

Complementi di teoria delle antenne I

3.1 - Impedenza di un'antenna

L'impedenza di un'antenna é definita come il rapporto fra la tensione ai terminali dell'antenna e la corrente che di conseguenza fluisce in essa. Se consideriamo il valore della corrente nel "punto" di alimentazione, l'impedenza è quella d'ingresso o "driving point impedance".

A meno di notazione contraria ci riferiremo sempre a impedenza d'ingresso di una antenna così definita:

$$Z_a = Z_{in} \equiv \frac{V(0)}{I(0)} = R_a + i X_a \quad (3.1.1)$$

L'antenna collegata ad una linea di trasmissione è equivalente ad una impedenza Z_a . La parte reale di Z_a , indicata con R_a , dà una misura della potenza utilizzata dall'antenna (per irradiazione e per perdite ohmiche).

Se l'antenna non ha perdite ohmiche R_a coincide con la resistenza di radiazione. La parte immaginaria di Z_a , indicata con X_a , nasce dal fatto che la tensione applicata $V(0)$ e la corrente nel punto di alimentazione $I(0)$ non sono in fase.

L'espressione di Z_a per una antenna rettilinea può essere ottenuta utilizzando la soluzione dell'equazione integrale di Hallén. In approssimazione di antenna sottile essa risulta:

$$Z_{in} = i \frac{\Omega}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cot kl = i 60\Omega \cot kl \quad (3.1.2)$$

essendo $\Omega = \ln \frac{4l^2}{a^2}$.

Questa è una pura reattanza in quanto non si è tenuto conto dell'irradiazione della antenna; pertanto il calcolo esatto deve effettuarsi tenendo conto della potenza irradiata per la valutazione della parte reale dell'impedenza d'ingresso.

Come già sappiamo la potenza irradiata da un'antenna rettilinea percorsa da corrente sinusoidale è:

$$P = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0^2}{4\pi} \left\{ C + \ln 2kl - C_i 2kl + \frac{\sin 2kl}{2} (-2S_i 2kl + S_i 4kl) + \frac{\cos 2kl}{2} (C + \ln kl + C_i 4kl - 2C_i 2kl) \right\} \quad (3.1.3)$$

La resistenza di radiazione d'ingresso è allora:

$$R_a = \frac{2P}{I_{in}^2} = \frac{2P}{I_0^2 \sin^2 kl} = \frac{1}{2\pi \sin^2 kl} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left\{ C + \ln 2kl - C_i 2kl + \frac{\sin 2kl}{2} (-2S_i 2kl + S_i 4kl) + \frac{\cos 2kl}{2} (C + \ln kl + C_i 4kl - 2C_i 2kl) \right\} \quad (3.1.4)$$

Per un dipolo a mezz'onda: $\left(kl = \frac{\pi}{2}, 2l = \frac{\lambda}{2} \right)$, si ha:

$$R_a = 60 \left\{ \frac{1}{2} C_{in} 2\pi \right\} = 30 C_{in} 2\pi = 73 \text{ ohm} \quad (3.1.5)$$

in quanto $C_{in} 2\pi = 2.438$.

Per un'antenna lunga $2l = \frac{3}{2}\lambda$ ($kl = \frac{3}{2}\pi$), si ha:

$$R_a = 30 C_{in} 6\pi = 105.3 \text{ ohm} \quad (3.1.6)$$

Allora l'impedenza d'ingresso è data dalla resistenza di radiazione per la parte reale e dalla (3.1.2) per la parte immaginaria.

Facciamo subito osservare che se l'antenna non è alimentata simmetricamente il calcolo della resistenza di radiazione fornisce un risultato complesso, abbiamo cioè la reattanza.

3.2 - Mutua induzione fra antenne vicine

Nel caso in cui un'antenna funziona da ricevitore la tensione indotta ai suoi terminali è dovuta alla radiazione elettromagnetica irradiata da un trasmettitore lontano. Consideriamo adesso la situazione in cui due antenne sono vicine l'una all'altra. L'antenna n^o1 è alimentata da una tensione V_1 , e la corrente risultante nel punto di alimentazione è I_1 (strettamente parlando, dovremmo usare il simbolo $I_1(0)$). Se la tensione a circuito aperto indotta ai terminali dell'antenna n^o2 è V_{21} , si definisce impedenza mutua il rapporto

$$Z_{21} = \frac{V_{21}}{I_1} \quad (3.2.1)$$

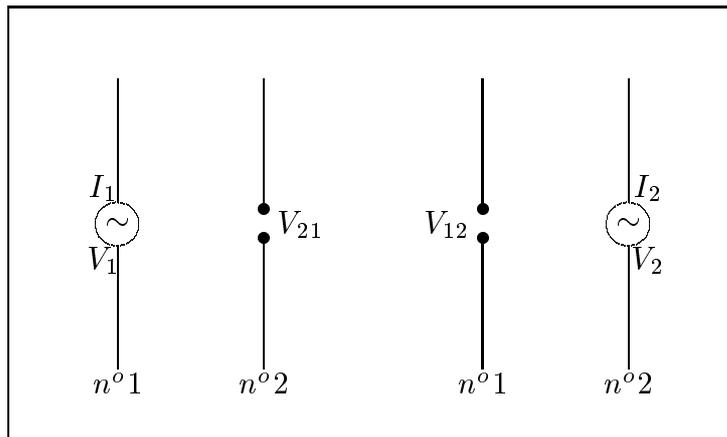


fig.3.2-1

Analogamente

$$Z_{12} = \frac{V_{12}}{I_2} \quad (3.2.2)$$

dove V_{12} è la tensione a circuito aperto fra i terminali dell'antenna $n^{\circ}1$ dovuta alla corrente I_2 dell'antenna $n^{\circ}2$.

Per il teorema di reciprocità, si ha:

$$Z_{12} = Z_{21} \tag{3.2.3}$$

Se entrambe le antenne sono alimentate, allora si ha:

$$\begin{aligned} V_1 &= I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12} \\ V_2 &= I_1 Z_{21} + I_2 Z_{22} \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

dove Z_{11} è l'impedenza misurata ai terminali dell'antenna $n^{\circ}1$ con i terminali dell'antenna $n^{\circ}2$ aperti. Analogamente Z_{22} è l'impedenza misurata ai terminali dell'antenna $n^{\circ}2$ con i terminali dell'antenna $n^{\circ}1$ aperti. Rigorosamente parlando Z_{11} non è identica all' "autoimpedenza" dell'antenna $n^{\circ}1$, Z_{a1} , che rappresenta l'impedenza d'ingresso se l'antenna è isolata nello spazio. Tuttavia, per la maggior parte degli scopi pratici, la differenza è trascurabile e Z_{11} è considerata uguale a Z_{a1} . Analogamente Z_{22} si può considerare uguale a Z_{a2} .

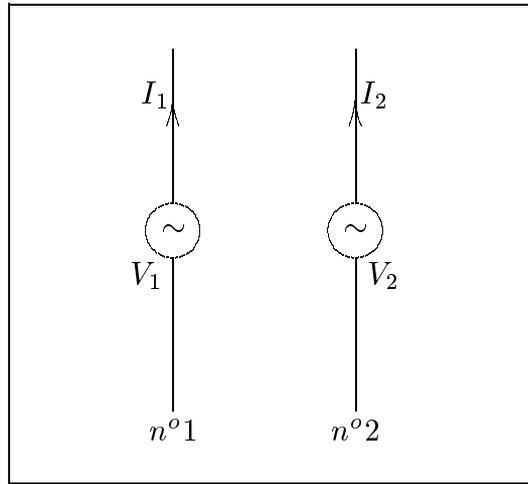


fig.3.2-2

Le equazioni (3.2.4) si possono scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{I_1} &= Z_{11} + Z_{12} \frac{I_2}{I_1} \\ \frac{V_2}{I_2} &= Z_{21} \frac{I_1}{I_2} + Z_{22} \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

In generale, nel caso di N antenne, si ha:

$$\begin{aligned} V_1 &= I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12} + \dots + I_N Z_{1N} \\ V_2 &= I_1 Z_{21} + I_2 Z_{22} + \dots + I_N Z_{2N} \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ V_N &= I_1 Z_{N1} + I_2 Z_{N2} + \dots + I_N Z_{NN} \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Calcolo dell'impedenza mutua

Per calcolare la mutua impedenza Z_{21} , dobbiamo trovare la tensione a circuito aperto V_{21} ai terminali dell'antenna $n^{\circ}2$ dovuta alla corrente di base $I_1(0)$ dell'antenna $n^{\circ}1$.

Sia l'antenna $n^{\circ}2$ nel campo elettromagnetico "vicino" dell'antenna $n^{\circ}1$.

Consideriamo un elemento dz' dell'antenna $n^{\circ}2$ che si trova a distanza z' dai terminali centrali. Sia E_{z21} la componente del campo elettrico incidente parallela all'elemento dz' .

Poichè consideriamo le antenne conduttori perfetti, il campo elettrico indotto in dz' è:

$$E_{zi} = -E_{z21} \tag{3.2.7}$$

in quanto la componente tangenziale del campo elettrico deve essere nulla. La forza elettromotrice indotta in dz' è quindi $-E_{z21}dz'$. Se i terminali centrali sono cortocircuitati questa forza elettromotrice causerà un flusso di corrente attraverso i terminali che denoteremo con dI_{sc} ($sc = \text{short circuit}$).

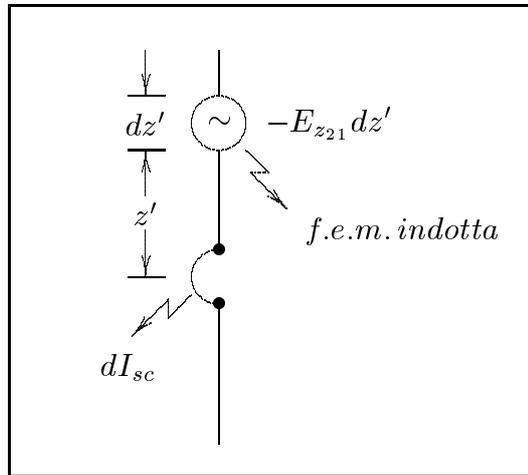


fig.3.2-3

Immaginiamo ora un'altra situazione in cui l'antenna $n^{\circ}2$ è usata come antenna trasmittente. Una tensione V è applicata ai terminali centrali ed una corrente $I(z')$ scorre nell'antenna. Nell'elemento dz' il suo valore è $I_2(z')$. Dal teorema di reciprocità si ha:

$$-\frac{E_{z21} dz'}{dI_{sc}} = \frac{V}{I_2(z')} \tag{3.2.8}$$

da cui:

$$dI_{sc} = -\frac{E_{z21} dz'}{V} I_2(z') \tag{3.2.9}$$

$$I_{sc} = -\frac{1}{V} \int E_{z21} I_2(z') dz' \tag{3.2.10}$$

Poichè la tensione a circuito aperto V_{21} è uguale al prodotto della corrente di corto circuito per l'impedenza dell'antenna Z_{a2} si ha:

$$V_{21} = I_{sc} Z_{a2} = -\frac{Z_{a2}}{V} \int E_{z21} I_2(z') dz' \tag{3.2.11}$$

Poichè $Z_{a2} = \frac{V}{I_2(0)}$ risulta:

$$V_{21} = -\frac{1}{I_2(0)} \int E_{z21} I_2(z') dz' \quad (3.2.12)$$

e per la (3.2.1)

$$Z_{21} = -\frac{1}{I_1(0)I_2(0)} \int E_{z21} I_2(z') dz' \quad (3.2.13)$$

L'equazione (3.2.13) esprime l'impedenza mutua in termini di un integrale del prodotto della componente parallela del campo elettrico incidente per la funzione distribuzione di corrente lungo l'antenna se questa fosse usata come trasmittente. È chiaro quindi che per il calcolo della (3.2.13) ci occorre conoscere la componente del campo E_{z21} .

Se le antenne sono vicine, come nei casi di maggiore interesse, occorre di volta in volta procedere al calcolo del campo elettromagnetico “**near field**” .

3.3 - Valutazione del campo elettromagnetico "near field" irradiato da una antenna rettilinea di lunghezza finita con distribuzione sinusoidale di corrente

Consideriamo un'antenna rettilinea, alimentata simmetricamente, di lunghezza $2l$. Ci proponiamo di calcolare il campo elettromagnetico in un punto P che si trova ad una distanza arbitraria dall'antenna.

Supponiamo l'antenna sottile in modo da poter porre:

$$I(z') = \begin{cases} I_0 \sin[k(l - z')] & 0 \leq z' < l \\ I_0 \sin[k(l + z')] & -l < z' \leq 0 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Per il calcolo dell'impedenza mutua di due antenne parallele bisogna conoscere la componente E_z del campo elettrico sulla seconda antenna.

È conveniente utilizzare coordinate cilindriche in cui una delle coordinate è z .

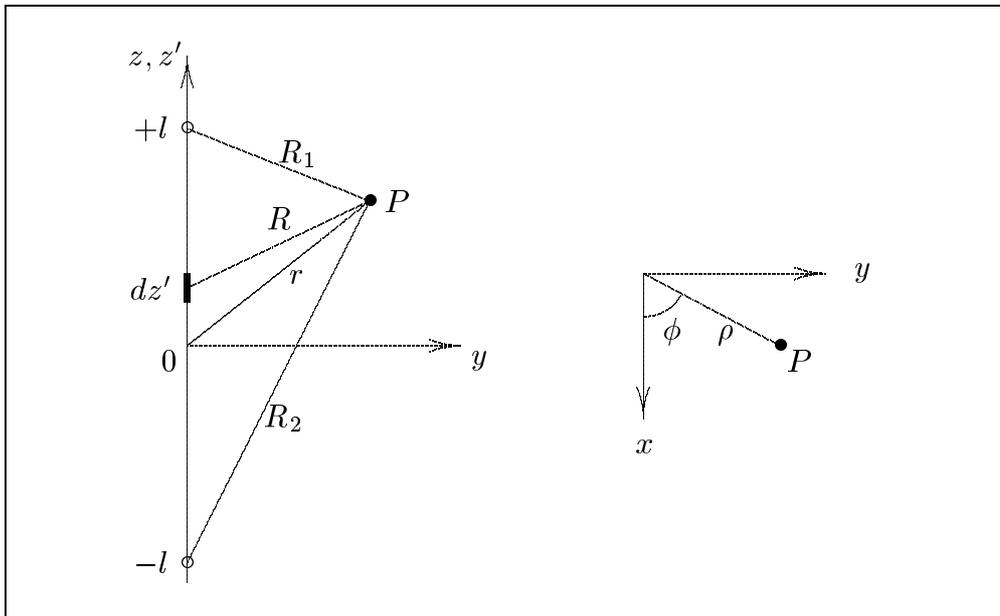


fig.3.3-1

Dalla geometria di figura si hanno le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(z - z')^2 + \rho^2} \\ R_1 &= \sqrt{(z - l)^2 + \rho^2} \\ R_2 &= \sqrt{(z + l)^2 + \rho^2} \\ r &= \sqrt{z^2 + \rho^2} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

L'espressione del potenziale vettore nel punto P è:

$$\begin{aligned}
 A_z &= \frac{\mu I_0}{4\pi} \left\{ \int_0^l \frac{\sin[k(l-z')]\exp(+ikR)}{R} dz' + \int_{-l}^0 \frac{\sin[k(l+z')]\exp(+ikR)}{R} dz' \right\} = \\
 &= \frac{\mu I_0}{4\pi} \left\{ \int_0^l \frac{\{\exp[ik(l-z')] - \exp[-ik(l-z')]\} \exp(ikR)}{2iR} dz' + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-l}^0 \frac{\{\exp[ik(l+z')] - \exp[-ik(l+z')]\} \exp(ikR)}{2iR} dz' \right\} = \\
 &= \frac{\mu I_0}{8i\pi} \left\{ \exp(ikl) \int_0^l \frac{\exp[ik(R-z')]}{R} dz' - \exp(-ikl) \int_0^l \frac{\exp[ik(R+z')]}{R} dz' + \right. \\
 &\quad \left. + \exp(ikl) \int_{-l}^0 \frac{\exp[ik(R+z')]}{R} dz' - \exp(-ikl) \int_{-l}^0 \frac{\exp[ik(R-z')]}{R} dz' \right\} \tag{3.3.3}
 \end{aligned}$$

Ricordiamo che:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{3.3.4}$$

che in coordinate cilindriche diventa:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{e}_\phi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{e}_z$$

Nel nostro caso, poichè $\vec{A} \equiv (0, 0, A_z)$ non dipende da ϕ in quanto il sistema è simmetrico rispetto all'asse z , si ha:

$$\vec{H} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \hat{e}_\phi \tag{3.3.5}$$

In particolare, data la simmetria, possiamo porre il punto P nel piano yz senza ledere le generalità.

Pertanto

$$H_\phi = -H_x = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} \tag{3.3.6}$$

Sostituendo la (3.3.3) nella (3.3.6) si ha:

$$H_\phi = -\frac{I_0}{8\pi i} [\exp(ikl) Q_1 - \exp(-ikl) Q_2 + \exp(ikl) Q_3 - \exp(-ikl) Q_4] \tag{3.3.7}$$

dove:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \frac{\partial}{\partial y} \int_0^l \frac{\exp[ik(R-z')]}{R} dz' & Q_2 &= \frac{\partial}{\partial y} \int_0^l \frac{\exp[ik(R+z')]}{R} dz' \\
 Q_3 &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{-l}^0 \frac{\exp[ik(R+z')]}{R} dz' & Q_4 &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{-l}^0 \frac{\exp[ik(R-z')]}{R} dz'
 \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Consideriamo inizialmente la quantità Q_1

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^l \frac{\exp[ik(R - z')]}{R} dz' \quad (3.3.8a)$$

Effettuiamo il seguente cambio di variabile

$$u = R - z' + z \quad (3.3.9)$$

Dalla (3.3.9) si ha:

$$\frac{du}{dz'} = \frac{dR}{dz'} - 1 = \frac{-2(z - z')}{2\sqrt{[(z - z')^2 + y^2]}} - 1 = -\frac{z}{R} + \frac{z'}{R} - 1 = \frac{-z + z' - R}{R} = -\frac{u}{R} \quad (3.3.10)$$

Quindi:

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial y} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\exp[ik(u - z)]}{R} \left(-\frac{R}{u}\right) du = -\exp(-ikz) \frac{\partial}{\partial y} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\exp(iku)}{u} du \quad (3.3.11)$$

dove:

$$\begin{aligned} u_2 &= R_1 - l + z \\ u_1 &= r + z \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Utilizzando la regola di derivazione di un integrale definito

$$Q_1 = -\exp(-ikz) \left[\frac{\exp(iku_2)}{u_2} \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\exp(iku_1)}{u_1} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] \quad (3.3.13)$$

Osserviamo che:

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{y}{R_1} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad (3.3.14)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\exp(-ikz) \left\{ \frac{\exp[ik(R_1 - l + z)]}{R_1 - l + z} \frac{y}{R_1} - \frac{\exp[ik(r + z)]}{r + z} \frac{y}{r} \right\} = \\ &= -\frac{\exp[ik(R_1 - l)]}{R_1 - (l - z)} \frac{y}{R_1} + \frac{\exp(ikr)}{r + z} \frac{y}{r} = \\ &= -\frac{[R_1 + (l - z)] \exp[ik(R_1 - l)]}{R_1 [R_1^2 - (l - z)^2]} y + \frac{(r - z) \exp(ikr)}{r(r^2 - z^2)} y \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Poichè dalle (3.3.2) risulta:

$$R_1^2 - (l - z)^2 = y^2 \quad \text{e} \quad r^2 - z^2 = y^2$$

la (3.3.15) diventa:

$$Q_1 = -\frac{1}{y} \left\{ \left(1 + \frac{l-z}{R_1} \right) \exp[ik(R_1 - l)] - \left(1 - \frac{z}{r} \right) \exp(ikr) \right\} \quad (3.3.16)$$

Con analogo procedimento si dimostra che:

$$Q_2 = \frac{1}{y} \left\{ \left(1 - \frac{l-z}{R_1} \right) \exp[ik(R_1 + l)] - \left(1 + \frac{z}{r} \right) \exp(ikr) \right\} \quad (3.3.17)$$

$$Q_3 = -\frac{1}{y} \left\{ \left(1 + \frac{l+z}{R_2} \right) \exp[ik(R_2 - l)] - \left(1 + \frac{z}{r} \right) \exp(ikr) \right\} \quad (3.3.18)$$

$$Q_4 = \frac{1}{y} \left\{ \left(1 - \frac{l+z}{R_2} \right) \exp[ik(R_2 + l)] - \left(1 - \frac{z}{r} \right) \exp(ikr) \right\} \quad (3.3.19)$$

Osserviamo che, per simmetria, Q_3 si ottiene da Q_1 scambiando z con $-z$ e R_1 con R_2 e analogamente Q_4 da Q_2 .

Sostituendo le (3.3.16)÷(3.3.19) nella (3.3.7), si ha:

$$H_\phi = \frac{I_0}{4\pi iy} [\exp(ikR_1) + \exp(ikR_2) - 2 \cos(kl) \exp(ikr)] \quad (3.3.20)$$

Calcoliamo adesso il campo elettrico dalla equazione di Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -i\omega\epsilon\vec{E}$$

da cui

$$\vec{E} = -\frac{1}{i\omega\epsilon} \vec{\nabla} \times \vec{H} \quad (3.3.21)$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{i\omega\epsilon} \left[-\frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right] \hat{e}_\rho - \frac{1}{i\omega\epsilon} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\phi) \right] \hat{e}_z \quad (3.3.22)$$

Nel piano yz , $\rho = y$ per cui si ha:

$$E_z = \frac{I_0}{4\pi\epsilon\omega y} \left\{ i \frac{ky}{R_1} e^{ikR_1} + i \frac{ky}{R_2} e^{ikR_2} - 2i \frac{ky}{r} [\cos kl] e^{ikr} \right\}$$

cioè:

$$E_z = i \frac{I_0}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left\{ \frac{e^{ikR_1}}{R_1} + \frac{e^{ikR_2}}{R_2} - 2 \cos kl \frac{e^{ikr}}{r} \right\} \quad (3.3.23)$$

Analogamente:

$$E_y = -\frac{I_0}{4\pi\epsilon\omega y} \left\{ i \frac{k(z-l)}{R_1} e^{ikR_1} + i \frac{k(z+l)}{R_2} e^{ikR_2} - 2i \frac{kz}{r} e^{ikr} \cos kl \right\}$$

cioè:

$$E_y = -i \frac{I_0}{4\pi y} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left\{ \frac{(z-l)}{R_1} e^{ikR_1} + \frac{(z+l)}{R_2} e^{ikR_2} - 2z \cos kl \frac{e^{ikr}}{r} \right\} \quad (3.3.24)$$

Le equazioni (3.3.20), (3.3.23) e (3.3.24) ci forniscono le espressioni del campo elettromagnetico in un generico punto arbitrariamente distante da un'antenna rettilinea di lunghezza finita con distribuzione sinusoidale di corrente.

Per il caso particolare di dipolo a mezz'onda, $l = \frac{\lambda}{4}$ otteniamo:

$$\begin{aligned}
 H_\phi &= \frac{I_0}{4\pi iy} \{ e^{ikR_1} + e^{ikR_2} \} \\
 E_z &= i \frac{I_0}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left\{ \frac{e^{ikR_1}}{R_1} + \frac{e^{ikR_2}}{R_2} \right\} \\
 E_y &= -i \frac{I_0}{4\pi y} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left\{ \frac{z - \frac{\lambda}{4}}{R_1} e^{ikR_1} + \frac{z + \frac{\lambda}{4}}{R_2} e^{ikR_2} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

Dalle (3.3.20), (3.3.23) e (3.3.24) si possono ricavare le espressioni ben note dei campi far-field.

3.4 - Impedenza mutua di antenne rettilinee parallele

Mediante le formule precedenti é ora possibile impostare il calcolo dell'impedenza mutua fra due antenne parallele entrambe normali alla retta congiungente i loro centri. Le antenne abbiano spessore infinitesimo e sia d la loro distanza.

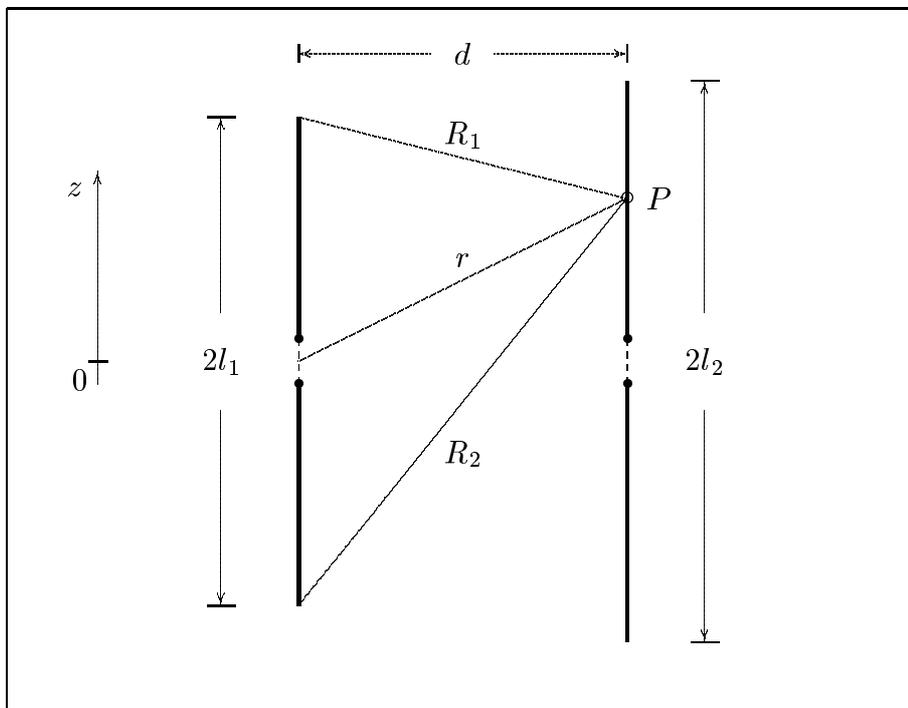


fig.3.4-1

Dalla figura 3.4-1 si ha:

$$\begin{cases} R_1 = \sqrt{(z - l_1)^2 + d^2} \\ R_2 = \sqrt{(z + l_1)^2 + d^2} \\ r = \sqrt{(z^2 + d^2)} \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Utilizzando la (3.2.13) si ha:

$$Z_{21} = -\frac{1}{I_1(0)I_2(0)} \int_{-l_2}^{+l_2} E_{z_{21}} I_2(z) dz \quad (3.4.2)$$

$$I_2(z) = I_{02} \sin k(l_2 - |z|)$$

e per la (3.3.23)

$$Z_{21} = -i \frac{I_{01}I_{02}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{I_1(0)I_2(0)} \int_{-l_2}^{+l_2} \left(\frac{e^{ikR_1}}{R_1} + \frac{e^{ikR_2}}{R_2} - 2 \cos(kl_1) \frac{e^{ikr}}{r} \right) \sin k(l_2 - |z|) dz \quad (3.4.3)$$

Ricordiamo, per inciso, che $E_{z_{21}}$ rappresenta il campo generato dall'antenna 1 nei punti dell'antenna 2.

$$\begin{aligned} Z_{21} = & -i \frac{I_{01}I_{02}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{I_1(0)I_2(0)} \int_0^{+l_2} \left(\frac{e^{ikR_1}}{R_1} + \frac{e^{ikR_2}}{R_2} - 2 \cos(kl_1) \frac{e^{ikr}}{r} \right) \sin k(l_2 - z) dz \\ & - i \frac{I_{01}I_{02}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{I_1(0)I_2(0)} \int_{-l_2}^0 \left(\frac{e^{ikR_1}}{R_1} + \frac{e^{ikR_2}}{R_2} - 2 \cos(kl_1) \frac{e^{ikr}}{r} \right) \sin k(l_2 + z) dz \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Poiché scambiando z con $-z$, r non muta ed R_1 si scambia con R_2 , il secondo integrale risulta uguale al primo e, si ha:

$$Z_{21} = -2i \frac{I_{01}I_{02}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{I_1(0)I_2(0)} \int_0^{+l_2} \left(\frac{e^{ikR_1}}{R_1} + \frac{e^{ikR_2}}{R_2} - 2 \cos(kl_1) \frac{e^{ikr}}{r} \right) \sin k(l_2 - z) dz \quad (3.4.5)$$

Applicando le formule di Eulero:

$$\sin k(l_2 - z) = \frac{1}{2i} \left\{ \exp \left[ik(l_2 - z) \right] - \exp \left[-ik(l_2 - z) \right] \right\} \quad (3.4.6)$$

si ha:

$$\begin{aligned} Z_{21} = & -\frac{I_{01}I_{02}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{I_1(0)I_2(0)} \int_0^{+l_2} \left(\frac{e^{ikR_1}}{R_1} + \frac{e^{ikR_2}}{R_2} - 2 \cos(kl_1) \frac{e^{ikr}}{r} \right) e^{ik(l_2 - z)} dz + \\ & + \frac{I_{01}I_{02}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{I_1(0)I_2(0)} \int_0^{+l_2} \left(\frac{e^{ikR_1}}{R_1} + \frac{e^{ikR_2}}{R_2} - 2 \cos(kl_1) \frac{e^{ikr}}{r} \right) e^{-ik(l_2 - z)} dz = \\ = & -\frac{I_{01}I_{02}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{I_1(0)I_2(0)} e^{+ikl_2} \int_0^{+l_2} \left(\frac{e^{ik(R_1 - z)}}{R_1} + \frac{e^{ik(R_2 - z)}}{R_2} - 2 \cos(kl_1) \frac{e^{ik(r - z)}}{r} \right) dz - \\ & - \frac{I_{01}I_{02}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{I_1(0)I_2(0)} e^{-ikl_2} \int_0^{+l_2} \left(-\frac{e^{ik(R_1 + z)}}{R_1} - \frac{e^{ik(R_2 + z)}}{R_2} + 2 \cos(kl_1) \frac{e^{ik(r + z)}}{r} \right) dz \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

I primi tre integrali che figurano nell'espressione (3.4.7) sono del tipo

$$I_1(m) = \int_0^{l_2} \frac{e^{ik(R_m-z)}}{R_m} dz \quad (3.4.8)$$

ove sia posto:

$$R_m = \sqrt{(z-m)^2 + d^2} = \begin{cases} R_1 & \text{se } m = l_1 \\ R_2 & \text{se } m = -l_1 \\ r & \text{se } m = 0 \end{cases} \quad (3.4.9)$$

Assunta, in luogo della z , la nuova variabile u :

$$u = R_m - z + m = \sqrt{(z-m)^2 + d^2} - z + m \quad (3.4.10)$$

si ha, differenziando rispetto a z :

$$du = \left(\frac{(z-m)}{\sqrt{(z-m)^2 + d^2}} - 1 \right) dz = \left(\frac{z-m-R_m}{R_m} \right) dz = -\frac{u}{R_m} dz \quad (3.4.11)$$

da cui:

$$dz = -\frac{R_m}{u} du \quad (3.4.12)$$

Quindi la (3.4.8) diventa:

$$\begin{aligned} I_1(m) &= e^{-ikm} \int_0^{l_2} \frac{e^{ik(R_m-z+m)}}{R_m} dz = -e^{-ikm} \int_{R_m^{(0)}+m}^{R_m^{(l_2)}-l_2+m} \frac{e^{iku}}{u} du = \\ &= -e^{-ikm} \int_{k(R_m^{(0)}+m)}^{k(R_m^{(l_2)}-l_2+m)} \frac{e^{iku}}{ku} d(ku) \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

essendo $R_m^{(l_2)} = \sqrt{(l_2-m)^2 + d^2}$ ed $R_m^{(0)} = \sqrt{m^2 + d^2}$.

$$\begin{aligned} I_1(m) &= -e^{-ikm} \int_{k(R_m^{(0)}+m)}^{k(R_m^{(l_2)}-l_2+m)} \frac{\cos ku}{ku} d(ku) - ie^{-ikm} \int_{k(R_m^{(0)}+m)}^{k(R_m^{(l_2)}-l_2+m)} \frac{\sin ku}{ku} d(ku) = \\ &= -e^{-ikm} \int_{k(R_m^{(0)}+m)}^{+\infty} \frac{\cos ku}{ku} d(ku) + e^{-ikm} \int_{k(R_m^{(l_2)}-l_2+m)}^{+\infty} \frac{\cos ku}{ku} d(ku) + \\ &\quad - ie^{-ikm} \int_0^{k(R_m^{(l_2)}-l_2+m)} \frac{\sin ku}{ku} d(ku) + ie^{-ikm} \int_0^{k(R_m^{(0)}+m)} \frac{\sin ku}{ku} d(ku) \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Gli integrali che compaiono nella (3.4.14) possono essere espressi mediante le seguenti funzioni tabulate:

$$C_i(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt = \gamma + \ln(x) + \int_0^x \frac{\cos(t) - 1}{t} dt \quad S_i(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt \quad (3.4.15)$$

essendo $\gamma = 0.577215664901$ la costante di Eulero.

Pertanto possiamo scrivere:

$$I_1(m) = e^{-ikm} C_i \left[k(R_m^{(0)} + m) \right] - e^{-ikm} C_i \left[k(R_m^{(l_2)} - l_2 + m) \right] - \quad (3.4.16)$$

$$-ie^{-ikm} S_i \left[k(R_m^{(l_2)} - l_2 + m) \right] + ie^{-ikm} S_i \left[k(R_m^{(0)} + m) \right]$$

Gli ultimi tre integrali che figurano nella (3.4.7) sono del tipo

$$I_2(m) = \int_0^{l_2} \frac{e^{ik(R_m+z)}}{R_m} dz \quad (3.4.17)$$

ove sia posto $R_m = \sqrt{(z-m)^2 + d^2}$ con m che assume i valori $+l_1, -l_1, 0$.

Assunta, in luogo della z , la nuova variabile u :

$$u = R_m + z - m = \sqrt{(z-m)^2 + d^2} + z - m \quad (3.4.18)$$

si ha, differenziando rispetto a z :

$$du = \left(\frac{(z-m)}{\sqrt{(z-m)^2 + d^2}} + 1 \right) dz = \left(\frac{z-m+R_m}{R_m} \right) dz = \frac{u}{R_m} dz \quad (3.4.19)$$

da cui:

$$dz = \frac{R_m}{u} du \quad (3.4.20)$$

Quindi la (3.4.17) diventa:

$$I_2(m) = e^{ikm} \int_{k(R_m^{(0)}-m)}^{k(R_m^{(l_2)}+l_2-m)} \frac{e^{iku}}{ku} d(ku) =$$

$$= e^{ikm} \int_{k(R_m^{(0)}-m)}^{k(R_m^{(l_2)}+l_2-m)} \frac{\cos ku}{ku} d(ku) + ie^{ikm} \int_{k(R_m^{(0)}-m)}^{k(R_m^{(l_2)}+l_2-m)} \frac{\sin ku}{ku} d(ku) = \quad (3.4.21)$$

$$= e^{ikm} \int_{k(R_m^{(0)}-m)}^{\infty} \frac{\cos ku}{ku} d(ku) - e^{ikm} \int_{k(R_m^{(l_2)}+l_2-m)}^{\infty} \frac{\cos ku}{ku} d(ku) +$$

$$+ ie^{ikm} \int_0^{k(R_m^{(l_2)}+l_2-m)} \frac{\sin ku}{ku} d(ku) - ie^{ikm} \int_0^{k(R_m^{(0)}-m)} \frac{\sin ku}{ku} d(ku)$$

Utilizzando le (3.4.15), possiamo esprimere la (3.4.21) nella seguente maniera:

$$I_2(m) = -e^{ikm} C_i [k(R_m^{(0)} - m)] + e^{ikm} C_i [k(R_m^{(l_2)} + l_2 - m)] + \quad (3.4.22)$$

$$+ ie^{ikm} S_i [k(R_m^{(l_2)} + l_2 - m)] - ie^{ikm} S_i [k(R_m^{(0)} - m)]$$

Finalmente, l'espressione (3.4.7) si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 Z_{21} = & -\frac{I_{01}I_{02}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{I_1(0)I_2(0)} e^{ikl_2} \left\{ e^{-ikl_1} C_i[k(R_1(0) + l_1)] - e^{-ikl_1} C_i[k(R_1(l_2) - l_2 + l_1)] + \right. \\
 & - ie^{-ikl_1} S_i[k(R_1(l_2) - l_2 + l_1)] + ie^{-ikl_1} S_i[k(R_1(0) + l_1)] + e^{ikl_1} C_i[k(R_2(0) - l_1)] + \\
 & - e^{ikl_1} C_i[k(R_2(l_2) - l_2 - l_1)] - ie^{ikl_1} S_i[k(R_2(l_2) - l_2 - l_1)] + ie^{ikl_1} S_i[k(R_2(0) - l_1)] + \\
 & - 2 \cos(kl_1) C_i[kr(0)] + 2 \cos(kl_1) C_i[k(r(l_2) - l_2)] + 2i \cos(kl_1) S_i[k(r(l_2) - l_2)] + \\
 & \left. - 2i \cos(kl_1) S_i[kr(0)] \right\} + \\
 & -\frac{I_{01}I_{02}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{I_1(0)I_2(0)} e^{-ikl_2} \left\{ e^{ikl_1} C_i[k(R_1(0) - l_1)] - e^{ikl_1} C_i[k(R_1(l_2) + l_2 - l_1)] + \right. \\
 & - ie^{ikl_1} S_i[k(R_1(l_2) + l_2 - l_1)] + ie^{ikl_1} S_i[k(R_1(0) - l_1)] + e^{-ikl_1} C_i[k(R_2(0) + l_1)] + \\
 & - e^{-ikl_1} C_i[k(R_2(l_2) + l_2 + l_1)] - ie^{-ikl_1} S_i[k(R_2(l_2) + l_2 + l_1)] + \\
 & + ie^{-ikl_1} S_i[k(R_2(0) + l_1)] - 2 \cos(kl_1) C_i[kr(0)] + 2 \cos(kl_1) C_i[k(r(l_2) + l_2)] + \\
 & \left. + 2i \cos(kl_1) S_i[k(r(l_2) + l_2)] - 2i \cos(kl_1) S_i[kr(0)] \right\}
 \end{aligned} \tag{3.4.23}$$

Posto

$$\begin{aligned}
 R_1(0) &= \sqrt{l_1^2 + d^2} = L_1, & R_1(l_2) &= \sqrt{(l_2 - l_1)^2 + d^2} = H_1 \\
 R_2(0) &= \sqrt{l_1^2 + d^2} = L_1, & R_2(l_2) &= \sqrt{(l_2 + l_1)^2 + d^2} = H_2 \\
 r(0) &= \sqrt{d^2} = d, & r(l_2) &= \sqrt{l_2^2 + d^2} = L_2
 \end{aligned} \tag{3.4.24}$$

la (3.4.23) si scrive:

$$\begin{aligned}
 Z_{21} = & -\frac{I_{01}I_{02}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{I_1(0)I_2(0)} \left\{ e^{ik(l_2-l_1)} C_i[k(L_1 + l_1)] - e^{ik(l_2-l_1)} C_i[k(H_1 - l_2 + l_1)] - \right. \\
 & - ie^{ik(l_2-l_1)} S_i[k(H_1 - l_2 + l_1)] + ie^{ik(l_2-l_1)} S_i[k(L_1 + l_1)] + e^{ik(l_2+l_1)} C_i[k(L_1 - l_1)] - \\
 & - e^{ik(l_2+l_1)} C_i[k(H_2 - l_2 - l_1)] - ie^{ik(l_2+l_1)} S_i[k(H_2 - l_2 - l_1)] + ie^{ik(l_2+l_1)} S_i[k(L_1 - l_1)] - \\
 & - 2 \cos(kl_1) e^{ikl_2} C_i(kd) + 2 \cos(kl_1) e^{ikl_2} C_i[k(L_2 - l_2)] + 2i \cos(kl_1) e^{ikl_2} S_i[k(L_2 - l_2)] - \\
 & - 2i \cos(kl_1) e^{ikl_2} S_i(kd) + e^{-ik(l_2-l_1)} C_i[k(L_1 - l_1)] - e^{-ik(l_2-l_1)} C_i[k(H_1 + l_2 - l_1)] - \\
 & - ie^{-ik(l_2-l_1)} S_i[k(H_1 + l_2 - l_1)] + ie^{-ik(l_2-l_1)} S_i[k(L_1 - l_1)] + e^{-ik(l_2+l_1)} C_i[k(L_1 + l_1)] - \\
 & - e^{-ik(l_2+l_1)} C_i[k(H_2 + l_2 + l_1)] - ie^{-ik(l_2+l_1)} S_i[k(H_2 + l_2 + l_1)] + \\
 & + ie^{-ik(l_2+l_1)} S_i[k(L_1 + l_1)] - 2 \cos(kl_1) e^{-ikl_2} C_i(kd) + 2 \cos(kl_1) e^{-ikl_2} C_i[k(L_2 + l_2)] + \\
 & \left. + 2i \cos(kl_1) e^{-ikl_2} S_i[k(L_2 + l_2)] - 2i \cos(kl_1) e^{-ikl_2} S_i(kd) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.4.25}$$

Per comodità di calcolo, poniamo:

$$\begin{aligned}
 u_0 &= kd \\
 u_{11} &= k(L_1 - l_1) & v_{11} &= k(L_2 - l_2) \\
 u_{12} &= k(L_1 + l_1) & v_{12} &= k(L_2 + l_2) \\
 u_{13} &= k(H_1 - l_2 + l_1) & v_{13} &= k(H_2 + l_2 + l_1) \\
 u_{14} &= k(H_1 + l_2 - l_1) & v_{14} &= k(H_2 - l_2 - l_1)
 \end{aligned} \tag{3.4.26}$$

La (3.4.25) si può, allora, scrivere:

$$\begin{aligned}
 Z_{21} = & -\frac{I_{01}I_{02}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{I_1(0)I_2(0)} \left\{ e^{ik(l_2-l_1)} C_i(u_{12}) - e^{ik(l_2-l_1)} C_i(u_{13}) - ie^{ik(l_2-l_1)} S_i(u_{13}) + \right. \\
 & + ie^{ik(l_2-l_1)} S_i(u_{12}) + e^{ik(l_2+l_1)} C_i(u_{11}) - e^{ik(l_2+l_1)} C_i(v_{14}) - ie^{ik(l_2+l_1)} S_i(v_{14}) + \\
 & + ie^{ik(l_2+l_1)} S_i(u_{11}) - 2 \cos(kl_1) e^{ikl_2} C_i(u_0) + 2 \cos(kl_1) e^{ikl_2} C_i(v_{11}) + \\
 & + 2i \cos(kl_1) e^{ikl_2} S_i(v_{11}) - 2i \cos(kl_1) e^{ikl_2} S_i(u_0) + e^{-ik(l_2-l_1)} C_i(u_{11}) - \\
 & - e^{-ik(l_2-l_1)} C_i(u_{14}) - ie^{-ik(l_2-l_1)} S_i(u_{14}) + ie^{-ik(l_2-l_1)} S_i(u_{11}) + \\
 & + e^{-ik(l_2+l_1)} C_i(u_{12}) - e^{-ik(l_2+l_1)} C_i(v_{13}) - ie^{-ik(l_2+l_1)} S_i(v_{13}) + \\
 & + ie^{-ik(l_2+l_1)} S_i(u_{12}) - 2 \cos(kl_1) e^{-ikl_2} C_i(u_0) + 2 \cos(kl_1) e^{-ikl_2} C_i(v_{12}) + \\
 & \left. + 2i \cos(kl_1) e^{-ikl_2} S_i(v_{12}) - 2i \cos(kl_1) e^{-ikl_2} S_i(u_0) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.4.27}$$

Sviluppando gli esponenziali complessi che figurano nella (3.4.27) mediante la formula di Eulero, si ha:

$$\begin{aligned}
 Z_{21} = & -\frac{I_{01}I_{02}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{I_1(0)I_2(0)} \left\{ [\cos k(l_2 - l_1) + i \sin k(l_2 - l_1)] C_i(u_{12}) - \right. \\
 & - [\cos k(l_2 - l_1) + i \sin k(l_2 - l_1)] C_i(u_{13}) - i[\cos k(l_2 - l_1) + i \sin k(l_2 - l_1)] S_i(u_{13}) + \\
 & + i[\cos k(l_2 - l_1) + i \sin k(l_2 - l_1)] S_i(u_{12}) + [\cos k(l_2 + l_1) + i \sin k(l_2 + l_1)] C_i(u_{11}) - \\
 & - [\cos k(l_2 + l_1) + i \sin k(l_2 + l_1)] C_i(v_{14}) - i[\cos k(l_2 + l_1) + i \sin k(l_2 + l_1)] S_i(v_{14}) + \\
 & + i[\cos k(l_2 + l_1) + i \sin k(l_2 + l_1)] S_i(u_{11}) - 2 \cos(kl_1) [\cos(kl_2) + i \sin(kl_2)] C_i(u_0) + \\
 & + 2 \cos(kl_1) [\cos(kl_2) + i \sin(kl_2)] C_i(v_{11}) + 2i \cos(kl_1) [\cos(kl_2) + i \sin(kl_2)] S_i(v_{11}) - \\
 & - 2i \cos(kl_1) [\cos(kl_2) + i \sin(kl_2)] S_i(u_0) + [\cos k(l_2 - l_1) - i \sin k(l_2 - l_1)] C_i(u_{11}) - \\
 & - [\cos k(l_2 - l_1) - i \sin k(l_2 - l_1)] C_i(u_{14}) - i[\cos k(l_2 - l_1) - i \sin k(l_2 - l_1)] S_i(u_{14}) + \\
 & + i[\cos k(l_2 - l_1) - i \sin k(l_2 - l_1)] S_i(u_{11}) + [\cos k(l_2 + l_1) - i \sin k(l_2 + l_1)] C_i(u_{12}) - \\
 & - [\cos k(l_2 + l_1) - i \sin k(l_2 + l_1)] C_i(v_{13}) - i[\cos k(l_2 + l_1) - i \sin k(l_2 + l_1)] S_i(v_{13}) + \\
 & + i[\cos k(l_2 + l_1) - i \sin k(l_2 + l_1)] S_i(u_{12}) - 2 \cos(kl_1) [\cos(kl_2) - i \sin(kl_2)] C_i(u_0) + \\
 & + 2 \cos(kl_1) [\cos(kl_2) - i \sin(kl_2)] C_i(v_{12}) + 2i \cos(kl_1) [\cos(kl_2) - i \sin(kl_2)] S_i(v_{12}) - \\
 & \left. - 2i \cos(kl_1) [\cos(kl_2) - i \sin(kl_2)] S_i(u_0) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.4.28}$$

Posto:

$$Z_{21} = R_{21} + i X_{21} \quad (3.4.29)$$

calcoliamo separatamente la parte reale e la parte immaginaria della (3.4.28).

La parte reale é:

$$\begin{aligned}
 R_{21} = & -\frac{I_{01}I_{02}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{I_1(0)I_2(0)} \left\{ \cos k(l_2 - l_1)C_i(u_{12}) - \cos k(l_2 - l_1)C_i(u_{13}) + \right. \\
 & + \sin k(l_2 - l_1)S_i(u_{13}) - \sin k(l_2 - l_1)S_i(u_{12}) + \cos k(l_2 + l_1)C_i(u_{11}) - \\
 & - \cos k(l_2 + l_1)C_i(v_{14}) + \sin k(l_2 + l_1)S_i(v_{14}) - \sin k(l_2 + l_1)S_i(u_{11}) - \\
 & - 2 \cos(kl_1) \cos(kl_2)C_i(u_0) + 2 \cos(kl_1) \cos(kl_2)C_i(v_{11}) - 2 \cos(kl_1) \sin(kl_2)S_i(v_{11}) + \\
 & + 2 \cos(kl_1) \sin(kl_2)S_i(u_0) + \cos k(l_2 - l_1)C_i(u_{11}) - \cos k(l_2 - l_1)C_i(u_{14}) - \\
 & - \sin k(l_2 - l_1)S_i(u_{14}) + \sin k(l_2 - l_1)S_i(u_{11}) + \cos k(l_2 + l_1)C_i(u_{12}) - \\
 & - \cos k(l_2 + l_1)C_i(v_{13}) - \sin k(l_2 + l_1)S_i(v_{13}) + \sin k(l_2 + l_1)S_i(u_{12}) - \\
 & - 2 \cos(kl_1) \cos(kl_2)C_i(u_0) + 2 \cos(kl_1) \cos(kl_2)C_i(v_{12}) + 2 \cos(kl_1) \sin(kl_2)S_i(v_{12}) - \\
 & \left. - 2 \cos(kl_1) \sin(kl_2)S_i(u_0) \right\} \quad (3.4.30)
 \end{aligned}$$

Tenendo conto che:

$$\begin{aligned}
 2 \cos(kl_1) \cos(kl_2) &= \cos k(l_2 + l_1) + \cos k(l_2 - l_1) \\
 2 \cos(kl_1) \sin(kl_2) &= \sin k(l_2 + l_1) + \sin k(l_2 - l_1)
 \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

la (3.4.30) diventa:

$$\begin{aligned}
 R_{21} = & -\frac{I_{01}I_{02}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{I_1(0)I_2(0)} \left\{ \cos k(l_2 - l_1)C_i(u_{12}) - \cos k(l_2 - l_1)C_i(u_{13}) + \right. \\
 & + \sin k(l_2 - l_1)S_i(u_{13}) - \sin k(l_2 - l_1)S_i(u_{12}) + \cos k(l_2 + l_1)C_i(u_{11}) - \\
 & - \cos k(l_2 + l_1)C_i(v_{14}) + \sin k(l_2 + l_1)S_i(v_{14}) - \sin k(l_2 + l_1)S_i(u_{11}) - \\
 & - [\cos k(l_2 + l_1) + \cos k(l_2 - l_1)]C_i(u_0) + [\cos k(l_2 + l_1) + \cos k(l_2 - l_1)]C_i(v_{11}) - \\
 & - [\sin k(l_2 + l_1) + \sin k(l_2 - l_1)]S_i(v_{11}) + [\sin k(l_2 + l_1) + \sin k(l_2 - l_1)]S_i(u_0) + \\
 & + \cos k(l_2 - l_1)C_i(u_{11}) - \cos k(l_2 - l_1)C_i(u_{14}) - \sin k(l_2 - l_1)S_i(u_{14}) + \\
 & + \sin k(l_2 - l_1)S_i(u_{11}) + \cos k(l_2 + l_1)C_i(u_{12}) - \cos k(l_2 + l_1)C_i(v_{13}) - \\
 & - \sin k(l_2 + l_1)S_i(v_{13}) + \sin k(l_2 + l_1)S_i(u_{12}) - \\
 & - [\cos k(l_2 + l_1) + \cos k(l_2 - l_1)]C_i(u_0) + [\cos k(l_2 + l_1) + \cos k(l_2 - l_1)]C_i(v_{12}) + \\
 & \left. + [\sin k(l_2 + l_1) + \sin k(l_2 - l_1)]S_i(v_{12}) - [\sin k(l_2 + l_1) + \sin k(l_2 - l_1)]S_i(u_0) \right\} \quad (3.4.32)
 \end{aligned}$$

Raggruppando:

$$\begin{aligned}
 R_{21} = & -\frac{I_{01}I_{02}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{I_1(0)I_2(0)} \left\{ \left[C_i(u_{12}) - C_i(u_{13}) - \underline{C_i(u_0)} + C_i(v_{11}) - C_i(u_{14}) + \right. \right. \\
 & + C_i(u_{11}) - \underline{C_i(u_0)} + C_i(v_{12}) \left. \right] \cos k(l_2 - l_1) + \left[C_i(u_{11}) - C_i(v_{14}) - \underline{C_i(u_0)} + \right. \\
 & + C_i(v_{11}) + C_i(u_{12}) - C_i(v_{13}) - \underline{C_i(u_0)} + C_i(v_{12}) \left. \right] \cos k(l_2 + l_1) + \\
 & + \left[S_i(u_{13}) - S_i(u_{12}) - S_i(v_{11}) + S_i(u_0) - S_i(u_{14}) + S_i(u_{11}) + S_i(v_{12}) - \right. \\
 & - S_i(u_0) \left. \right] \sin k(l_2 - l_1) + \left[S_i(v_{14}) - S_i(u_{11}) - S_i(v_{11}) + S_i(u_0) - \right. \\
 & \left. - S_i(v_{13}) + S_i(u_{12}) + S_i(v_{12}) - S_i(u_0) \right] \sin k(l_2 + l_1) \left. \right\}
 \end{aligned} \tag{3.4.33}$$

Semplificando e cambiando di segno:

$$\begin{aligned}
 R_{21} = & \frac{I_{01}I_{02}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{I_1(0)I_2(0)} \left\{ \left[C_i(u_{13}) + C_i(u_{14}) + 2C_i(u_0) - C_i(u_{12}) - C_i(u_{11}) - \right. \right. \\
 & - C_i(v_{11}) - C_i(v_{12}) \left. \right] \cos k(l_2 - l_1) + \left[C_i(v_{14}) + C_i(v_{13}) + 2C_i(u_0) + \right. \\
 & - C_i(u_{12}) - C_i(u_{11}) - C_i(v_{12}) - C_i(v_{11}) \left. \right] \cos k(l_2 + l_1) + \\
 & + \left[S_i(u_{14}) - S_i(u_{13}) + S_i(v_{11}) - S_i(v_{12}) + S_i(u_{12}) - S_i(u_{11}) \right] \sin k(l_2 - l_1) + \\
 & + \left[S_i(v_{13}) - S_i(v_{14}) + S_i(u_{11}) - S_i(u_{12}) + S_i(v_{11}) - S_i(v_{12}) \right] \sin k(l_2 + l_1) \left. \right\}
 \end{aligned} \tag{3.4.34}$$

La parte immaginaria della (3.4.28) é:

$$\begin{aligned}
 X_{21} = & -\frac{I_{01}I_{02}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{I_1(0)I_2(0)} \left\{ \sin k(l_2 - l_1) C_i(u_{12}) - \sin k(l_2 - l_1) C_i(u_{13}) - \right. \\
 & - \cos k(l_2 - l_1) S_i(u_{13}) + \cos k(l_2 - l_1) S_i(u_{12}) + \sin k(l_2 + l_1) C_i(u_{11}) - \\
 & - \sin k(l_2 + l_1) C_i(v_{14}) - \cos k(l_2 + l_1) S_i(v_{14}) + \cos k(l_2 + l_1) S_i(u_{11}) - \\
 & - 2 \cos(kl_1) \sin(kl_2) C_i(u_0) + 2 \cos(kl_1) \sin(kl_2) C_i(v_{11}) + \\
 & + 2 \cos(kl_1) \cos(kl_2) S_i(v_{11}) - 2 \cos(kl_1) \cos(kl_2) S_i(u_0) + \\
 & - \sin k(l_2 - l_1) C_i(u_{11}) + \sin k(l_2 - l_1) C_i(u_{14}) - \cos k(l_2 - l_1) S_i(u_{14}) + \\
 & + \cos k(l_2 - l_1) S_i(u_{11}) - \sin k(l_2 + l_1) C_i(u_{12}) + \sin k(l_2 + l_1) C_i(v_{13}) - \\
 & - \cos k(l_2 + l_1) S_i(v_{13}) + \cos k(l_2 + l_1) S_i(u_{12}) + 2 \cos(kl_1) \sin(kl_2) C_i(u_0) - \\
 & - 2 \cos(kl_1) \sin(kl_2) C_i(v_{12}) + 2 \cos(kl_1) \cos(kl_2) S_i(v_{12}) - \\
 & \left. - 2 \cos(kl_1) \cos(kl_2) S_i(u_0) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.4.35}$$

Tenendo conto delle (3.4.31), si ha:

$$\begin{aligned}
 X_{21} = & -\frac{I_{01}I_{02}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{I_1(0)I_2(0)} \left\{ \sin k(l_2 - l_1)C_i(u_{12}) - \sin k(l_2 - l_1)C_i(u_{13}) - \right. \\
 & - \cos k(l_2 - l_1)S_i(u_{13}) + \cos k(l_2 - l_1)S_i(u_{12}) + \sin k(l_2 + l_1)C_i(u_{11}) - \\
 & - \sin k(l_2 + l_1)C_i(v_{14}) - \cos k(l_2 + l_1)S_i(v_{14}) + \cos k(l_2 + l_1)S_i(u_{11}) - \\
 & - [\sin k(l_2 + l_1) + \sin k(l_2 - l_1)]C_i(u_0) + [\sin k(l_2 + l_1) + \sin k(l_2 - l_1)]C_i(v_{11}) + \\
 & + [\cos k(l_2 + l_1) + \cos k(l_2 - l_1)]S_i(v_{11}) - [\cos k(l_2 + l_1) + \cos k(l_2 - l_1)]S_i(u_0) + \\
 & - \sin k(l_2 - l_1)C_i(u_{11}) + \sin k(l_2 - l_1)C_i(u_{14}) - \cos k(l_2 - l_1)S_i(u_{14}) + \\
 & + \cos k(l_2 - l_1)S_i(u_{11}) - \sin k(l_2 + l_1)C_i(u_{12}) + \sin k(l_2 + l_1)C_i(v_{13}) - \\
 & - \cos k(l_2 + l_1)S_i(v_{13}) + \cos k(l_2 + l_1)S_i(u_{12}) + \\
 & + [\sin k(l_2 + l_1) + \sin k(l_2 - l_1)]C_i(u_0) - [\sin k(l_2 + l_1) + \sin k(l_2 - l_1)]C_i(v_{12}) + \\
 & \left. + [\cos k(l_2 + l_1) + \cos k(l_2 - l_1)]S_i(v_{12}) - [\cos k(l_2 + l_1) + \cos k(l_2 - l_1)]S_i(u_0) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.4.36}$$

Raggruppando:

$$\begin{aligned}
 X_{21} = & -\frac{I_{01}I_{02}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{I_1(0)I_2(0)} \left\{ [S_i(u_{12}) - S_i(u_{13}) - \underline{S_i(u_0)} + S_i(v_{11}) - S_i(u_{14}) + \right. \\
 & + S_i(u_{11}) - \underline{S_i(u_0)} + S_i(v_{12})] \cos k(l_2 - l_1) + [S_i(u_{11}) - S_i(v_{14}) - \underline{S_i(u_0)} + \\
 & + S_i(v_{11}) + S_i(u_{12}) - S_i(v_{13}) - \underline{S_i(u_0)} + S_i(v_{12})] \cos k(l_2 + l_1) + \\
 & + [C_i(u_{12}) - C_i(u_{13}) + C_i(v_{11}) - C_i(\cancel{u_0}) + C_i(u_{14}) - C_i(u_{11}) - C_i(v_{12}) + \\
 & + C_i(\cancel{u_0})] \sin k(l_2 - l_1) + [C_i(u_{11}) - C_i(v_{14}) + C_i(v_{11}) - C_i(\cancel{u_0}) + \\
 & \left. + C_i(v_{13}) - C_i(u_{12}) - C_i(v_{12}) + C_i(\cancel{u_0})] \sin k(l_2 + l_1) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.4.37}$$

Semplificando e cambiando di segno:

$$\begin{aligned}
 X_{21} = & \frac{I_{01}I_{02}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{I_1(0)I_2(0)} \left\{ [S_i(u_{13}) + S_i(u_{14}) + 2S_i(u_0) - S_i(u_{12}) - S_i(u_{11}) - \right. \\
 & - S_i(v_{11}) - S_i(v_{12})] \cos k(l_2 - l_1) + [S_i(v_{14}) + S_i(v_{13}) + 2S_i(u_0) + \\
 & - S_i(u_{12}) - S_i(u_{11}) - S_i(v_{12}) - S_i(v_{11})] \cos k(l_2 + l_1) + \\
 & + [C_i(u_{13}) - C_i(u_{14}) - C_i(v_{11}) + C_i(v_{12}) - C_i(u_{12}) + C_i(u_{11})] \sin k(l_2 - l_1) + \\
 & \left. + [C_i(v_{14}) - C_i(v_{13}) - C_i(u_{11}) + C_i(u_{12}) - C_i(v_{11}) + C_i(v_{12})] \sin k(l_2 + l_1) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.4.38}$$

Ricordando che $I_1(0)$ e $I_2(0)$ sono le correnti ai terminali delle antenne, cioè per $z = 0$, si ha:

$$I_1(0) = I_{01} \sin(kl_1) \quad e \quad I_2(0) = I_{02} \sin(kl_2) \quad (3.4.39)$$

Per riferire l'impedenza al punto di alimentazione, poniamo:

$$I_{01} = \frac{I_1(0)}{\sin(kl_1)} \quad e \quad I_{02} = \frac{I_2(0)}{\sin(kl_2)} \quad (3.4.40)$$

Si ha, in definitiva:

$$\begin{aligned} R_{21} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sin(kl_1) \sin(kl_2)} & \left\{ \left[C_i(u_{13}) + C_i(u_{14}) + 2C_i(u_0) - C_i(u_{12}) - C_i(u_{11}) - \right. \right. \\ & \left. \left. - C_i(v_{11}) - C_i(v_{12}) \right] \cos k(l_2 - l_1) + \left[C_i(v_{14}) + C_i(v_{13}) + 2C_i(u_0) + \right. \right. \\ & \left. \left. - C_i(u_{12}) - C_i(u_{11}) - C_i(v_{12}) - C_i(v_{11}) \right] \cos k(l_2 + l_1) + \right. \\ & \left. + \left[S_i(u_{14}) - S_i(u_{13}) + S_i(v_{11}) - S_i(v_{12}) + S_i(u_{12}) - S_i(u_{11}) \right] \sin k(l_2 - l_1) + \right. \\ & \left. + \left[S_i(v_{13}) - S_i(v_{14}) + S_i(u_{11}) - S_i(u_{12}) + S_i(v_{11}) - S_i(v_{12}) \right] \sin k(l_2 + l_1) \right\} \end{aligned} \quad (3.4.41)$$

$$\begin{aligned} X_{21} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sin(kl_1) \sin(kl_2)} & \left\{ \left[S_i(u_{13}) + S_i(u_{14}) + 2S_i(u_0) - S_i(u_{12}) - S_i(u_{11}) - \right. \right. \\ & \left. \left. - S_i(v_{11}) - S_i(v_{12}) \right] \cos k(l_2 - l_1) + \left[S_i(v_{14}) + S_i(v_{13}) + 2S_i(u_0) + \right. \right. \\ & \left. \left. - S_i(u_{12}) - S_i(u_{11}) - S_i(v_{12}) - S_i(v_{11}) \right] \cos k(l_2 + l_1) + \right. \\ & \left. + \left[C_i(u_{13}) - C_i(u_{14}) - C_i(v_{11}) + C_i(v_{12}) - C_i(u_{12}) + C_i(u_{11}) \right] \sin k(l_2 - l_1) + \right. \\ & \left. + \left[C_i(v_{14}) - C_i(v_{13}) - C_i(u_{11}) + C_i(u_{12}) - C_i(v_{11}) + C_i(v_{12}) \right] \sin k(l_2 + l_1) \right\} \end{aligned} \quad (3.4.42)$$

Come caso particolare calcoliamo la parte reale e la parte immaginaria della mutua impedenza fra due antenne rettilinee parallele quando esse hanno la stessa lunghezza ossia quando $l_1 = l_2 = l$. In tal caso le relazioni (3.4.1), (3.4.24) e (3.4.26) diventano:

$$\begin{cases} R_1 = \sqrt{(z-l)^2 + d^2} \\ R_2 = \sqrt{(z+l)^2 + d^2} \\ r = \sqrt{z^2 + d^2} \end{cases} \quad (3.4.43)$$

$$\begin{aligned} R_1(0) &= \sqrt{l^2 + d^2} = L, & R_1(l) &= \sqrt{d^2} = d \\ R_2(0) &= \sqrt{l^2 + d^2} = L, & R_2(l) &= \sqrt{(2l)^2 + d^2} = H \\ r(0) &= \sqrt{d^2} = d, & r(l_2) &= \sqrt{l^2 + d^2} = L \end{aligned} \quad (3.4.44)$$

$$\begin{aligned}
 u_0 &= kd \\
 u_{11} &= k(L - l) = u_1 & v_{11} &= k(L - l) = u_1 \\
 u_{12} &= k(L + l) = v_1 & v_{12} &= k(L + l) = v_1 \\
 u_{13} &= kd = u_0 & v_{13} &= k(H + 2l) = u_2 \\
 u_{14} &= kd = u_0 & v_{14} &= k(H - 2l) = v_2
 \end{aligned} \tag{3.4.45}$$

Con queste posizioni, le equazioni (3.4.41) e (3.4.42) diventano, rispettivamente:

$$\begin{aligned}
 R_{21} &= \frac{2\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{4\pi \sin^2(kl)} \left\{ \sin kl \cos kl \left[S_i(u_2) - 2S_i(v_1) - S_i(v_2) + 2S_i(u_1) \right] - \right. \\
 &\quad - \frac{1}{2} \cos(2kl) \left[2C_i(u_1) - 2C_i(u_0) + 2C_i(v_1) - C_i(u_2) - C_i(v_2) \right] - \\
 &\quad \left. - \left[C_i(u_1) - 2C_i(u_0) + C_i(v_1) \right] \right\} \tag{3.4.46}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_{21} &= \frac{2\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{4\pi \sin^2(kl)} \left\{ \sin kl \cos kl \left[-C_i(u_2) + 2C_i(v_1) + C_i(v_2) - 2C_i(u_1) \right] - \right. \\
 &\quad - \frac{1}{2} \cos(2kl) \left[2S_i(u_1) - 2S_i(u_0) + 2S_i(v_1) - S_i(u_2) - S_i(v_2) \right] - \\
 &\quad \left. - \left[S_i(u_1) - 2S_i(u_0) + S_i(v_1) \right] \right\} \tag{3.4.47}
 \end{aligned}$$

È conveniente trasformare le (3.4.46) e (3.4.47) in una forma più utile per i calcoli (trasformare C_i in C_{in}).

Come sappiamo si ha:

$$C_i(x) = C + \ln x - C_{in}(x) \tag{3.4.48}$$

essendo $C_{in}(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos \xi}{\xi} d\xi$.

Sostituendo la (3.4.48) nella (3.4.46) e (3.4.47) si ha:

$$\begin{aligned}
 R_{21} &= \frac{2\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{4\pi \sin^2(kl)} \left\{ \sin kl \cos kl \left[S_i(u_2) - 2S_i(v_1) - S_i(v_2) + 2S_i(u_1) \right] - \right. \\
 &\quad - \frac{1}{2} \cos(2kl) \left[2\mathcal{C}' + 2 \ln(u_1) - 2C_{in}(u_1) - 2\mathcal{C}' - 2 \ln(u_0) + 2C_{in}(u_0) + \right. \\
 &\quad \left. + 2\mathcal{C}' + 2 \ln(v_1) - 2C_{in}(v_1) - \mathcal{C}' - \ln(u_2) + C_{in}(u_2) - \mathcal{C}' - \ln(v_2) + C_{in}(v_2) \right] - \\
 &\quad \left. - \left[\mathcal{C}' + \ln(u_1) - C_{in}(u_1) - 2\mathcal{C}' - 2 \ln(u_0) + 2C_{in}(u_0) + \mathcal{C}' + \ln(v_1) - C_{in}(v_1) \right] \right\} \tag{3.4.49}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_{21} = \frac{2\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{4\pi \sin^2(kl)} \left\{ \sin kl \cos kl \left[2\mathcal{Q} + 2\ln(v_1) - 2C_{in}(v_1) - 2\mathcal{Q} - 2\ln(u_1) + \right. \right. \\
 \left. \left. + 2C_{in}(u_1) + \mathcal{Q} + \ln(v_2) - C_{in}(v_2) - \mathcal{Q} - \ln(u_2) + C_{in}(u_2) \right] + \right. \\
 \left. - \frac{1}{2} \cos(2kl) \left[2S_i(u_1) - 2S_i(u_0) + 2S_i(v_1) - S_i(v_2) - S_i(u_2) \right] + \right. \\
 \left. - \left[S_i(u_1) - 2S_i(u_0) + S_i(v_1) \right] \right\} \quad (3.4.50)
 \end{aligned}$$

Ricordando che

$$\begin{aligned}
 u_0 = kd, \quad u_1 = k(L-l), \quad u_2 = k(H+2l) \\
 v_1 = k(L+l), \quad v_2 = k(H-2l)
 \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{2\ln(u_1) - 2\ln(u_0) + 2\ln(v_1) - \ln(u_2) - \ln(v_2)} &= \ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right) + \ln\left(\frac{v_1}{u_0}\right) + \ln(u_1v_1) - \ln(u_2v_2) = \\
 &= \ln\left(\frac{u_1v_1}{u_0^2}\right) + \ln\left(\frac{u_1v_1}{u_2v_2}\right) = \\
 &= \ln\left(\frac{L^2 - l^2}{d^2}\right) + \ln\left(\frac{L^2 - l^2}{H^2 - 4l^2}\right) = \\
 &= \ln\left(\frac{d^2}{d^2}\right) + \ln\left(\frac{d^2}{d^2}\right) = 0
 \end{aligned}$$

analogamente:

$$\underbrace{\ln(u_1) - 2\ln(u_0) + \ln(v_1)} = \ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right) + \ln\left(\frac{v_1}{u_0}\right) = \ln\left(\frac{u_1v_1}{u_0^2}\right) = 0$$

infine:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{2\ln(v_1) - 2\ln(u_1) + \ln(v_2) - \ln(u_2)} &= \ln\left(\frac{v_1^2 v_2}{u_1^2 u_2}\right) = \ln\left[\frac{(L+l)^2 (H-2l)}{(L-l)^2 (H+2l)}\right] = \\
 &= \ln\left[\frac{(L+l)^2 (H^2 - 4l^2)}{(L-l)^2 (H+2l)^2}\right] = \ln\frac{(L+l)^2 d^2}{(L-l)^2 (H+2l)^2} = \\
 &= 2\ln\frac{(L+l)d}{(L-l)(H+2l)} = 2\ln\frac{(L+l)^2}{(H+2l)d}
 \end{aligned}$$

Ne segue che la (3.4.46) e (3.4.47) si scrivono:

$$\begin{aligned}
 R_{21} = \frac{2\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{4\pi \sin^2(kl)} \left\{ \sin kl \cos kl \left[S_i(u_2) - 2S_i(v_1) - S_i(v_2) + 2S_i(u_1) \right] + \right. \\
 \left. - \frac{1}{2} \cos(2kl) \left[-2C_{in}(u_1) + 2C_{in}(u_0) - 2C_{in}(v_1) + C_{in}(u_2) + C_{in}(v_2) \right] + \right. \\
 \left. - \left[-C_{in}(u_1) + 2C_{in}(u_0) - C_{in}(v_1) \right] \right\} \quad (3.4.51)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_{21} = & \frac{2\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{4\pi \sin^2(kl)} \left\{ \sin kl \cos kl \left[-2C_{in}(v_1) + 2C_{in}(u_1) - C_{in}(v_2) + C_{in}(u_2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2 \ln \frac{(L+l)^2}{(H+2l)d} \right] - \frac{1}{2} \cos(2kl) \left[2S_i(u_1) - 2S_i(u_0) + 2S_i(v_1) - S_i(v_2) - S_i(u_2) \right] + \right. \\
 & \left. - \left[S_i(u_1) - 2S_i(u_0) + S_i(v_1) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{3.4.52}$$

Determiniamo, ora, alcuni valori particolari di Z_{12} .

Supponiamo, ad esempio, che sia $l = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$, cioè la lunghezza dell'antenna sia uguale ad un numero dispari di semilunghezze d'onda; cioè:

$$kl = (2n+1)\frac{\pi}{2} \tag{3.4.53}$$

Ne segue $\cos(kl) = 0$ e $\cos(2kl) = -1$.

La (3.4.51) e (3.4.52) si scrivono:

$$R_{21} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{4\pi} \left[C_{in}(u_2) + C_{in}(v_2) - 2C_{in}(u_0) \right] \tag{3.4.54}$$

$$X_{21} = -\frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{4\pi} \left[-2S_i(u_0) + S_i(v_2) + S_i(u_2) \right] \tag{3.4.55}$$

Ricordiamo che: $u_0 = kd$, $u_2 = k[\sqrt{4l^2 + d^2} + 2l]$, $v_2 = k[\sqrt{4l^2 + d^2} - 2l]$

$$\text{Per } d = 0 \implies u_0 = 0, u_2 = 4kl, v_2 = 0 \tag{3.4.56}$$

Sostituendo le (3.4.56) nella (3.4.54) e nella (3.4.55) e ricordando che $C_{in}(0) = S_i(0) = 0$, si ha nel caso del vuoto:

$$R = 30C_{in} \left[4k(2n+1)\frac{\lambda}{4} \right] = 30C_{in} [2\pi(2n+1)] \tag{3.4.57}$$

$$X = -30S_i \left[4k(2n+1)\frac{\lambda}{4} \right] = -30S_i [2\pi(2n+1)]$$

In particolare per $n = 0$ cioè $2l = \frac{\lambda}{2}$ (antenna a mezz'onda) si ha:

$$\begin{aligned}
 R &= 30C_{in}(2\pi) = 30 \cdot 2,44 \simeq 73,2 \text{ Ohm} \\
 X &= -30S_i(2\pi) = -30 \cdot 1,42 \simeq -42,6 \text{ Ohm}
 \end{aligned} \tag{3.4.58}$$

Le (3.4.58) sono le ben note formule per la resistenza e la reattanza di un'antenna rettilinea oscillante a mezz'onda.

Riportiamo di seguito il listato del programma in ambiente Matlab "IMPEDENZA.m" che calcola la mutua impedenza fra due antenne rettilinee e parallele, poste ad una distanza d . Le semilunghezze delle due antenne sono, rispettivamente, l_1 ed l_2 . Si tratta di una funzione che accetta in ingresso, come parametri, le semilunghezze delle due antenne e la distanza a cui esse si trovano e restituisce la mutua impedenza complessa fra le due antenne.

Nel programma in ambiente Matlab le funzioni $S_i(x)$ e $C_i(x)$ sono così definite:

$$S_i(x) \equiv \text{sinint}(x) \quad e \quad C_i(x) \equiv \text{cosint}(x) \quad (3.4.59)$$

IMPEDENZA.m

```
function [Z_12] = impedance(l_1,l_2,D)
%Costanti fondamentali
mu_0 = 4*pi*10^(-7); % H/m
epsilon_0 = 8.854*10^(-12); % F/m
%Permeabilità magnetica relativa del mezzo
mu_r = 1;
%Costante dielettrica relativa del mezzo
epsilon_r = 1;
%Parametri del mezzo
mu = mu_0*mu_r;
epsilon = epsilon_0*epsilon_r;
%Definizione delle grandezze ausiliarie
u_0 = (2*pi)*D;
u_11 = (2*pi)*(sqrt((l_1)^2+(D)^2)-l_1);
u_12 = (2*pi)*(sqrt((l_1)^2+(D)^2)+l_1);
u_13 = (2*pi)*(sqrt((l_2-l_1)^2+(D)^2)-l_2+l_1);
u_14 = (2*pi)*(sqrt((l_2-l_1)^2+(D)^2)+l_2-l_1);
v_11 = (2*pi)*(sqrt((l_2)^2+(D)^2)-l_2);
v_12 = (2*pi)*(sqrt((l_2)^2+(D)^2)+l_2);
v_13 = (2*pi)*(sqrt((l_2+l_1)^2+(D)^2)+l_2+l_1);
v_14 = (2*pi)*(sqrt((l_2+l_1)^2+(D)^2)-l_2-l_1);
%Calcolo della resistenza mutua
R_12 = (((sqrt((mu)/(epsilon)))/((4*pi)*(sin(2*pi*l_1))*sin(2*pi*l_2))))*(...
((cos(2*pi*(l_2-l_1)))*(cosint(u_13)+cosint(u_14)+2*cosint(u_0)-...
cosint(u_12)-cosint(u_11)-cosint(v_11)-cosint(v_12)))+...
((cos(2*pi*(l_2+l_1)))*(cosint(v_14)+cosint(v_13)+2*cosint(u_0)-...
cosint(u_12)-cosint(u_11)-cosint(v_12)-cosint(v_11)))+...
((sin(2*pi*(l_2-l_1)))*(sinint(u_14)-sinint(u_13)+sinint(v_11)-...
sinint(v_12)+sinint(u_12)-sinint(u_11)))+...
((sin(2*pi*(l_2+l_1)))*(sinint(v_13)-sinint(v_14)+sinint(u_11)-...
sinint(u_12)+sinint(v_11)-sinint(v_12))));
%Calcolo della reattanza mutua
```

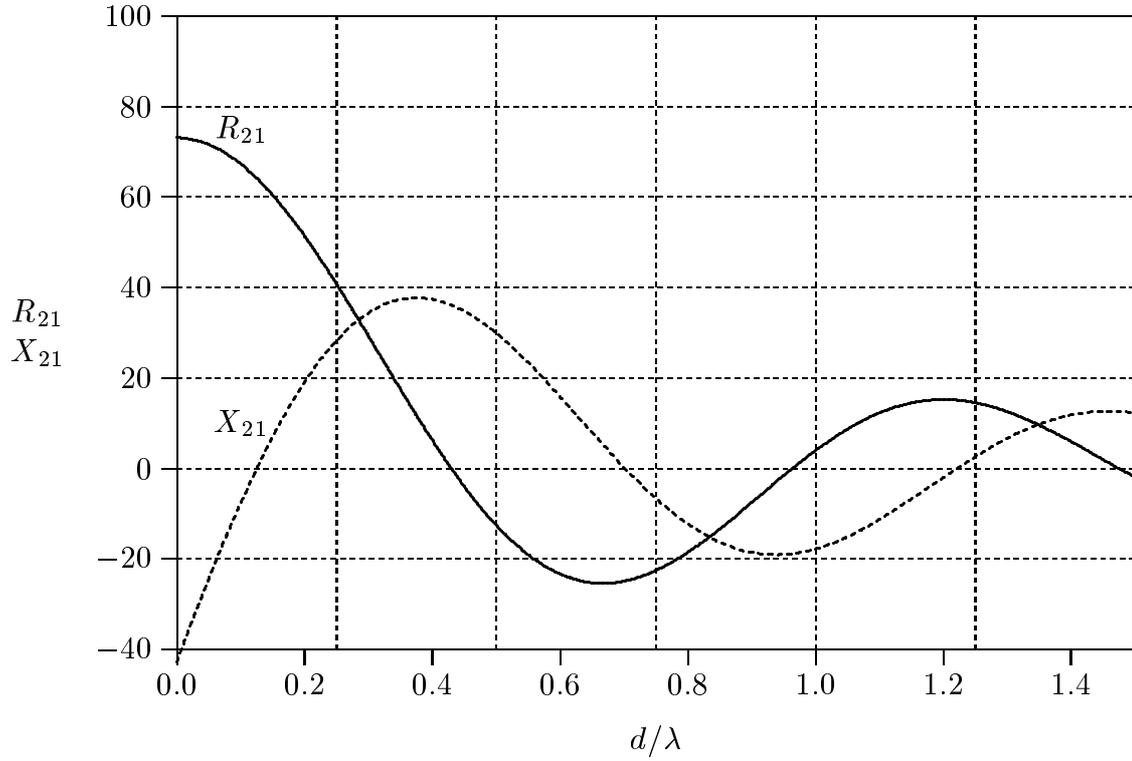
```

X_12 = (((sqrt((mu)/(epsilon)))/((4*pi)*(sin(2*pi*l_1))*(sin(2*pi*l_2))))*(...
((cos(2*pi*(l_2-l_1)))*(sinint(u_13)-sinint(u_12)-sinint(v_11)+...
2*sinint(u_0)+sinint(u_14)-sinint(u_11)-sinint(v_12)))+...
((cos(2*pi*(l_2+l_1)))*(sinint(v_14)-sinint(u_11)-sinint(v_11)+...
2*sinint(u_0)+sinint(v_13)-sinint(u_12)-sinint(v_12)))+...
((sin(2*pi*(l_2-l_1)))*(-cosint(u_12)+cosint(u_13)-cosint(v_11)+...
cosint(u_11)-cosint(u_14)+cosint(v_12)))+...
((sin(2*pi*(l_2+l_1)))*(-cosint(u_11)+cosint(v_14)-cosint(v_11)+...
cosint(u_12)-cosint(v_13)+cosint(v_12))));
%Impedenza mutua
Z_12 = R_12 + i*X_12;

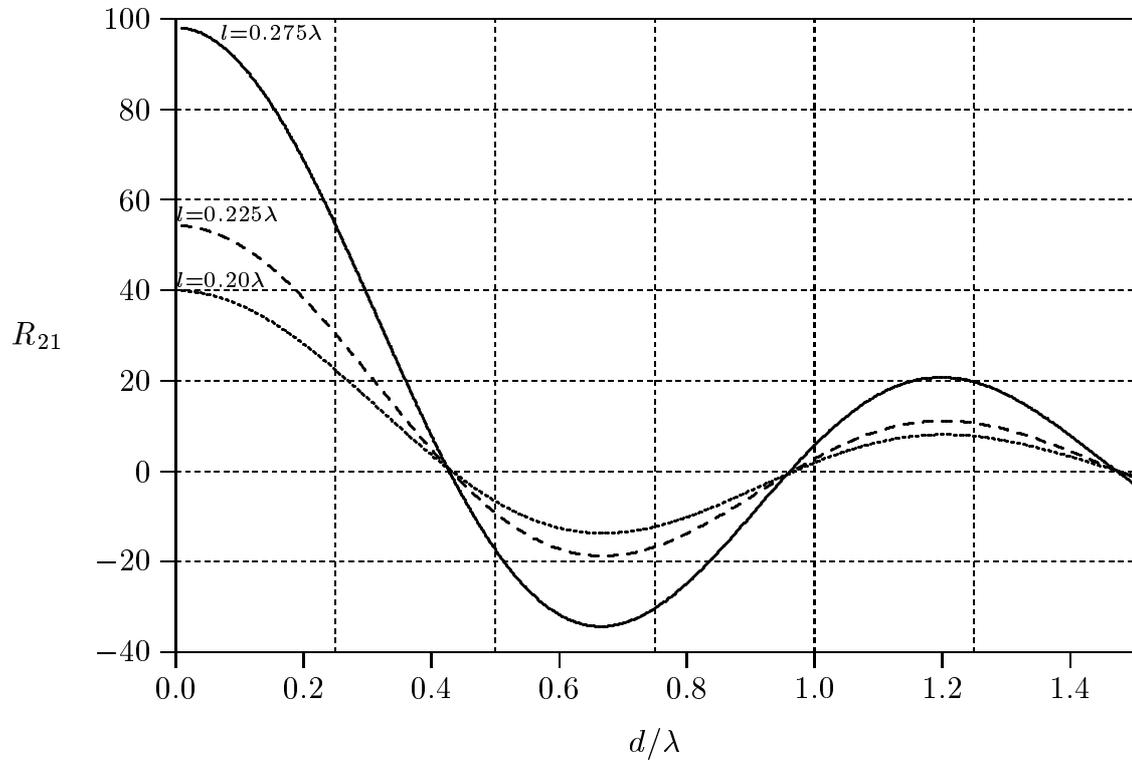
```

Nei grafici seguenti riportiamo l'andamento della mutua resistenza e della mutua reattanza fra antenne di eguale lunghezza.

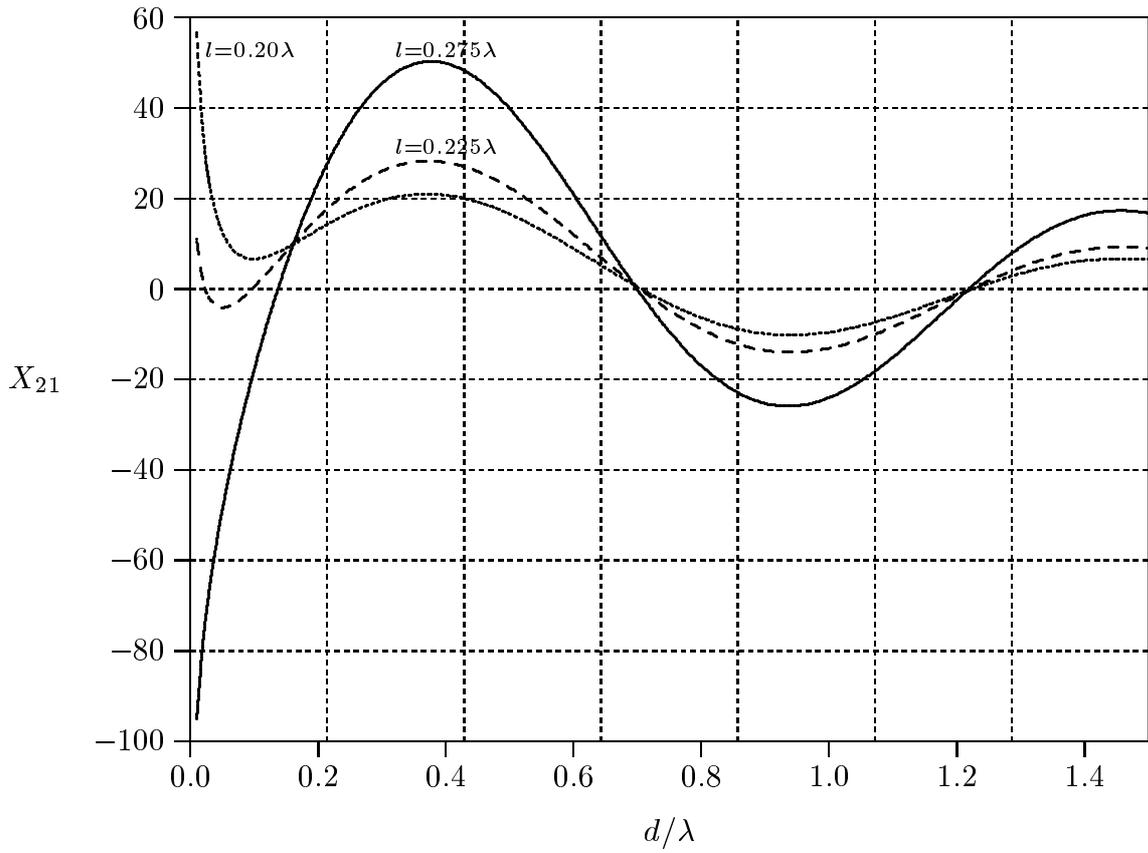
Mutua resistenza e mutua reattanza fra due antenne a mezz'onda parallele



Mutua resistenza fra due antenne parallele di eguale lunghezza



Mutua reattanza fra due antenne
parallele di eguale lunghezza



3.5 - Alcune considerazioni pratiche sulle antenne rettilinee

Si definisce lunghezza risonante di un'antenna rettilinea, ad una data frequenza, la lunghezza in corrispondenza della quale, l'impedenza dell'antenna è puramente resistiva.

Questa definizione è analoga a quella di un circuito risonante; alla frequenza di risonanza l'impedenza d'ingresso del circuito è una resistenza.

Come abbiamo già visto la lunghezza di risonanza di un'antenna rettilinea non è esattamente eguale ad un multiplo intero di semilunghezza d'onda.

Nel caso di antenne di diametro finito, la lunghezza di risonanza dipende dal diametro dell'antenna. La curva piena di figura rappresenta il fattore per cui si deve moltiplicare la lunghezza di un dipolo a mezz'onda in libero spazio per ottenere la lunghezza fisica di un dipolo risonante a mezz'onda in funzione del rapporto fra la semilunghezza d'onda ed il diametro dell'antenna. Si osservi che al diminuire della lunghezza per ottenere la risonanza, la resistenza d'ingresso diminuisce.

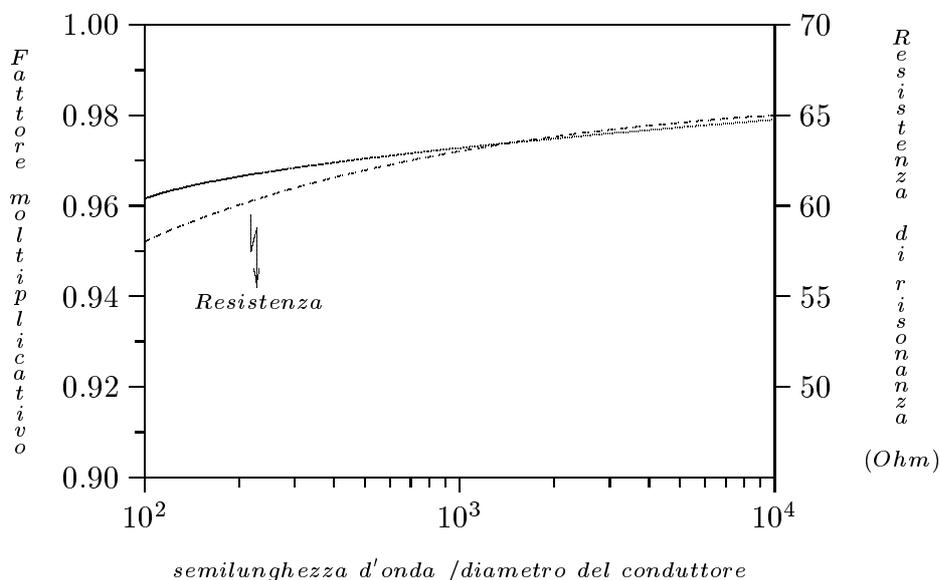


fig.3.5-1

Larghezza di banda e Q di un'antenna

L' "IEEE Standard Dictionary of Electrical and Electronics Terms" definisce la larghezza di banda di un'antenna come **l'intervallo di frequenze entro le quali il rendimento dell'antenna, rispetto ad alcune caratteristiche, corrisponde ad uno "standard specifico"** . Le caratteristiche di riferimento possono essere il pattern di radiazione oppure l'impedenza. Per l'ultima, che è generalmente più sensibile alla frequenza, uno standard utile è che il "voltage standing wave ratio" (VSWR) sia minore di 2. Se l'impedenza dell'antenna è Z_a e l'impedenza caratteristica della linea di trasmissione

alimentante l'antenna è Z_0 , allora il "coefficiente di riflessione per la tensione" ρ è

$$\rho = \frac{(Z_a - Z_0)}{(Z_a + Z_0)} \quad (3.5.1)$$

Si definisce VSWR la quantità:

$$S = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad (3.5.2)$$

Dalla teoria delle linee di trasmissione, la percentuale della potenza riflessa è uguale a $|\rho|^2 \times 100$ e la percentuale della potenza trasmessa è uguale a $(1 - |\rho|^2) \times 100$. Un VSWR di 2 corrisponde ad una potenza riflessa dell'11.1% come si può verificare dalla (3.5.2). Consideriamo un'antenna rettilinea di lunghezza risonante connessa ad una linea di trasmissione che ha una impedenza caratteristica eguale all'impedenza d'ingresso dell'antenna alla frequenza di risonanza. La variazione della resistenza nella regione attorno alla risonanza è relativamente piccola paragonata alla variazione nella reattanza. Conseguentemente la principale causa di variazione del VSWR è la variazione della componente reattiva dell'impedenza dell'antenna al variare della frequenza. Un'antenna che ha una relativamente bassa variazione della reattanza con la frequenza avrà una più ampia larghezza di banda.

Come esempio consideriamo un dipolo lungo 0.5m, alimentato al centro da una linea di trasmissione di impedenza caratteristica $Z_0 = 72 \text{ Ohm}$. Il valore del VSWR come funzione della frequenza è mostrato in figura 3.5-2 per due valori del raggio dell'antenna.

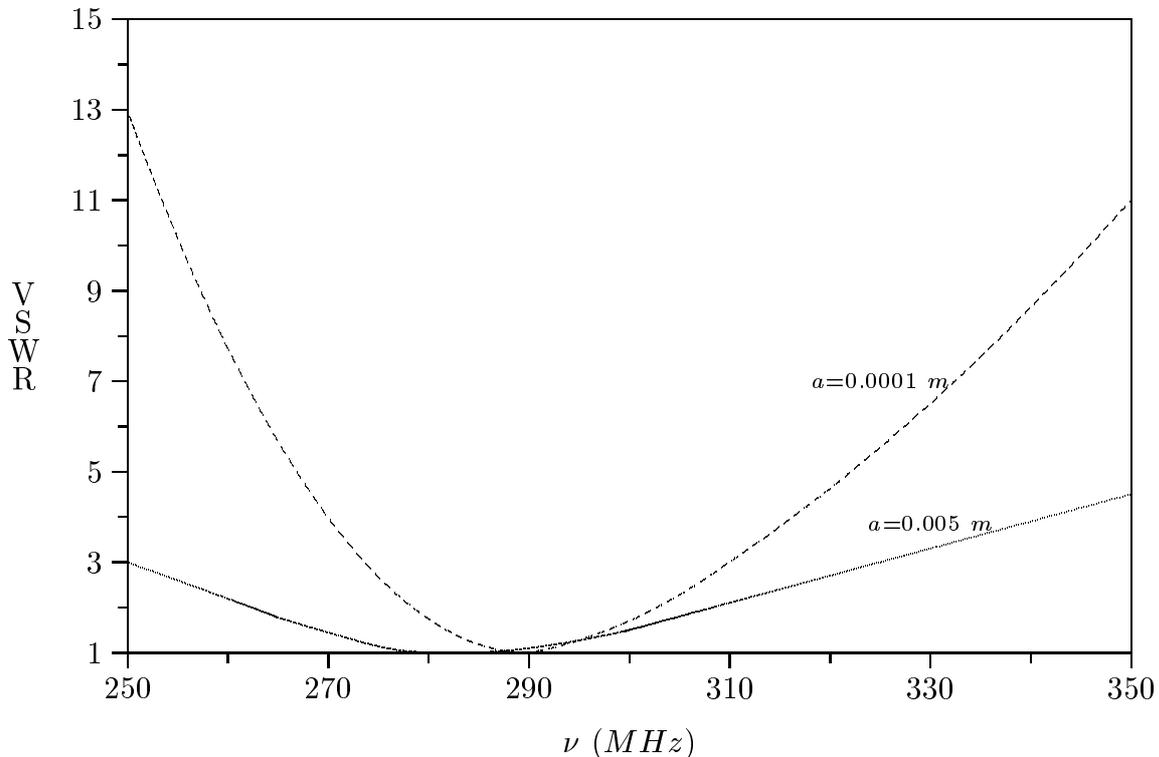


fig.3.5-2

Per il dipolo con raggio $a = 0.005\text{m}$, la frequenza di risonanza è 285 MHz e la larghezza di banda è circa il 16%. Per un'antenna più sottile con raggio uguale a $a = 0.0001\text{m}$ la frequenza di risonanza è 294 MHz e la larghezza di banda è circa l'8%.

Come in un circuito risonante, l'impedenza dell'antenna presenta una componente reattiva appena la frequenza di alimentazione devia dalla frequenza di risonanza.

Il fattore di qualità Q di un'antenna è definito in modo simile al Q di un circuito risonante serie avente elementi di circuito a costanti concentrate.

Esso può essere trovato calcolando o misurando la resistenza d'ingresso R e la reattanza X a qualche frequenza prossima a quella di risonanza. Per variazioni di frequenze inferiori al 5% di quella di risonanza, Q è dato con sufficiente accuratezza dalla formula

$$Q = \frac{X}{2nR} \quad (3.5.3)$$

dove n è la differenza percentuale, espressa come numero decimale, fra la frequenza di risonanza e la frequenza alla quale X e R sono misurate o calcolate. Come nel caso del circuito risonante, Q è una misura della selettività dell'antenna.

Per un dipolo a mezz'onda, il valore approssimato di Q varia da circa 14 per $L/a = 2500$ a circa 8 per $L/a = 50000$.

3.6 - Metodi di alimentazione di un'antenna dipolare

Principi generali

Nell'alimentazione di un'antenna sono da prendere in considerazione due fattori.

Primo, l'antenna deve presentare un carico adattato alla linea di trasmissione. I vantaggi di una impedenza adattata sono: (1) non vi è potenza riflessa; (2) in assenza di onde stazionarie, la perdita dovuta alla dissipazione è minima; (3) l'impedenza d'ingresso della linea è indipendente dalla frequenza e dalla sua lunghezza; (4) è evitato il problema del "breakdown" del dielettrico e dell'eccessivo calore associato ad un elevato VSWR.

Il valore del VSWR che può essere tollerato è, naturalmente, dipendente dalla applicazione particolare.

Come regola generale, il sistema può essere considerato adattato se il VSWR non supera 1.5.

L'altra considerazione è che quando l'antenna è connessa alla linea di trasmissione, le correnti risultanti sulla linea devono essere bilanciate; cioè, ogni conduttore dovrebbe trasportare corrente uguale ma opposta.

Se la distanza fra i conduttori è molto più piccola di una lunghezza d'onda, la radiazione emessa da una linea trasportante corrente bilanciata è trascurabile. Viceversa uno sbilanciamento della corrente sulla linea può essere significativo. Questa radiazione non è desiderata in quanto capovolge le caratteristiche radianti dell'antenna.

Metodi di adattamento

1) Alimentazione diretta e trasformatore a quarto d'onda

Un'antenna connessa ad una linea di trasmissione deve avere una lunghezza pari alla sua lunghezza di risonanza in modo tale che la sua impedenza è resistiva.

In pratica si comincia a costruire un'antenna più lunga di quella richiesta. Essa allora viene connessa ad un generatore di segnale via una linea di trasmissione e viene misurata la sua impedenza alla frequenza designata. Questo può essere fatto o direttamente con un misuratore di ammettenza o indirettamente misurando il VSWR sulla linea o lo shift della posizione di tensione massima relativo al caso in cui la linea è cortocircuitata. Per un'antenna più lunga della lunghezza di risonanza, la sua impedenza Z_a conterrà una componente reattiva. Gli estremi dell'antenna sono allora tagliati fino a quando non si ottiene un valore resistivo puro per Z_a .

Talvolta è possibile connettere l'antenna direttamente alla linea di trasmissione. Per esempio un dipolo a mezz'onda risonante ha una impedenza di circa 70 Ohm. Se esso è connesso ad una linea bifilare di 75 Ohm, nessun adattamento è necessario. Se, viceversa, è utilizzata una linea di impedenza caratteristica di 300 Ohm, occorre un dispositivo adattatore di impedenza per esempio un trasformatore a quarto d'onda.

L'impedenza caratteristica di un trasformatore a quarto d'onda è la media geometrica dell'impedenza dell'antenna Z_a e dell'impedenza caratteristica della linea di trasmissione Z_0 :

$$Z_{\lambda/4} = \sqrt{Z_a Z_0} \quad (3.6.1)$$

L'impedenza caratteristica richiesta può essere ottenuta scegliendo gli appropriati valori per la distanza ed il diametro dei conduttori. È da notare che, poichè le linee di trasmissione sono essenzialmente senza perdite alle alte frequenze, $Z_{\lambda/4}$ e Z_0 sono numeri reali ed un trasformatore a quarto d'onda può essere ottenuto solo se Z_a è reale. Questo sarà il caso di un'antenna risonante.

2) Sistemi di alimentazione shunt feeds

Vi sono modi di ottenere adattamento senza bisogno di utilizzare una linea adattante come un trasformatore a quarto d'onda.

Questi sono basati sul fatto sperimentale che l'impedenza presentata fra due qualsiasi punti simmetricamente posti rispetto al centro di un dipolo a mezz'onda senza alcun gap al centro dipenderà dalla distanza fra i punti. Più grande è la separazione, più alto sarà il valore dell'impedenza. I sistemi di alimentazione che utilizzano questo principio sono conosciuti come "shunt feeds", ed includono **l'adattamento a delta, i dipoli piegati e gli adattamenti a T e Gamma.**

Adattamento a delta – Nell'adattamento a delta mostrato in figura 3.6-1, una linea terminante a ventaglio (delta) è usata per accoppiare l'antenna e la linea di trasmissione. Le estremità del "delta" sono unite ai punti equidistanti dal centro dell'antenna. Così connessa l'impedenza terminante della linea dipenderà dalle dimensioni A e B .

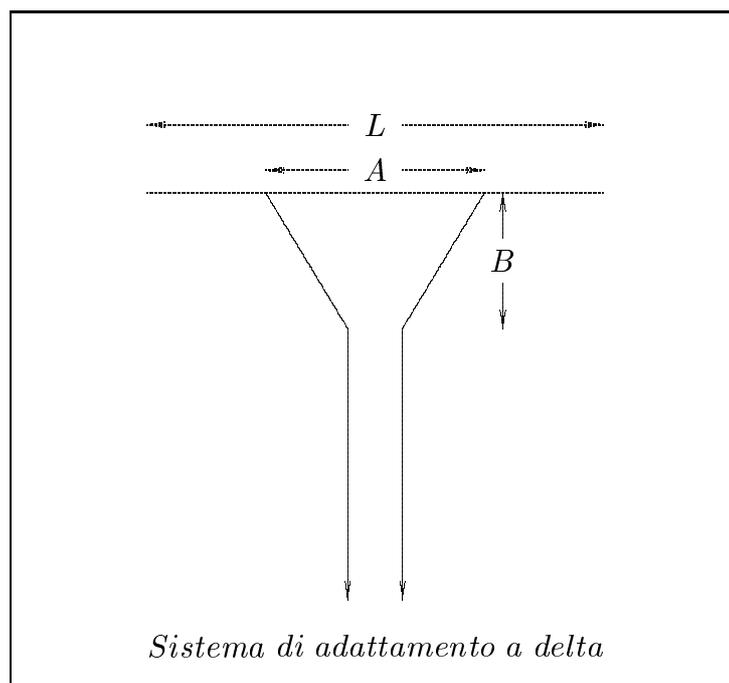


fig.3.6-1

Sperimentalmente, per accoppiare un semplice dipolo a mezz'onda ad una linea di 600 Ohm, la distanza A fra gli estremi del delta è circa 0.12λ mentre la distanza B è circa 0.15λ .

Dipoli piegati (Folded dipoles) – Un altro modo di adattare una antenna di bassa

governata dai diametri dei conduttori e dalla distanza fra essi. In particolare, per due conduttori costituenti un dipolo piegato a mezz'onda di raggi a_1 e a_2 e distanti d , dove a_1 è il raggio del conduttore alimentato, si dimostra (**Harrison e King**) che:

$$Z_{in} = (1 + f)^2 Z_D \quad (3.6.2)$$

dove Z_D è l'impedenza di un ordinario dipolo a mezz'onda di raggio a , ed f è il fattore di divisione della corrente. Se a_1 e a_2 sono molto minori di d , come generalmente avviene, f è approssimativamente dato da:

$$f \simeq \frac{\ln(d/a_1)}{\ln(d/a_2)} \quad (3.6.3)$$

Per lo speciale ma importante caso in cui i due conduttori hanno eguale raggio, il fattore f è 1. L'impedenza d'ingresso è quattro volte quella di un ordinario dipolo. La larghezza di banda di un dipolo piegato è maggiore di quella di un semplice dipolo.

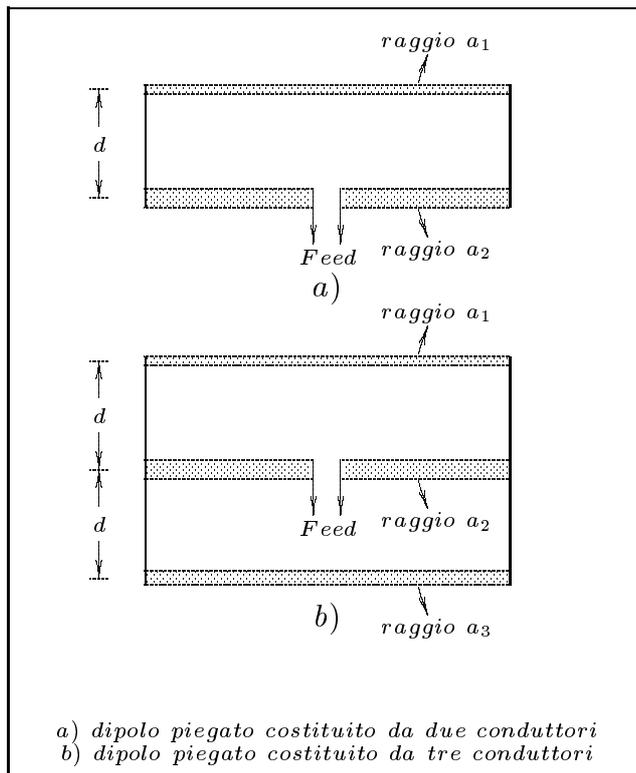


fig.3.6-3

Adattamenti a T e Gamma – Una disposizione che in parte comprende l'adattamento

a delta ed in parte il dipolo piegato è l'adattamento a T mostrato in figura 3.6.4a.

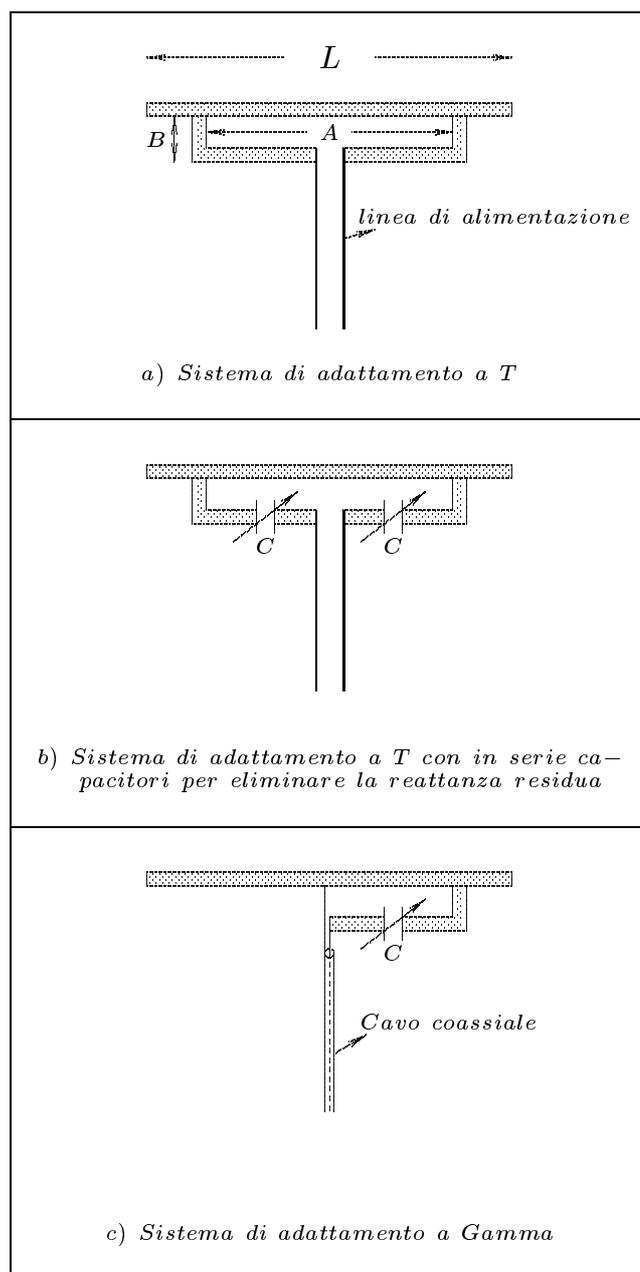


fig.3.6-4

I diametri dei conduttori, la distanza B e la distanza A determinano l'impedenza d'ingresso vista dalla linea. Si dimostra che l'impedenza ha una componente reattiva che può essere variata aggiustando la lunghezza dell'antenna o inserendo una capacità di valore opportuno in serie ai terminali d'ingresso, come mostrato in figura 3.6-4b). Il dispositivo mostrato in figura 3.6-4c) è conosciuto come adattamento a Gamma. È una versione non bilanciata dell'adattamento a T ed è utile per alimentazione con cavo coassiale.

Fine del Cap.3