

**Antenne trasmettenti e riceventi.**

**9.1 - Generalità**

Abbiamo studiato precedentemente come il campo irradiato può essere descritto in termini di spettro angolare di onde piane, e come la funzione spettro è direttamente correlata al pattern “far field” di radiazione. Questa nozione sarà, ora, applicata in termini generali al campo irradiato da un’antenna trasmettente. Sarà allora mostrato, utilizzando il teorema di reciprocità, che la risposta di un’antenna ricevente “illuminata” da un’onda piana, è correlata allo spettro angolare associato alla stessa antenna quando è usata come trasmettitore.

Quindi poichè il campo irradiato da un’antenna trasmettente è uno spettro di onde piane, basta integrare la risposta dell’antenna ricevente su tutte le direzioni in modo da ottenere una formula per il campo accoppiato da un’antenna in un’altra.

Questa formula di accoppiamento fra antenne si applica qualunque sia la distanza fra trasmettitore e ricevitore.

**9.2 - Antenna come trasmettitore**

Dalla precedente teoria della diffrazione da aperture abbiamo stabilito che il campo elettromagnetico a grande distanza  $r$  da una apertura radiante di dimensioni finite, **quale un’antenna**, ha la forma approssimata (come peraltro si è visto nel corso di Campi elettromagnetici):

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) \simeq \frac{\exp(-ikr)}{kr} \vec{e}(\theta, \phi) \tag{9.2.1}$$

e

$$\vec{H}(r, \theta, \phi) \simeq \frac{1}{Z} \hat{e}_r \times \vec{E}(r, \theta, \phi) \tag{9.2.2}$$

con  $\hat{e}_r \cdot \vec{e}(\theta, \phi) = 0$ .

La (9.2.1) diventa una eguaglianza per  $kr \rightarrow \infty$ .

Consideriamo la figura (9.2-1); il punto campo  $P$  è individuato dalle coordinate sferiche  $(r, \theta, \phi)$ , il versore  $\hat{e}_r$  individua la direzione  $\overline{OP}$ ,  $-\pi < \phi < \pi$  e  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Il campo descritto dalle equazioni (9.2.1) e (9.2.2) è un’onda sferica il cui campo elettrico è dato in una particolare direzione del vettore  $\vec{e}(\theta, \phi)$ . Localmente nel punto  $P$  i campi hanno la forma di un’onda piana viaggiante nella direzione  $\hat{e}_r$  con  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  mutuamente ortogonali e tangenti alla sfera di raggio  $r$ .

Non vi è nessuna componente radiale del campo. Le costanti  $k$  e  $Z$  sono rispettivamente la costante di propagazione e l’impedenza del mezzo. È stata soppressa la

dipendenza dal tempo  $\exp(i\omega t)$ .

