

## Antenne radioastronomiche† Radiazione Cosmica di fondo - Etá dell'Universo

Lo scopo di questo Capitolo é quello di fornire una moderna e affascinante applicazione delle antenne astronomiche usate in Cosmologia. Dopo aver trattato, in linea generale, tale tipo di antenne, tratteremo (a partire dal §28.10) il problema della espansione dell'Universo e della misura della residua radiazione a microonde di fondo (**Cosmic Background Radiation - CBR**) che ha permesso di confermare la teoria del **Big Bang**. Il lettore che lo desidera puó cominciare la lettura dal §28.10.

### 28.1 - Introduzione

La radioastronomia sperimentale si occupa della rivelazione delle onde radio che sono emesse da radio sorgenti cosmiche. Con l'apparentemente singola eccezione della radiazione monocromatica a  $\lambda = 21 \text{ cm}$  ( $\nu \simeq 1.43 \text{ GHz}$ ), cioè la 'linea idrogeno' emessa dall'idrogeno interstellare, le onde radio cosmiche sono rappresentabili da funzioni rapidamente ed irregolarmente variabili nel tempo, somiglianti a rumore. Le proprietà misurabili delle radioonde cosmiche sono la loro direzione di arrivo, lo stato di polarizzazione, lo spettro, e l'intensità. Per le osservazioni fatte al livello del suolo, la radioastronomia é limitata essenzialmente alla banda compresa approssimativamente da 1 centimetro ( $\nu = 30 \text{ GHz}$ ) a 10 metri ( $\nu = 30 \text{ MHz}$ ), **perché le onde di lunghezza d'onda piú grande di circa 10 metri ( $\nu < 30 \text{ MHz}$ ) non riescono a penetrare la ionosfera terrestre<sup>1)</sup> e quelle di lunghezza d'onda minore di 1 cm ( $\nu > 30 \text{ GHz}$ ) sono assorbite dai gas contenuti nell'atmosfera terrestre**. Tuttavia, osservazioni radioastronomiche sono state fatte anche nella banda compresa fra circa 3 millimetri ( $\nu = 100 \text{ GHz}$ ) e 1 centimetro ( $\nu = 30 \text{ GHz}$ ).

Lo strumento che viene usato per osservare onde radio cosmiche é il **radio telescopio**. Esso consiste di tre componenti di base operanti insieme, cioè **un'antenna ricevente, un ricevitore sensibile e un dispositivo di registrazione**.

L'antenna riceve la radiazione incidente e la trasmette per mezzo di una guida d'onda o cavo coassiale ai terminali d'ingresso di un ricevitore; il ricevitore a sua volta amplifica e rettifica il segnale d'ingresso; allora il dispositivo di registrazione, che é pilotato dall'uscita rettificata del ricevitore, conserva i dati per l'analisi. **L'uscita rettificata del ricevitore é una misura della potenza che arriva sull'antenna**.

Poiché i segnali cosmici che arrivano ai terminali d'ingresso del ricevitore sono simili a rumore e simili ai segnali di rumore non desiderati che sono inevitabilmente generati dal ricevitore stesso, il ricevitore deve essere in grado di distinguere il desiderato segnale da quello indesiderato. Questo é un requisito difficile ed é soddisfatto da un **radiometro**, che

---

† Papas Charles Herach: Theory of electromagnetic wave propagation - Dover Publications.

<sup>1)</sup> S. Barbarino: Appunti di Campi elettromagnetici, Cap. 6 pag. 6-8, formule (6.3.4) e (6.3.5).

consiste di un ricevitore ad alta qualità e di una speciale circuitistica in grado di ridurre il rumore. Per ridurre ulteriormente gli effetti del rumore dovuto al ricevitore, i radiometri talvolta sono corredati da amplificatori a basso rumore quali i maser o amplificatori parametrici posti davanti al ricevitore stesso.

La parte del radio telescopio che noi consideriamo in questo capitolo é l'antenna e la nostra presentazione riguarderá soltanto la teoria della radiazione di tali antenne radio astronomiche.

## 28.2 - Densità spettrale del flusso di energia

Poiché un'onda radio in arrivo dal cosmo é un'onda piana trasversa elettromagnetica (*TEM*), i suoi vettori del campo  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  e  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  sono perpendicolari l'uno all'altro e alla direzione di propagazione. Conseguentemente il vettore di Poynting dell'onda, ossia  $\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)$ , é parallelo alla direzione di propagazione, e la sua intensità é data dalla quantità quadratica:

$$S(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (28.2.1)$$

É un fatto osservato che ciascuna componente dei vettori del campo, per quanto riguarda la sua dipendenza dal tempo, ha il carattere di **rumore**. Cioé ad ogni posizione fissata  $\vec{r} = \vec{r}_0$  i vettori del campo sono funzioni del tempo variabili rapidamente e irregolarmente, al punto tale che il loro comportamento sembra essere indipendente dal tempo ed in particolare non si annullano per  $t = \pm\infty$ . Essi costituiscono quello che é conosciuto come processo random stazionario (o stocastico). In virtù di questo comportamento simile a rumore dell'onda, é la densità spettrale del valore mediato nel tempo di  $S(\vec{r}, t)$  e non il valore istantaneo di  $S(\vec{r}, t)$  stesso, che costituisce una misura significativa dell'intensità dell'onda che arriva.

Per risolvere il segnale in arrivo nelle sue componenti di Fourier, noi dobbiamo introdurre la funzione tronca  $\vec{E}_T(\vec{r}_0, t)$  definita da:

$$\begin{aligned} \vec{E}_T(\vec{r}_0, t) &= \vec{E}(\vec{r}_0, t) && \text{per } |t| \leq T \\ \vec{E}_T(\vec{r}_0, t) &= 0 && \text{per } |t| > T \end{aligned} \quad (28.2.2)$$

dove  $2T$  é un lungo intervallo di tempo. Poiché  $\vec{E}_T(\vec{r}_0, t)$  si annulla per  $t = \pm\infty$ , la sua trasformata di Fourier:

$$\vec{A}_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_T(\vec{r}_0, t) e^{i\omega t} dt \quad (28.2.3)$$

e la sua rappresentazione in integrale di Fourier:

$$\vec{E}_T(\vec{r}_0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{A}_T(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (28.2.4)$$

esistono sempre purché  $T$  sia finito. Conosciamo dalla teoria dei processi stocastici che la trasformata  $\vec{A}_T(\omega)$  aumenta senza limiti se  $T \rightarrow \infty$ , mentre la quantità quadratica  $|\vec{A}_T(\omega)|^2/T$  tende ad un limite definito, cioè:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |\vec{A}_T(\omega)|^2 = \text{limite finito} \quad (28.2.5)$$

Questo fatto suggerisce che la media temporale del vettore di Poynting può essere considerata una quantità quadratica. In accordo con l'equazione (28.2.1) e (28.2.5), l'intensità del vettore di Poynting é:

$$S_T(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{A}_T(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{A}_T(\omega'') e^{-i\omega'' t} d\omega'' \quad (28.2.6)$$

ed il suo valore mediato nel tempo, definito come:

$$\langle S(\vec{r}_0, t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} S_T(\vec{r}_0, t) dt \quad (28.2.7)$$

é dato da:

$$\langle S_T(\vec{r}_0, t) \rangle = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{A}_T(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{A}_T(\omega'') e^{-i\omega'' t} d\omega'' \right] dt \quad (28.2.8)$$

Poiché:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} e^{-i(\omega' + \omega'')t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} \delta(\omega' + \omega'') \quad (28.2.9)$$

dove  $\delta$  é la funzione delta di Dirac, l'equazione (28.2.8) si riduce a:

$$\begin{aligned} \langle S_T(\vec{r}_0, t) \rangle &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{A}_T(\omega') \cdot \vec{A}_T(\omega'') \delta(\omega' + \omega'') d\omega' d\omega'' = \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{A}_T(\omega) \cdot \vec{A}_T(-\omega) d\omega \end{aligned} \quad (28.2.10)$$

Utilizzando la relazione  $\vec{A}_T(\omega) = \vec{A}_T^*(-\omega)$ , che é una conseguenza del fatto che  $\vec{E}_T(\vec{r}_0, t)$  nell'equazione (28.2.3) é reale, vediamo che l'equazione (28.2.10) può essere scritta come:

$$\langle S_T(\vec{r}_0, t) \rangle = \int_0^{+\infty} \left[ \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} \vec{A}_T(\omega) \cdot \vec{A}_T^*(\omega) \right] d\omega \quad (28.2.11)$$

Questa espressione dá la densità di potenza mediata nel tempo dell'onda che arriva in  $watt/m^2$ ; quindi la quantità:

$$\langle S_\omega(\vec{r}_0) \rangle = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{2\pi}{T} \vec{A}_T(\omega) \cdot \vec{A}_T^*(\omega) \right] d\omega \quad (28.2.12)$$

che é finita in virtú dell'equazione (28.2.5), dá la densitá spettrale del flusso di energia in  $(watt/m^2)(rad/s)^{-1}$ .

Una definizione alternativa della densitá spettrale del flusso di energia  $S_\omega(\vec{r}_0)$  in termini del campo elettrico  $\vec{E}(\vec{r}_0, t)$  é basato sulla costruzione della funzione di autocorrelazione:

$$\phi(q) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \vec{E}(t) \cdot \vec{E}(t+q) dt = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \langle \vec{E}(t) \cdot \vec{E}(t+q) \rangle \quad (28.2.13)$$

e identificando la sua trasformata di Fourier con la densitá spettrale del flusso di energia. Cioé:

$$S_\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(q) e^{i\omega q} dq = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \phi(q) \cos \omega q dq \quad (28.2.14)$$

Se  $S_\omega$  deve essere la densitá spettrale, l'integrale di  $S_\omega$  su tutte le frequenze deve dare la potenza mediata nel tempo. Per mostrare che questo requisito é soddisfatto dalla definizione sopra data, notiamo che:

$$\int_0^\infty S_\omega d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq \phi(q) \int_0^\infty \cos \omega q d\omega = 2 \int_0^\infty dq \phi(q) \delta(q) = \phi(0) \quad (28.2.15)$$

e riconosciamo che  $\phi(0)$  é davvero la potenza mediata nel tempo.

Da un punto di vista strettamente matematico, per ottenere la densitá spettrale del flusso di energia  $S_\omega$  si dovrebbe osservare il segnale in arrivo per un periodo di tempo infinitamente lungo. In pratica, ovviamente, questo non é possibile né desiderabile. Come espediente pratico, la definizione é soddisfatta scegliendo  $T$  grande abbastanza ma non cosí grande da far sparire la variazione temporale significativa di  $S_\omega$ . Il meglio che possa essere fatto é di osservare il segnale in arrivo per successivi periodi di tempo eguali alla costante di tempo  $\tau$  del sistema ricevente. Quello che viene osservato allora é il segnale addolcito da successive medie su periodi finiti di durata  $\tau$ . La limitatezza di  $\tau$  produce fluttuazioni nella registrazione, come fa la limitatezza della larghezza di banda  $\Delta\omega$  del sistema ricevente. Il periodo delle fluttuazioni é approssimativamente  $1/\Delta\omega$ †; quindi in un intervallo di tempo  $\tau$ , il segnale in arrivo effettivamente consiste di  $n = \tau\Delta\omega$  impulsi indipendenti, la cui deviazione standard é  $1/\sqrt{n} = 1/\sqrt{\tau\Delta\omega}$ . In vista di questo noi possiamo scrivere:

$$\frac{\delta R}{R} = \frac{K}{\sqrt{\tau\Delta\omega}} \quad (28.2.17)$$

---

† Per vedere questo, consideriamo la rappresentazione integrale di Fourier data dalla equazione (28.2.4) per la banda di frequenza  $\omega - \Delta\omega/2$  e  $\omega + \Delta\omega/2$  su cui  $\vec{A}_T(\omega)$  é assunta costante. Allora:

$$\vec{E}_T(\vec{r}_0, t) = \int_{\omega-\Delta\omega}^{\omega+\Delta\omega} \vec{A}_T(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \vec{A}_T(\omega) \int_{\omega-\Delta\omega}^{\omega+\Delta\omega} e^{-i\omega t} d\omega = 2\vec{A}_T(\omega) e^{-i\omega t} \frac{1}{t} \sin\left(t \frac{\Delta\omega}{2}\right) \quad (28.2.16)$$

Quindi il periodo dell'involuppo é  $4\pi/\Delta\omega$ .

dove  $\delta R$  é la deviazione standard della lettura  $R$ , e  $K$  é una costante adimensionata il cui valore dipende dalla struttura dettagliata del sistema ricevente. Noi vediamo che la limitatezza di  $\tau$  e di  $\delta\omega$  produce un'incertezza, o spread, nella lettura. Conseguentemente, in modo che un segnale in arrivo possa essere rivelabile, la deflessione prodotta da esso deve essere piú grande della deflessione  $\delta R$  prodotta dalle inerenti fluttuazioni del sistema ricevente.

Poiché  $S_\omega$  é la potenza per unitá di area per unitá di larghezza di banda, la potenza  $P$  fluente normalmente attraverso un'area  $A$  nel range di frequenza  $\omega - \Delta\omega/2$  e  $\omega + \Delta\omega/2$  é data da:

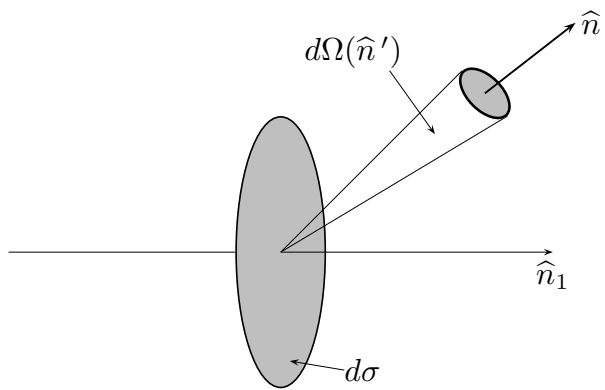
$$P = AS_\omega\Delta\omega \qquad (28.2.18)$$

### 28.3 - Intensit  spettrale, Brillanza, Temperatura di brillanza, Temperatura apparente del disco

Nella precedente sessione abbiamo definito la densit  spettrale del flusso di energia  $S_\omega$  della radiazione cosmica. In questa sezione noi definiremo in termini di  $S_\omega$  alcune altre utili grandezze misurabili della radiazione cosmica. Una di queste grandezze misurabili della radiazione cosmica   l'intensit  spettrale, definita da:

$$dP_\omega = I_\omega(\hat{n}') d\sigma \hat{n}_1 \cdot \hat{n}' d\Omega(\hat{n}') \quad (28.3.1)$$

dove  $dP_\omega$    la potenza radiante per unit  di larghezza di banda che fluisca attraverso un elemento di area  $d\sigma$  in un angolo solido  $d\Omega(\hat{n}')$ ,  $\hat{n}_1$    il vettore unitario normale a  $d\sigma$ , e  $\hat{n}'$  il vettore unitario lungo l'asse dell'angolo solido (vedi figura 28.3-1). La quantit   $I_\omega(\hat{n}')$    la intensit  spettrale della radiazione viaggiante nella direzione  $\hat{n}'$ .



**Costruzione geometrica per la definizione della densit  spettrale. La radiazione   emessa dalla sorgente e passa radialmente verso l'esterno attraverso l'angolo solido  $d\Omega$ .**

fig.28.3-1

Un'altra tale misura   la brillanza spettrale, che   definita nello stesso modo della intensit  spettrale tranne che  $\hat{n}'' = -\hat{n}'$    ora la direzione da cui la radiazione proviene (vedi figura 28.3-2).

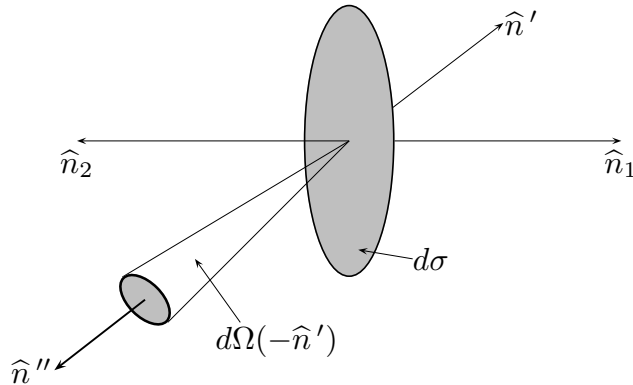
Conseguentemente, la potenza per unit  di larghezza di banda che colpisce l'area  $d\sigma$  dall'angolo solido  $d\Omega(\hat{n}'')$    data da:

$$dP_\omega = b_\omega(\hat{n}'') d\sigma \hat{n}_2 \cdot \hat{n}'' d\Omega(\hat{n}'') \quad (28.3.2)$$

dove  $b_\omega(\hat{n}'')$    la brillanza spettrale della radiazione incidente e  $\hat{n}_2 = -\hat{n}_1$ . Confrontando le espressioni (28.3.1) e (28.3.2), otteniamo la relazione:

$$b_\omega(-\hat{n}') d\Omega(-\hat{n}') = I_\omega(\hat{n}') d\Omega(\hat{n}') \quad (28.3.3)$$

che mette in evidenza il fatto che la brillanza si riferisce alla radiazione viaggiante verso  $d\sigma$  e l'intensit  si riferisce alla radiazione che si allontana da  $d\sigma$ .



**Costruzione geometrica per la definizione della brillantezza. La radiazione é emessa da sorgente distribuita nel cielo e passa radialmente verso l'interno attraverso l'angolo solido  $d\Omega$ .**

fig.28.3-2

La quantità  $dP_\omega / (d\sigma \hat{n}_1 \cdot \hat{n}')$  é la potenza per unità di larghezza di banda per unità di area normale alla direzione di propagazione della radiazione e quindi é uguale a  $dS_\omega$ . Così noi vediamo che la intensità spettrale della radiazione emessa é la intensità spettrale del flusso di energia per unità di angolo solido, cioè:

$$I_\omega = \frac{dS_\omega}{d\Omega} \quad (28.3.4)$$

Analogamente la brillantezza spettrale della radiazione ricevuta é la densità spettrale del flusso di energia per unità di angolo solido, cioè:

$$b_\omega = \frac{dS_\omega}{d\Omega} \quad (28.3.5)$$

Se la sorgente della radiazione é distribuita nel cielo, allora una conveniente misura della quantità di radiazione che arriva su un'antenna ricevente da una data direzione é la brillantezza spettrale in quella direzione. Come mostrato nelle figure (28.3-1) e (28.3-2), é piú conveniente scegliere l'origine delle coordinate alla sorgente per  $I_\omega$ , e al ricevitore per  $b_\omega$ . La brillantezza spettrale  $b_\omega$ , come l'intensità spettrale  $I_\omega$  é una funzione di  $\theta, \phi$  ma non di  $r$ .

Le unità di  $I_\omega$  e  $b_\omega$  sono le stesse poiché esse sono definite nello stesso modo, tranne che nella prima la radiazione viaggia verso l'esterno dal vertice dell'angolo solido dove é posta la sorgente, e nella seconda essa viaggia verso il vertice dove é posto il ricevitore. Specificatamente, le unità di  $I_\omega$  e  $b_\omega$  sono  $watts\ m^{-2}(cicli\ per\ s)^{-1}\ steradiani^{-1}$ .

É talvolta conveniente specificare la radiazione in termini della temperatura che un corpo nero dovrebbe avere per produrre la misurata brillantezza spettrale. Conseguentemente

la legge di Planck per la radiazione di corpo nero nel libero spazio, la brillantezza spettrale  $B_\omega$  di un corpo nero a temperatura  $T$  (in gradi Kelvin) é data da:

$$B_\omega = \frac{2hc}{\lambda^3} \frac{1}{\exp(hc/k\lambda T) - 1} \quad (28.3.6)$$

dove  $h$  é la costante di Planck,  $k$  é la costante di Boltzmann,  $c$  é la velocità della luce,  $\lambda$  é la lunghezza d'onda.

Ma nelle applicazioni radio-astronomiche  $hc \ll k\lambda T$  e quindi l'espressione (28.3.6) può essere sostituita dall'approssimazione di Rayleigh-Jeans alla legge di Planck, ossia:

$$B_\omega = \frac{2kT}{\lambda^2} \quad (28.3.7)$$

La temperatura della brillantezza spettrale  $T_{\omega b}$  della radiazione in arrivo verso l'antenna ricevente lungo una direzione  $\theta$ ,  $\phi$  é ottenuta dall'equazione (28.3.7) Cosí la temperatura di brillantezza spettrale  $T_{\omega b}$  é correlata alla brillantezza spettrale da:

$$b_\omega = \frac{2k}{\lambda^2} T_{\omega b} = 2.77 \cdot 10^{-22} T_{\omega b} / \lambda^2 \quad (28.3.8)$$

Come  $b_\omega$ , la quantità  $T_{\omega b}$  é una funzione di  $\theta$  e di  $\phi$  soltanto. Nel caso in cui la sorgente sottende un angolo solido  $\Omega_0$  nel ricevitore, segue dall'equazione (28.3.5) e (28.3.8) che:

$$S_\omega = \int_{\Omega_0} b_\omega d\Omega = \frac{2k}{\lambda^2} \int_{\Omega_0} T_{\omega b} d\Omega \quad (28.3.9)$$

Notando che **l'apparente temperatura del disco**  $T_{\omega d}$  é definita da:

$$S_\omega = \frac{2k}{\lambda^2} \int_{\Omega_0} T_{\omega d} d\Omega \quad (28.3.10)$$

vediamo dalla equazione (28.3.9) che  $T_{\omega d}$  é correlata a  $T_{\omega b}$  da:

$$T_{\omega d} = \frac{1}{\Omega_0} \int_{\Omega_0} T_{\omega b} d\Omega \quad (28.3.11)$$

ed in questo senso costituisce una misura del valore medio della temperatura di brillantezza spettrale.



## 28.4 - Sfera di Poincaré, parametri di Stokes

Per sua natura un'onda elettromagnetica monocromatica deve essere ellitticamente polarizzata cioè la punta della freccia del vettore elettrico in ciascun punto dello spazio deve tracciare periodicamente un'ellisse o una delle sue speciali forme ossia una circonferenza o linea retta. D'altro lato un'onda elettromagnetica policromatica può essere in qualunque stato di polarizzazione, andando dallo stato di polarizzazione ellittica allo stato non polarizzato, dove cioè la punta della freccia del vettore elettrico si muove in modo completamente irregolare. Le onde radio di origine cosmica sono generalmente in nessuno di questi due stati estremi, ma piuttosto in uno stato intermedio contenente sia parti ellitticamente polarizzate e parti non polarizzate. Un'onda in tale stato intermedio è detta essere polarizzata parzialmente ed è descrivibile da quattro parametri introdotte da Sir George Gabriel Stokes nel 1852 in connessione con la sperimentazione di luce parzialmente polarizzata. In questo paragrafo noi definiamo questi parametri di Stokes e mostriamo che essi servono ad una misura completa dello stato di polarizzazione.

Come esempio consideriamo il caso di un'onda piana monocromatica *TEM*. Il campo elettrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  di tale onda viaggiante nella direzione del vettore unitario  $\hat{n}$  ha la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \left[ \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] \quad (28.4.1)$$

dove  $\vec{k} = \hat{n} \frac{2\pi}{\lambda}$  è il vettore d'onda e  $\vec{E}_0$  il vettore ampiezza complessa. Poiché l'onda è piana e *TEM*, il vettore  $\vec{E}_0$  è costante e giace in un piano perpendicolare a  $\hat{n}$ , cioè  $\hat{n} \cdot \vec{E}_0 = 0$ . Poiché la polarizzazione dell'onda è governata da  $\vec{E}_0$ , e poiché  $\vec{E}_0$  è costante, lo stato di polarizzazione è lo stesso ovunque. Questa costanza nella polarizzazione è peculiare per le onde piane omogenee mentre per onde elettromagnetiche la polarizzazione è diversa in ogni punto dello spazio. Per esempio, se il campo fosse un'onda generata da una sorgente di estensione finita, la polarizzazione varierebbe con la distanza radiale dalla sorgente così come dagli angoli polari e azimutali.

senza sacrificare le generalità, scegliamo un sistema di coordinate  $x, y, z$  tale che l'asse  $z$  sia parallela a  $\hat{n}$ . Rispetto a questo sistema  $\vec{E}_0$  può essere scritto come:

$$\vec{E}_0 = \hat{x} a_x e^{-i\delta_x} + \hat{y} a_y e^{-i\delta_y} \quad (28.4.2)$$

dove le ampiezze  $a_x, a_y$  e le fasi  $\delta_x$  e  $\delta_y$  sono costanti reali.

Così dalle equazioni (28.4.1) e (28.4.2) segue che le componenti cartesiane di  $\vec{E}(z, t)$  sono date dalle espressioni reali:

$$E_x = a_x \cos(\phi + \delta_x) \quad E_y = a_y \cos(\phi + \delta_y) \quad (28.4.3)$$

dove, per brevità si è posto  $\phi = \omega t - kz$ . Eliminando  $\phi$  da queste equazioni, si ha:

$$\left( \frac{E_x}{a_x} \right)^2 + \left( \frac{E_y}{a_y} \right)^2 - 2 \frac{E_x}{a_x} \frac{E_y}{a_y} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (28.4.4)$$

essendo

$$\delta = \delta_x - \delta_y \tag{28.4.5}$$

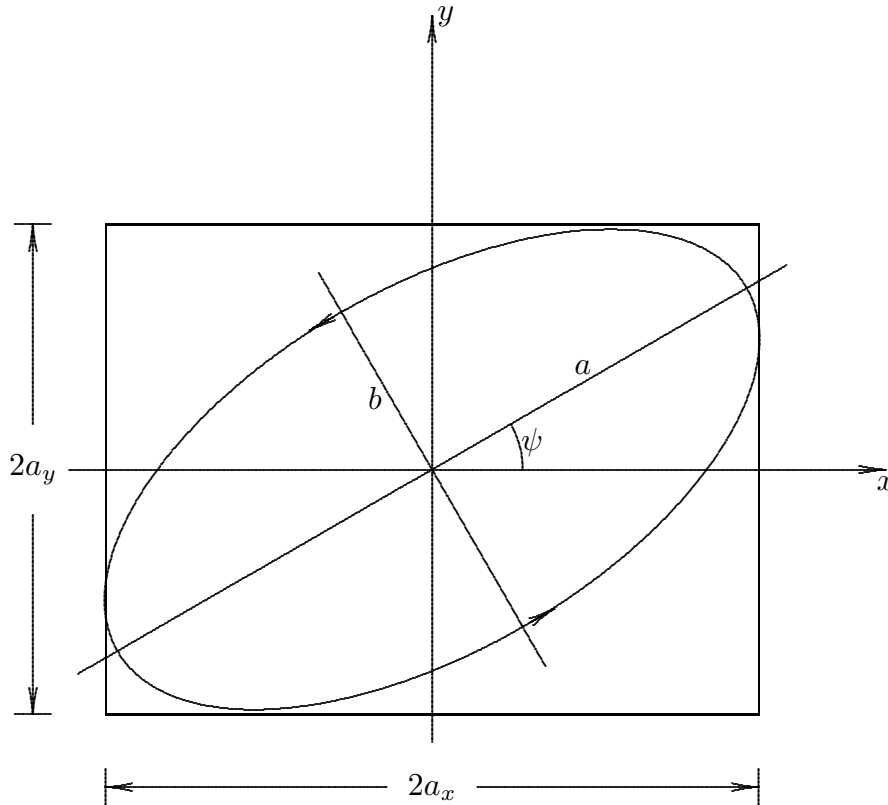


fig.28.4-1

Prendendo  $E_x$  e  $E_y$  come assi coordinati, vediamo che l'equazione (28.4.4) rappresenta un'ellisse il cui centro é all'origine delle coordinate  $E_x = E_y = 0$ . Geometricamente questo significa che in ciascun punto dello spazio il vettore  $\vec{E}$  ruota in un piano perpendicolare a  $\hat{n}$  tracciando un'ellisse. Come é evidente dalla notazione (28.4.3) la rotazione di  $\vec{E}$  e la direzione di propagazione  $\hat{n}$  forma una vite destrorsa o sinistrorsa a seconda che  $\sin \delta < 0$  o  $\sin \delta > 0$  rispettivamente. Conseguentemente, in conformitá alla terminologia radio la polarizzazione di un'onda recedente dall'osservatore é detta destrogira se il vettore elettrico appare ruotare in senso orario e levogira se appare ruotare in senso antiorario.

Per determinare l'ellisse di polarizzazione di un'onda monocromatica, é necessario un set di tre quantitá indipendenti. Un tale set ovviamente consiste delle ampiezze  $a_x E$ ,  $a_y$  e della differenza di fase  $\delta$ . Un altro set ovviamente consiste del semiasse maggiore, del semiasse minore dell'ellisse, denotate rispettivamente  $a$  e  $b$  rispettivamente, e l'angolo di orientazione  $psi$  fra l'asse maggiore dell'ellisse e l'asse  $x$  del sistema di coordinate. Questi due sets sono correlate in modo tale che  $a$ ,  $b$ ,  $psi$  possono essere trovate da  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $\delta$  e viceversa. Queste ben conosciute relazioni sono:

$$a^2 + b^2 = a_x^2 + a_y^2 \tag{28.4.6}$$

$$\tan 2\psi = \frac{2a_x a_y}{a_x^2 - a_y^2} \cos \delta \quad (0 \leq \psi \leq \pi) \quad (28.4.7)$$

In piú abbiamo:

$$\sin 2\chi = \frac{2a_x a_y}{a_x^2 + a_y^2} \sin \delta \quad (28.4.8)$$

essendo  $\chi$  un angolo ausiliario definito da:

$$\tan \chi = \pm \frac{b}{a} \quad (-\pi/4 \leq \chi \leq \pi/4) \quad (28.4.9)$$

Il valore numerico di  $\tan \chi$  comporta che il reciproco del rapporto assiale  $a/b$  della ellisse, ed il segno di  $\chi$  diversifica i due sensi di polarizzazione, cioè per polarizzazione circolare sinistra  $0 < \chi \leq \pi/4$  e per polarizzazione circolare destra  $-\pi/4 \leq \chi < 0$ .

I parametri di Stokes per l'onda piana monocromatica piana *TEM* (28.4.3) sono le quattro quantità:

$$s_0 = a_x^2 + a_y^2 \quad s_1 = a_x^2 - a_y^2 \quad s_2 = 2a_x a_y \cos \delta \quad s_3 = 2a_x a_y \sin \delta \quad (28.4.10)$$

Ma poiché le quantità sono correlate dalla identità:

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \quad (28.4.11)$$

solo tre parametri dei quattro sono indipendenti. alternativamente, i parametri di Stokes possono essere scritti in termini dell'angolo di orientazione  $\psi$  e dell'angolo di ellitticità  $\chi$  come segue:

$$s_1 = s_0 \cos 2\chi \cos 2\psi \quad s_2 = s_0 \cos 2\chi \sin 2\psi \quad s_3 = s_0 \sin 2\chi \quad (28.4.12)$$

dove  $s_0$  è proporzionale all'intensità dell'onda.

Da queste espressioni vediamo che se  $s_1, s_2, s_3$  sono interpretate come le coordinate cartesiane di un punto su una sfera di raggio  $s_0$  conosciuta come **sfera di Poincaré**, la longitudine e la latitudine del punto sono  $2\psi$  e  $2\chi$  rispettivamente. Così, vi è una corrispondenza univoca fra i punti sulla sfera e gli stati di polarizzazione dell'onda. In modo che l'onda sia linearmente polarizzata, la differenza di fase  $\delta$  deve essere zero o un multiplo intero di  $\pi$ , e conseguentemente secondo l'equazione (28.4.8)  $\chi$  deve essere zero. Così noi vediamo che i punti sull'equatore nella sfera di Poincaré corrispondono a onde linearmente polarizzate.

In modo che l'onda sia circolarmente polarizzata le ampiezze  $a_x$  e  $a_y$  devono essere eguali e la differenza di fase  $\delta$  deve essere o  $\pi/2$  o  $-\pi/2$ , a seconda che il verso di polarizzazione sia levogiro o destrogiro. Quindi dall'equazione (28.4.8) segue che per un'onda polarizzata circolarmente sinistra  $2\chi = \pi/2$  e per un'onda polarizzata circolarmente destra sia  $2\chi = -\pi/2$ ; cioè, i poli nord e sud della sfera di Poincaré corrispondono rispettivamente a stati di polarizzazione circolare sinistra e destra. Gli altri punti sulla sfera di

Poincaré rappresentano polarizzazione ellittica, destrogira nell'emisfero superiore, destrogiro nell'emisfero inferiore.

**Sfera di Poincaré**

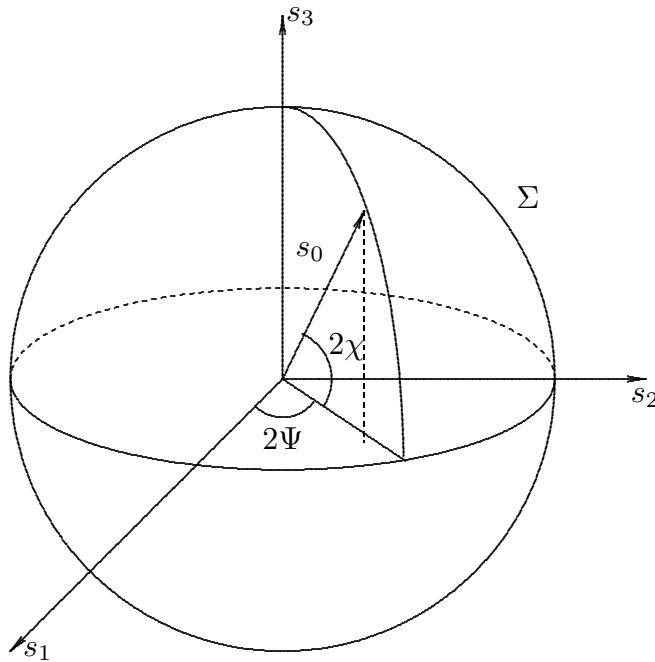


fig.28.4-2

Poiché  $\vec{E}(z, t)$  ha solo due componenti  $E_x, E_y$  può essere rappresentato per qualunque valore di  $z = z_0$  come un vettore nel piano complesso i cui assi reale ed immaginario sono  $E_x$  ed  $E_y$  rispettivamente. Cioé, come funzione di  $t$ , ad ogni valore di  $\vec{E}(z_0, t)$  vi corrispondono un punto  $E_x + iE_y$  nel diagramma di Argant. Con l'aiuto di questa rappresentazione un'onda polarizzata ellitticamente può essere scomposta in un'onda circolarmente polarizzata sinistra ed in un'onda circolarmente polarizzata destra. Notiamo che nel piano complesso onde circolarmente polarizzate in verso opposto sono date dai vettori complessi  $\rho_1 \exp(i\omega t)$  e  $\rho_2 \exp(-i\omega t + i\gamma)$ , il primo essendo destrogiro, il secondo levogiro.

Così in termini dei moduli di  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , i semiassi maggiore e minore dell'ellisse di polarizzazione dell'onda consistente della sovrapposizione di queste due onde circolarmente polarizzate sono  $\rho_2 + \rho_1$  e  $\rho_2 - \rho_1$ . L'angolo di orientazione dell'ellisse è dato da  $2\psi = \gamma$ , dove  $\gamma$  è l'angolo di fase fra i vettori complessi a  $t = 0$ . Poiché il rapporto assiale dell'ellisse di polarizzazione è  $(\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)$ , l'angolo  $\chi$  è dato da  $\tan \chi = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)$ . Segue che:

$$\sin 2\chi = \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{\rho_2^2 + \rho_1^2} \quad \cos 2\chi = \frac{2\rho_2\rho_1}{\rho_2^2 + \rho_1^2} \quad (28.4.11)$$

sostituendo l'equazione (28.4.11) nell'espressione (28.4.10), ricordando che  $2\psi = \gamma$ , e notando che  $s_0 = \rho_2^2 + \rho_1^2$  è l'intensità dell'onda, abbiamo le seguenti espressioni per i parametri di Stokes in termini dei moduli  $\rho_2, 4\rho_1$  e la differenza di fase  $\gamma$ :

$$s_0 = 2(\rho_2^2 + \rho_1^2) \quad s_1 = 4\rho_2\rho_1 \cos \gamma \quad s_2 = 4\rho_2\rho_1 \sin \gamma \quad s_3 = 2(\rho_2^2 - \rho_1^2) \quad (28.4.12)$$

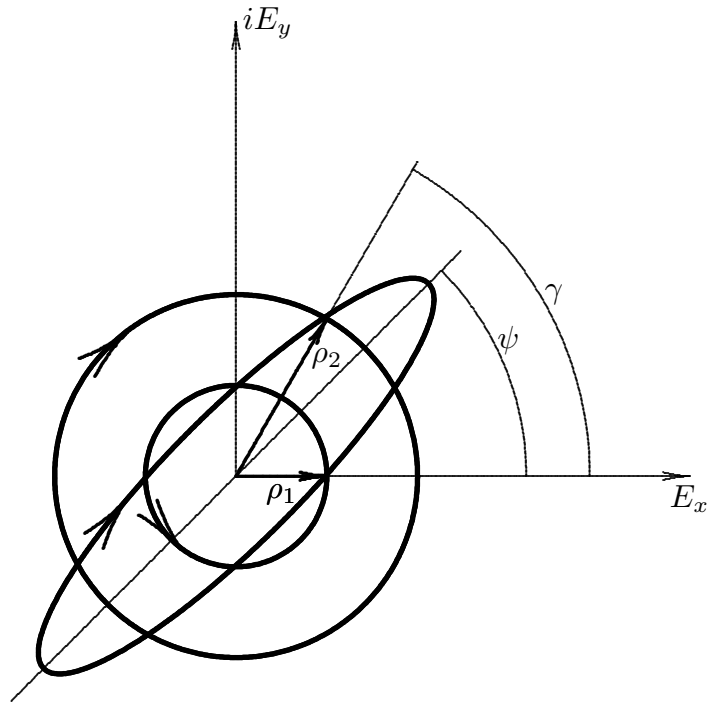


fig.28.4-3

**Piano complesso - Splitting di un'onda polarizzata ellitticamente in due onde polarizzate circolarmente in senso opposto.**

Lo stato di polarizzazione può essere misurato in un numero di modi differenti. Per esempio, come è suggerito dall'espressione (28.4.8), lo stato di polarizzazione può essere misurato utilizzando due antenne riceventi linearmente polarizzate in modo tale che una misura  $a_x$ , l'altra misura  $a_y$  e la differenza di fase fra le loro risposte  $\delta$ . Alternativamente, dalle espressioni (28.4.12) si vede che lo stato di polarizzazione può anche essere misurato utilizzando due antenne polarizzate circolarmente in senso opposto, una delle antenne misurante  $\rho_2$ , l'altra  $\rho_1$  e la differenza di fase delle loro risposte  $\gamma$ . L'accuratezza di questi metodi di misura dipende largamente da quanto puramente lineare è l'antenna polarizzata linearmente e quanto puramente circolare è l'antenna polarizzata circolarmente. Le tecniche di misura della polarizzazione delle onde monocromatiche sono ben conosciute e non saranno discusse qui.

Usando l'onda monocromatica come prototipo, esaminiamo il caso di un'onda policromatica *TEM*, che in virtù del suo carattere policromatico può essere ellitticamente polarizzato, o non polarizzato, o parzialmente polarizzato. Assumiamo che lo spettro in frequenza dell'onda è confinato in una banda relativamente stretta di larghezza  $\Delta\omega$  cosicché il vettore elettrico dell'onda, in analogia con l'espressione (28.4.1) può avere la semplice rappresentazione analitica:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \left[ \vec{E}_0(t) e^{i(z\omega/c - \omega t)} \right] \quad (28.4.13)$$

dove  $\omega$  ora denota qualche valore medio della frequenza. A causa della larghezza di banda che è stretta,  $\vec{E}_0(t)$  può variare soltanto di una piccola quantità nell'intervallo di tempo  $1/\Delta\omega$  ed in questo senso è una funzione lentamente variabile del tempo. Se la larghezza di

banda non é stretta nasce la questione di rappresentare un segnale a larga banda in forma analitica ed il problema dovrá essere riformulato. In pratica, tuttavia questa difficoltá é obbligatoriamente scavalcata in quanto gli strumenti usati per misurare la polarizzaione sono inerentemente dispositivi a banda stretta.

Scrivendo  $\vec{E}_0(t)$  nella forma:

$$\vec{E}_0(t) = \hat{x}a_x(t)e^{-i\delta_x(t)} + \hat{y}a_y(t)e^{-i\delta_y(t)} \quad (28.4.14)$$

dove le ampiezze  $a_x(t)$ ,  $a_y(t)$  e le fasi  $\delta_x(t)$ ,  $\delta_y(t)$  sono funzioni lentamente variabili nel tempo, vediamo che le componenti cartesiane di  $\vec{E}(z, t)$  sono date da:

$$\begin{aligned} E_x &= a_x(t) \cos[\phi + \delta_x(t)] \\ E_y &= a_y(t) \cos[\phi + \delta_x(t) + \delta(t)] \\ E_z &= 0 \end{aligned} \quad (28.4.15)$$

dove  $\phi = \omega t - z\omega/c$ ,  $\delta(t) = \delta_y(t) - \delta_x(t)$ . Sebbene le ampiezze e le fasi sono funzioni irregolarmente variabili nel tempo, certe correlazioni fra di esse possono esistere. Sono queste correlazioni che determinano i parametri di Stokes e conseguentemente la polarizzazione dell'onda. Per definizione, i parametri di Stokes dell'onda policromatica (28.4.15) sono quantitá mediate nel tempo:

$$\begin{aligned} s_0 &= \langle a_x^2(t) \rangle + \langle a_y^2(t) \rangle & s_1 &= \langle a_x^2(t) \rangle - \langle a_y^2(t) \rangle \\ s_2 &= 2\langle a_x(t)a_y(t) \cos \delta(t) \rangle & s_3 &= 2\langle a_x(t)a_y(t) \sin \delta(t) \rangle \end{aligned} \quad (28.4.16)$$

che sono generalizzazioni dei parametri di Stokes monocromatici (28.4.8). Puó essere mostrato i parametri di Stokes policromatici soddisfano la relazione:

$$s_0^2 \geq s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \quad (28.4.17)$$

dove il segno di eguaglianza accade quando l'onda policromatica é ellitticamente polarizzata.

L'onda policromatica (28.4.15) é ellitticamente polarizzata quando il rapporto  $q$  delle ampiezze  $q = a_y/a_x$  e le differenze di fase  $\delta$  sono costanti assolute. Cioé, quando  $q$  e  $\delta$  sono indipendente dal tempo, il vettore elettrico dell'onda traccia un'ellisse la cui dimensione continuamente varia ad un tasso controllato dalla larghezza di banda  $\Delta\omega$  ma la cui forma, orientazione e senso di polarizzazione non cambiano. Per dimostrare questo, notiamo che per un'onda polarizzata ellitticamente i parametri di Stokes (28.4.16) diventano:

$$\begin{aligned} s_0 &= (1 + q^2)\langle a_x^2(t) \rangle & s_1 &= (1 - q^2)\langle a_x^2(t) \rangle \\ s_2 &= 2q\langle a_x(t) \rangle \cos \delta & s_3 &= 2q\langle a_x(t) \rangle \sin \delta \end{aligned} \quad (28.4.18)$$

Poiché questi parametri soddisfano l'indentitá  $s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$ , solo tre di essi sono indipendenti. In analogia con l'equazione (28.4.10) possiamo scrivere i parametri di Stokes di un'onda policromatica polarizzata ellitticamente nella forma:

$$s = s_0 \cos 2\chi \cos 2\psi \quad s_2 = s_0 \cos 2\chi \sin 2\psi \quad s_3 = s_0 \sin 2\chi \quad (28.4.19)$$

Conseguentemente l'angolo di orientazione  $\psi$  dell'ellisse di polarizzazione é dato da:

$$\tan 2\psi = \frac{s_2}{s_1} = \frac{2q}{1 - q^2} \cos \delta \quad (28.4.19)$$

e il suo angolo di ellitticitá  $\chi$  da:

$$\sin 2\chi = \frac{s_3}{s_0} \frac{2q}{1 + q^2} \sin \delta \quad (28.4.20)$$

Poiché  $q$  e  $\delta$  sono indipendenti dal tempo, é chiaro dalle equazioni (28.4.19) e (28.4.20) che  $\psi$  e  $\chi$  sono indipendenti dal tempo, a conferma del fatto che la forma, l'orientazione ed il senso di polarizzazione non variano.

Ritorniamo all'onda policromatica (28.4.14) e assumiamo che la fase di  $E_y$  é shif-tata rispetto alla fase di  $E_x$  di una costante  $\epsilon$ . Le componenti cartesiane di tale onda policromatica sono date da:

$$\begin{aligned} E_x &= a_x(t) \cos[\phi + \delta_x(t)] \\ E_y &= a_y(t) \cos[\phi + \delta_x(t) + \delta(t) + \epsilon] \\ E_z &= 0 \end{aligned} \quad (28.4.21)$$

Come é chiaro dalla figura (28.4-4), le componenti del campo elettrico lungo l'asse  $x'$  formante un angolo  $\theta$  con l'asse  $x$  é  $E_{x'}(\theta, \epsilon) = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta$  ed il suo quadrato é  $E_{x'}^2(\theta, \epsilon) = E_x^2 \cos^2 \theta + E_y^2 \sin^2 \theta + 2E_x E_y \cos \theta \sin \theta$ .

Sostituendo le espressioni (28.4.21) in questa forma quadratica, troviamo che il valore istantaneo di  $E_{x'}^2(\theta, \epsilon)$  é:

$$\begin{aligned} E_{x'}^2(\theta, \epsilon) &= a_x^2(t) \cos^2 \tau \cos^2 \theta + a_y^2(t) \cos^2 [\tau + \delta(t) + \epsilon] \sin^2 \theta + \\ &+ 2a_x(t)a_y(t) \cos \tau \cos [\tau + \delta(t) + \epsilon] \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (28.4.22)$$

dove  $\tau = \phi + \delta_x(t)$ . Ricordando che  $a_x(t)$ ,  $a_y(t)$ ,  $\delta(t)$  sono funzioni del tempo lentamente variabili e che:

$$\cos \tau = \cos[\phi + \delta_x(t)] = \cos[\omega t - z\omega/c + \delta_x(t)] \quad (28.4.23)$$

é una funzione del tempo rapidamente variabile, troviamo che il valore medio di  $2E_{x'}^2(\theta, \epsilon)$  che noi denotiamo con  $I(\theta, \epsilon)$ , ha la seguente rappresentazione:

$$\begin{aligned} I(\theta, \epsilon) &= 2\langle E_{x'}^2(\theta, \epsilon) \rangle = \langle a_x^2(t) \rangle \cos^2 \theta + \langle a_y^2(t) \rangle \sin^2 \theta + \\ &+ [\langle a_x(t)a_y(t) \cos \delta(t) \rangle \cos \epsilon - \langle a_x(t)a_y(t) \sin \delta(t) \rangle \sin \epsilon] \sin 2\theta \end{aligned} \quad (28.4.24)$$

Con l'aiuto della definizione (28.4.17) questa rappresentazione porta direttamente alla relazione:

$$I(\theta, \epsilon) = \frac{1}{2} [s_0 + s_2 \cos 2\theta + (s_2 \cos \epsilon - s_3 \sin \epsilon) \sin 2\theta] \quad (28.4.25)$$

che mostra che  $I(\theta, \epsilon)$  é linearmente correlata ai parametri di Stokes. É evidente dalla relazione (28.4.25) che i parametri di Stokes possono essere determinate misurando  $I(\theta, \epsilon)$  per vari valori di  $\theta$  e di  $\epsilon$ .

Se  $I(\theta, \epsilon)$  dovesse essere indipendente da  $\theta$  e da  $\epsilon$ , l'onda é detta essere **non polarizzata**. In altre parole, un'onda nonpolarizzata é una che soddisfa:

$$I(\theta, \epsilon) = \frac{1}{2} s_0 \tag{28.4.25}$$

indipendentemente da  $\theta$  e da  $\epsilon$ , o, equivalentemente, la condizione necessaria e sufficiente che l'onda sia non polarizzata é:

$$s_1 = s_2 = s_3 = 0 \tag{28.4.26}$$

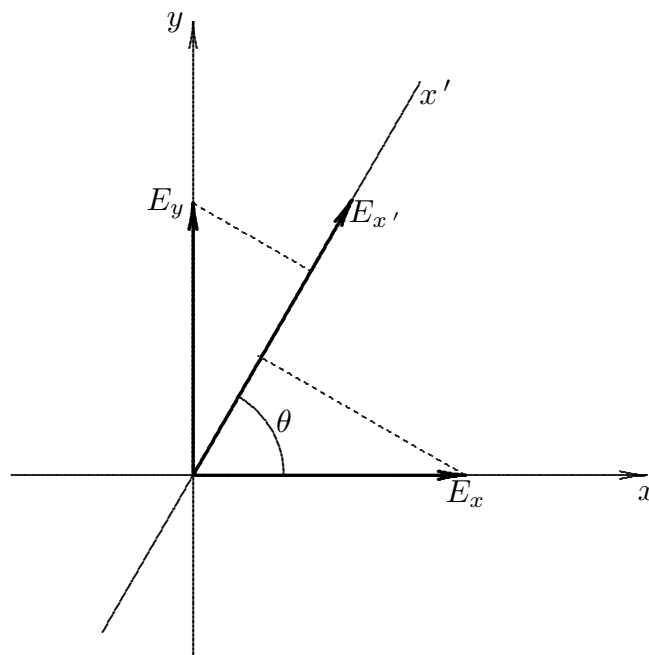


fig.28.4-4

Se l'onda policromatica consiste di una sovrapposizione di diverse onde fisicamente indipendenti, l'intensitá dell'onda risultante é la somma delle intensitá delle onde indipendenti. Cioé, se  $I^{(n)}$  denota l'intensitá dell'ennesima onda, l'intensitá  $I$  dell'onda composta é data da:

$$I = \sum_n I^{(n)} \tag{28.4.26}$$

Inoltre, poiché ciascuna delle onde indipendenti soddisfa la relazione (28.4.23), abbiamo per l'ennesima onda indipendente:

$$I^{(n)}(\theta, \epsilon) = \frac{1}{2} \left[ s_0^{(n)} + s_1^{(n)} \cos 2\theta + \left( s_2^{(n)} \cos \epsilon - s_3^{(n)} \sin \epsilon \right) \sin 2\theta \right] \tag{28.4.27}$$



dove  $s_0^{(n)}, s_1^{(n)}, s_2^{(n)}, s_3^{(n)}$  sono i corrispondenti parametri di Stokes. Quindi, dalle equazioni (28.4.26) e (28.4.26) otteniamo la seguente espressione:

$$I(\theta, \epsilon) = \frac{1}{2} \left[ \sum s_0^{(n)} + \sum s_1^{(n)} \cos 2\theta + \left( \sum s_2^{(n)} \cos \epsilon - \sum s_3^{(n)} \sin \epsilon \right) \sin 2\theta \right] \quad (28.4.28)$$

la quale, quando comparata con l'espressione (28.4.23) mostra che ciascuna dei parametri di Stokes dell'onda composta é la somma dei rispettivi parametri di Stokes delle onde indipendenti. Cioé, i parametri di stokes sono additive nel senso che:

$$s_0 = \sum s_0^{(n)} \quad \sum s_1^{(n)} \quad \sum s_2^{(n)} \quad \sum s_3^{(n)} \quad (28.4.29)$$

dove  $s_0, s_1, s_2, s_3$  sono i parametri di stokes dell'onda composta e  $s_0^{(n)}, s_1^{(n)}, s_2^{(n)}, s_3^{(n)}$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ) son i parametri di Stokes delle onde indipendenti in cui l'onda composta puó essere scomposta.

Con l'aiuto di questa additivá dei parametri di Stokes possiamo mostrare che un'onda policromatica é scomponibile unicamente in una parte non polarizzata ed in una parte ellitticamente polarizzata, le due parti essendo mutuamente indipendenti. Per fare questo, denotiamo i parametri di Stokes dell'onda composta con  $(s_0, s_1, s_2, s_3)$ , quelle della parte non polarizzata con  $(s_0^{(1)}, 0, 0, 0)$ , e quelle della parte polarizzata con  $(s_0^{(2)}, s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, s_3^{(2)})$ . Allora per la relazione di additivá (28.4.29) abbiamo:

$$s_0 = s_0^{(1)} + s_0^{(2)} \quad s_1 = s_1^{(2)} \quad s_2 = s_2^{(2)} \quad s_3 = s_3^{(2)} \quad (28.4.30)$$

Il grado di polarizzazione  $m$  é definito come il rapporto fra l'intensitá della parte polarizzata e l'intensitá dell'onda composta, cioé, per definizione:

$$m = \frac{s_0^{(2)}}{s_0} \quad (28.4.31)$$

Dalla relazione (28.4.16) sappiamo che i parametri di Stokes della parte polarizzata sono correlati dalla relazione:

$$\left[ s_0^{(2)} \right]^2 = \left[ s_1^{(2)} \right]^2 + \left[ s_2^{(2)} \right]^2 + \left[ s_3^{(2)} \right]^2 \quad (28.4.32)$$

che, con l'aiuto delle ultime tre disequaglianze dell'equazione (28.4.30), puó essere scritto come:

$$\left[ s_0^{(2)} \right]^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \quad (28.4.33)$$

Segue dalla definizione (28.4.31) e dalla (28.4.33) che in termini dei parametri di Stokes dell'onda composta il grado di polarizzazione é dato da:

$$m = \frac{(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{1/2}}{s_0} \quad (28.4.34)$$

Inoltre, l'orientazione dell'ellisse di polarizzazione é data da:

$$\tan 2\psi = \frac{s_2^{(2)}}{s_1^{(2)}} = \frac{s_2}{s_1} \quad (28.4.35)$$

e la sua ellitticitá é:

$$\sin 2\chi = \frac{s_3^{(2)}}{s_0^{(2)}} = \frac{s_3}{(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{1/2}} \quad (28.4.36)$$

dove é stato fatto l'uso delle equazioni (28.4.30) e (28.4.33). Cosí noi vediamo che quando i parametri di Stokes ( $s_0, s_1, s_2, s_3$ ) di un'onda parzialmente polarizzata sono noti possiamo calcolare il grado di polarizzazione dall'equazione (28.4.31), e le proprietá dell'ellisse di polarizzazione dall'equazione (28.4.34) (28.4.33). Poiché  $\chi$  é ristretta all'intervallo  $-\pi/4 \leq \chi \leq \pi/4$  l'equazione (28.4.36) comporta in modo non ambiguo ad un solo valore di  $\chi$ . Tuttavia, l'equazione (28.4.35) puó essere soddisfatta da due valori di  $\psi$  che differiscono di  $\pi/2$ , la restrizione che  $\psi$  giace nell'intervallo  $0 \leq \psi \leq \pi$  non é sufficiente fissare  $\chi$  in modo non ambiguo. Ma dalle prime due delle equazioni (28.4.18) vediamo che  $\psi$  deve essere scelto in modo tale che  $s_1$ , e  $s_2$  hanno i propri segni. Conseguentemente,  $\psi$  é determinato dall'equazione (28.4.35) e dalla richiesta che la parte appropriata della sfera di Poincaré é usata.

Un altro modo di scomporre un'onda policromatica é quello di esprimerla come la sovrapposizione di due onde indipendenti polarizzate opposte. Le due onde sono dette essere polarizzate opposte se gli angoli di orientazione e di ellitticitá  $\psi_1, \chi_1$  di una delle onde sono correlate come segue all'angolo di orientazione e di ellitticitá  $\psi_2, \chi_2$  dell'altra onda:

$$\chi_1 = -\chi_2 \quad \psi_2 = \psi_1 + \frac{\pi}{2} \quad (28.4.37)$$

Questo significa che gli assi maggiori delle ellissi di polarizzazione delle onde polarizzate in senso opposto sono perpendicolari l'uno all'altro, che i rapporti assiali delle ellissi sono eguali, e che i sensi della polarizzazione sono opposte.

Siano ( $s_0, s_1, s_2, s_3$ ) i parametri di Stokes delle onde policromatiche, ( $s_0^{(1)}, s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, s_3^{(1)}$ ) e ( $s_0^{(2)}, s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, s_3^{(2)}$ ) i parametri di Stokes delle due onde indipendenti e di opposta polarizzazione. Dall'addittivitá dei parametri di Stokes abbiamo:

$$s_0 = s_0^{(1)} + s_0^{(2)} \quad (28.4.38)$$

Questa relazione é soddisfatta se scegliamo:

$$\begin{aligned} s_0^{(1)} &= \frac{1}{2}s_0 - \alpha \\ s_0^{(2)} &= \frac{1}{2}s_0 + \alpha \end{aligned} \quad (28.4.39)$$

dove  $\alpha$  é una quantitá sconosciuta. Allora i parametri di Stokes delle onde polarizzate in senso opposto sono:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}s_0 - \alpha \\ \frac{1}{2}s_0 - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}s_0 - \alpha\right) \cos 2\chi_1 \cos 2\psi_1 \\ \left(\frac{1}{2}s_0 - \alpha\right) \sin 2\chi_1 \end{pmatrix} \quad (28.4.40)$$

e

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}s_0 + \alpha \\ \frac{1}{2}s_0 + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\chi_1 \cos 2\psi_1 \\ \cos 2\chi_1 \sin 2\psi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s_0 + \alpha \\ \frac{1}{2}s_0 + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin 2\chi_1 \\ \sin 2\chi_1 \end{pmatrix} \quad (28.4.41)$$

Poiché queste onde sono polarizzate in senso opposto, abbiamo:

$$\begin{aligned} \cos 2\chi_1 &= \cos 2\chi_2 & \sin 2\chi_1 &= -\sin 2\chi_2 \\ \cos 2\psi_1 &= -\cos 2\psi_2 & \sin 2\psi_1 &= -\sin 2\psi_2 \end{aligned} \quad (28.4.42)$$

In virtù di queste relazioni vediamo che se il teorema di addittività é applicato ai parametri di Stokes dell'onda originale e ai parametri di Stokes (28.7.39) (28.7.40) delle due onde polarizzate in senso opposto, si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} -2\alpha \cos 2\chi_1 \cos 2\psi_1 &= s_1 \\ -2\alpha \cos 2\chi_1 \sin 2\psi_1 &= s_2 \\ -2\alpha \cos 2\chi_1 &= s_3 \end{aligned} \quad (28.4.43)$$

Quadrando e sommando l'equazione le equazioni (28.7.43), otteniamo:

$$4\alpha^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \quad (28.4.44)$$

Dalle equazioni (28.4.39) e (28.4.44) segue che le intensità delle due onde polarizzate in senso opposto sono:

$$\begin{aligned} s_0^{(1)} &= \frac{1}{2}s_0 - \frac{1}{2}\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} \\ s_0^{(2)} &= \frac{1}{2}s_0 + \frac{1}{2}\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} \end{aligned} \quad (28.4.45)$$

Dalla equazione (28.4.43) vediamo che  $\psi_1$  e  $\chi_1$  sono date da:

$$\tan 2\psi_1 = \frac{s_2}{s_1} \quad \sin 2\chi_1 = \frac{-s_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}} \quad (28.4.46)$$

Cosí vediamo che un'onda policromatica i cui parametri di stokes sono  $(s_0, s_1, s_2, s_3)$  può essere scomposta in due onde polarizzate aventi le intensità  $\frac{1}{2}s_0 \pm \frac{1}{2}\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}$  ed essendo negli opposti stati di polarizzazione  $(\chi, \psi)$  e  $(-\chi, \psi + \pi/2)$ , dove  $\chi$  e  $\psi$  sono date dall'equazione (28.4.46).

Poiché abbiamo usato un sistema di coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  per descrivere i parametri di Stokes, nasce la questione di quanto questi parametri cambiano sotto una rotazione degli assi. Per trovare la legge di trasformazione, bisogna considerare solo un'onda ellitticamente polarizzata. Questo segue dal fatto che un'onda polarizzata parzialmente può essere sempre scomposta in due onde indipendenti polarizzate in senso opposto. Siano  $(s_0, s_1, s_2, s_3)$  i parametri di Stokes di una delle onde polarizzate ellitticamente quando

riferiti al sistema originale, e siano  $(s'_0, s'_1, s'_2, s'_3)$  questi parametri quando riferiti al sistema ruotato. La rotazione consiste di una rotazione in senso orario delle coordinate attorno all'asse  $z$  e di un angolo  $\phi$ . In virtù del fatto che l'onda é ellitticamente polarizzata, possiamo scrivere i parametri di Stokes  $(s_0, s_1, s_2, s_3)$  in termini dell'angolo di ellitticitá  $\chi$  e dell'angolo di rotazione  $\psi$ , come segue:

$$s_0 \quad s_0 \cos 2\chi \cos 2\psi \quad s_0 \cos 2\chi \sin 2\psi \quad s_0 \sin 2\chi \quad (28.4.47)$$

Ovviamente, quando riferiti al sistema ruotato questi parametri diventano:

$$s_0 \quad s_0 \cos 2\chi \cos 2(\psi - \phi) \quad s_0 \cos 2\chi \sin 2(\psi - \phi) \quad s_0 \sin 2\chi \quad (28.4.48)$$

Chiaramente allora, i parametri di stokes riferiti alle coordinate ruotate sono date da:

$$\begin{aligned} s'_0 &= s_0 \\ s'_1 &= s_0 \cos 2\chi \cos 2(\psi - \phi) = s_1 \cos 2\phi + s_2 \sin 2\phi \\ s'_2 &= s_0 \cos 2\chi \sin 2(\psi - \phi) = s_2 \cos 2\phi - s_1 \sin 2\phi \\ s'_3 &= s_3 \end{aligned} \quad (28.4.49)$$

dove  $(s_0, s_1, s_2, s_3)$  e  $(s'_0, s'_1, s'_2, s'_3)$  sono i parametri di stokes, rispettivamente, nelle coordinate originali e ruotate. I parametri  $s_0$  e  $s_3$  sono invarianti sotto rotazione, cioè, l'intensitá e l'ellitticitá dell'onda non varia quando gli assi sono ruotati. D'altro canto,  $s_1$  e  $s_2$  non rimangono gli stessi e quindi l'angolo di orientazione  $\psi$  cambia quando gli assi sono ruotati.

### 28.5 - Matrici di coerenza

Nello studio della polarizzazione delle onde elettromagnetiche abbiamo dimostrato che lo stato di polarizzazione di un'onda policromatica a banda stretta é specificata completamente dai quattro parametri di Stokes  $s_0, s_1, s_2, s_3$ . In questo paragrafo mostreremo che lo stato di polarizzazione puó essere alternativamente specificato per mezzo di una matrice  $2 \times 2$  i cui elementi caratterizzano lo stato di coerenza fra le componenti trasversali dell'onda.

Consideriamo di nuovo un'onda piana *TEM* policromatica a stretta banda (quasi monocromatica) viaggiante nella direzione dell'asse  $z$ . In accordo con l'equazione (xxxx) le componenti cartesiane di tale onda sono:

$$\begin{aligned} E_x &= \Re \left[ a_x(t) e^{ikz} e^{-i\delta_x} e^{-i\omega t} \right] \\ E_y &= \Re \left[ a_y(t) e^{ikz} e^{-i\delta_y} e^{-i\omega t} \right] \\ E_z &= 0 \end{aligned} \quad (28.5.1)$$

In termini del vettore complesso  $\vec{A}$ , le cui componenti sono date da:

$$A_x = a_x(t) e^{ikz} e^{-i\delta_x}; \quad A_y = a_y(t) e^{ikz} e^{-i\delta_y}; \quad A_z = 0 \quad (28.5.2)$$

le componenti del campo elettrico (28.5.2) possono essere scritte nella forma:

$$E_x = \Re \left( A_x e^{-i\omega t} \right); \quad E_y = \Re \left( A_y e^{-i\omega t} \right); \quad E_z = 0 \quad (28.5.3)$$

che mostra che  $\vec{A}$  é il fasore del vettore elettrico dell'onda. Al contrario dell'onda monocromatica,  $\vec{A}$  é dipendente dal tempo. Gli elementi  $J_{pq}$  della matrice di coerenza  $\vec{J}$  sono definite da:

$$J_{pq} = \langle A_p A_q^* \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} A_p A_q^* dt \quad (p, q = x, y) \quad (28.5.4)$$

Se  $A_p$  e  $A_q$  sono fisicamente indipendenti allora  $\langle A_p A_q^* \rangle = 0$ . É ovvio dalla definizione (28.5.4) che:

$$J_{xy} = J_{yz}^* \quad (28.5.5)$$

e quindi la matrice di coerenza é :

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle A_x A_x^* \rangle & \langle A_x A_y^* \rangle \\ \langle A_y A_x^* \rangle & \langle A_y A_y^* \rangle \end{pmatrix} \quad (28.5.6)$$

é hermitiana.

Per trovare la connessione fra i parametri di Stokes e la matrice di coerenza, notiamo che quando le espressioni (xxxx) sono sostituite nella definizione (28.5.4), otteniamo:

$$\begin{aligned}
 J_{xx} &= \langle a_x^2(t) \rangle \\
 J_{xy} &= \langle a_x(t)a_y(t)e^{i\delta(t)} \rangle = \langle a_x(t)a_y(t) \cos \delta(t) \rangle + i \langle a_x(t)a_y(t) \sin \delta(t) \rangle \\
 J_{yx} &= \langle a_x(t)a_y(t)e^{-i\delta(t)} \rangle = \langle a_x(t)a_y(t) \cos \delta(t) \rangle - i \langle a_x(t)a_y(t) \sin \delta(t) \rangle \\
 J_{yy} &= \langle a_y^2(t) \rangle
 \end{aligned} \tag{28.5.7}$$

dove  $\delta(t) = \delta_y(t) - \delta_x(t)$ . Confrontando le espressioni (28.5.7) con le espressioni (xxxx), troviamo che i parametri di Stokes sono correlati agli elementi della matrice di coerenza come segue:

$$s_0 = J_{xx} + J_{yy}; \quad s_1 = J_{xx} - J_{yy}; \quad s_2 = J_{xy} - J_{yx}; \quad s_3 = i(J_{yx} - J_{xy}) \tag{28.5.8}$$

$$J_{xx} = \frac{1}{2}(s_0 + s_1); \quad J_{xy} = \frac{1}{2}(s_2 + is_3); \quad J_{yy} = \frac{1}{2}(s_0 - s_1); \quad J_{yx} = \frac{1}{2}(s_2 - is_3) \tag{28.5.9}$$

Queste relazioni mostrano che i parametri di Stokes e gli elementi della matrice coerenza sono linearmente correlati e che una specificazione dell'onda in termini degli ultimi é in tutti gli aspetti equivalente alle sue specificazioni in termini dei primi.

Poiché il teorema di addizione si applica ai parametri di Stokes, esso si deve applicare, a causa delle relazioni lineari (28.5.8) e (28.5.9) anche alla matrice coerenza, nel senso che se  $\vec{J}^{(1)}, \vec{J}^{(2)}, \dots, \vec{J}^{(N)}$  sono le matrici coerenza di  $N$  onde indipendenti viaggianti nella stessa direzione, allora la matrice coerenza  $\vec{J}$  dell'onda risultante é la somma delle matrici di coerenza delle onde indipendenti, cioè:

$$\vec{J} = \sum_{n=1}^N \vec{J}^{(n)} \tag{28.5.10}$$

Per mostrare questo, siano  $A_x^{(n)}, A_y^{(n)}$  le componenti cartesiane dei fasori dell'ennesima onda indipendente. Allora dalla sovrapposizione delle componenti cartesiane del fasore dell'onda risultante sono:

$$A_x = \sum_{n=1}^N A_x^{(n)}; \quad A_y = \sum_{n=1}^N A_y^{(n)} \tag{28.5.11}$$

Gli elementi della matrice coerenza dell'onda risultante sono:

$$\begin{aligned}
 J_{pq} = \langle A_p A_q^* \rangle &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle A_p^{(n)} A_q^{(m)*} \rangle = \sum_{n=1}^N \langle A_p^{(n)} A_q^{(n)*} \rangle + \sum_{n \neq m} \langle A_p^{(n)} A_q^{(m)*} \rangle \\
 &\tag{28.5.12}
 \end{aligned}$$

Ciascun termine dell'ultima sommatoria é zero poiché  $A_p^{(n)}$  e  $A_q = (m)$  per  $n \neq m$  sono indipendenti. Quindi noi abbiamo:

$$J_{pq} = \sum_{n=1}^N J_{pq}(n) \quad (28.5.13)$$

dove  $J_{pq}^{(n)}$  denota gli elementi della matrice coerenza dell'ennesima onda indipendente. Cosí il teorema di addizione (26.7.10) é verificato.

Dall'ineguaglianza di Schwarz, che é espressa da:

$$\int A_p A_p^* dt \int A_q A_q^* dt \geq \int A_p A_q^* dt \quad (28.5.14)$$

e dalla definizione (28.5.4) segue che:

$$J_{xx} J_{yy} \geq J_{xy}^* J_{xy} \quad (28.5.15)$$

o, per la (28.5.5), che:

$$J_{xx} J_{yy} - J_{yx} J_{xy} \geq \quad (28.5.16)$$

Il segno di eguaglianza in queste espressioni si ha soltanto quando  $A_p/A_q$  é costante, che a sua volta significa che il determinante della matrice coerenza si annulla solo se l'onda é ellitticamente polarizzata. Se il determinante non si annulla, allora l'onda é parzialmente polarizzata. Cioé:

$$\det \vec{J} = 0 \quad \text{per polarizzazione ellittica} \quad (28.5.17)$$

$$\det \vec{J} > 0 \quad \text{per polarizzazione parziale} \quad (28.5.18)$$

Noi conosciamo dai nostri studi sui parametri di Stokes che per un'onda non polarizzata  $s_0 \neq 0$  e  $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ . Traducendo questo nel linguaggio della matrice coerenza, vediamo dall'equazione (28.5.8) e (28.5.9) che  $J_{xx} = J_{yy} = \frac{1}{2}s_0$ . Cosí troviamo che la matrice coerenza di un'onda polarizzata ha la forma:

$$\vec{J} = \frac{s_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (28.5.19)$$

Inoltre, dalle espressioni (xxx) e dalle equazioni (28.5.8) e (28.5.9) vediamo che la matrice coerenza di un'onda ellitticamente polarizzata ha la forma:

$$\vec{J} = \frac{s_0}{2} \begin{pmatrix} (1 + \cos 2\chi \cos 2\psi) & (\cos 2\chi \sin 2\psi + i \sin 2\chi) \\ (\cos 2\chi \sin 2\psi - i \sin 2\chi) & (1 - \cos 2\chi \cos 2\psi) \end{pmatrix} \quad (28.5.20)$$

dove  $\psi$  é l'angolo di orientazione dell'ellisse di polarizzazione e  $\chi$  é il suo angolo di ellitticitá. Per vedere come la matrice diventa per certi semplici stati di polarizzazione, ricordiamo che

per polarizzazione rettilinea  $\chi = 0$ , per polarizzazione polarizzata circolarmente destra  $\chi = -\pi/4$ , e per un'onda polarizzata circolarmente sinistra  $\chi = \pi/4$ . quindi dall'espressione (28.5.20) troviamo che:

$$\vec{J} = \frac{s_0}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & 1 - \cos 2\psi \end{pmatrix} \quad (28.5.21)$$

é la matrice coerenza di un'onda polarizzata linearmente il cui campo elettrico forma un angolo  $\psi$  con l'asse  $x$ ;

$$\vec{J} = \frac{s_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (28.5.22)$$

é la matrice coerenza per un'onda polarizzata circolarmente destra; e

$$\vec{J} = \frac{s_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad (28.5.23)$$

é la matrice coerenza per un'onda polarizzata circolarmente sinistra.

Segue dalle relazioni (28.5.8) e (28.5.9) che la matrice coerenza può essere sviluppata in termini di parametri di Stokes e di certe matrici elementari che in meccanica ondulatoria sono chiamate matrici di spin di Pauli. Cioé:

$$\vec{J} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^3 s_p \sigma_p \quad (28.5.24)$$

dove  $s_p$  ( $p=0, 1, 2, 3$ ) sono i parametri di Stokes,  $\sigma_0$  é la matrice unità:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (28.5.25)$$

e  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sono le matrici di Spin di Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad (28.5.26)$$

Dall'equazione (28.5.19) noi vediamo che  $\sigma_0$  rappresenta un'onda non polarizzata. Ulteriormente, usando le scomposizioni:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (28.5.27)$$



e ricordando gli stati di polarizzazione che le matrici (28.5.21), (28.5.22) e (28.5.23) esprimono, vediamo che  $\sigma_1$  caratterizza l'eccesso di un'onda linearmente polarizzata formante un angolo  $\psi = 0$  su un'onda polarizzata linearmente formante un angolo  $\psi = \pi/2$ ;  $\sigma_2$  caratterizza l'eccesso di un'onda linearmente polarizzata formante un angolo  $\psi = \pi/4$  su un'onda polarizzata linearmente formante un angolo  $\psi = 3\pi/4$ ; e  $\sigma_3$  caratterizza l'eccesso di un'onda polarizzata circolarmente sinistra su un'onda polarizzata circolarmente destra. Se noi decomponiamo l'onda in una parte non polarizzata ed in una parte ellitticamente polarizzata, allora il rapporto dell'intensità della parte polarizzata all'intensità dell'onda originale é **il grado di polarizzazione  $m$  dell'onda**.

La quantità;

$$\text{Tr}\vec{J} = J_{xx} + J_{yy} \quad (28.5.28)$$

é la traccia della matrice e rappresenta l'intensità dell'onda originale. Il grado di polarizzazione é dato dall'espressione:

$$m = \sqrt{1 - 4 \det \vec{J} / (\text{Tr}\vec{J})^2} \quad (28.5.29)$$

che può essere derivato dalle equazioni (63), (28.5.8) e (28.5.9). Poiché questa espressione implica solo gli invarianti rotazionali  $\det \vec{J}$  e  $\text{Tr}\vec{J}$ , il grado di polarizzazione non varia con la rotazione degli assi coordinati. Dalle equazioni (63), (28.5.8) e (28.5.9) segue che l'orientazione dell'ellisse di polarizzazione della parte polarizzata dell'onda é data da:

$$\tan 2\psi = \frac{J_{xy} + J_{yz}}{J_{xy} - J_{yz}} \quad (28.5.30)$$

e dalle equazioni (64), (28.5.8) e (28.5.9) che la sua ellitticità é data da:

$$\sin 2\chi = i \frac{J_{yx} - J_{xy}}{\sqrt{(\text{Tr}\vec{J})^2 - 4 \det \vec{J}}} \quad (28.5.31)$$

Sotto rotazione  $\chi$  non varia perché il denominatore dell'equazione (28.5.31) é un invariante rotazionale, come il numeratore  $i(J_{yx} - J_{xy})$ . Tuttavia,  $\psi$  varia sotto rotazione, come ci si poteva aspettare. Cosí noi vediamo che  $m$  e  $\chi$  sono indipendenti dalla scelta delle orientazioni degli assi coordinati, mentre  $\psi$  non lo é.

Le quantità  $\text{Tr}\vec{J}$  e  $\det \vec{J}$  non variano quando la matrice coerenza é trasposta; d'altro lato, la quantità  $J_{yx} - J_{xy}$  semplicemente cambia di segno. Quindi dalla equazione (28.5.31) vediamo che  $\chi$  semplicemente cambia di segno quando la matrice coerenza é trasposta. Poiché il segno di  $\chi$  determina il senso della polarizzazione, questo significa che se una matrice coerenza descrive un'onda con un certo senso di polarizzazione allora la matrice trasposta descrive un'onda viaggiante nella stessa direzione ma con opposto senso di polarizzazione; o se la matrice coerenza descrive un'onda viaggiante in una certa direzione, la stessa matrice descrive anche un'onda viaggiante nella direzione opposta con polarizzazione opposta.

### 28.6 - Ricezione di onde parzialmente polarizzate

In questo paragrafo calcoleremo quanta potenza una data antenna può estrarre da un'onda policromatica incidente. Noi procederemo nei calcoli richiamando i risultati del caso convenzionale, dove l'onda incidente è monocromatica e poi generalizzando questi risultati al caso in cui l'onda incidente è policromatica. Questo metodo di analizzare il problema, che usa la teoria monocromatica delle antenne come punto di partenza, appare essere la più trattabile, perché essa ha il vantaggio del fatto che le proprietà riceventi di un'antenna sono più convenientemente espresse in termini del suo comportamento monocromatico come un trasmettitore.

Quindi, poniamo la nostra attenzione alla teoria monocromatica convenzionale delle antenne riceventi. Secondo questa teoria un'antenna ha due circuiti terminali e rispetto a questi terminali il suo comportamento è il seguente: quando l'antenna è alimentata da una tensione monocromatica applicata ai suoi terminali e nessuna radiazione è incidente, la sorgente 'vede' un'impedenza, l'impedenza d'ingresso  $Z_i$  dell'antenna; d'altro canto quando un'onda monocromatica della stessa frequenza è incidente sull'antenna ed i terminali sono circuiti aperti, una tensione appare attraverso i terminali, la tensione a circuito aperto  $V_0$ . Allora, in accordo con il teorema di Thevenin della teoria dei circuiti, quando l'antenna opera come antenna ricevente avente un'impedenza di carico  $Z_l$  connessa ai suoi terminali, il circuito equivalente dell'antenna consiste della tensione  $V_0$  in serie in serie con  $Z_i$  e  $Z_l$ . Da questo circuito equivalente è chiaro che la potenza assorbita dal carico è massima quando  $Z_i$  e  $Z_l$  sono adattate in modo coniugato, ossia  $Z_i = Z_l^*$ . Sotto questa condizione di ottimo trasferimento di potenza, la potenza generata da  $V_0$  è divisa egualmente fra la potenza assorbita da  $Z_i$  e la potenza assorbita da  $Z_l$ . Fisicamente, la potenza assorbita da  $Z_i$  consiste della porzione di potenza incidente (reversibile) che è portata via dall'antenna per scattering o reirradiazione e della potenza (irreversibile) che si trasforma in perdite ohmiche e quindi in calore riscaldando la struttura dell'antenna. Nell'ipotesi che l'antenna adattata è priva di perdite ohmiche, una metà della potenza incidente applicata è scatterata nello spazio e l'altra metà è assorbita dal carico.

La potenza che un'onda monocromatica incidente consegna al carico adattato (conjugate - matched) di un'antenna ricevente è correlata al comportamento dell'antenna come trasmittente. Supponiamo che l'antenna in questione sia alimentata come un trasmettitore da una tensione monocromatica applicata ai suoi terminali. Supponiamo anche che l'antenna è posta all'origine di un sistema di coordinate sferiche  $(r, \theta, \phi)$ . Allora se un vettore elettrico (fasore) del campo radiato dall'antenna nella far zone è  $\vec{E}^{rad}$ , la componente radiale del vettore di Poynting di questo campo è:

$$S^{rad}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \vec{E}^{rad} \cdot \vec{E}^{*rad} \quad (28.6.1)$$

Il vettore polarizzazione del campo è:

$$\vec{P}^{rad}(\theta, \phi) = \frac{\vec{E}^{rad}}{\sqrt{\vec{E}^{rad} \cdot \vec{E}^{*rad}}} \quad (28.6.2)$$

e la funzione guadagno é:

$$g(\theta, \phi) = \frac{4\pi r^2 S^{rad}(r, \theta, \phi)}{\int_0^{4\pi} S^{rad}(r, \theta, \phi) r^2 d\Omega} \quad (28.6.3)$$

essendo  $d\omega = \sin\theta d\theta d\phi$  l'elemento di angolo solido. Alternativamente, supponiamo, ora, che l'antenna opera come antenna ricevente con un carico conjugate - matched posto ai suoi terminali, e che un'onda monocromatica é incidente su di essa da una direzione  $\theta = \theta_0$ ,  $\phi = \phi_0$ . Se il vettore elettrico dell'onda incidente é  $\vec{E}^{inc}$ , la componente radiale del vettore di Poynting dell'onda incidente é:

$$S^{inc}(\theta_0, \phi_0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \vec{E}^{inc} \cdot \vec{E}^{*inc} \quad (28.6.4)$$

ed il vettore polarizzazione del campo é:

$$\vec{P}^{inc}(\theta_0, \phi_0) = \frac{\vec{E}^{inc}}{\sqrt{\vec{E}^{inc} \cdot \vec{E}^{*inc}}} \quad (28.6.5)$$

Allora in accordo con il teorema di reciprocità, la potenza assorbita dal carico é data dalla relazione:

$$P_{abs} = \frac{\lambda^2}{4\pi} g(\theta_0, \phi_0) S^{inc}(\theta_0, \phi_0) \left| \vec{P}^{rad}(\theta_0, \phi_0) \cdot \vec{P}^{inc}(\theta_0, \phi_0) \right|^2 \quad (28.6.6)$$

dove le quantità  $g(\theta, \phi)$  e  $\vec{P}^{rad}(\theta, \phi)$  descrivono il comportamento dell'antenna in trasmissione e le quantità  $S^{inc}(\theta, \phi)$  e  $\vec{P}^{inc}(\theta, \phi)$  l'onda incidente in ricezione.

Il fattore di perdita di polarizzazione.

$$K(\theta, \phi) = \vec{P}^{rad}(\theta, \phi) \cdot \vec{P}^{inc}(\theta, \phi) \quad (28.6.7)$$

che appare nell'equazione (28.6.6) può assumere tutti i valori  $0 \leq K \leq 1$ , a seconda di quanto precisa la polarizzazione dell'onda irradiata in una direzione  $(\theta, \phi)$  é adattata alla polarizzazione dell'onda incidente che arriva sull'antenna dalla stessa direzione. Quando:

$$\vec{P}^{rad}(\theta, \phi) = \vec{P}^{*inc}(\theta, \phi) \quad (28.6.8)$$

l'onda irradiata e l'onda incidente sono completamente adattate e  $K = 1$ . Se il vettore polarizzazione del campo dell'onda incidente é conjugate - matched in questo senso al vettore polarizzazione del campo dell'onda irradiata, la potenza assorbita dal carico conjugate - matched é massima e, in accordo con l'equazione (28.6.6) ha il valore:

$$(P_{abs})_{max} = \frac{\lambda^2}{4\pi} g(\theta, \phi) S^{inc}(\theta, \phi) \quad (28.6.9)$$

Per definizione il rapporto  $(P_{abs})_{max}/S^{inc}(\theta, \phi)$  é l'area efficace dell'antenna ricevente  $A(\theta, \phi)$ , e conseguentemente l'area efficace dell'antenna in ricezione é proporzionale alla funzione guadagno dell'antenna in trasmissione, cioè:

$$A(\theta, \phi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} g(\theta, \phi) \quad (28.6.10)$$

Con l'aiuto di questo risultato e dalla definizione (28.6.7) in forma alternativa si ha:

$$P_{abs} = A(\theta, \phi) S^{inc}(\theta, \phi) K(\theta, \phi) \quad (28.6.11)$$

che esplicitamente mostra la dipendenza della potenza assorbita dall'area efficace della antenna e dal fattore di perdita della polarizzazione.

Per generalizzare la discussione al caso in cui l'onda incidente é parzialmente polarizzata e policromatica, scriviamo l'equazione (28.6.11) nella forma equivalente:

$$P_{abs} = A(\theta, \phi) S^{inc} \text{Tr} \left( \vec{P}^{rad} \vec{P}^{*rad} \right) \cdot \left( \widetilde{\vec{P}^{inc} \vec{P}^{*inc}} \right) \quad (28.6.12)$$

dove  $\vec{P}^{rad} \vec{P}^{*rad}$  é la diade associata all'onda radiata in una direzione  $(\theta, \phi)$ , e  $\widetilde{\vec{P}^{inc} \vec{P}^{*inc}}$  denota la trasposta della diade  $\vec{P}^{inc} \vec{P}^{*inc}$  associata con l'onda incidente dalla stessa direzione  $(\theta, \phi)$ . Tuttavia possiamo scrivere l'equazione (28.6.12) come:

$$P_{abs} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} A(\theta, \phi) \text{Tr} \left( \vec{P}^{rad} \vec{P}^{*rad} \right) \cdot \left( \widetilde{\vec{E}^{inc} \vec{E}^{*inc}} \right) \quad (28.6.13)$$

Ora se accade che l'onda incidente é un'onda policromatica e se sull'intero spettro dell'onda l'antenna é conjugate - matched al carico, allora l'equazione (28.6.13) rimane valida per ciascuna frequenza dello spettro. Assumendo che l'antenna ed il carico sono cosí adattate, si puó ottenere la potenza totale assorbita integrando l'equazione (28.6.13) su tutte le frequenze  $\omega$ , come spiegato nel paragrafo 28.2, mediando rispetto al tempo. Tale integrazione richiederebbe la conoscenza della dipendenza dalla frequenza di  $\vec{P}^{rad}$  e  $A$ . Tuttavia, assumeremo che  $\vec{P}^{rad}$ , e quindi  $A$ , sia indipendente dalla frequenza sullo spettro dell'onda policromatica e otterremo cosí la seguente espressione per la potenza totale assorbita.

$$P_{abs} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} A(\theta, \phi) \text{Tr} \left( \vec{P}^{rad} \vec{P}^{*rad} \right) \cdot \left( \langle \widetilde{\vec{E}^{inc} \vec{E}^{*inc}} \rangle \right) \quad (28.6.14)$$

Consideriamo ora il caso in cui l'onda policromatica é di banda stretta ed ha la forma:

$$\vec{E}^{inc} = [\hat{e}_\theta E_\theta(t) + \hat{e}_\phi E_\phi(t)] e^{-ikr} e^{-i\omega t} \quad (28.6.15)$$

Qui le componenti complesse  $E_\theta(t)$  e  $E_\phi(t)$  sono funzioni lentamente variabili del tempo,  $\omega$  é una frequenza media, e  $k = \omega/c$ . Per tale onda incidente la matrice delle componenti del valore della diade  $\widetilde{\vec{E}^{inc} \vec{E}^{*inc}}$  é:

$$(I_{ij}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \begin{pmatrix} \langle E_\theta E_\theta^* \rangle & \langle E_\theta E_\phi^* \rangle \\ \langle E_\phi E_\theta^* \rangle & \langle E_\phi E_\phi^* \rangle \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2; j = 1, 2) \quad (28.6.16)$$

La matrice coerenza dell'onda incidente nell'equazione (28.6.14) é la trasposta  $(\widetilde{I}_{ij})$  di  $(I_{ij})$ . La matrice delle componenti della diade  $A(\vec{P}^{rad} \vec{P}^{*rad})$ , cioè:

$$(A_{ij}) = A(\theta, \phi) \begin{pmatrix} \langle P_{\theta}^{rad} P_{\theta}^{*rad} \rangle & \langle P_{\theta}^{rad} P_{\phi}^{*rad} \rangle \\ \langle P_{\phi}^{rad} P_{\theta}^{*rad} \rangle & \langle P_{\phi}^{rad} P_{\phi}^{*rad} \rangle \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2; j = 1, 2) \quad (28.6.17)$$

é la matrice dell'area efficace dell'antenna. In termini della matrice  $(A_{ij})$  dell'area efficace dell'antenna ricevente e della matrice di coerenza  $(\widetilde{I}_{ij})$  dell'onda incidente, la potenza assorbita dal carico conjugate - matched dell'antenna ricevente é data dalla relazione compatta:

$$P_{abs} = \text{Tr} (A_{ij}) (\widetilde{I}_{ij}) \quad (i = 1, 2; j = 1, 2) \quad (28.6.18)$$

che segue direttamente dall'equazione (28.6.13) e dalle definizioni (28.6.16), (28.6.17).

Noi possiamo divider el'onda incidente in due parti mutuamente indipendenti, cioè, una parte non polarizzata ed una parte polarizzata. Facciamo questo dividendo  $(I_{ij})$  in:

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \quad (28.6.19)$$

e notando che la prima matrice sul lato destro rappresenta la parte non polarizzata e la seconda matrice sul lato destro rappresenta la parte polarizzata. Prendendo la traccia di questa equazione matriciale, otteniamo l'espressione:

$$I_{11} + I_{22} = 2\alpha + \beta(q_{11} + q_{22}) \quad (28.6.20)$$

il cui primo membro rappresenta il valore medio  $\langle S^{inc} \rangle$  della densità della potenza incidente, ed il secondo membro rappresenta la densità di potenza  $2\alpha$  della sua parte non polarizzata piú la densità di potenza  $\beta(q_{11} + q_{22})$  della sua parte polarizzata. Per definizione il grado di polarizzazione  $m$  é il rapporto della densità di potenza della parte polarizzata alla densità totale di potenza; quindi in termini di  $m$  l'equazione (28.6.20) può essere scritta come:

$$I_{11} + I_{22} = 2\alpha + m(I_{11} + I_{22}) \quad (28.6.21)$$

Da questa segue che:

$$\alpha = \frac{1}{2}(1 - m)(I_{11} + I_{22}) = \frac{1}{2}(1 - m) \langle S^{inc} \rangle \quad (28.6.22)$$

Poiché siamo liberi di scegliere  $\beta$ , facciamo la scelta:

$$\beta = m \langle S^{inc} \rangle \quad (28.6.23)$$

sulla base di convenienza. In vista delle espressioni (28.6.22) e (28.6.23) vediamo che l'equazione (28.6.19) può essere scritto in termini della densità di potenza mediato nel tempo  $\langle S^{inc} \rangle$  dell'onda incidente ed il suo grado di polarizzazione:

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-m) \langle S^{inc} \rangle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + m \langle S^{inc} \rangle \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \quad (28.6.24)$$

Come conseguenza della scelta (28.6.23) noi abbiamo:

$$q_{11} + q_{22} = 1 \quad (28.6.25)$$

e poiché  $(q_{ij})$  rappresenta un'onda completamente polarizzata, noi abbiamo:

$$q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21} = 0 \quad (28.6.26)$$

In piú, in virtú del fatto che  $(I_{ij})$  é hermitiana, si ha:

$$q_{12} = q_{21}^* \quad (28.6.27)$$

Dalle condizioni (27.6.25), (27.6.26), e (27.6.27) vediamo che le componenti di  $q_{ij}$  possono essere scritte nella seguente maniera in termini di angolo di orientazione  $\psi$  e di ellitticitá  $\chi$  dell'ellisse di polarizzazione della parte polarizzata dell'onda incidente che arriva sull'antenna da una direzione  $(\theta, \phi)$ :

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos 2\chi \cos 2\psi & \cos 2\chi \sin 2\psi + i \sin 2\chi \\ \cos 2\chi \sin 2\psi - i \sin 2\chi & 1 - \cos 2\chi \cos 2\psi \end{pmatrix} \quad (28.6.28)$$

Analogamente, poiché  $(A_{ij})$  rappresenta un'onda polarizzata completamente, cioè, l'onda che l'antenna irradierebbe se fosse usata come trasmettitore, noi possiamo scrivere essa in termini dell'angolo di orientazione  $\psi'$  e angolo di ellitticitá  $\chi'$  dell'onda irradiata in una direzione  $(\theta, \phi)$ :

$$(A_{ij}) = \frac{1}{2} A(\theta, \phi) \begin{pmatrix} 1 + \cos 2\chi' \cos 2\psi' & \cos 2\chi' \sin 2\psi' + i \sin 2\chi' \\ \cos 2\chi' \sin 2\psi' - i \sin 2\chi' & 1 - \cos 2\chi' \cos 2\psi' \end{pmatrix} \quad (28.6.29)$$

Sostituendo l'equazione (28.6.24) nella (28.6.18), si ha:

$$\begin{aligned} P_{abs} = Tr(A_{ij})(\tilde{I}_{ij}) &= \frac{1}{2}(1-m)(A_{11} + A_{22}) \langle S^{inc} \rangle + \\ &+ m(A_{11}q_{11} + A_{12}q_{12} + A_{21}q_{21} + A_{22}q_{22}) \langle S^{inc} \rangle \end{aligned} \quad (27.6.30)$$

e, quindi, usando le equazioni (28.6.28) e (28.6.29), troviamo che la potenza assorbita mediata in un periodo dal carico conjugate-matched é dato da:

$$P_{abs} = \frac{1}{2}(1-m)A(\theta, \phi) \langle S^{inc}(\theta, \phi) \rangle + mA(\theta, \phi) \langle S^{inc}(\theta, \phi) \rangle \cos^2 \frac{\gamma}{2} \quad (28.6.31)$$

dove:

$$\cos \gamma = \cos 2\chi' \cos 2\chi \cos(2\psi' - 2\psi) - \sin 2\chi' \sin 2\chi \quad (28.6.32)$$

sulla sfera di Poincaré,  $\gamma$  é l'angolo fra il punto  $(2\psi, -2\chi)$  descrivente l'ellisse di polarizzazione dell'onda in cidente e il punto  $(2\psi', 2\chi')$  descrivente l'ellisse di polarizzazione dell'onda irradiata. Quando  $\psi' = \psi$  e  $\chi' = -\chi$ , cioè, i due punti coincidono e  $\gamma = 0$ , le polarizzazioni delle onde irradiate e incidenti sono conjugate-matched e non vi sono perdite di polarizzazione. Questo, naturalmente, significa che le due ellissi di polarizzazione hanno la stessa orientazione nello spazio e lo stesso rapporto assiale. Significa anche che il senso di rotazione dell'onda incidente é lo stesso del senso di rotazione dell'onda irradiata se il primo é visto dall'infinito e l'ultimo dall'antenna. Se vista dallo stesso posizione fissa, i sensi di rotazione apparirá essere opposto.

Il primo termine al secondo membro dell'equazione (28.6.31) rappresenta il contributo a  $P_{abs}$  della parte non polarizzata dell'onda incidente, mentre il secondo termine rappresenta il contributo della parte polarizzata. Se la polarizzazione dell'antenna in una direzione  $(\theta\phi)$  é matched-conjugate all'onda incidente proveniente dalla stessa direzione, allora  $\gamma = 0$  e la potenza assorbita nella resistenza di carico conjugate matched é un massimo, ossia:

$$\langle P_{abs} \rangle_{max} = \frac{1}{2}(1 + m)A(\theta, \phi)\langle S^{inc}(\theta, \phi) \rangle \quad (28.6.33)$$

Inoltre, se l'onda incidente é completamente polarizzata, abbiamo  $m = 1$  e quindi:

$$\langle P_{abs} \rangle_{max} = A(\theta, \phi)\langle S^{inc}(\theta, \phi) \rangle \quad (28.6.34)$$

D'altro canto, se l'onda incidente é completamente non polarizzato, abbiamo  $m = 0$  e quindi:

$$P_{abs} = A(\theta, \phi)\langle S^{inc}(\theta, \phi) \rangle \quad (28.6.35)$$

In questo caso non vi é la questione dell'adattamento.

### 28.7 - Temperatura di antenna ed equazione integrale per la temperatura di brillantezza

Dalla discussione fatta nei paragrafi precedenti sappiamo che se un'onda piana policromatica non polarizzata é incidente da una direzione  $\theta, \phi$  su un'antenna ricevente senza perdite posta nell'origine di un sistema di coordinate sferiche  $(r, \theta, \phi)$ , la potenza assorbita dal carico adattato (il ricevitore) é data da:

$$P_{abs} = \frac{1}{2} A(\theta, \phi) S^{inc}(\theta, \phi) \Delta\omega \quad (28.7.1)$$

dove  $S^{inc}(\theta, \phi)$  é la densità spettrale del flusso dell'onda incidente,  $\Delta\omega$  la larghezza di banda del ricevitore, e  $A$  l'area efficace dell'antenna. La validità di questa espressione é riposta sulla supposizione che  $A$  e  $S^{inc}(\theta, \phi)$  sono indipendenti dalla frequenza all'interno della relativamente stretta larghezza di banda  $\Delta\omega$ . Per trovare la potenza assorbita nel caso in cui la sorgente é distribuita nel cielo, notiamo che il contributo elementare alla potenza assorbita della radiazione incidente dentro un cono di angolo solido  $d\Omega$  e dentro una larghezza di banda  $\Delta\omega$  puó essere espressa come:

$$dP_{abs} = \frac{1}{2} A(\theta, \phi) \Delta\omega \quad (28.7.2)$$

dove in virtú dell'equazione (28.3.23),  $dS^{inc}(\theta, \phi)$  é correlata alla temperatura di brillantezza  $T_b$  del cielo dalla:

$$dS^{inc}(\theta, \phi) = \frac{2k}{\lambda^2} T_b(\theta, \phi) d\Omega \quad (28.7.3)$$

Il suffisso  $\omega$  é stato asportato da  $T_b$  per semplicitá. Allora noi assumiamo che la radiazione incidente sull'antenna da qualunque direzione é incoerente rispetto alla radiazione da altre direzioni. In virtú di questa ipotesi, la potenza totale assorbita é la somma delle potenze elementari consegnate all'antenna dai vari raggi incidenti. In altre parole, se i raggi incidenti sono fisicamente indipendenti, la potenza totale assorbita somigliante a rumore puó essere calcolata integrando l'espressione (28.7.2) sull'angolo solido sotteso dalla sorgente distribuita:

$$P_{abs} = k\Delta\omega \left[ \frac{1}{\lambda^2} \int A(\theta, \phi) T_b(\theta, \phi) d\Omega \right] \quad (28.7.4)$$

La quantità fra parentesi quadre ha le dimensioni di temperatura ed é conosciuta come temperatura d'antenna. Essa fornisce una conveniente misura per la potenza simile a rumore rivelata dall'antenna in una larghezza di banda  $\Delta\omega$ .

Cosí la temperatura d'antenna  $T_a$  é definita come:

$$T_a = \frac{1}{\lambda^2} \int A(\theta, \phi) T_b(\theta, \phi) d\Omega d\omega \quad (28.7.5)$$

o, in termini della funzione guadagno  $g(\theta, \phi)$ , da:

$$T_a = \frac{1}{4\pi} \int g(\theta, \phi) T_b(\theta, \phi) d\Omega d\omega \quad (28.7.6)$$



In accordo con questa definizione, una possibile interpretazione di  $T_a$  é la seguente: se l'antenna é completamente chiusa da una superficie che irradia come un corpo nero alla temperatura  $T_a$ , allora l'antenna assorbirá nella sua resistenza di carico la potenza  $kT_a\Delta\omega$ . Alternativamente,  $T_a$  puó essere riguardata come la temperatura alla quale l'effettiva resistenza d'ingresso del ricevitore (che, se adattato, eguaglia la resistenza di radiazione dell'antenna) deve essere portata in modo tale che la potenza di rumore, prodotta dal moto termico degli elettroni e consegnata al ricevitore attraverso una linea senza perdite, eguaglierá  $P_{abs}$  in accordo con la relazione:

$$P_{abs} = kT_a\Delta\omega \quad (28.7.7)$$

La temperatura d'antenna come definita dall'equazione (28.7.4) é una misura della radiazione incidente soltanto; essa non é una misura della temperatura del materiale nella struttura dell'antenna.

Finora noi abbiamo tacitamente assunto che la direzione del lobo principale della antenna ricevente é fissato e giace lungo l'asse  $\theta = 0$  del sistema di coordinate sferiche. Tuttavia, questa é una restrizione non necessaria e puó essere rimossa facilmente. Per esempio, sia  $\hat{n}$  un vettore unitario diretto nella direzione del lobo principale e  $\hat{n}'$  un vettore unitario diretto nella direzione dell'angolo solido  $d\Omega(\hat{n}')$  l'equazione (28.7.6) puó essere formalmente scritta nella seguente forma piú generale:

$$T_a(\hat{n}) = \frac{1}{4\pi} \int g(\hat{n}, \hat{n}') T_b(\hat{n}') d\Omega(\hat{n}') \quad (28.7.8)$$

Questa é l'equazione integrale per la temperatura di brillantezza  $T_b(\hat{n}')$ . Cambiando l'orientazione di  $\hat{n}$  dell'antenna in modo tale che il suo pattern di radiazione effettivamente fa la scansione del cielo, possiamo misurare  $T_a$  come funzione di  $\hat{n}$ . Inoltre, misurando il pattern di radiazione o prevedendo esso teoricamente, noi possiamo dedurre la funzione guadagno. Di conseguenza, noi possiamo riguardare  $T_a(\hat{n})$  e  $g(\hat{n}, \hat{n}')$  come quantità conosciute, e trovare la temperatura di brillantezza  $T_b(\hat{n}')$  del cielo in termini di  $T_a(\hat{n})$  e  $g(\hat{n}, \hat{n}')$  risolvendo l'equazione integrale. Un modo pratico per risolvere l'equazione integrale é quello delle approssimazioni successive. Per mostrare lo schema del metodo, scriviamo l'equazione (28.7.8) in forma operatoriale:

$$T_a(\hat{n}) = K(\hat{n}, \hat{n}') T_b(\hat{n}') \quad (28.7.9)$$

dove  $K(\hat{n}, \hat{n}')$  é l'operatore integrale definito da:

$$K(\hat{n}, \hat{n}') f(\hat{n}') \equiv \frac{1}{4\pi} \int g(\hat{n}, \hat{n}') f(\hat{n}') d\Omega(\hat{n}') \quad (28.7.10)$$

essendo  $f(\hat{n}')$  una tipica funzione di  $\hat{n}'$ . Omettendo, per semplicitá gli argomenti  $\hat{n}$  e  $\hat{n}'$ , l'equazione (28.7.8) in forma operatoriale si scrive:

$$T_a = K T_b \quad (28.7.11)$$

o, equivalentemente:

$$T_b = T_a + (1 - K)T_b \quad (28.7.12)$$

Supponiamo che come approssimazione di ordine zero a  $T_b$  scegliamo la funzione conosciuta  $T_a$  ed allora prendiamo:

$$T_1 = T_a + (1 - K)T_a \quad (28.7.13)$$

come approssimazione di primo ordine a  $T_b$ . Applicando la stessa procedura a  $T_1$ , noi otteniamo l'approssimazione di secondo ordine a  $T_b$ :

$$T_2 = T_a + (1 - K)T_1 \quad (28.7.14)$$

Chiaramente per l'approssimazione ennesima a  $T_b$  noi abbiamo:

$$T_n = T_a + (1 - K)T_{n-1} \quad (28.7.15)$$

o, in termini di  $T_a$ :

$$T_n = T_a + (1 - K)T_a + (1 - K)^2T_a + \dots + (1 - K)^nT_a \quad (28.7.16)$$

## 28.8 - Teoria elementare del radio interferometro a due elementi

Per ottenere alto potere risolvete, si devono usare arrays di antenne aventi patterns riceventi multilobo. L'alto potere risolvete deriva dal fatto che ciascun lobo del pattern multilobo diventa piú stretto e quindi piú risolvete man mano che lo spazio fra antenne adiacenti aumenta.

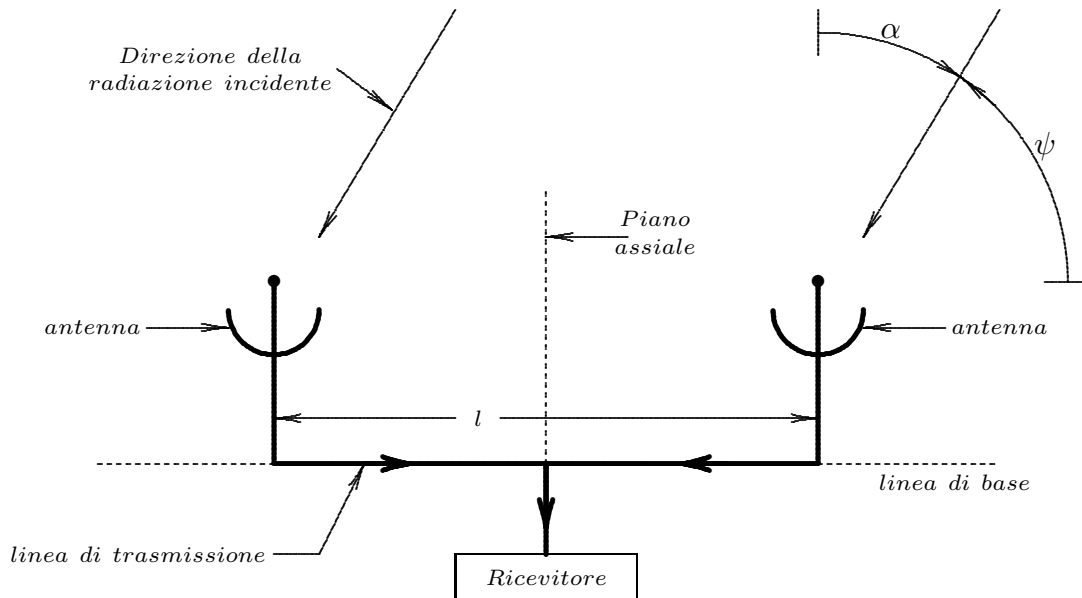


fig.28.8-1

*Interferometro a due elementi. Il ricevitore connesso a due antenne identiche ed ugualmente orientate. La direzione della radiazione incidente forma un angolo  $\psi$  con la linea di base e l'angolo  $\alpha$  con il piano assiale. La distanza fra le antenne  $l$ . Il ricevitore nel centro elettrico della linea di trasmissione.*

Il piú semplice sistema di antenne che mostra un pattern multilobo é il radio interferometro a due elementi, consistente di due identiche antenne ugualmente orientate separate da una distanza  $l$  e connesse con una linea di trasmissione ad un singolo ricevitore sintonizzato. Per trovare il pattern ricevente di tale interferometro, notiamo che dal teorema di reciprocità il pattern di radiazione e quello ricevente devono essere gli stessi ed inoltre il suo pattern di radiazione deve essere il prodotto del pattern di radiazione  $F$  di un'antenna e dell'array factor  $A$  delle due antenne. Cosí segue dal teorema di reciprocità e dei teoremi di moltiplicazione che il pattern ricevente dell'interferometro é  $|FA|$  e che la potenza che arriva al ricevitore é proporzionale a  $|FA|^2$ . In un tipico interferometro a due elementi  $F$  ha un lobo principale ed il fattore  $A$  ha numerosi lobi; questi sono chiamati 'grating lobes'. Conseguentemente, l'array factor  $A$  é responsabile per la struttura multilobo (fringes) del pattern del ricevitore e  $F$  l'involuppo del pattern lentamente variabile.

Poiché noi siamo interessati alle proprietà risolventi dell'interferometro e poiché essi dipendono principalmente da  $A$ , noi possiamo, tenendo conto che la radiazione incide entro la porzione centrale del lobo principale di  $F$ , possiamo porre il fattore  $F$  eguale all'unità e cosí assumere che il pattern del ricevitore dell'interferometro é dato da  $A$

soltanto. di conseguenza, dalle equazioni della teoria delle antenne, il pattern del ricevitore dell'interferometro a due elementi é dato da:

$$|A(\psi)| = 2 \cos \left( \frac{1}{2} kl \cos \psi \right) \quad (28.8.1)$$

dove  $\psi$  é l'angolo fra la direzione dell'onda incidente e la linea di base, cioè la congiungente le due antenne. In termini dell'angolo complementare  $\alpha = \pi/2 - \psi$ , cioè l'angolo che la direzione della sorgente forma con il piano perpendicolare alla linea di base (piano assiale), il pattern di radiazione é:

$$|A(\psi)| = 2 \cos \left( \frac{1}{2} kl \sin \psi \right) \quad (28.8.2)$$

La potenza  $P$  che arriva al ricevitore dell'interferometro é proporzionale a  $|A(\alpha)|^2$  e quindi:

$$P(\alpha) = 2P_0 \cos^2 \left( \frac{1}{2} kl \sin \alpha \right) = P_0 [1 + \cos (kl \sin \alpha)] \quad (28.8.3)$$

dove  $P_0$  denota la potenza che arriva al ricevitore da una singola antenna. A seconda della direzione dell'onda ricevuta la potenza  $P$  oscilla fra i limiti  $0$  e  $2P_0$ . Questo é strettamente vero per piccoli valori di  $\alpha$  soltanto. In effetti, quando  $\alpha$  diventa grande, la potenza che arriva al ricevitore non é piú data dall'espressione (28.8.3) soltanto, ma dal prodotto dell'espressione (28.8.3) e  $|F|^2$ . Il fattore  $|F|^2$  ha l'effetto di smorzare le oscillazioni. I valori nulli del pattern di ricezione si hanno quando:

$$kl \sin \alpha = (2n + 1) \pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (28.8.4)$$

e i massimi quando:

$$kl \sin \alpha = 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (28.8.5)$$

Per piccoli valori di  $\alpha$ , cioè per  $\alpha$  tale che  $\sin \alpha \simeq \alpha$ , la larghezza di ciascun lobo é data dalla semplice relazione:

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi}{kl} = \frac{\lambda}{l} \quad (28.8.6)$$

che mostra che all'aumentare della distanza  $l$  la larghezza di ciascun lobo diminuisce.

L'equazione (28.8.6) mostra che per una distanza fissata la larghezza di ciascun lobo diminuisce quando la lunghezza d'onda alla quale il ricevitore é sintonizzato diminuisce.

Nella derivazione della formula (28.8.5) era tacitamente assunto che la radiazione incidente proviene da una sorgente puntiforme. Noi ora togliamo questa restrizione e consideriamo il caso piú realistico in cui la sorgente abbia estensione angolare. In questo caso la potenza ricevuta é data da:

$$P(\alpha) = \int [1 + \cos (kl \sin \alpha)] f(\alpha - \alpha_0) d\alpha \quad (28.8.7)$$

dove  $f(\alpha - \alpha_0)$  é la distribuzione attraverso la sorgente incoerente e  $\alpha_0$  é l'angolo che la direzione principale della sorgente forma con il piano assiale. Se la larghezza della sorgente

é  $2w$ , i limiti di integrazione sono  $\alpha = \alpha_0 - w$  e  $\alpha = \alpha_0 + w$ . Assumiamo che  $\alpha_0$  e  $2w$  siano piccole, cioè assumiamo che la sorgente sia stretta e vicino al piano assiale. L'espressione (28.8.7) é una generalizzazione dell'espressione (28.8.3) e si riduce ad essa quando  $f(\alpha - \alpha_0)$  é la funzione delta di Dirac  $\delta(\alpha - \alpha_0)$ .

Tuttavia, se  $f(\alpha - \alpha_0)$  ha una forma rettangolare stretta, cioè, se  $f(\alpha - \alpha_0) = \frac{P_0}{2w}$  per  $\alpha_0 - w \leq \alpha \leq \alpha_0 + w$  e  $f(\alpha - \alpha_0) = 0$  per tutti gli altri valori di  $\alpha$ , l'espressione (28.8.7) diventa:

$$P(\alpha_0) = \int (1 + \cos kl\alpha) f(\alpha - \alpha_0) d\alpha = P_0 (1 + V \cos kl\alpha_0) \quad (28.8.8)$$

dove la quantità  $V$  definita da:

$$V = \frac{\sin klw}{klw} \quad (28.8.9)$$

é il 'fattore visibilità', un termine preso in prestito dall'Ottica. Man mano che la distribuzione rettangolare spazzola il cielo,  $\alpha_0$  varia e  $P(\alpha_0)$  oscilla sinusoidalmente fra  $P_0(1 - V)$  e  $P_0(1 + V)$ . Il rapporto fra il valore minimo ed il valore massimo é l'indice di modulazione  $M$  dato da:

$$M = \frac{1 - V}{1 + V} \quad (28.8.9)$$

Da questa noi vediamo se la funzione distribuzione é rettangolare la larghezza della sorgente puó essere determinata misurando  $M$  e allora calcolando  $w$  dalle equazioni (28.8.8) e (28.8.9).

Piú generalmente, se la sorgente é stretta ma altrimenti arbitraria, segue dalla equazione (28.8.4) che per piccoli valori di  $\alpha_0$ , la potenza ricevuta é data da:

$$\begin{aligned} P(\alpha_0) &= \int [1 + \cos(kl \sin \alpha)] f(\alpha - \alpha_0) d\alpha = \int [1 + \cos(kl\alpha)] f(\alpha - \alpha_0) d\alpha = \\ &= \int f(\alpha - \alpha_0) d\alpha + \int \cos(kl\alpha) f(\alpha - \alpha_0) d\alpha \end{aligned} \quad (28.8.10)$$

Il primo termine del secondo membro é  $P_0$ , la potenza che arriva al ricevitore da un'antenna; il secondo termine del secondo membro lo denotiamo  $P_1$ . Conseguentemente, scriviamo:

$$P(\alpha_0) = P_0 + P_1 \quad (28.8.11)$$

dove:

$$P_1 = \int \cos(kl\alpha) f(\alpha - \alpha_0) d\alpha \quad (28.8.12)$$

par Se poniamo  $u = \alpha - \alpha_0$  e notiamo che  $f(u) = 0$  per  $|u| > w$ , allora  $P_1$  puó essere espressa in una forma che esplicitamente mostra la sua ampiezza e fase, ossia:

$$\begin{aligned} P_1 &= \int \cos [kl(u + \alpha_0)] f(u) du = \Re \left( e^{ikl\alpha_0} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iklu} f(u) du = \\ &= \Re \left( e^{ikl\alpha_0} \right) Q(kl) e^{i\phi(kl)} = Q(kl) \cos [kl\alpha_0 + \phi(kl)] \end{aligned} \quad (28.8.13)$$

L'ampiezza  $Q(kl)$  e la fase  $\phi(kl)$  sono definiti da:

$$Q(kl)e^{i\phi(kl)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iklu} f(u) du \quad (28.8.14)$$

La trasformata di Fourier inversa dell'equazione (28.8.14) porta alla relazione:

$$f(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Q(kl) \cos [klu - \phi(kl)] d(kl) \quad (28.8.15)$$

che esprime  $f(u)$  in termini dell'ampiezza e la fase della quantità osservata  $P_1$ , ossia  $Q(kl)$  e  $\phi(kl)$ . La relazione (28.8.15) mostra che è possibile, in principio, trovare la distribuzione misurando l'ampiezza e l'ka fase con differenti linee di base. Tuttavia, la misura della fase presenta difficoltà. Sfortunatamente, non è possibile determinare univocamente la distribuzione da una conoscenza dell'ampiezza soltanto, a meno che qualche informazione è disponibile anticipatamente circa la forma generale della funzione distribuzione.

Come esempio di un interferometro radio a due elementi con una linea di base orizzontale menzioniamo quello di Owens Valley, in California, operato dal California Institute of Technology. Ciascun elemento dell'interferometro è un'antenna a riflettore parabolico orientabile, di 90 piedi di diametro (circa 27 metri), posta al suolo. Esso è usato per la misura dei diametri angolari a lunghezze d'onda decimetriche e centimetriche.

Un interferometro a due elementi avente una linea di base verticale può essere effettuato ponendo un'antenna singola illuminata orizzontalmente su una scogliera di altezza  $l/2$  prospiciente il mare. La superficie del mare agisce come un piano immagine. Così l'antenna elevata e la sua immagine costituisce un interferometro a due elementi. L'antenna elevata è orizzontalmente polarizzata per avvantaggiarsi del fatto che la superficie del mare approssima un riflettore perfetto adatto per polarizzazione orizzontale. L'antenna immagine è fuori fase rispetto all'antenna elevata e quindi la potenza ricevuta da una sorgente puntiforme è data da:

$$P(\alpha) = 2P_0 [1 - \cos(kl \sin \alpha)] \quad (28.8.16)$$

dove  $\alpha$  è l'angolo che la direzione della sorgente forma con il piano assiale, cioè, la superficie del mare, e  $P_0$  è la potenza che l'antenna elevata riceverà se essa non operasse da interferometro. In questo caso gli zeri del pattern del ricevitore sono:

$$kl \sin \alpha = 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (28.8.17)$$

e i massimi quando:

$$kl \sin \alpha = (2n + 1) \pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (28.8.18)$$

Dall'equazione (28.8.16) vediamo che come la sorgente si alza sopra l'orizzonte e taglia attraverso i lobi dell'interferometro, la potenza del ricevitore aumenta da zero e oscilla in modo caratteristico. Allora come la sorgente si alza, la potenza ricevuta gradualmente si riduce a zero, un effetto che sarebbe stato mostrato dall'equazione (28.8.16) dopo essere stato moltiplicato per  $|F|^2$ .

### 28.9 - Interferometria di correlazione

L'interferometro a due elementi discusso nel paragrafo precedente si comporta come se la radiazione incidente fosse monocromatica perché il ricevitore dell'interferometro è sintonizzato in modo preciso e accetta solo una banda molto stretta dello spettro largo della radiazione incidente. Siccome l'energia fuori di questa banda è respinta e così sprecata, la sensibilità dell'interferometro è limitata dalla larghezza di banda del ricevitore. Aumentando la larghezza di banda aumenterebbe la sensibilità ma deteriorerebbe anche il pattern multilobi e quindi diminuirebbe la precisione del sistema. Questo significa che in un interferometro a confronto di fase la larghezza di banda è necessariamente stretta e la sensibilità è limitata dalla larghezza di banda. Oltre a questa limitazione della sensibilità vi è una limitazione pratica sul potere risolvete. Appena le antenne non sono più usate per lo scopo di aumentare il potere risolvete, diventa più difficile confrontare accuratamente le fasi delle uscite dell'antenna. La difficoltà di misurare le fasi di due segnali largamente separati pone una limitazione pratica sulla separazione delle antenne e questo a sua volta pone una limitazione sul potere risolvete.

A causa di queste ed altre limitazioni, l'interferometro a confronto di fase a sue elementi è stato sostituito in certe applicazioni da sistemi più sofisticati. In questo paragrafo discuteremo un tale sistema, cioè l'interferometro di correlazione di Brown e Twiss. Ma prima di fare questo discuteremo il concetto di grado di coerenza su cui esso è basato.

Per misurare il grado di coerenza della radiazione policromatica da una sorgente estesa usiamo due antenne identiche e ugualmente orientate. Queste antenne ricevono la radiazione incidente e conseguentemente sviluppano ai loro rispettivi terminali d'uscita la tensione  $V_1(t)$  e  $V_2(t)$ , che per convenienza matematica sono assunte avere la forma di un segnale analitico. Le tensioni risultanti sono inviate ad un ricevitore la cui uscita è la potenza mediata nel tempo data da:

$$P = \langle [V_1(t) + V_2(t)] [V_1^*(t) + V_2^*(t)] \rangle = \langle V_1(t)V_1^*(t) \rangle + \langle V_2(t)V_2^*(t) \rangle + 2\Re[\langle V_1(t)V_2^*(t) \rangle] \quad (28.9.1)$$

Il primo termine dell'ultimo membro è la potenza d'uscita mediata nel tempo di un'antenna se operasse singolarmente, il secondo termine dell'ultimo membro è la potenza d'uscita mediata nel tempo dell'altra antenna se operasse singolarmente. Quindi, il terzo termine è il solo che coinvolge gli effetti mutui o coerenza mutua della radiazione incidente. Conseguentemente, come misura quantitativa della coerenza mutua della radiazione incidente, scegliamo la quantità complessa  $\gamma$  definita da:

$$\gamma = \frac{\langle V_1(t)V_2^*(t) \rangle}{\sqrt{\langle V_1(t)V_1^*(t) \rangle \langle V_2(t)V_2^*(t) \rangle}} \quad (28.9.2)$$

e denominata **grado di coerenza complesso**. Il modulo  $|\gamma|$  di  $\gamma$  è chiamato **grado di coerenza**. Dall'ineguaglianza di Schwarz può essere mostrato che:

$$|\gamma| \leq 1 \quad (28.9.3)$$

quando  $|\gamma| = 0$  la radiazione incidente é incoerente; quando  $|\gamma| = 1$  la radiazione incidente é coerente; quando  $0 < |\gamma| < 1$  la radiazione incidente é parzialmente coerente.

In termini di  $|\gamma|$  l'espressione (28.9.1) per la potenza d'uscita del ricevitore si può scrivere:

$$P = \langle V_1(t)V_1^*(t) \rangle + \langle V_2(t)V_2^*(t) \rangle + \sqrt{\langle V_1(t)V_1^*(t) \rangle \langle V_2(t)V_2^*(t) \rangle} |\gamma| \cos(\arg \gamma) \quad (28.9.4)$$

dove  $\arg \gamma$  é la fase di  $\gamma$ , cioè  $\gamma = |\gamma| \exp(i \arg \gamma)$ .

Per semplicitá assumiamo che la potenza d'uscita delle antenne quando operano separatamente sono eguali; cioè, noi assumiamo che:

$$\langle V_1(t)V_1^*(t) \rangle = \langle V_2(t)V_2^*(t) \rangle = P_0 \quad (28.9.5)$$

Con l'aiuto di questa ipotesi l'espressione (28.9.4) si riduce alla relazione:

$$P = 2P_0 [1 + |\gamma| \cos(\arg \gamma)] \quad (28.9.6)$$

che chiaramente indica che il grado di coerenza  $|\gamma|$  della radiazione incidente é misurata dalla visibilitá. L'espressione (28.9.6) fornisce una definizione operativa del grado di coerenza.

Per mostrare quanto  $\gamma$  é correlata ai dati che specificano la sorgente e alla distanza fra le antenne procediamo come segue. Scegliamo un sistema di coordinate cartesiane con l'origine  $O$  in modo che le antenne siano posizionate lungo l'asse  $x$  nei punti  $x = \mp l/2$ . Per semplicitá la sorgente é assunta essere una sorgente lineare giacente lungo l'asse  $\xi$  di un sistema di coordinate cartesiane parallele con origine  $O'$ . La distanza fra  $O$  e  $O'$  é  $R$  (vedi fig. 28.9-1). Dividiamo la sorgente in elementi di lunghezze infinitesime  $d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3, \dots$ , e denotiamo le rispettive tensioni d'uscita delle antenne dovuta alla radiazione dall'elemento emmesimo dai segnali analitici  $V_{m_1}(t), V_{m_2}(t)$ . Le tensioni d'uscita delle antenne rispettive dovuta alla radiazione dall'intera sorgente sono date dalle somme:

$$V_1(t) = \sum_m V_{m_1}(t) \quad V_2(t) = \sum_m V_{m_2}(t) \quad (28.9.7)$$

Assumiamo che ciascun elemento della sorgente é un radiatore isotropo. Conseguentemente la radiazione dall'emmesimo elemento produce la tensione:

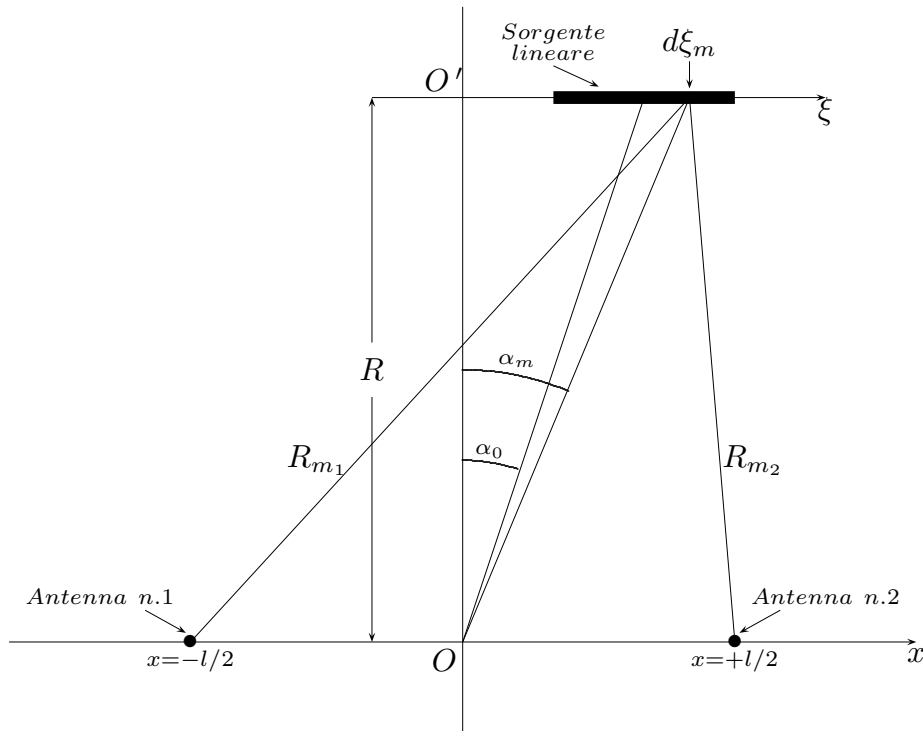
$$V_{m_1}(t) = A_m \left( t - \frac{R_{m_1}}{c} \right) \frac{e^{-\left( t - \frac{R_{m_1}}{c} \right)}}{R_{m_1}} \quad (28.9.8)$$

in un'antenna e la tensione:

$$V_{m_2}(t) = A_m \left( t - \frac{R_{m_2}}{c} \right) \frac{e^{-\left( t - \frac{R_{m_2}}{c} \right)}}{R_{m_2}} \quad (28.9.9)$$



nell'altra. Qui  $R_{m_1}$  e  $R_{m_2}$  sono le distanze dall'ennesimo elemento alle antenne,  $c$  é la velocità della luce nel vuoto,  $\omega$  é la frequenza media della radiazione incidente, e  $A_m$  la funzione ampiezza complessa.



**Dispositivo per la misura del grado di coerenza.** Due antenne identiche ed egualmente orientate sono esposte a radiazione policromatica emessa da sorgente lineare.  $R$  é la distanza da  $O$  ad  $O'$ . L'angolo formato fra la linea che congiunge  $O$  con il centro della sorgente lineare e la linea assiale  $OO'$  é  $\alpha_0$ . L'angolo formato fra la linea che congiunge  $O$  con l'elemento  $\xi_m$  e la linea  $OO'$  é  $\alpha_m$ . Le distanze dell'elemento  $d\xi_m$  dalle antenne sono  $R_{m_1}$  ed  $R_{m_2}$ .

fig.28.9-1

Segue dall'espressione (28.9.7) che:

$$\langle V_1(t)V_1^*(t) \rangle = \sum_m \langle V_{m_1}(t)V_{m_1}^*(t) \rangle + \sum_m \sum_{m \neq n} \langle V_{m_1}(t)V_{n_1}^*(t) \rangle \quad (28.9.10)$$

Inoltre i radiatori isotropi che lasciano la sorgente sono assunti essere statisticamente indipendenti e avere un valore medio nullo, cioè:

$$\langle V_{m_1}(t)V_{n_1}^*(t) \rangle = \langle V_{m_1}(t) \rangle \langle V_{n_1}^*(t) \rangle = 0 \quad \text{quando } m \neq n \quad (28.9.11)$$

e conseguentemente i termini con i prodotti incrociati dell'equazione (28.9.10) si annullano. Così abbiamo:

$$\langle V_1(t)V_1^*(t) \rangle = \sum_m \langle V_{m_1}(t)V_{m_1}^*(t) \rangle \quad (28.9.12)$$

Analogamente, abbiamo:

$$\langle V_2(t)V_2^*(t) \rangle = \sum_m \langle V_{m_2}(t)V_{m_2}^*(t) \rangle \quad (28.9.13)$$

e

$$\langle V_1(t)V_2^*(t) \rangle = \sum_m \langle V_{m_1}(t)V_{m_2}^*(t) \rangle \quad (28.9.14)$$

Sostituendo le espressioni (28.9.8) e (28.9.9) nelle (28.9.13) e (28.9.14) rispettivamente, e notando che  $A_m$  é stazionario, si ha:

$$\langle V_1(t)V_1^*(t) \rangle = \sum_m \frac{1}{R_{m_1}^2} \langle A_m \left( t - \frac{R_{m_1}}{c} \right) A_m^* \left( t - \frac{R_{m_1}}{c} \right) \rangle = \sum_m \frac{1}{R_{m_1}^2} \langle A_m(t)A_m^*(t) \rangle \quad (28.9.15)$$

e

$$\langle V_2(t)V_2^*(t) \rangle = \sum_m \frac{1}{R_{m_2}^2} \left\langle A_m \left( t - \frac{R_{m_2}}{c} \right) A_m^* \left( t - \frac{R_{m_2}}{c} \right) \right\rangle = \sum_m \frac{1}{R_{m_2}^2} \langle A_m(t)A_m^*(t) \rangle \quad (28.9.16)$$

Poiché  $R_{m_1}$  e  $R_{m_2}$  sono approssimativamente eguali, queste due espressioni in questa approssimazione sono eguali l'uno all'altro e a  $P_0$ . Cioé in accordo con le ipotesi (28.9.5), si ha:

$$\langle V_1(t)V_1^*(t) \rangle = \langle V_2(t)V_2^*(t) \rangle = P_0 \quad (28.9.17)$$

Sostituendo le espressioni (28.9.8) e (28.9.9) nell'equazione (28.9.14), otteniamo:

$$\langle V_1(t)V_2^*(t) \rangle = \sum_m \left\langle A_m \left( t - \frac{R_{m_1}}{c} \right) A_m^* \left( t - \frac{R_{m_2}}{c} \right) \right\rangle \frac{e^{ik(R_{m_1}-R_{m_2})}}{R_{m_1}R_{m_2}} \quad (28.9.18)$$

essendo  $k = \frac{\omega}{c}$ . Poiché  $R_{m_1}$  e  $R_{m_2}$  sono approssimativamente eguali, e poiché  $A_m$  é stazionaria, l'equazione (28.9.18) si riduce a:

$$\langle V_1(t)V_2^*(t) \rangle = \sum_m \langle A_m A_m^* \rangle \frac{e^{ik(R_{m_1}-R_{m_2})}}{R_{m_1}R_{m_2}} \quad (28.9.19)$$

Per riprodurre questa espressione nella forma di un integrale, introduciamo le seguenti considerazioni geometriche. Dalla figura (28.9-1) é chiaro che:

$$R_{m_1}^2 = \left( \xi_m + \frac{l}{2} \right)^2 + R^2 \quad R_{m_2}^2 = \left( \xi_m - \frac{l}{2} \right)^2 + R^2 \quad (28.9.20)$$

Poiché  $R \gg \left(\xi_m + \frac{l}{2}\right)$  e  $R \gg \left(\xi_m - \frac{l}{2}\right)$ , segue dall'equazione (28.9.20):

$$R_{m_2} - R_{m_1} = -\frac{\xi_m l}{R} \quad e \quad R_{m_2} R_{m_1} = R^2 \quad (28.9.21)$$

Utilizzando queste approssimazioni, l'equazione (28.9.19) diventa:

$$\langle V_1(t) V_2^*(t) \rangle = \sum_m \frac{1}{R^2} \langle A_m A_m^* \rangle e^{ik\xi_m/R} \quad (28.9.22)$$

Inoltre, dalla figura (28.9-1) é chiaro che  $\tan \alpha_m = \xi_m/R$ , ma poiché  $\alpha_m$  é piccolo noi abbiamo la piú semplice relazione:

$$\alpha_m = \frac{\xi_m}{R} \quad (28.9.23)$$

con l'aiuto della (28.9.23) possiamo trasformare la (28.9.21) nella seguente forma:

$$\langle V_1(t) V_2^*(t) \rangle = \sum_m \frac{1}{R^2} \langle A_m A_m^* \rangle e^{ikl\alpha_m} \quad (28.9.24)$$

che suggerisce che la somma puó essere scritta come un integrale. Se poniamo:

$$\frac{1}{R^2} \langle A_m A_m^* \rangle = f(\alpha_m - \alpha_0) d\alpha_m \quad (28.9.25)$$

allora l'equazione (28.9.24) al limite diventa:

$$\langle V_1(t) V_2^*(t) \rangle = \int f(\alpha - \alpha_0) e^{ikl\alpha} d\alpha \quad (28.9.26)$$

dove  $\alpha_0$  é l'angolo che la congiungente  $O$  con il centro della sorgente forma con il piano assiale.

Sostituendo l'equazione (28.9.18) e (28.9.26) nell'espressione (28.9.2) troviamo che il grado di coerenza complesso é correlato alla funzione distribuzione sorgente  $f(\alpha - \alpha_0)$  e alla distanza fra le antenne  $kl$  dalla relazione:

$$\gamma = \frac{1}{P_0} \int f(\alpha - \alpha_0) e^{ikl\alpha} d\alpha \quad (28.9.27)$$

Poiché:

$$P_0 = \int f(\alpha - \alpha_0) d\alpha \quad (28.9.28)$$

possiamo anche scrivere  $\gamma$  nella forma omogenea:

$$\gamma = \frac{\int f(\alpha - \alpha_0) e^{ikl\alpha} d\alpha}{\int f(\alpha - \alpha_0) d\alpha} \quad (28.9.29)$$

Se in accordo con la notazione del paragrafo precedente denotiamo l'ampiezza e la fase dell'integrali nell'equazione (28.9.26) da  $Q(kl)$  e  $\phi(kl)$  rispettivamente, quindi possiamo scrivere:

$$\int f(\alpha - \alpha_0) e^{ikl\alpha} d\alpha = Q(kl) e^{ikl\alpha_0} e^{i\phi(kl)} \quad (28.9.30)$$

e dalle equazioni (28.9.29) e (28.9.30) notiamo che il grado di coerenza é dato da:

$$|\gamma| = \frac{Q(kl)}{Q(0)} \quad (28.9.31)$$

e la fase di  $\gamma$  da:

$$\arg \gamma = kl\alpha_0 + \phi(kl) \quad (28.9.32)$$

Sostituendo le espressioni (28.9.31) e (28.9.32) nell'equazione (28.9.6), otteniamo la espressione:

$$P = 2P_0 \left\{ 1 + \frac{Q(kl)}{Q(0)} \cos [kl\alpha_0 + \phi(kl)] \right\} \quad (28.9.33)$$

che mette in evidenza l'equivalenza della visibilitá e del grado di coerenza.

Nel caso speciale in cui  $f(\alpha - \alpha_0)$  é una funzione rettangolare di larghezza  $2w$ , cioè  $f(\alpha - \alpha_0) = P_0/2w$  per  $\alpha_0 - w \leq \alpha \leq \alpha_0 + w$  e  $f(\alpha - \alpha_0) = 0$  per tutti gli altri valori di  $\alpha$ , abbiamo:

$$\int f(\alpha - \alpha_0) e^{ikl\alpha} d\alpha = \frac{P_0}{2w} \int_{\alpha_0-w}^{\alpha_0+w} e^{ikl\alpha} d\alpha = P_0 \frac{\sin klw}{klw} e^{ikl\alpha_0} \quad (28.9.34)$$

Quindi per tale distribuzione rettangolare il grado di coerenza é dato da:

$$|\gamma| = \frac{Q(kl)}{Q(0)} = \frac{\sin klw}{klw} \quad (28.9.35)$$

e la fase di  $\gamma$  da:

$$\arg \gamma = kl\alpha_0 \quad (28.9.36)$$

Cosí vediamo che per una sorgente uniforme la grandezza  $\gamma$  é correlata dall'equazione (28.9.35) alla larghezza della sorgente e la fase  $\arg \gamma$  é correlata dall'equazione (28.9.36) all'angolo fra il piano assiale e la linea congiungente l'origine con il centro della sorgente. Il coefficiente di correlazione  $\rho(V_1, V_2)$  di  $V_1(t)$  e  $V_2(t)$  per definizione é:

$$\rho(V_1, V_2) = \frac{\langle (V_1 - \langle V_1 \rangle) (V_2^* - \langle V_2^* \rangle) \rangle}{\sigma(V_1)\sigma(V_2)} \quad (28.9.37)$$

essendo:

$$\begin{aligned} \sigma^2(V_1) &= \langle (V_1 - \langle V_1 \rangle) (V_1^* - \langle V_1^* \rangle) \rangle \\ \sigma^2(V_2) &= \langle (V_2 - \langle V_2 \rangle) (V_2^* - \langle V_2^* \rangle) \rangle \end{aligned} \quad (28.9.38)$$

le varianze. Poiché  $V_1(t)$  e  $V_2(t)$  hanno valore medio nullo, ossia:

$$\langle V_1 \rangle = 0, \quad \langle V_2 \rangle = 0 \quad (28.9.39)$$

l'espressione per  $\rho$  si riduce a:

$$\rho(V_1, V_2) = \frac{\langle V_1 V_2^* \rangle}{\sqrt{\langle V_1 V_1^* \rangle \langle V_2 V_2^* \rangle}} \quad (28.9.40)$$

Confrontando le espressioni (28.9.2) e (28.9.40) vediamo che il grado di coerenza complesso  $\gamma$  é eguale al coefficiente di correlazione  $\rho(V_1, V_2)$ . Quindi quello che realmente viene misurato nel dispositivo descritto precedentemente é l'ampiezza e la fase del coefficiente di correlazione  $\rho(V_1, V_2)$ . Supponiamo, ora, che i circuiti sono cambiati in modo tale che possiamo misurare il coefficiente di correlazione del quadrato del modulo  $M_1(t)$  e  $M_2(t)$  di  $V_1(t)$  e  $V_2(t)$  rispettivamente. Il coefficiente di riflessione  $\rho(M_1^2, M_2^2)$  per definizione é:

$$\rho(M_1^2, M_2^2) = \frac{\langle (M_1^2 - \langle M_1^2 \rangle) (M_2^2 - \langle M_2^2 \rangle) \rangle}{\sigma(M_1^2) \sigma(M_2^2)} \quad (28.9.41)$$

essendo:

$$\begin{aligned} \sigma^2(M_1^2) &= \langle (M_1^2 - \langle M_1^2 \rangle)^2 \rangle \\ \sigma^2(M_2^2) &= \langle (M_2^2 - \langle M_2^2 \rangle)^2 \rangle \\ M_1^2 &= V_1 V_1^* \quad M_2^2 = V_2 V_2^* \end{aligned} \quad (28.9.42)$$

Sotto le ipotesi che il rumore del ricevitore é trascurabile rispetto al segnale desiderato, può essere mostrato da calcoli statistici che:

$$\rho(M_1^2, M_2^2) = \rho(V_1, V_2) \rho^*(V_1, V_2) \quad (28.9.43)$$

Ma:

$$\rho(V_1, V_2) = \gamma \quad (28.9.44)$$

e, quindi:

$$\rho(M_1^2, M_2^2) = \gamma \gamma^* = |\gamma|^2 \quad (28.9.45)$$

Questo significa che il coefficiente di correlazione dei quadrati dei moduli delle tensioni sulle antenne é eguale al quadrato del grado di coerenza della radiazione incidente. Nel caso in cui la sorgente é una distribuzione rettangolare di larghezza  $2w$ , vediamo dalle equazioni (28.9.35) e (28.9.44) che:

$$\rho(M_1^2, M_2^2) = \left| \frac{\sin klw}{klw} \right|^2 \quad (28.9.45)$$

con l'aiuto di questo risultato  $w$  può essere facilmente calcolato da una conoscenza del coefficiente di correlazione  $\rho(M_1^2, M_2^2)$ .

Sebbene  $\rho(M_1^2, M_2^2)$  offre informazioni circa  $|\gamma|$  soltanto, e  $\rho(V_1, V_2)$  offre informazioni sia su  $|\gamma|$  cosí come su  $\arg \gamma$ , il primo é piú facile da misurare, quando nessuna informazione sulla fase é richiesta.

L'interferometro a correlazione di Brown e Twiss può essere definito come un interferometro che misura  $\rho(M_1^2, M_2^2)$ . Esso differisce da un convenzionale interferometro, che misura  $\rho(V_1, V_2)$ . Poiché nessuna conoscenza della fase della radiofrequenza é necessaria nelle misure di  $\rho(M_1^2, M_2^2)$ , le antenne possono essere separate grandemente e cosí può essere realizzato un alto potere risolutivo.

## 28.10 - L'inizio della Radio Astronomia†

Negli anni successivi alla prima dimostrazione sperimentale delle onde radio da parte di Heinrich Rudolf Hertz nel 1888, gli scienziati fecero diversi tentativi di rivelare le onde radio emesse dal Sole, ma tutti i loro sforzi furono vani. Sembra straordinario che dovessero trascorrere 50 anni prima di rivelare nel 1942 le emissioni radio solari. Dieci anni prima, Jansky<sup>1)</sup> aveva inaspettatamente registrato onde radio dalla Galassia mentre indagava sulle onde radio provenienti dall'atmosfera che producevano crepitii e rumori che interferivano con le radiocomunicazioni. **La scoperta di Jansky nel 1932 segnò il primo successo di osservazione in Radio Astronomia.** È strano che ci sia voluto tanto tempo per riconoscere che le onde radio stanno raggiungendoci da fonti celesti.

Gli esperimenti di Hertz indussero all'eccitante esplorazione pratica delle radio onde. Fu naturale che il Sole sarebbe stato il primo corpo astronomico da essere considerato come possibile sorgente di emissione radio. L'iniziativa di rivelare le onde radio provenienti dal Sole fu fatta da Edison,<sup>2)</sup> famoso per l'invenzione del telegrafo. Nel 1890, Kennelly<sup>3)</sup> che allora lavorava nel laboratorio di Edison, scrisse una lettera al Direttore del Lick Observatory in California di cui riportiamo i seguenti estratti:

*"Posso citare che l'onorevole Edison, che non si limita a una sola linea di pensieri o azioni, ha recentemente deciso di trasformare una massa di minerale di ferro nel New Jersey, che è estratto per scopi commerciali, per affrontare la ricerca in fisica solare. Il nostro tempo è ovviamente occupato al Laboratorio nel lavoro pratico, ma in questo caso l'esperimento sarà puramente scientifico ...*

*Insieme ai disturbi elettromagnetici che riceviamo dal sole che, naturalmente, sai che riconosciamo come luce e calore (devo scusarmi per aver dichiarato dei fatti con i quali sei così esperto), non è irragionevole supporre che ci saranno emissioni di lunghezza d'onda molto più elevata. Se è così, possiamo tradurli in suono. Il piano di Mr. Edison è quello di avvolgere attorno alla massa del minerale, un cavo di sette fili isolati, i cui terminali finali verranno portati ad un telefono o ad un altro apparecchio. È allora possibile che violenti disturbi nell'atmosfera solare possono così disturbare sia il normale flusso elettromagnetico di energia che noi riceviamo, sia la normale distribuzione del campo magnetico su questo pianeta, così da portare un cambiamento notevolmente grande nel flusso di induzione magnetica concatenato con l'avvolgimento.*

*Mi è sembrato che, supponendo che qualsiasi risultato che sia stato raggiunto indicasse l'influenza solare, non dovremmo essere in grado di stabilire il fatto se non abbiamo prove positive di disturbi coincidenti nella corona. Forse, se lo volessi, potresti dirci in quali momenti si siano verificati tali disturbi. Devo confessare che non so se le variazioni delle macchie solari permettono di registrare precocemente tali disturbi o se voi teniate qualsiasi apparecchio a lavoro che possa registrare i cambiamenti nella corona indipendentemente*

---

† J. S. Hey: The Evolution of radio Astronomy - Science History Publications, A Division of Neale Watson Academic Publications, Inc. New York - 1973.

<sup>1)</sup> Karl Guthe Jansky (1905-1950).

<sup>2)</sup> Thomas Edison: Milan, Ohio (U.S.A.) on February 11, 1847 - New Jersey on October 18, 1931.

<sup>3)</sup> Arthur Edwin Kennelly (1861-1939).

*dall'illuminazione generica. Io non dubito tuttavia che potresti metterti sulla strada giusta per determinare i tempi dei disturbi otticamente paragonabili alle indicazioni del ricevitore del Prof. Edison, supponendo che esso registri come speriamo."*

Sembra non esserci alcun resoconto dell'esperimento effettivo, che non avrebbe potuto finire nel successo. É evidente che, in primo luogo, il loro apparato era troppo insensibile e, secondo la lunghezza d'onda lunga indicata dalla portata della loro apparecchiatura, **la ionosfera avrebbe impedito che le onde radio del Sole raggiungessero la superficie terrestre.**

**Kennelly avrebbe scoperto questo dodici anni piú tardi quando, insieme a Heaviside, predisse l'esistenza dello strato riflettente nell'atmosfera superiore.**

Nel 1894 la ricerca di emissioni radio solari fu continuata da Sir Oliver Lodge,<sup>4)</sup> che era Professore di Fisica alla Liverpool University. In una lezione alla Royal Institution in London Egli disse, "*Io spero di trovare radiazioni a onde lunghe dal Sole, filtrando le note onde ordinarie con una tavola nera o un'altra sostanza sufficientemente opaca*".

Piú tardi Egli scrisse: "*Non ho avuto successo in questo, perché un coherer sensibile in un capannone esterno non protetto dalle sottili pareti di un edificio non può essere tranquillo a lungo. Ho trovato il suo punto di luce (del galvanometro n.d.r.) suscettibile di frequenti escursioni deboli e occasionalmente violenti, e non ho potuto associare nessuna di queste all'influenza del Sole. C'erano evidentemente troppe fonti terrestri di disturbo in una città come Liverpool per rendere possibile l'esperimento. Non so se potesse avere successo in un luogo isolato del paese, ma chiaramente il dispositivo deve essere molto sensibile al fine di riuscire.*"

Il punto di luce si riferisce al suo galvanometro riflettente e dalle descrizioni associate sembra probabile che il suo apparato sia stato progettato per ricevere a lunghezze d'onda centimetriche.

Sebbene tali onde sarebbero in grado di penetrare nella ionosfera, la sensibilità di rivelazione del suo apparato non é totalmente inaffidabile, e comunque l'esperimento di Lodge é stato rovinato da interferenze elettriche generate a Liverpool.

L'incerta conoscenza a quel tempo dell'influenza dell'atmosfera superiore é illustrata dalle osservazioni tentate nel 1900 da Charles Nordman, un francese studente di dottorato. É interessante notare che nella sua tesi di dottorato Nordman si riferisce a precedenti esperimenti non riusciti di Scheiner e Wilsing in Potsdam. Nordman utilizzó un'antenna lunga 175 metri e pose il suo apparato su un ghiacciaio del Monte Bianco ad un'altitudine di 3100 metri "per eliminare il piú possibile l'azione assorbente dell'atmosfera". Con un'ottima prospettiva, Nordman prevede che forti emissioni di onde radio sarebbero associate all'attività di macchie solari. Si sentiva cosí certo del suo esperimento al punto da pensare che i risultati negativi di esso fosse interamente dovuto all'assorbimento da parte dell'atmosfera. Noi ora sappiamo naturalmente che l'elevata altitudine non era essenziale, ma che lunghezze d'onda molto lunghe non possono attraversare la ionosfera.

Una mancanza di interesse ha seguito questi primi fallimenti per rilevare le onde radio emesse dal Sole. Senza dubbio, é stato in parte attribuibile alla crescente conoscenza, dopo il 1902, che lo strato riflettente ionizzato nell'atmosfera superiore non faceva attraversare radiazioni di lunghezze d'onda piú lunghe di circa 20 m ( $\nu < 15 MHz$ ). Inoltre, alcuni

---

<sup>4)</sup> Sir Oliver Lodge (12 giugno 1851, Penkhull, U.K. - 22 agosto 1940, Wilsford, U.K.).

ricercatori possono essere stati scoraggiati dalle difficoltà che erano state vissute dagli altri. Certamente una pausa si verificò nella ricerca delle onde radio dallo spazio. Tuttavia la tecnologia radio avanzò rapidamente. Nel 1921, J.A. Fleming<sup>5)</sup> diede una lezione a Londra intitolata "L'arrivo dell'era della radio telegrafia a lunga distanza", un titolo che giustamente denota il progresso della radio agli inizi del ventesimo secolo, cominciando dalla trasmissione di Marconi attraverso l'Oceano Atlantico nel 1901, e culminando con l'opportunità negli anni 1920 di accedere tutti alle trasmissioni wireless. La ricerca radio stava fiorendo in diverse università, e in aziende commerciali come la Bell Telephone Laboratories, USA, e la Marconi Telegraph Company, England.

Le prestazioni delle onde radio dipendono non solo dalla sensibilità della apparecchiatura, ma anche dalle condizioni che regolano la propagazione delle onde radio nella atmosfera e sul livello di rumore di fondo che si può ascoltare in cuffia al ricevitore. Negli anni 1920, le limitazioni imposte da effetti di propagazione di rumore ricevuto erano solo parzialmente capiti. Fu capito che il rumore radio esterno sarebbe potuto derivare da fulmini nei temporali e dalle numerose scariche minori di elettricità generate nelle nuvole temporalesche, quindi il termine "static" e "atmosferic". In England R.A. Watson-Watt<sup>6)</sup> fece uno studio completo sui disturbi radio atmosferici a lunghezze d'onda lunghe. Ma fu una ricerca negli Stati Uniti d'America sul rumore radio atmosferico ad onde più corte, attorno ai 15 m ( $\nu = 20MHz$ ), che portò ad una scoperta **che pose la base della Radio Astronomia**, come segue.

### La scoperta di Karl Jansky

Nel 1930 Karl Guthe Jansky, un giovane fisico del gruppo di ricerca dei Bell Telephone Laboratories in Holmdel, New Jersey, USA, ebbe assegnato il compito di studiare la direzione di arrivo dei rumori atmosferici alle lunghezze d'onda di circa 15 metri ( $\nu = 20 MHz$ ) che allora erano impiegate per comunicazioni da navi a terra e comunicazioni transatlantiche. Per questo scopo Jansky pianificò la costruzione di un array di antenne ruotabili lunghe 30 m ed alte 4 m, che forniva una ricezione direzionale di circa 30 gradi di larghezza in azimuth. Il telaio era montato su quattro ruote prese da un modello T Ford per permettere la rotazione attorno ad un perno centrale. Con l'ausilio di un motore e di una catena, veniva completata una rivoluzione ogni venti minuti, e il contrappeso è stato soprannominato il "giro delizioso".

Nel suo lavoro del 1932<sup>7)</sup> descrivente la ricerca, Jansky distinse tre distinti tipi di rumore (static): primo, crepitii intermittenti dovuti ai temporali locali; secondo, una statica più stabile e più debole a causa dell'effetto combinato di molte tempeste lontane; in terzo luogo, una costante debole di origine sconosciuta che produce un suono in cuffie simile al rumore generato all'interno del ricevitore radio da agitazione termica casuale degli elet-

---

<sup>5)</sup> Professor Sir Ambrose Fleming inventore della valvola termoionica.

<sup>6)</sup> Sir Robert Watson-Watt successivamente divenne famoso come l'inventore Britannico del Radar. Egli anche coniò il nome 'ionosfera' per gli strati riflettenti ionizzati dell'atmosfera superiore.

<sup>7)</sup> Karl G. Jansky: Directional Studies of Atmospherics at High Frequencies - Proceedings of the Institute of Radio Engineers, Volume 20, Number 12, December, 1932 pp.1920-1932.



troni nei componenti. Inizialmente Egli attribuì il rumore ricevuto dall'antenna a deboli interferenze causate dall'uomo. Ma la sua curiosità fu sorpresa quando si rese conto che la direzione dell'arrivo si muoveva intorno al cielo ogni giorno. Durante le ore diurne la direzione inizialmente sembrava corrispondere al Sole, ma in seguito notò una deriva nella posizione di massimo rumore che dimostrò che il Sole non poteva essere la fonte.<sup>8)</sup>

Sebbene i risultati di Jansky erano espressi in modo semplice, essi rivelarono la chiara visione di una mente penetrante. **Il suo riconoscimento del terzo tipo di statica segnava l'inizio dell'osservazione radio astronomica.** Seguendo la sua indagine iniziale con una registrazione di dati per la durata di un anno, Jansky raggiunse l'importanza astronomica della sua scoperta. Nel suo secondo lavoro, pubblicato nel 1933,<sup>9)</sup> intitolato "Electrical disturbances apparently of extraterrestrial origin", Egli raggiunse la conclusione che la fonte principale stava mantenendo una posizione celeste costante, la direzione che attraversava il cielo con una periodicità di 23 ore e 56 minuti caratteristica di oggetti siderali come le stelle. Nel suo lavoro Egli ha spiegato a beneficio dei lettori radio il sistema celeste delle coordinate e le direzioni apparenti sulla Terra. Egli determinò la direzione della principale sorgente approssimativamente all'ascensione retta di  $18^0$ , declinazione  $10^0 S$ . Speculando sull'origine della radiazione, Egli notò la coincidenza di questa direzione con il centro della Galassia nella costellazione del Sagittario. È interessante ricordare che Jansky riconosce l'assistenza di A. Skellett nell'interpretazione astronomica dei dati; Skellett era impegnato in esperimenti di riflessione ionosferica che successivamente si sono rivelati tali da portare ad un altro aspetto della radio applicata all'astronomia, vale a dire allo studio radar dei meteoriti.

In una analisi ulteriore dei dati Jansky nel 1935<sup>10)</sup> consolidò la sua conclusione sull'origine galattica dell'emissione radio. Ha confrontato più da vicino la forma del grafico della intensità sulle sue tabelle di registrazione con quella che ci si aspetta, supponendo che l'antenna intercettasse una sorgente distribuita sulla Via Lattea, che comprende la molteplicità di stelle vicine al piano galattico. **La sua analisi rivelava un aumento del rumore ogni volta che l'antenna puntava su una parte della Via Lattea, l'intensità più grande si aveva verso il centro galattico.** La più evidente spiegazione in un primo momento sembrava che le stelle stesse emettessero le onde radio, ma se è così, perché non era in grado di rilevare il Sole? Per risolvere il problema, Jansky cercò spiegazioni alternative, ed Egli scrisse, "...porta a speculare se le radiazioni possano essere causate da una sorta di agitazione termica di particelle cariche. Tali particelle sono trovate non solo nelle stelle ma anche nella considerevole quantità di materia interstellare che viene distribuita per tutta la Via Lattea, che, secondo Eddington, ha una temperatura efficace di  $15000^0C$ . Se la radiazione viene da tali particelle ci si aspetterebbe che la risposta

---

<sup>8)</sup> Jansky aveva fatto le sue osservazioni durante un periodo di minime macchie solari. Noi ora sappiamo che se Egli avesse registrato durante una forte attività solare quasi sicuramente avrebbe rivelato radiazione emessa dal Sole.

<sup>9)</sup> Karl G. Jansky: Electrical Disturbances Apparently of Extraterrestrial Origin - Proceedings of the Institute of Radio Engineers, Volume 21, Number 10, October, 1933 pp. 1387-1398.

<sup>10)</sup> Karl G. Jansky: A Note on the Source of Interstellar Interference - Proceedings of the Institute of Radio Engineers, Volume 23, Number 10, October, 1935 pp. 1157-1163.

ottenuta dipenda dalla caratteristica direzionale e dal guadagno dell'antenna e dal modo in cui esso é puntato rispetto alla Via Lattea, un'aspettativa che concorda con i soggetti osservati".

La scoperta di Jansky attrasse qualche pubblicitá, e il 5 Maggio 1933 the New York Times riportó in prima pagina una intera colonna intitolata "Nuove Onde Radio localizzate al Centro della Via Lattea". La scoperta era anche presentata in un programma radiofonico americano, ed il rumore galattico ricevuto dall'antenna di Jansky veniva trasmesso, il commentatore annunciava "Voglio che sappiate che questo rumore proviene dalla profonditá dell'universo". La reazione degli ascoltatori ai dieci secondi di emissione trasmessi é incerta; un giornalista ha detto che "sembrava che il vapore fosse scappato da un radiatore".

É straordinario che, nonostante le pubblicazioni di Jansky nelle riviste scientifiche, insieme alla pubblicitá aggiunta, nessuna Universitá o organizzazione astronomica si sentiva spinta a perseguire la sua sorprendente scoperta. Sfortunatamente, a Jansky non fu permesso di continuare la ricerca ulteriormente perché, dal punto di vista dei Bell Telephone Laboratories, aveva compiuto l'obiettivo pratico, vale a dire quello di trovare l'intensitá e le proprietá direzionali del rumore ricevuto in modo da valutare quanto la radio telegrafia sarebbe stata influenzata. Un suggerimento di Jansky di costruire un'antenna a forma di disco di 100 piedi (circa 30 metri) per ricerche piú dettagliate fu respinto come una spesa ingiustificabile. La Compagnia considerava che ogni continuazione di ricerca di intensitá sul soggetto dovrebbe essere lasciata correttamente ai centri di ricerca accademici. Cosí Jansky, con riluttanza, non lavoró mai piú in radioastronomia. Egli rimase ai BTL, un ricercatore profondo, metodico e persistente, riconosciuto come esperto di rumore radio e interferenze, e ha ricevuto una citazione della Marina Militare per il suo lavoro sulla ricerca dei trasmettitori nemici durante la seconda guerra mondiale.

É degno di nota la base scolastica di Jansky. Suo padre era lui stesso un ricercatore, avendo ottenuto la laurea e il master in Fisica e in Ingegneria Elettronica presso l'Universitá del Michigan. Egli diventó un grande ammiratore del dottor Karl Guthe, e decise di chiamare il suo terzo figlio con il nome di questo fisico e insegnante la cui guida gli aveva servito tanto. Karl Guthe Jansky si laureó in Fisica all'Universita del Wisconsin dove suo padre divenne Professore di Ingegneria Elettrica. Sfortunatamente, Karl Jansky soffriva di varie malattie e per questo motivi i laboratori di Bell Telephone furono in un primo momento riluttanti ad offrirgli il posto che poi gli permise di realizzare la brillante ricerca che ha posto le basi della radio astronomia. Anche se non si comportava come un malato, la sua salute decrescente lo ha portato alla morte nel 1950 all'etá di 44 anni.

### **Grote Reber, il pioniere solitario<sup>11)</sup>**

La Radio Astronomia sarebbe stata nell'oblio per un decennio fino all'iniziativa di un solo uomo, Grote Reber, un giovane ingegnere radio di Wheaton, Illinois, USA, che decise di perseguire la ricerca come un hobby a sue proprie spese e nel suo tempo libero. Reber era un grande entusiasta delle comunicazioni radio, che all'etá di 15 anni aveva costruito un trasmettitore e un ricevitore e comunicava con i radio amatori in tutto il mondo. Dopo la laurea come ingegnere delle telecomunicazioni egli lavoró con una societá di Chicago. Le

---

<sup>11)</sup> Grote Reber: 22 dicembre 1911, Wheaton, Illinois, U.S.A. - 20 dicembre 2002, Ouse, Australia.

comunicazioni radio erano anche il suo hobby e come aveva già raggiunto la sua ambizione primaria nella radio-telegrafia di lavorare in tutti i continenti, ora cercava nuovi mondi da conquistare. Ispirato dalla lettura dei lavori di Jansky egli prevede l'affascinante prospettiva di ulteriori esplorazioni se avesse potuto affrontare i problemi impegnativi ideando nuove tecniche di osservazione. Per citare le sue parole "Il mio pensiero era che Jansky aveva fatto una molto importante e fondamentale scoperta. Egli, inoltre, l'aveva sfruttata al limite delle sue attrezzature. Se si volessero realizzare maggiori progressi, sarebbe necessario costruire nuove e diverse attrezzature appositamente progettate per misurare la statica cosmica". **La domanda più importante che egli si poneva era come determinare la distribuzione dettagliata nel cielo e come l'intensità della radiazione dipendesse dalla lunghezza d'onda.** Di fronte a un'ignoranza prevalente, decise di costruire un grande riflettore parabolico con l'intenzione di osservare inizialmente ad una lunghezza d'onda molto breve, circa 10 cm ( $\nu = 3 \text{ GHz}$ ). Si rese conto che un riflettore parabolico avrebbe il vantaggio di fornire un fascio stretto e simmetrico e permetterebbe anche di modificare la lunghezza d'onda semplicemente cambiando il ricevitore nel fuoco. **Nella scelta della lunghezza d'onda operativa era guidato da due considerazioni: avrebbe potuto ottenere una migliore risoluzione angolare e, inoltre, sosteneva che, se applicata la legge di emissione termica di Planck, la radiazione dovrebbe essere più forte a lunghezze d'onda più piccole.**

Con questo piano ben concepito, Reber cominciò a costruire il primo radio telescopio specificamente progettato per osservazioni radio astronomiche, un compito enorme da intraprendere per un uomo. Avrebbe preferito un montaggio completamente sterzabile, ma questo era troppo costoso e decise in uno strumento di transito meridiano sterzabile solo in elevazione e basandosi sulla rotazione della Terra per scandire i cieli. Lo specchio parabolico metallico doveva essere costruito il più grande possibile compatibilmente con i fondi disponibili. Anche i preventivi più bassi di ditte esterne erano proibitivi. Solo una via sembrò aperta a Reber; egli avrebbe dovuto progettare e costruire il telescopio da solo nel suo giardino. La prima considerazione nel progetto era di mantenere una configurazione stabile del riflettore e del montaggio focale per tutte le elevazioni. Il riflettore doveva essere il più grande possibile e tuttavia le deviazioni nella forma non dovevano superare una frazione di lunghezza d'onda. Bilanciando i costi dei materiali contro le esigenze strutturali, Reber perfezionò i parametri del suo disegno e decise una superficie di lamiera di 31 piedi (circa 9.5 m), da montare su una struttura portante in legno, a vantaggio di economia e facilità di costruzione. La superficie del riflettore consisteva di 45 pezzi di lamiera di ferro zincata di spessore 26 avvitata su 72 travi radiali di legno tagliati a forma parabolica. Reber ha tagliato, forato e verniciato tutte le parti; e fatta eccezione per l'assistenza a tempo parziale di due uomini per le fondazioni e l'erezione, Reber ha personalmente assemblato il radio telescopio pezzo per pezzo e ha completato l'intero lavoro in quattro mesi da giugno a settembre 1937. La costruzione del telescopio costò a Reber 1300 dollari, una somma elevata rispetto al valore dei dollari del 1937, ma né il costo né lo sforzo diminuirono la sua fede in questa singola impresa. I vicini osservarono la struttura in crescita con stupore. Quando fu completata, Reber nota "Lo specchio emette generalmente scatti, scoppiettii e suoni rumorosi ogni mattina e sera.....dovuto ad una espansione diseguale della pelle del riflettore. Quando era posto in posizione verticale grande volume d'acqua si riversava at-

traverso il buco centrale durante un temporale. Questo causava voci fra gli abitanti locali che la macchina era per raccogliere l'acqua e per controllare il tempo .... ”

Dopo uno studio sperimentale della sensibilità dei ricevitori radio alle lunghezze d'onda centimetriche egli scelse un rivelatore a cristallo seguito da un amplificatore audio a triodo. I suoi primi tentativi, a  $\lambda = 9 \text{ cm}$ , ( $\nu \simeq 3.3 \text{ GHz}$ ), per osservare il Sole, la Luna, pianeti, e stelle brillanti non producevano risposta alcuna. Imperterrito, egli cambiò a  $\lambda = 33 \text{ cm}$  ( $\nu \simeq 909 \text{ MHz}$ ), una lunghezza d'onda per cui un triodo trova il rivelatore piú adatto. Reber scrisse "Durante l'autunno del 1938 e durante l'inverno una varietà di osservazioni, sia di giorno sia di notte, furono fatte con entrambe le polarizzazioni Tutti gli stessi oggetti furono esaminati di nuovo senza alcun risultato positivo". **Cosí egli concluse che la legge del corpo nero di Planck non viene rispettata dal rumore extraterrestre, e nel 1939 lo troviamo iniziare di nuovo con un nuovo ricevitore a  $\lambda = 1.87 \text{ m}$  ( $\nu \simeq 160.4 \text{ MHz}$ ) e finalmente riuscendo a rilevare le emissioni radio dalla Via Lattea, nonostante i problemi crescenti dovuti a interferenze di accensione a questa lunghezza d'onda piú lunga.** In questo periodo Reber stava registrando misure da mezzanotte alle sei del mattino approfittando del fatto che il livello di interferenza provocato dall'uomo era ridotto al minimo. Poi, dopo colazione, percorreva 30 miglia fino a Chicago, dove si guadagnava la vita progettando ricevitori per una compagnia radio, e di nuovo in serata, dormendo dopo cena fino a mezzanotte, riprendeva le osservazioni.

**Il radio telescopio di Reber e la sua persistenza nel superamento delle difficoltà tecniche, lo classifica come un grande pioniere della radio astronomia. La sua ricerca culminò in importanti contributi che hanno rilanciato l'interesse in questo soggetto trascurato.**

Guardiamo adesso alcuni dei risultati del suo lavoro. Reber, nel suo primo lavoro del 1940<sup>12)</sup> intitolato "Cosmic static", determinava l'intensità della radiazione a  $\lambda = 1.87 \text{ m}$  e confermava la distribuzione delle sorgenti come giacente prevalentemente lungo la Via Lattea. **Egli allora fece un importante passo nell'interpretazione teorica valutando l'intensità dell'emissione radio da liberi elettroni durante gli incontri con ioni positivi di idrogeno ionizzato nello spazio interstellare. La formula derivata in un contesto differente da Kramer nel 1923 per spiegare lo spettro continuo dei raggi X da metalli bombardati da elettroni veloci erano precedentemente stati applicati alla radiazione ottica dalle stelle e gas interstellari da Eddington. Reber mostrò che l'emissione radio si accordava ragionevolmente bene con la radiazione prevista dagli elettroni interstellari come indicato nella formula di Kramer.**

Il problema, ora, finalmente attirò l'attenzione degli astronomi, e in *Astrophysical Journal*, 1940,<sup>13)</sup> Henyey and Keenan svilupparono il trattamento teorico pienamente. Essi mostrarono che il gas ionizzato dovrebbe essere parzialmente trasparente a lunghezze d'onda piú corte, dando un flusso di potenza quasi costante, ma a lunghezze d'onda piú grandi di circa 5 m ( $\nu = 60 \text{ MHz}$ ) esso dovrebbe essere opaco ed emettere con l'intensità in accordo con la legge di Planck sul corpo nero. L'accordo con le misure di Reber a circa

---

<sup>12)</sup> G. Reber, Proc. I.R.E., 28, 68, 1940.

<sup>13)</sup> Henyey and Keenan: Interstellar Radiation from Free Electrons and Hydrogen Atoms - Astrophysical Journal, 1940.

2 m di lunghezza d'onda era soddisfacente. Ma l'intensità registrata da Jansky a circa 15 m ( $\nu = 20 \text{ MHz}$ ) rappresentava una temperatura di radiazione di circa 150000 K, e già si conosceva che la temperatura degli elettroni dell'idrogeno ionizzato non poteva essere più grande di 10000 K. Una maggiore discrepanza si presentava; può esserci un diverso meccanismo di radiazione a lunghezze d'onda lunghe? Come vedremo più tardi, trascorse un decennio prima che si potesse trovare una risposta, dopo che molte nuove leggende erano state gettate sul problema da nuove scoperte.

Un ulteriore risultato di Reber fu la sua produzione delle prime mappe radio della Via Lattea. La larghezza del fascio del suo radio telescopio, circa  $12^\circ$  a  $\lambda \simeq 2 \text{ m}$  ( $\nu = 150 \text{ MHz}$ ), gli ha permesso di disegnare una mappa di contorno della distribuzione del rumore radio che ha mostrato la sua relazione con la galassia, la struttura del picco principale al centro galattico nel Sagittario e le cime sussidiarie di Cygnus e Cassiopea. I tentativi di rilevare singoli oggetti, come i pianeti, le stelle e le nebulose, non erano disponibili, ma la sua carta del 1944 riportò la rilevazione del Sole.

## 28.11 - Hubble trova che l'Universo é in espansione†

Nel 1929, attraverso il lavoro di Hubble,<sup>1)</sup> il nostro quadro attuale dello Universo in espansione, costituito da galassie che si allontanano l'una dall'altra, fu stabilito.<sup>2),3)</sup> