v}|}{c}\frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda'}\left(1 + \frac{|\vec{v}|}{c}\right)$$

ossia:

$$\lambda_1 = \frac{\lambda'}{\left(1 + \dfrac{|\vec{v}|}{c}\right)}$$

Ne segue:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda'\left[\frac{1}{\left(1 - \dfrac{|\vec{v}|}{c}\right)} - \frac{1}{\left(1 + \dfrac{|\vec{v}|}{c}\right)}\right] = \lambda'\frac{2\dfrac{|\vec{v}|}{c}}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \simeq 2\lambda'\frac{|\vec{v}|}{c}$$

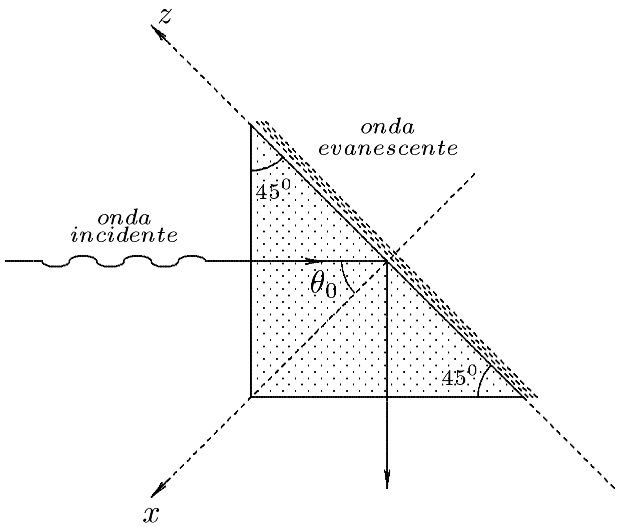
$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = 2\lambda'\frac{|\vec{v}|}{c} = \underline{\underline{\frac{\lambda'\Omega d}{c}}}$$

essendo λ' la lunghezza d'onda della linea spettrale emessa dalle due stelle se fossero in quiete rispetto ad O.

00-18) Esercizio n. 2 del 21/7/2000

Si abbia un prisma la cui sezione é un triangolo rettangolo isoscele. Un fascio di luce incide normalmente sulla faccia contenente un cateto. La lunghezza d'onda della luce incidente, riferita al vuoto, é $\lambda_0 = 500\ nm$ ed il corrispondente indice di rifrazione del vetro é $n = 1.5$. Verificare che la luce viene totalmente riflessa dalla faccia contenente l'ipotenusa. A quale distanza da tale superficie l'ampiezza dell'onda evanescente diventa $\frac{1}{e}$ del valore che essa assume sulla superficie?

———————



L'angolo di incidenza sull'ipotenusa é $\theta_0 = 45^0$. L'angolo limite competente alla superficie di separazione vetro-aria é:

$$\theta_L = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \qquad n_1 > n_2$$

dove n_1 é l'indice di rifrazione del vetro e n_2 l'indice di rifrazione dell'aria.

Nel nostro caso $n_1 = 1.5$ e $n_2 = 1$, quindi:

$$\theta_L = \arcsin\left(\frac{1}{1.5}\right) = \underline{\underline{41^0.81}}$$

L'espressione del campo **evanescente** trasmesso in aria é:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_2 e^{\beta_1 x + i\alpha z} e^{-i\omega t} \qquad (x < 0)\ (\theta_0 > \theta_L)$$

La distanza dall'ipotenusa (lungo l'asse x negativo) alla quale l'ampiezza dell'onda evanescente diventa $\frac{1}{e}$ del valore che essa assume sulla superficie é:

$$x^* = \frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{\omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1}\sqrt{\sin^2\theta_0 - \dfrac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}$$

essendo $\epsilon_1 = \epsilon_0 n_1^2 = \epsilon_0 (1.5)^2$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$.

Quindi:

$$x^* = \frac{c}{\omega n_1 \sqrt{\sin^2\theta_0 - \frac{1}{n_1^2}}} = \frac{\lambda}{2\pi n_1 \sqrt{\sin^2\theta_0 - \frac{1}{n_1^2}}} =$$

$$= \frac{500 \cdot 10^{-9}}{2\pi \cdot 1.5 \cdot \sqrt{0.5 - 0.44}} = \frac{500 \cdot 10^{-9}}{2.22144} = \underline{\underline{225.079 \cdot 10^{-9}\ m}} \simeq \frac{1}{2}\lambda_0$$

Il suddetto risultato conferma che l'onda superficiale si estende nel secondo mezzo per circa due lunghezze d'onda.

00-19) Esercizio n. 3 del 21/7/2000

Un riflettore radar é costituito da una lastra piana di acciaio i cui parametri costitutivi nel range delle radiofrequenze sono: $\epsilon_r \simeq 1$, $\mu_r \simeq 1$ e $\sigma = 0.6 \cdot 10^5\ S/m$. Se un'onda elettromagnetica di frequenza $f = 100\ MHz$ colpisce il riflettore, calcolare la percentuale della densitá di potenza incidente che viene riflessa nei due casi: a) per incidenza normale; b) per onda incidente, sotto un angolo $\theta_0 = 80^0$, con il vettore campo elettrico ortogonale al piano di incidenza.

———————

Si ha:

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{0.6 \cdot 10^5}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2\pi \cdot 10^8} = 10^7$$

Pertanto:

$$\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} = 10^{14} >> 1$$

Per verificare il grado di approssimazione che possiamo effettuare nel calcolo del coefficiente di riflessione, valutiamo la quantitá $x = \dfrac{\mu_2\beta_1}{\mu_1\beta_2}$; si ha:

$$x = \frac{\mu_2\beta_1}{\mu_1\beta_2} = \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_1\mu_2}{\mu_1\sigma}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2\pi \cdot 10^8 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}}{0.6 \cdot 10^5}} = 4.3 \cdot 10^{-4} << 1$$

Pertanto possiamo applicare la seguente formula:

$$\rho_\perp^2 = 1 - 2x\cos\theta_0$$

Quindi:

$$\begin{cases} Per\ \theta_0 = 0^0 \Longrightarrow \rho_\perp^2 = 0.99914 = \underline{\underline{99.914\%}} \\ Per\ \theta_0 = 80^0 \Longrightarrow \rho_\perp^2 = 0.99985 = \underline{\underline{99.985\%}} \end{cases}$$

00-20) Esercizio n. 4 del 21/7/2000

Una linea di trasmissione é costituita da due lastre metalliche parallele, perfettamente conduttrici, di larghezza $a = 50\ cm$ e separati da una distanza $d = 1\ cm$. Il massimo valore possibile del campo elettrico, se la linea é immersa in aria, é $|E| = 3 \cdot 10^7\ V/m$.

Se la linea é eccitata nel modo TEM, calcolare la massima potenza trasportabile. Determinare, altresí, l'espressione della massima potenza trasportabile nel caso in cui la linea é eccitata nel modo TE. Si effettui il calcolo nell'ipotesi che nella linea si propaghi il modo TE_1 alla frequenza di 22 GHz.

———————

Il campo elettrico competente al modo TEM che si propaga nel mezzo compreso fra due lastre perfettamente conduttrici é:

$$\vec{E}_t = E_0 e^{-i\beta z}\widehat{y}$$

essendo $\widehat{y}$ il vettore unitario lungo la direzione normale ai due piani sui quali giaccioni le lastre.

La potenza trasportata risulta:

$$P = \frac{ad}{2}\frac{E_0^2}{Z}$$

Il massimo valore che puó assumere il campo elettrico é: $|\vec{E}_t|_{max} = 3 \cdot 10^7\ V/m$. Quindi $E_{0max} = 3 \cdot 10^7\ V/m$.

Ne segue che:

$$P_{max} = \frac{ad}{2}\frac{(E_0^2)_{max}}{Z} = \frac{50 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2} \cdot 9 \cdot 10^{14}}{2 \cdot 377} = \underline{\underline{5.968 \cdot 10^9}}\ W$$

Consideriamo, adesso, il modo TE_p. Le componenti trasversali del campo elettromagnetico che si propaga fra le lastre sono:

$$\vec{E}_t = i\frac{\omega\mu}{h}\widehat{x}A\sin\frac{p\pi y}{d}e^{-i\beta z}, \qquad \vec{H}_t = i\frac{\beta}{h}\widehat{y}A\sin\frac{p\pi y}{d}e^{-i\beta z}$$

La potenza viaggiante é:

$$P = \frac{1}{2}\Re\int\left(\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*\right) \cdot \widehat{z}dxdy$$

Poiché:

$$\widehat{x} \times \widehat{y} = \begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \widehat{z}$$

si ha:

$$P = \frac{1}{2}\int_0^d \frac{\omega\mu\beta}{h^2}A^2 \sin^2\frac{p\pi y}{d} a dy = \frac{1}{2}\frac{\omega\mu\beta}{h^2}A^2\int_0^d \sin^2\frac{p\pi y}{d} a dy = \frac{1}{4}\frac{\omega\mu\beta}{h^2}A^2 ad$$

in quanto:

$$\int_0^d \sin^2\frac{p\pi y}{d} dy = \frac{1}{2}d$$

D'altra parte

$$|\vec{E}_t|_{max} = \frac{\omega\mu}{h}A = 3\cdot 10^7 \ V/m$$

da cui:

$$A^2 = \frac{h^2}{\omega^2\mu^2}|\vec{E}_t|^2_{max}$$

Quindi:

$$P_{max} = \frac{1}{4}\frac{\beta}{\omega\mu} ad|\vec{E}_t|^2_{max}$$

La frequenza di cutoff competente al modo TE_1 é:

$$\nu_{c1} = \frac{c}{2d} = \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 10^{-2}} = 1.5\cdot 10^{10} \ Hz = 15 \ GHz$$

Per $\nu = 22 \ GHz$, si ha:

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{d^2}} = \sqrt{\frac{4\pi^2\cdot(22\cdot 10^9)^2}{9\cdot 10^{16}} - \frac{\pi^2}{10^{-4}}} = \sqrt{212306.1569 - 98696.044} \simeq 337 \ rad/m$$

In definitiva:

$$P_{max} = \frac{\beta}{4\omega\mu} ad\cdot 9\cdot 10^4 = \frac{\cdot 337\cdot 50\cdot 10^{-4}\cdot 9\cdot 10^{14}}{4\cdot 2\pi\cdot 22\cdot 10^9\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}} = \underline{\underline{2.18\cdot 10^9}} \ W$$

che é meno della metá di quella competente al modo TEM.

00-21) Esercizio n. 1 del 15/9/2000

Un flash di luce ($\lambda = 0.5\mu$) e un simultaneo impulso a radiofrequenza ($f = 10\ MHz$) attraversano una ionosfera omogenea e priva di collisioni ($\omega_p = 2\pi \cdot 8\ MHz$) spessa 100 Km. Calcolare la differenza dei tempi di percorso.

——————

(vedi es. 1 del 25/6/99)

Indicando con t_1 il tempo impiegato dal flash di luce e con t_2 quello impiegato dall'impulso a radiofrequenza, si ha:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = L\left(\frac{1}{v_{g1}} - \frac{1}{v_{g2}}\right)$$

essendo v_{g1} e v_{g2} le velocitá di gruppo relative ai due segnali.

Supponendo la ionosfera priva di collisioni, risulta:

$$v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Quindi:

$$\Delta t = \frac{L}{c}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_2^2}}}\right]$$

Ora:

$$\omega_1 = 2\pi\frac{c}{\lambda} = 2\pi \cdot 6 \cdot 10^{14}\ rad/s \quad e \quad \omega_2 = 2\pi \cdot 10^7\ rad/s$$

Ne segue che:

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_1^2} = 1.78 \cdot 10^{-16} \quad e \quad \frac{\omega_p^2}{\omega_2^2} = 0.64$$

Pertanto risulta:

$$\Delta t \simeq \frac{L}{c}(1 - 1.67) = -\frac{10^5}{3 \cdot 10^8}0.67 = -0.223 \cdot 10^{-3}\ s = \underline{\underline{-0.223\ ms}}$$

Il segnale a radiofrequenza é in ritardo di 0.223 ms rispetto al segnale luminoso.

00-22) Esercizio n. 2 del 15/9/2000

La densitá di potenza della luce solare in prossimitá della Terra é di circa 1.5 KW/m^2. In approssimazione di onde piane, assumendo che la lunghezza d'onda media della luce solare sia 500 nm, valutare la forza che agisce su un elettrone libero a riposo e calcolare la massima ampiezza del moto. Si trascuri la radiazione emessa dall'elettrone durante il moto.

———————

Si ha:

$$\mathscr{P} = \frac{E_0^2}{2Z_0} = 1.5\ KW/m^2$$

da cui:

$$E_0^2 = 2 \cdot 377 \cdot 1.5 \cdot 10^3 = 1.13 \cdot 10^6\ \ (V/m)^2$$

ossia:

$$E_0 = 1.06 \cdot 10^3\ V/m$$

L'elettrone é sottoposto, allora, alla forza elettrica:

$$\vec{F}_e = -|e|\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

supponendo che nei punti della traiettoria dell'elettrone il campo elettrico non vari la fase spaziale e che il punto dove si trova l'elettrone sia l'origine.

L'equazione del moto é:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -|e|\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

la cui soluzione a regime é:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$$

Per la valutazione di $\vec{r}_0$ che é la massima ampiezza del moto dell'elettrone basta sostituire l'espressione di $\vec{r}$ nell'equazione del moto; si ha:

$$-\omega^2 m\vec{r}_0 = -|e|\vec{E}_0$$

ossia:

$$\vec{r}_0 = \frac{|e|}{\omega^2 m}\vec{E}_0$$

Si ha:

$$\omega = 2\pi\frac{c}{\lambda} = 3.7698 \cdot 10^{15}\ rad/s, \quad |e| = 1.6 \cdot 10^{-19}\ C, \quad m = 9.11 \cdot 10^{-31}\ Kg$$

Quindi:

$$|\vec{r}_0| = \underline{\underline{1.31 \cdot 10^{-17}\ m}}$$

00-23) Esercizio n. 3 del 15/9/2000

Due onde elettromagnetiche piane polarizzate lungo la direzione $\widehat{x}$, di differente ampiezza, si propagano in verso opposto e la loro composizione é: $\vec{E} = \widehat{x}\left(e^{+ikz} + ae^{-ikz}\right) e^{-i\omega t}$. Calcolare la densitá di potenza mediata in un periodo associata a ciascuna onda separatamente e quella associata alla loro combinazione. Ripetere gli stessi calcoli nel caso in cui le due onde si propagano nello stesso verso cioé la loro composizione é: $\vec{E} = \widehat{x}\left(e^{+ikz} + ae^{+ikz}\right) e^{-i\omega t}$. Commentare i risultati ottenuti.

———————

a) Consideriamo l'onda progressiva:

$$\vec{E}_p = \widehat{x} e^{ikz} e^{-i\omega t}$$

Il campo magnetico ad essa associato é:

$$\vec{H}_p = \frac{k}{\omega\mu}\widehat{z} \times \vec{E}_p = \frac{1}{Z}\widehat{y} e^{ikz} e^{-i\omega t}$$

Il vettore di Poynting complesso é:

$$\vec{S}_c = \frac{1}{2}\left(\vec{E}_p \times \vec{H}_p^*\right) = \frac{1}{2Z}\widehat{z}$$

Il vettore di Poynting mediato in un periodo é:

$$< \vec{S} >= \frac{1}{2}\Re\left(\vec{E}_p \times \vec{H}_p^*\right) = \frac{1}{2Z}\widehat{z}$$

Pertanto la densitá di potenza mediata in un periodo é:

$$\mathscr{P}_p = | < \vec{S} \cdot \widehat{z} > | = \frac{1}{2Z}$$

b) Consideriamo l'onda regressiva:

$$\vec{E}_r = \widehat{x} a e^{-ikz} e^{-i\omega t}$$

Il campo magnetico ad essa associato é:

$$\vec{H}_r = -\frac{k}{\omega\mu}\widehat{z} \times \vec{E}_r = -\frac{a}{Z}\widehat{y} e^{-ikz} e^{-i\omega t}$$

Pertanto la densitá di potenza mediata in un periodo é:

$$\mathscr{P}_r = | < \vec{S} \cdot \widehat{z} > | = \frac{a^2}{2Z}$$

c) Consideriamo la composizione delle due onde:

$$\vec{E} = \widehat{x}\left(e^{+ikz} + ae^{-ikz}\right)e^{-i\omega t}$$

Il campo magnetico ad essa associato é:

$$\vec{H} = \frac{1}{Z}\widehat{y}\left(e^{+ikz} - ae^{-ikz}\right)e^{-i\omega t}$$

Il vettore di Poynting complesso é:

$$\begin{aligned}\vec{S}_c &= \frac{1}{2Z}\widehat{x}\left(e^{+ikz} + ae^{-ikz}\right) \times \widehat{y}\left(e^{-ikz} - ae^{+ikz}\right) = \\ &= \frac{1}{2Z}\widehat{z}\left(1 - ae^{+2ikz} + ae^{-2ikz} - a^2\right) = \frac{1}{2Z}\widehat{z}\left(1 - a^2 - 2ia\sin 2kz\right)\end{aligned}$$

Il vettore di Poynting mediato in un periodo é:

$$< \vec{S} >= \frac{1}{2}\Re\left(\vec{E} \times \vec{H}^*\right) = \frac{1}{2Z}\widehat{z}\left(1 - a^2\right)$$

La densitá di potenza mediata in un periodo é:

$$\mathscr{P} = \frac{1}{2Z}\left(1 - a^2\right)$$

Quindi la densitá di potenza associata alla combinazione delle due onde ugualmente linearmente polarizzate e propagantesi in verso opposto é la differenza delle due singole densitá di potenze:

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_p - \mathscr{P}_r$$

d) Consideriamo adesso il caso in cui le due onde si propagano nello stesso verso. Per ciascuna delle due, si ha:

$$\mathscr{P}_1 = \frac{1}{2Z}\widehat{z} \quad e \quad \mathscr{P}_2 = \frac{a^2}{2Z}\widehat{z}$$

Il campo elettrico associato alla composizione delle due onde é:

$$\vec{E} = \widehat{x}\left(e^{+ikz} + ae^{+ikz}\right)e^{-i\omega t}$$

Il campo magnetico ad essa associato é:

$$\vec{H} = \frac{1}{Z}\widehat{y}\left(e^{+ikz} + ae^{+ikz}\right)e^{-i\omega t}$$

Il vettore di Poynting complesso é:

$$\begin{aligned}\vec{S}_c &= \frac{1}{2Z}\widehat{x}\left(e^{+ikz} + ae^{+ikz}\right) \times \widehat{y}\left(e^{-ikz} + ae^{-ikz}\right) = \\ &= \frac{1}{2Z}\widehat{z}\left(1 + a + a + a^2\right) = \frac{1}{2Z}\widehat{z}\left(1 + a\right)^2\end{aligned}$$

Quindi:

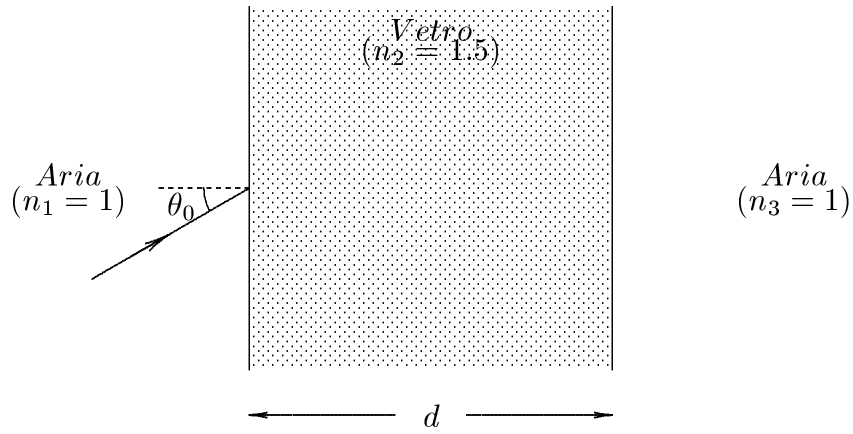
$$\mathscr{P} = \frac{1}{2Z}\left(1 + a\right)^2$$

La densitá di potenza competente alla composizione di due onde propagantesi nello stesso verso non é la somma delle densitá di potenze associate alle due singole onde.

00-24) Esercizio n. 4 del 15/9/2000

Quando su una lastra di vetro, di spessore d e di indice di rifrazione $n = 1.5$, immersa in aria, incide un fascio di luce ($\lambda_0 = 632.8\ nm$) con un angolo di incidenza rispetto alla normale $\theta_0 = 30^0$, si osserva un massimo nella potenza trasmessa.

Calcolare l'angolo d'incidenza di un fascio di luce di lunghezza d'onda $\lambda_0 = 514,5\ nm$ affinché si abbia sempre un massimo nella potenza trasmessa. Si assuma che l'indice di rifrazione della lastra rimanga invariato. e che il vettore campo elettrico é sempre ortogonale al piano di incidenza.



Il sistema considerato presenta un massimo nella potenza trasmessa quando:

$$n_2 \cos\theta_2 d = m\frac{\lambda_0}{4} \qquad (m\ pari) \tag{1}$$

Per la legge di Snell, si ha:

$$n_1 \sin\theta_0 = n_2 \sin\theta_2 \Longrightarrow \sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_0$$

ossia:

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_0}$$

Pertanto la condizione di massimo trasferimento di potenza, in funzione dell'angolo di incidenza θ_0, si scrive:

$$n_2 d\sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_0} = m\frac{\lambda_0}{4}$$

da cui:

$$d = \frac{m\dfrac{\lambda_0}{4}}{n_2\sqrt{1 - \dfrac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_0}}$$

Per $\lambda_0 = 632.8 \cdot 10^{-9}\ m$, $\theta_0 = 30^0$, $n_1 = 1$ e $n_2 = 1.5$, si ha:

$$d = m\frac{1.58 \cdot 10^{-7}}{1.5\sqrt{1 - 0.1111}} = m \cdot 1.1172 \cdot 10^{-7}\ metri \tag{2}$$

Per valutare l'angolo di incidenza per il quale il sistema presenta un massimo di potenza trasmessa relativamente alla lunghezza d'onda $\lambda_0 = 514.5\ nm$, basta sostituire la (2) nella (1) e calcolare $\cos\theta_2$.

Si ha, cioé:

$$\cos\theta_2 = \frac{m\dfrac{\lambda_0}{4}}{n_2 \cdot m \cdot 1.1172 \cdot 10^{-7}} = \underline{\underline{0.7675}}$$

Dalla legge di Snell, segue:

$$\sin\theta_0 = \frac{n_2}{n_1}\sin\theta_2 = \frac{n_2}{n_1}\sqrt{1 - \cos^2\theta_2} = 0.9615$$

da cui:

$$\theta_0 = \underline{\underline{74^0.06}}$$

00-25) Esercizio n. 1 del 4/10/2000

Una piccola spira percorsa da corrente spazialmente uniforme ha il diametro $d = \dfrac{\lambda}{10}$. Valutare la lunghezza (in unitá di lunghezze d'onda) di un dipolo elettrico hertziano affinché la potenza totale irradiata dalla spira eguagli quella del dipolo.

———————

Il campo elettrico far field irradiato dalla spira in approssimazione $\dfrac{a}{\lambda} << 1$ é:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \widehat{e}_\phi \omega\mu k I \pi a^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \sin\theta$$

Il campo magnetico ad esso associato é:

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\widehat{e}_\theta k^2 I \pi a^2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \sin\theta$$

Il vettore di Poynting complesso é:

$$\vec{S}_c = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\times\vec{H}^{\,*}\right) = \widehat{e}_r \frac{1}{2}\omega\mu k^3 \left(I\pi a^2\right)^2 \frac{1}{(4\pi r)^2}\sin^2\theta$$

Poiché:

$$\omega\mu k^3 = \omega\mu\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^3 = c\mu\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4$$

si ha:

$$\vec{S}_c = \widehat{e}_r \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I^2\pi^4}{16r^2}\left(\frac{d}{\lambda}\right)^4 \sin^2\theta$$

Ne segue che:

$$<\vec{S}> = \widehat{e}_r \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I^2\pi^4}{16r^2}\left(\frac{d}{\lambda}\right)^4 \sin^2\theta$$

La densitá di potenza irradiata é, quindi:

$$\mathscr{P} = \left| <\vec{S}\cdot\widehat{e}_r> \right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I^2\pi^4}{16r^2}\left(\frac{d}{\lambda}\right)^4 \sin^2\theta$$

La potenza totale irradiata é:

$$P_{sfera} = \oint_{sfera} <\vec{S}> \cdot\widehat{n} d^2r = \oint_{sfera} <\vec{S}> r^2 \sin\theta d\theta d\phi =$$

$$= Z\frac{I^2\pi^4}{32}\left(\frac{d}{\lambda}\right)^4 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = Z\frac{I^2\pi^4}{32}\left(\frac{d}{\lambda}\right)^4 2\pi\frac{4}{3} = Z\frac{I^2\pi^5}{12}\left(\frac{d}{\lambda}\right)^4$$

La potenza totale irradiata da un dipolo hertziano é:

$$P_{dip} = Z\frac{I^2\pi}{3}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

Affinché il dipolo hertziano irradi la stessa potenza della spira deve essere:

$$\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = \frac{\pi^4}{4}\left(\frac{d}{\lambda}\right)^4$$

ossia:

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{\pi^2}{2}\frac{1}{100} = \underline{\underline{4.93 \cdot 10^{-2}}}$$

ossia la lunghezza del dipolo deve essere circa $\frac{5}{100}$ della lunghezza d'onda.

00-26) Esercizio n. 2 del 4/10/2000

Una piccola particella sferica di raggio a é sottoposta all'interazione gravitazionale del Sole ed alla pressione di radiazione da esso esercitata. Se la potenza irradiata dal Sole é $3.8 \cdot 10^{26}$ W, calcolare il valore di a al di sotto del quale la particella viene respinta dal Sole. Si assuma che la particella sia assorbente ed abbia una massa volumica di 5000 Kg/m^3. La massa del sole é $M_s = 1.98596 \cdot 10^{30}$ Kg e la costante gravitazionale é $G = 6.672 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

———————

Sia R la distanza della particella dal sole. La densitá di potenza della radiazione solare nei punti di una superficie sferica di raggio R e centro il sole, é:

$$\mathscr{P} = \frac{P}{4\pi R^2}$$

Allora la pressione di radiazione esercitata dalla radiazione solare su un punto di tale superficie é:

$$p = \frac{\mathscr{P}}{c} = \frac{P}{4\pi R^2 c}$$

La forza che si esercita, quindi, su una particella di raggio a é:

$$F_{rad} = p \cdot \pi a^2 = \frac{P\pi a^2}{4\pi R^2 c}$$

D'altra parte la forza gravitazionale che si esercita sulla particella dovuta al sole é:

$$F_g = G\frac{M_s m_p}{R^2} = G\frac{M_s \delta \frac{4}{3}\pi a^3}{R^2}$$

essendo δ la massa volumica della particella.

Ovviamente le due forze hanno la stessa direzione e sono opposte in verso. Per l'equilibrio deve essere:

$$G\frac{M_s \delta \frac{4}{3}\pi a^3}{R^2} = \frac{P\pi a^2}{4\pi R^2 c}$$

ossia:

$$GM_s \delta a = \frac{3}{4}\frac{P}{4\pi c}$$

da cui:

$$a = \frac{3P}{16\pi c G M_s \delta} = \frac{3 \cdot 3.8 \cdot 10^{26}}{16 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 6.672 \cdot 10^{-11} \cdot 1.98586 \cdot 10^{30} \cdot 5 \cdot 10^3} =$$
$$= 1,14 \cdot 10^{-7}\ m = \underline{\underline{0.114\ \mu m}}$$

Se $a < 0.114$ μm la particella viene respinta dal sole.

00-27) Esercizio n. 3 del 4/10/2000

Si abbia una guida d'onda rettangolare, riempita d'aria, di dimensioni a e b; in essa si propaghi un singolo modo TE_{10} alla frequenza $f = 10\ GHz$. Si scelgano le dimensioni a e b della guida in modo tale che la frequenza operativa risulti maggiore della frequenza di cutoff del modo TE_{10} di un valore pari al 25% di essa e risulti minore della frequenza di cutoff del modo successivo TE_{01} sempre di un valore pari al 25% di essa. Se la potenza trasportata dalla guida é di 100 W, calcolare il valore massimo del modulo del campo elettrico all'interno della guida.

———————

Le frequenze di cutoff dei modi TE_{10} e TE_{01} che si propagano in guida rettangolare sono:

$$\nu_{c(TE_{10})} = \frac{c}{2a} \quad e \quad \nu_{c(TE_{01})} = \frac{c}{2b}$$

essendo a e b ($b < a$) le dimensioni della guida.

Sia $f_0 = 10\ GHz$ la frequenza operativa; dobbiamo imporre che sia:

$$f_0 = \frac{c}{2a} + 0.25\frac{c}{2a} = 1.25\frac{c}{2a}$$

$$f_0 = \frac{c}{2b} - 0.25\frac{c}{2b} = 0.75\frac{c}{2b}$$

ossia:

$$1.25\frac{c}{2a} = 10^{10} \quad e \quad 0.75\frac{c}{2b} = 10^{10}$$

che comporta:

$$a = \frac{1.25 \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{10}} = 1.875 \cdot 10^{-2}\ m = \underline{\underline{1.875\ cm}}$$

$$b = \frac{0.75 \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{10}} = 1.125 \cdot 10^{-2}\ m = \underline{\underline{1.125\ cm}}$$

La potenza trasportata dal modo TE_{10} é:

$$P_{TE_{10}} = A^2 \frac{\omega\mu\sqrt{\omega^2\epsilon_0\mu_0 - h_{10}^2}}{4h_{10}^2} ab$$

da cui:

$$A^2 = \frac{4h_{10}^2 P_{TE_{10}}}{\omega\mu\sqrt{\omega^2\epsilon_0\mu_0 - h_{10}^2}\,ab}$$

D'altra parte il valore massimo del modulo del campo elettrico all'interno della guida é:

$$|E|_{max} = |E_y|_{max} = A\frac{\omega\mu}{h_{10}}$$

Sostituendo l'espressione di A, si ottiene:

$$|E|_{max} = \frac{\omega\mu}{h_{10}} \frac{2h_{10}\sqrt{P_{TE_{10}}}}{\sqrt{\omega\mu\sqrt{\omega^2\epsilon_0\mu_0 - h_{10}^2}ab}} = \frac{2\sqrt{\omega\mu}\sqrt{P_{TE_{10}}}}{\left(\sqrt{\omega^2\epsilon_0\mu_0 - h_{10}^2}ab\right)^{1/2}}$$

Sostituendo i valori numerici, si ha:

$$|E|_{max} = \frac{2\sqrt{2\pi\cdot 10^{10}\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}\cdot 10}{\left(\sqrt{4\pi^2\cdot 10^{20}\cdot 8.854\cdot 10^{-12}\cdot 4\pi\cdot 10^{-7} - \frac{\pi^2}{(1.875\cdot 10^{-2})^2}}1.875\cdot 1.125\cdot 10^{-4}\right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{5620}{\left(\sqrt{43924.73 - 28073.54}\cdot 2.11\cdot 10^{-4}\right)^{1/2}} = \frac{5620}{0.162988} = \underline{\underline{34481\ V/m}}$$

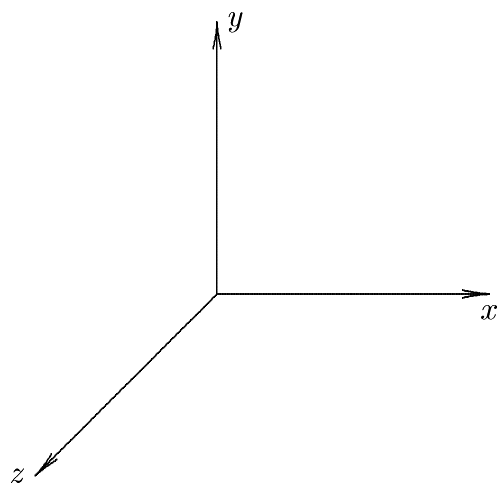
00-28) Esercizio n. 4 del 4/10/2000

Un'onda elettromagnetica piana uniforme, polarizzata circolarmente destra, viaggiante in aria incide normalmente su una superficie di acqua salata i cui parametri costitutivi sono: $\epsilon_r = 81$, $\sigma = 0.1\ S/m$ e $\mu_r = 1$. Se la frequenza dell'onda é $f = 1\ GHz$ e l'espressione del campo elettrico é data da:

$$\vec{E} = (\widehat{x} + \widehat{y}e^{i\psi})E_0 e^{i\beta_0 z}$$

calcolare: a) il valore di ψ; b) l'espressione del corrispondente campo magnetico; c) le espressioni del campo elettrico e del campo magnetico riflessi; d) lo stato di polarizzazione dell'onda riflessa; e) la percentuale della potenza riflessa.

———————



Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano e sia l'asse z la direzione di propagazione dell'onda piana incidente. Il campo elettrico dell'onda giace nel piano xy ed é dato dall'espressione:

$$\vec{E}_i = (\widehat{x} + \widehat{y}e^{i\psi})E_0 e^{i\beta_0 z} \tag{1}$$

Affinché l'onda sia polarizzata circolarmente destra occorre che:

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{E_0 e^{i\psi}}{E_0} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Quindi risulta:

$$\psi = -\frac{\pi}{2}$$

L'espressione del campo magnetico incidente é:

$$\vec{H}_i = \frac{k}{\omega\mu}\widehat{z} \times (\widehat{x} + \widehat{y}e^{i\psi})E_0 e^{i\beta_0 z}$$

Poiché si ha:

$$\widehat{z} \times \widehat{x} = \begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \widehat{y}; \qquad \widehat{z} \times \widehat{y} = \begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\widehat{x}$$

risulta:

$$\vec{H}_i = \frac{1}{Z}(\widehat{y} - \widehat{x}e^{i\psi})E_0 e^{i\beta_0 z}$$

Dalla (1) si deduce che la componente lungo l'asse y del campo elettrico incidente é ortogonale al piano di incidenza e la componente lungo l'asse x é parallela al piano di incidenza.

Allora la componente perpendicolare del campo elettrico riflesso é:

$$E_{1y} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right) E_0 e^{i\psi}$$

in quanto $\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$.

Per valutare la componente del campo elettrico riflessa parallela al piano di incidenza, consideriamo, al solito, la componente ortogonale del campo magnetico. Si ha:

$$H_{1y} = \left(\frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}\right) \frac{E_0}{Z}$$

La componente parallela del campo elettrico riflesso é, allora:

$$\vec{E}_{1\parallel} = -\frac{\omega \mu_1}{k_1} \widehat{n}_1 \times \vec{H}_{1\perp}$$

ossia:

$$\vec{E}_{1\parallel} = Z(\widehat{z} \times \widehat{y}) \left(\frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}\right) \frac{E_0}{Z}$$

e, poiché:

$$\widehat{z} \times \widehat{y} = \begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\widehat{x}$$

si ha:

$$E_{1x} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right) E_0$$

In definitiva le espressioni del campo elettrico e del campo magnetico riflessi sono:

$$\vec{E}_r = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right) E_0 \left(\widehat{x} + \widehat{y}e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) e^{-i\beta_0 z}$$

$$\vec{H}_r = \frac{1}{Z}\left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right) E_0 \left(\widehat{y} - \widehat{x} e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) e^{-i\beta_0 z}$$

Quindi l'onda riflessa é polarizzata circolarmente sinistra.
Il coefficiente di riflessione risulta:

$$R_\perp = R \parallel = R = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2$$

Poiché $k_1 = \beta_0$ e $k_2 = \beta_2 + i\alpha_2$, si ha:

$$R = \left|\frac{\beta_0 - \beta_2 - i\alpha_2}{\beta_0 + \beta_2 + i\alpha_2}\right|^2 = \frac{(\beta_0 - \beta_2)^2 + \alpha_2^2}{(\beta_0 + \beta_2)^2 + \alpha_2^2}$$

Calcoliamo la quantitá $\frac{\sigma}{\epsilon\omega}$; si ha:

$$\frac{\sigma}{\epsilon\omega} = \frac{0.1}{81 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 2\pi \cdot 10^9} = 2.2219 \cdot 10^{-2} \Longrightarrow \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} = 4.9 \cdot 10^{-4} << 1$$

Quindi possiamo porre:

$$\beta_2 = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_{r2}} \quad e \quad \alpha_2 = \frac{Z_0}{2}\sigma\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$

Quindi:

$$\beta_2 = \frac{2\pi \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} 9 = 188.49\ rad/m, \qquad \alpha_2 = 2.094\ m^{-1}$$

Si ha anche:

$$\beta_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} = 20.94\ rad/m$$

Ne segue:

$$R = \frac{2.8 \cdot 10^4 + 4.384}{4.386 \cdot 10^4 + 4.384} \simeq \frac{2.8 \cdot 10^4}{4.386 \cdot 10^4} = \underline{\underline{0.638}}$$

che coincide con la riflettivitá dell'onda polarizzata circolarmente in quanto $R = \frac{1}{2}R_\perp + \frac{1}{2}R_\parallel$.

00-29) Esercizio n. 1 del 25/11/2000

Il consumo medio di potenza negli Stati Uniti é $2 \cdot 10^{11}\ W$. Se questa potenza venisse trasportata da un fascio di onde piane il cui modulo del campo elettrico non puó superare la rigiditá dielettrica dell'aria ($3 \cdot 10^6 V/m$), calcolare l'area della sezione trasversale del fascio.

———————

La densitá di potenza associata ad un'onda elettromagnetica piana é:

$$\mathscr{P} = \frac{1}{2Z_0} E_0^2$$

La potenza che attraversa, in direzione della normale, una superficie S di area A é:

$$P = \mathscr{P} A = \frac{1}{2Z_0} E_0^2 A$$

Se P rappresenta il consumo medio di potenza negli Stati Uniti e E_0 la rigiditá dielettrica dell'aria, si ha:

$$A = \frac{2Z_0 P}{E_0^2} = \frac{2 \cdot 377 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{9 \cdot 10^{12}} = \underline{\underline{16.75\ m^2}}$$

00-30) Esercizio n. 2 del 25/11/2000

Determinare l'espressione della potenza (mediata in un periodo) trasportata da una guida d'onda circolare di raggio a eccitata nel modo TE e nel modo TM. Si utilizzi l'integrale di Lommel:

$$\int_0^a x[J_\nu(kx)]^2 dx = \frac{1}{2}a^2 \left\{ [J_\nu\,'(ka)]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{k^2a^2}\right)[J_\nu(ka)]^2 \right\}$$

———————

Come sappiamo (vedi es. n.3 del 23/6/1998) la potenza convogliata in una guida d'onda si esprime:

$$P = \frac{\mu\omega\beta}{2h^2} \int_\sigma H_z H_z^* d\sigma$$

nel caso di modi TE, e

$$P = \frac{\epsilon\omega\beta}{2h^2} \int_\sigma E_z E_z^* d\sigma$$

nel caso di modi TM.

Consideriamo i modi TE eccitati in guida circolare di raggio a. Si ha:

$$H_z = C_\nu J_\nu \left(\frac{x\,'_{\nu r}}{a}\rho\right) \cos\nu\phi e^{-i\beta z} e^{i\omega t}$$

$$H_z H_z^* = C_\nu^2 \left[J_\nu\left(\frac{x\,'_{\nu r}}{a}\rho\right)\right]^2 \cos^2\nu\phi$$

$$\int_\sigma H_z H_z^* d\sigma = C_\nu^2 \int_\sigma \left[J_\nu\left(\frac{x\,'_{\nu r}}{a}\rho\right)\right]^2 \cos^2\nu\phi d\sigma = C_\nu^2 \int_0^{2\pi}\int_0^a \left[J_\nu\left(\frac{x\,'_{\nu r}}{a}\rho\right)\right]^2 \cos^2\nu\phi\rho d\rho d\phi =$$
$$= C_\nu^2 \int_0^{2\pi} cos^2\nu\phi d\phi \int_0^a \rho \left[J_\nu\left(\frac{x\,'_{\nu r}}{a}\rho\right)\right]^2 d\rho$$

Applicando il risultato dell'integrale di **Lommel** si ha:

$$\int_0^a \rho \left[J_\nu\left(\frac{x\,'_{\nu r}}{a}\rho\right)\right]^2 d\rho = \frac{1}{2}a^2 \left\{ [J_\nu\,'(x\,'_{\nu r})]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{x\,'^2_{\nu r}}\right)[J_\nu(x\,'_{\nu r})]^2 \right\} =$$
$$= \frac{1}{2}a^2 \left(1 - \frac{\nu^2}{x\,'^2_{\nu r}}\right)[J_\nu(x\,'_{\nu r})]^2$$

in quanto:

$$J_\nu\,'(x\,'_{\nu r}) = 0$$

Quindi tenendo conto che:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \nu\phi d\phi = \begin{cases} \pi & per \quad \nu \neq 0 \\ 2\pi & per \quad \nu = 0 \end{cases}$$

si ha:

$$\int_\sigma H_z H_z^* d\sigma = C_\nu^2 \frac{1}{2}\pi a^2 \left(1 - \frac{\nu^2}{x\,'^2_{\nu r}}\right) \left[J_\nu(x\,'_{\nu r})\right]^2 \qquad per \quad \nu \neq 0$$

e:

$$\int_\sigma H_z H_z^* d\sigma = C_\nu^2 a^2 \pi \left[J_0(x\,'_{\nu r})\right]^2 \qquad per \quad \nu = 0$$

Quindi la potenza trasportata dai modi TE in guida circolare rispettivamente nei due casi $\nu \neq 0$ e $\nu = 0$ é:

$$P_{(\nu\neq 0)} = \frac{\mu\omega\beta_{\nu r}}{2h_{\nu r}^2} C_\nu^2 \frac{1}{2}\pi a^2 \left(1 - \frac{\nu^2}{x\,'^2_{\nu r}}\right) \left[J_\nu(x\,'_{\nu r})\right]^2$$

$$P_{(\nu=0)} = \frac{\mu\omega\beta_{0r}}{2h_{0r}^2} C_0^2 a^2 \pi \left[J_0(x\,'_{0r})\right]^2$$

essendo:

$$h_{\nu r} = \frac{x\,'_{\nu r}}{a} \quad e \quad \beta_{\nu r} = \sqrt{\omega^2\epsilon\mu - \left(\frac{x\,'_{\nu r}}{a}\right)^2}$$

Consideriamo i modi TM eccitati in guida circolare di raggio a. Si ha:

$$E_z = C_\nu J_\nu\left(\frac{x_{\nu r}}{a}\rho\right) \cos\nu\phi e^{-i\beta z} e^{i\omega t}$$

$$E_z E_z^* = C_\nu^2 \left[J_\nu\left(\frac{x_{\nu r}}{a}\rho\right)\right]^2 \cos^2\nu\phi$$

$$\begin{aligned}\int_\sigma E_z^* E_z d\sigma =& C_\nu^2 \int_\sigma \left[J_\nu\left(\frac{x_{\nu r}}{a}\rho\right)\right]^2 \cos^2\nu\phi d\sigma = C_\nu^2 \int_0^{2\pi}\int_0^a \left[J_\nu\left(\frac{x_{\nu r}}{a}\rho\right)\right]^2 \cos^2\nu\phi\rho d\rho d\phi = \\ =& C_\nu^2 \int_0^{2\pi} cos^2\nu\phi d\phi \int_0^a \rho \left[J_\nu\left(\frac{x_{\nu r}}{a}\rho\right)\right]^2 d\rho\end{aligned}$$

Applicando il risultato dell'integrale di **Lommel** si ha:

$$\begin{aligned}\int_0^a \rho \left[J_\nu\left(\frac{x_{\nu r}}{a}\rho\right)\right]^2 d\rho =& \frac{1}{2}a^2 \left\{\left[J_\nu\,'(x_{\nu r})\right]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{x_{\nu r}^2}\right)\left[J_\nu(x_{\nu r})\right]^2\right\} = \\ =& \frac{1}{2}a^2 \left[J_\nu\,'(x_{\nu r})\right]^2\end{aligned}$$

in quanto:

$$J_\nu(x_{\nu r}) = 0$$

Quindi tenendo conto che:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \nu\phi d\phi = \begin{cases} \pi & per \quad \nu \neq 0 \\ \\ 2\pi & per \quad \nu = 0 \end{cases}$$

si ha:

$$\int_\sigma E_z E_z^* d\sigma = C_\nu^2 \frac{1}{2} \pi a^2 \left[J_\nu\ '(x_{\nu r}) \right]^2 \quad per \quad \nu \neq 0$$

$$\int_\sigma E_z E_z^* d\sigma = C_0^2 \pi a^2 \left[J_0\ '(x_{0r}) \right]^2 \quad per \quad \nu = 0$$

Quindi la potenza trasportata dai modi TM in guida circolare rispettivamente nei due casi $\nu \neq 0$ e $\nu = 0$ é:

$$P_{(\nu \neq 0)} = \frac{\epsilon \omega \beta_{\nu r}}{2 h_{\nu r}^2} C_\nu^2 \frac{1}{2} \pi a^2 \left[J\ '_\nu(x_{\nu r}) \right]^2$$

$$P_{(\nu = 0)} = \frac{\epsilon \omega \beta_{0r}}{2 h_{0r}^2} C_0^2 a^2 \pi \left[J\ '_0(x_{0r}) \right]^2$$

essendo:

$$h_{\nu r} = \frac{x_{\nu r}}{a} \quad e \quad \beta_{\nu r} = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - \left(\frac{x_{\nu r}}{a} \right)^2}$$

00-31) Esercizio n. 3 del 25/11/2000

Un recipiente sferico, di materiale trasparente alle microonde, contiene una certa massa di gas ammoniaca ad una data temperatura; le molecole sono, quindi, sottoposte all'agitazione termica. Supponiamo che esse siano tutte allo stato eccitato e abbiano tutte la stessa velocitá media $\bar{v} = 10^7\ m/s$ isotropicamente distribuita.

Sapendo che, se in quiete, le molecole emettono microonde ad una frequenza $\nu = 23.860.000\ KHz$, calcolare la massima larghezza in frequenza del segnale emesso, misurata da un osservatore in quiete rispetto al recipiente e posto all'esterno di esso.

———————

Poiché la velocitá delle molecole é isotropicamente distribuita, un osservatore posto in un punto P generico rivela radiazione emessa da molecole che viaggiano in tutte le direzioni, ciascuna delle quali emette radiazione con frequenza diversa dalle altre per effetto Doppler.

É chiaro, allora, che egli rivela uno spettro di frequenze.

Nel caso in cui l'osservatore é solidale ad un sistema di riferimento S e la sorgente si muove rispetto ad esso, si ha:

$$\omega\,' = \gamma(\omega + \vec{v} \cdot \vec{k})$$

essendo ω la frequenza emessa dalla sorgente a riposo e $\omega\,'$ quella emessa dalla sorgente in moto e rivelata dall'osservatore.

Essendo $v = 10^7\ m/s$, risulta:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{10^7}{3 \cdot 10^8} = 0.0333 \Longrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2 = 1.00055$$

Possiamo, quindi, porre $\gamma \simeq 1$.

Il valore massimo della frequenza rivelata dall'osservatore si ha quando $\vec{v} \cdot \vec{k} = vk$ ossia quando la velocitá della molecola é orientata verso l'osservatore. Il valore minimo della frequenza rivelata dall'osservatore si ha quando $\vec{v} \cdot \vec{k} = -vk$ ossia quando la velocitá della molecola é orientata in verso opposto nella direzione dell'osservatore. Quindi:

$$\omega\,'_{max} = \omega + vk \qquad e \qquad \omega\,'_{min} = \omega - vk$$

Conseguentemente la massima larghezza in frequenza é:

$$\Delta\nu = \nu\,'_{max} - \nu\,'_{min} = \frac{2vk}{2\pi} = 2v\frac{\nu}{c} = 2 \cdot 10^7 \frac{23860 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} = \underline{\underline{1.59 \cdot 10^9\ Hz}}$$

00-32) Esercizio n. 4 del 25/11/2000

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $f = 3\ GHz$ incide normalmente su una lastra di polistirene ($\epsilon_r = 2.7$) sulla quale é praticato un largo foro. Calcolare lo spessore della lastra perché in uscita l'onda che passa attraverso il foro risulti in fase con quella che viaggia attraverso la lastra.

—————————

L'onda elettromagnetica che attraversa il foro, ossia si propaga in aria, ha la seguente espressione della parte reale del campo elettrico:

$$E_{foro} = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} z\right)$$

L'onda elettromagnetica che attraversa la lastra di polistirene ha la seguente espressione della parte reale del campo elettrico:

$$E_{lastra} = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r} z\right)$$

All'uscita della lastra, ossia per $z = d$, i campi elettrici sono:

$$E_{foro} = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} d\right)$$

$$E_{lastra} = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r} d\right)$$

Affinché le due onde all'uscita della lastra risultino in fase occorre che:

$$\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} d\right) = \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r} d\right)$$

Escludendo la soluzione banale $d = 0$ che si ottiene eguagliando semplicemente gli argomenti dei coseni, la prima soluzione diversa da $d = 0$ si ottiene dall'eguaglianza:

$$\omega t - \frac{\omega}{c} d^* = \omega t - \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r} d^* + 2\pi$$

ossia:

$$d^* \frac{\omega}{c}\left(\sqrt{\epsilon_r} - 1\right) = 2\pi$$

da cui:

$$d^* = \frac{2\pi}{\frac{\omega}{c}\left(\sqrt{\epsilon_r} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{3\cdot 10^9}{3\cdot 10^8}\left(\sqrt{\epsilon_r} - 1\right)} = \frac{1}{10\cdot 0.643} = 0.1555\ m = \underline{\underline{15.55\ cm}}$$

Fine Esercizi Campi e.m. - 2000