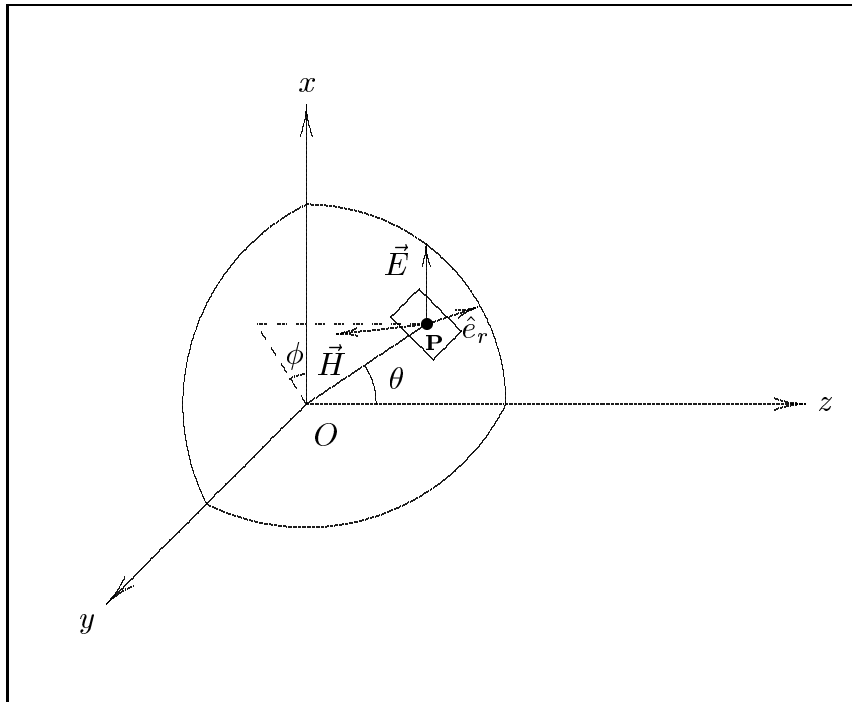


fig.9.2-1

Il vettore di Poynting ha soltanto la componente radiale

$$S_r(r, \theta, \phi) = \frac{|e(\theta, \phi)|^2}{2Z(kr)^2} \quad (9.2.3)$$

Se  $P_0$  è la potenza totale irradiata dall'antenna, il suo guadagno è dato da:

$$G(\theta, \phi) = \frac{4\pi r^2}{P_0} S_r(r, \theta, \phi) = \frac{\lambda^2 |e(\theta, \phi)|^2}{2\pi Z P_0} \quad (9.2.4)$$

### 9.3 - Guadagno di un'antenna e spettro angolare

La formula generale per la funzione vettoriale  $\vec{e}(\theta, \phi)$  nella rappresentazione mediante spettri di onde piane è data dall'equazione (8.15.4). Per poterla calcolare è necessaria la conoscenza di quattro spettri angolari: due per ciascuna polarizzazione del campo sull'"apertura" per ciascun semispazio. In modo da semplificare la discussione, polarizziamo la nostra attenzione al solo semispazio  $z \geq 0$  e ad un campo sull'apertura polarizzato lungo l'asse  $x$ ,  $E_{ax}(x, y)$ .

Allora è necessaria la conoscenza della funzione  $F_x(\alpha, \beta)$  data dalla (8.13.2) che è:

$$F_x(\alpha, \beta) = \frac{1}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{ax}(x, y) \exp \{ ik(\alpha x + \beta y) \} dx dy \quad (9.3.1)$$

In termini della (9.3.1) la funzione vettoriale “far field”  $\vec{e}(\theta, \phi)$  è data da:

$$\vec{e}(\theta, \phi) = i2\pi F_x(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi) [\hat{e}_\theta \cos \phi - \hat{e}_\phi \cos \theta \sin \phi] \quad (9.3.2)$$

Quindi il guadagno (9.2.4) dovuto ad un campo sull’apertura polarizzato lungo l’asse  $x$  è dato da:

$$G(\theta, \phi) \simeq \frac{2\pi\lambda^2}{ZP_0} \left| F_x(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi) \right|^2 (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) \quad (9.3.3)$$

essendo  $P_0$  la potenza totale irradiata dall’antenna.

Per un diagramma di radiazione molto “piccato” con il massimo nella direzione  $\theta = 0$  la (9.3.3) diventa:

$$G(\theta, \phi) \simeq \frac{2\pi\lambda^2}{ZP_0} |F_x|^2 \quad (9.3.4)$$

in cui la dipendenza funzionale di  $F_x$  da  $\theta$  e  $\phi$  è stata soppressa per brevità.

Questi risultati possono essere facilmente estesi al caso generale di una funzione  $\vec{e}(\theta, \phi)$  espressa dalla (8.15.4). In tal caso:

$$\vec{e}(\theta, \phi) = i2\pi \left[ \hat{e}_\theta (F_x \cos \phi + F_y \sin \phi) + \hat{e}_\phi (-F_x \cos \theta \sin \phi + F_y \cos \theta \cos \phi) \right] \quad (9.3.5)$$

dove  $F_x$  e  $F_y$  sono gli spettri angolari  $F_x^\pm(\alpha, \beta)$ , con il segno + riferito al semispazio  $z \geq 0$ , con il segno - riferito al semispazio  $z \leq 0$ . La funzione guadagno è allora data da:

$$G(\theta, \phi) = \frac{2\pi\lambda^2}{ZP_0} \left\{ |F_x|^2 (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) + 2\Re(F_x F_y^*) \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi + |F_y|^2 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \right\} \quad (9.3.6)$$

Per un diagramma molto “piccato” attorno alla direzione  $\theta = 0$  risulta:

$$G(\theta, \phi) \simeq \frac{2\pi\lambda^2}{ZP_0} \left\{ |F_x|^2 + |F_y|^2 \right\} \quad (9.3.7)$$

### Esercizio 9.1

Calcolare la direttività dell’antenna il cui campo all’apertura è dato dalle (8.4.1): guida d’onda rettangolare  $TE_{01}$ . Dimostrare che risulta:

$$D = \frac{32ab}{\pi\lambda^2}$$

**Soluzione:**

Si ha:

$$\begin{cases} E_{ax}(x, y) = E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) & \text{per } |x| \leq \frac{a}{2}, \quad |y| \leq \frac{b}{2} \\ E_{ax}(x, y) = 0 & \text{per } |x| \geq \frac{a}{2}, \quad |y| \geq \frac{b}{2} \end{cases} \quad (9.3.8)$$

Il guadagno dovuto ad un campo sull'apertura polarizzato lungo l'asse  $x$  è dato dalla (9.3.3):

$$G(\theta, \phi) \simeq \frac{2\pi\lambda^2}{ZP_0} \left| F_x(\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi) \right|^2 (1 - \sin^2\theta \sin^2\phi) \quad (9.3.9)$$

Nel nostro caso risulta:

$$F_x(\alpha, \beta) = E_0 \frac{\pi ab}{2\lambda^2} \frac{\sin\left(\frac{\pi a\alpha}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi a\alpha}{\lambda}\right) \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right)^2} \quad (9.3.10)$$

essendo  $\alpha = \sin\theta \cos\phi$  e  $\beta = \sin\theta \sin\phi$ .

Per definizione  $D = G(\theta, \phi)_{max}$ ; il guadagno risulta massimo quando massima è la funzione  $F_x(\alpha, \beta)$  ossia per  $\alpha = \beta = 0$ . Si ha:

$$F_x(\alpha, \beta)_{max} = F_x(0, 0) = E_0 \frac{\pi ab}{2\lambda^2} \frac{4}{\pi^2} \quad (9.3.11)$$

È necessario, adesso, calcolare la potenza  $P_0$  che attraversa l'apertura.

Poiché:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{|E_{ax}(x, y)|^2}{2Z} \hat{z} \quad (9.3.12)$$

si ha:

$$P_0 = \int \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{z} da = \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-b/2}^{+b/2} |E_0|^2 \cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \frac{1}{2Z} dx dy = \frac{a|E_0|^2 b}{2Z} \quad (9.3.12)$$

Ne segue:

$$D = G(\theta, \phi)_{max} = \frac{2\pi\lambda^2}{Z} \frac{4Z}{ab|E_0|^2} \left| \frac{2E_0 ab}{\pi\lambda^2} \right|^2 = \frac{32ab}{\pi\lambda^2} \quad (9.3.13)$$

### 9.4 - Direttività di un'apertura "illuminata" uniformemente

Un importante parametro comparativo nell'analisi e progettazione di antenne ad "apertura" è la direttività di un'antenna ad apertura in cui il campo è uniforme. Dimosteremo che tale direttività è la massima ottenibile da aperture, con campo non uniforme, della stessa area.

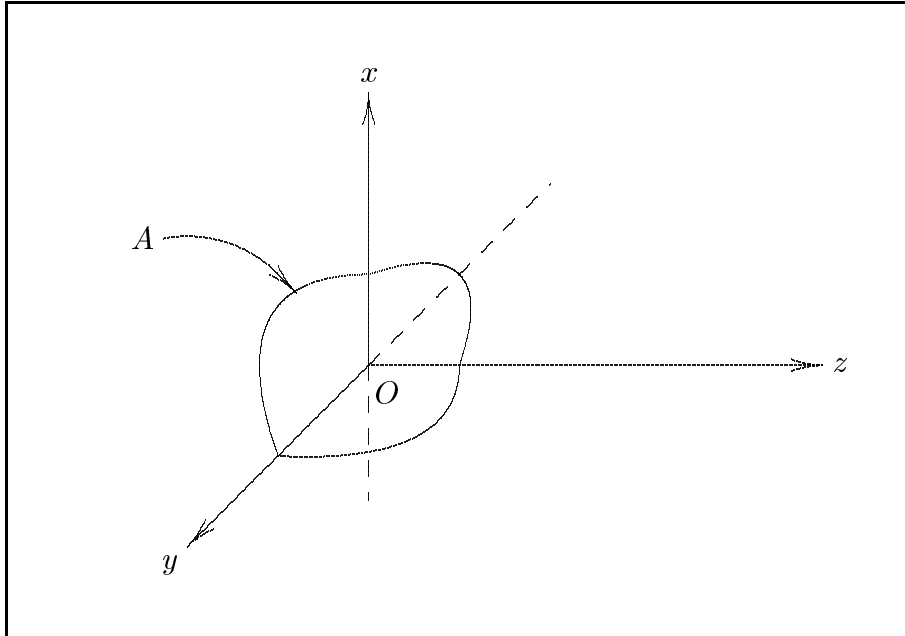


fig.9.4-1

Consideriamo un'apertura di forma arbitraria e di area  $A$ , giacente nel piano  $xy$ . Il campo sull'apertura sia costante  $E_0$  su  $A$  e zero fuori, cioè:

$$E_{ax} = \begin{cases} E_0 & \text{su } A \\ 0 & \text{fuori} \end{cases} \quad (9.4.1)$$

Lo spettro angolare per tale apertura è:

$$F_x(\alpha, \beta) = \frac{E_0}{\lambda^2} \iint_A \exp \left\{ ik(\alpha x + \beta y) \right\} dx dy \quad (9.4.2)$$

che ha chiaramente un massimo nella direzione dell'asse  $z$  ( $\theta = 0$  cioè  $\alpha = \beta = 0$ ) in quanto è la sola direzione in cui tutti i contributi dovuti alla funzione integranda sono in fase. Segue, quindi:

$$F_x(0, 0) = \frac{E_0}{\lambda^2} \iint_A dx dy = \frac{E_0 A}{\lambda^2} \quad (9.4.3)$$

La potenza totale che attraversa l'apertura è

$$P_0 = \frac{|E_0|^2 A}{2Z} \quad (9.4.4)$$

Supposto che  $P_0$  sia eguale a quella irradiata dall'antenna, la direttività sarà data dalla (9.3.4):

$$D = \frac{2\pi\lambda^2}{Z} \frac{|E_0|^2 A^2}{\lambda^4} = \frac{4\pi A}{\lambda^2} \quad (9.4.5)$$

Supponiamo, ora, che il campo sull'apertura sia una funzione arbitraria  $E_{ax}(x, y)$  su  $A$  e zero fuori tale che:

$$\max|E_{ax}(x, y)| = |E_0| \quad (9.4.6)$$

La direttività per questo campo arbitrario è:

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\left| \int \int_A E_{ax}(x, y) dx dy \right|^2}{\int \int_A |E_{ax}(x, y)|^2 dx dy} \quad (9.4.7)$$

Ora, oltre ad essere evidente dal punto di vista fisico, applicando la disuguaglianza di Schwarz si ha che:

$$\left| \int \int_A E_{ax}(x, y) dx dy \right|^2 \leq \int \int_A |E_{ax}(x, y)|^2 dx dy \int \int_A dx dy \leq \int \int_A |E_0|^2 dx dy \int \int_A dx dy \quad (9.4.8)$$

Ne segue che:

$$D \leq \frac{4\pi}{\lambda^2} A \quad (9.4.9)$$

sussistendo l'uguaglianza solo se  $E_{ax}(x, y)$  è costante.

### Esercizio 9.2

Calcolare la funzione guadagno per aperture rettangolari e circolari uniformemente "illuminate" e verificare nei due casi la (9.4.5)

#### Soluzione:

Supponiamo, per entrambi i tipi di apertura, che:

$$E_{ax} = \begin{cases} E_0 & \text{su } A \\ 0 & \text{fuori} \end{cases} \quad (9.4.10)$$

Indicando con  $A$  l'area dell'apertura, si ha  $A = ab$  per aperture rettangolari e  $A = \pi R^2$  per aperture circolari.

Per entrambi i tipi di apertura possiamo scrivere:

$$F_x(\alpha, \beta) = \frac{E_0}{\lambda^2} \int \int_A \exp \left\{ ik(\alpha x + \beta y) \right\} dx dy \quad (9.4.11)$$

In particolare per un'apertura rettangolare di dimensioni  $a$  e  $b$ , si ha:

$$\begin{aligned} F_x(\alpha, \beta) &= \frac{E_0}{\lambda^2} \int_{-a/2}^{+a/2} \exp(ik\alpha x) dx \int_{-b/2}^{+b/2} \exp(ik\beta y) dy = \\ &= \frac{E_0}{\lambda^2} a \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha a}{\lambda}\right) b \operatorname{sinc}\left(\frac{\beta b}{\lambda}\right) = \frac{E_0 A}{\lambda^2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha a}{\lambda}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\beta b}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (9.4.12)$$

Per l'apertura circolare uniformemente illuminata (vedi paragrafo 8.5), si ha:

$$F_x(s) = E_0 \frac{\pi R^2}{\lambda^2} \frac{2J_1(ksR)}{ksR} = \frac{E_0 A}{\lambda^2} \frac{2J_1(ksR)}{ksR} \quad (9.4.13)$$

Per valutare il guadagno, applichiamo la formula (9.3.3):

$$G(\theta, \phi) \simeq \frac{2\pi\lambda^2}{ZP_0} \left| F_x(\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi) \right|^2 (1 - \sin^2\theta \sin^2\phi) \quad (9.4.14)$$

Per la valutazione di  $P_0$  si procede come nell'esercizio 9.1; per la guida rettangolare risulta:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{|E_{ax}(x, y)|^2}{2Z} \hat{z} \quad (9.4.15)$$

e

$$P_0 = \int \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{z} da = \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{|E_0|^2}{2Z} dx dy = \frac{|E_0|^2}{2Z} A \quad (9.4.16)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} G(\theta, \phi) &= \frac{2\pi\lambda^2}{Z|E_0|^2} \frac{2Z}{A} \left| \frac{E_0 A}{\lambda^2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha a}{\lambda}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\beta b}{\lambda}\right) \right|^2 (1 - \sin^2\theta \sin^2\phi) = \\ &= \frac{4\pi A}{\lambda^2} \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{a \sin\theta \cos\phi}{\lambda}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{b \sin\theta \sin\phi}{\lambda}\right) \right|^2 (1 - \sin^2\theta \sin^2\phi) \end{aligned} \quad (9.4.17)$$

da cui:

$$D = G(\theta, \phi)_{max} = G(0, \phi) = \frac{4\pi A}{\lambda^2} \quad (9.4.18)$$

Per la guida circolare risulta:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{|E_{ax}(x, y)|^2}{2Z} \hat{z} \quad (9.4.19)$$

e

$$P_0 = \int \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{z} da = \frac{|E_0|^2}{2Z} \int_0^R 2\pi\rho d\rho = \frac{|E_0|^2}{2Z} \pi R^2 = \frac{|E_0|^2}{2Z} A \quad (9.4.20)$$

Quindi:

$$G(\theta, \phi) = \frac{4\pi A}{\lambda^2} \left| \frac{2J_1(k \sin \theta R)}{k \sin \theta R} \right|^2 (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) \quad (9.4.21)$$

Poiché  $\frac{2J_1(u)}{u}$  é massima per  $u = 0$  e vale 1, si ha:

$$D = G(\theta, \phi)_{max} = G(0, \phi) = \frac{4\pi A}{\lambda^2} \quad (9.4.22)$$

Il confronto di tale risultato con quello trovato nell'esercizio 9.1 dá, inoltre, la verifica che se l'apertura non é illuminata uniformemente la direttività é piú piccola di quella uniformemente illuminata; infatti, per la guida rettangolare, risulta:

$$\frac{32ab}{\pi \lambda^2} < \frac{4\pi ab}{\lambda^2}$$

### 9.5 - Polarizzazione e funzione guadagno

La polarizzazione del campo "far field" emesso da un'antenna é la direzione della funzione vettoriale  $\vec{e}(\theta, \phi)$  che varia al variare della direzione di osservazione  $(\theta, \phi)$  ma é sempre tangente alla sfera di osservazione di raggio  $r$ . Nel caso di un campo "d'apertura" polarizzato lungo l'asse  $x$  la funzione  $\vec{e}(\theta, \phi)$ , nel semispazio  $z \geq 0$  é (vedi (9.3.2)):

$$\vec{e}(\theta, \phi) = i2\pi F_x (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi) [\hat{e}_\theta \cos \phi - \hat{e}_\phi \cos \theta \sin \phi] \quad (9.5.1)$$

Questo chiaramente consiste nella somma di due onde linearmente polarizzate nelle direzioni ortogonali  $\hat{e}_\theta$  ed  $\hat{e}_\phi$ , le loro ampiezze complesse essendo nel rapporto  $-\cos \theta \tan \phi$ . **La polarizzazione in questo caso é quindi sempre lineare**, ma diretta diversamente nelle diverse direzioni. Se si vuole, quindi, misurare la funzione guadagno per mezzo di un'antenna, utilizzata come probe, questa deve essere diversamente orientata al variare di  $\theta$  e  $\phi$ . Tuttavia poichè il campo può essere risolto nella somma di due onde polarizzate ortogonalmente, dimostreremo che la funzione guadagno può essere risolta nella somma delle due corrispondenti funzioni guadagno.

Scriviamo il vettore  $\vec{e}(\theta, \phi)$ , per una particolare direzione, come la somma pesata di due vettori ortonormali  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$ , cioè:

$$\vec{e} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 \quad (9.5.2)$$

dove  $a_1$  e  $a_2$  sono ampiezze scalari complesse.

L'ortonormalità comporta che essi siano ortogonali cioè

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2^* = 0 \quad (9.5.3)$$



e che siano normalizzati, cioè:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1^* = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2^* = 1 \quad (9.5.4)$$

Da queste segue:

$$|e|^2 = \vec{e} \cdot \vec{e}^* = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) \cdot (a_1^*\vec{e}_1^* + a_2^*\vec{e}_2^*) = |a_1|^2 + |a_2|^2 \quad (9.5.5)$$

Quindi la funzione guadagno (9.2.4) può essere risolta in due parti:

$$G(\theta, \phi) = G_1(\theta, \phi) + G_2(\theta, \phi) \quad (9.5.6)$$

in termini di vettori ortonormali  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$ .

Questa risoluzione è particolarmente utile quando  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  sono due onde circolarmente polarizzate in verso opposto.

### 9.6 - Antenna come ricevitore

Una naturale ed efficiente misura delle prestazioni di un'antenna quando essa è usata come "antenna ricevente" o "ricevitore" è la sua risposta ad un'onda piana che in essa arriva.

La figura mostra un'onda piana di vettore campo elettrico  $\vec{E}_1$  che arriva da una direzione  $(\theta, \phi)$  su un'antenna ricevente.

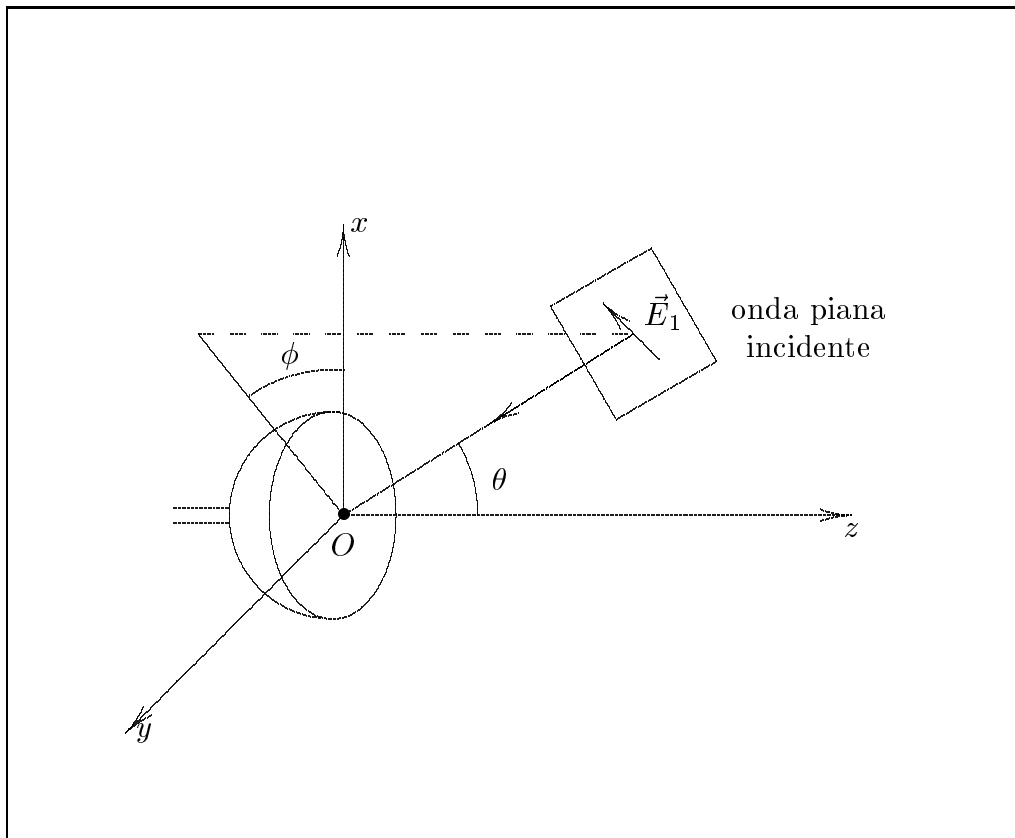


fig.9.6-1

La risposta dell'antenna è correlata ad un parametro  $A(\theta, \phi)$  definito come **il rapporto fra la potenza utilizzabile dall'antenna e la densità di potenza dell'onda piana incidente**. Essa ha quindi le dimensioni di un'area ed è funzione della direzione di arrivo dell'onda.  $A(\theta, \phi)$  prende il nome di **area efficace dell'antenna**. Assumiamo che la polarizzazione dell'onda piana incidente è variata in ogni direzione  $(\theta, \phi)$  in modo tale da “consegnare” al ricevitore la massima potenza, una condizione conosciuta come “polarization match”.

L'intuizione suggerisce che la condizione di polarization match è soddisfatta quando la polarizzazione dell'onda piana  $\vec{E}_1$  è la stessa di quella del vettore  $\vec{e}(\theta, \phi)$  dell'antenna in trasmissione e che l'area efficace dell'antenna  $A(\theta, \phi)$  e la sua funzione guadagno  $G(\theta, \phi)$  siano proporzionali. La relazione precisa é:

$$G(\theta, \phi) = \frac{4\pi}{\lambda^2} A(\theta, \phi) \tag{9.6.1}$$

Questa relazione è della stessa forma dell'equazione (9.4.5).

**9.7 - Formula di trasmissione di Friis (far field).**

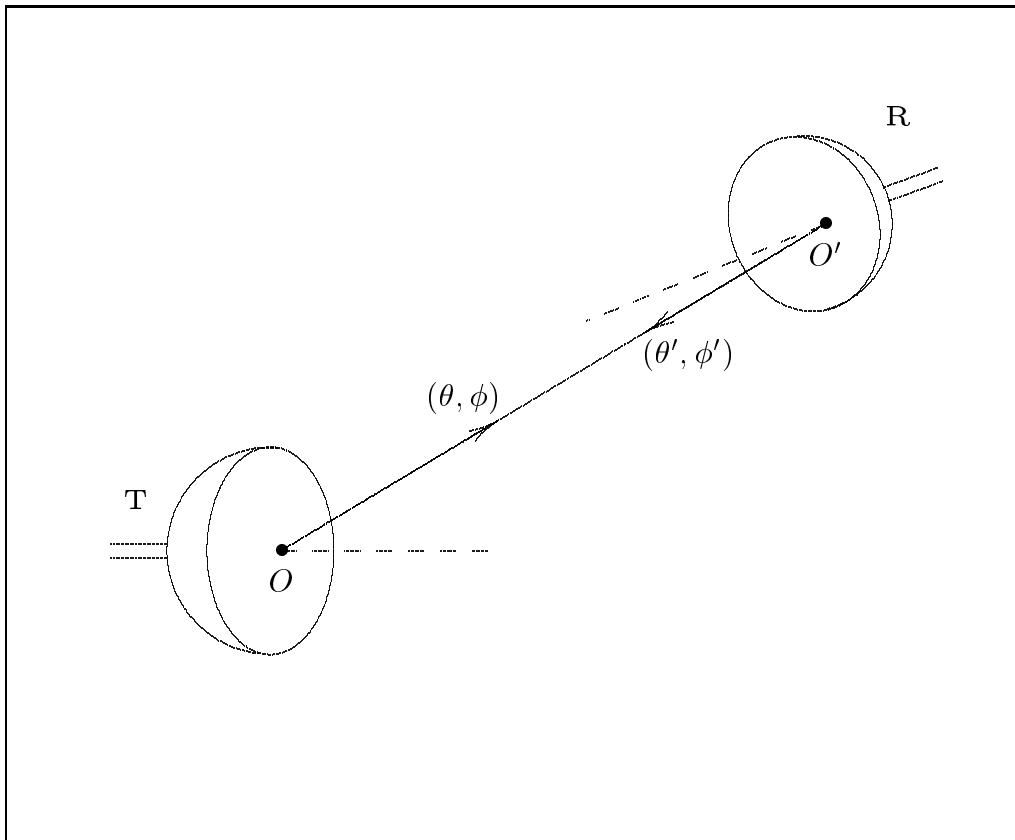


fig.9.7-1

Si abbia un'antenna ricevente in  $O'$ ; essa è nel "far field" di un'antenna trasmittente in  $O$ . Se  $P_T$  è la potenza totale emessa dal trasmettitore, la densità di potenza sull'antenna ricevente distante  $r$ , lungo la direzione  $(\theta, \phi)$ , dal trasmettitore sarà

$$\frac{P_T G_T(\theta, \phi)}{4\pi r^2} \quad (9.7.1)$$

$G_T(\theta, \phi)$  è la funzione guadagno del trasmettitore.

Se l'area efficace dell'antenna ricevente è  $A_R(\theta', \phi')$  nella direzione  $(\theta', \phi')$  verso il trasmettitore, la potenza "consegnata" al ricevitore è:

$$P_R = \frac{P_T G_T(\theta, \phi) A_R(\theta', \phi')}{4\pi r^2} \quad (9.7.2)$$

nell'ipotesi che il campo far field sia piano.

Utilizzando la (9.6.1) per sostituire nella (9.7.2) l'espressione di  $A_R$  si ha:

$$P_R = \frac{\lambda^2 P_T G_T(\theta, \phi) G_R(\theta', \phi')}{(4\pi r)^2} \quad (9.7.3)$$

La (9.7.3) fu sviluppata da **Friis** per la prima volta nel 1937.

---

Fine del Cap.9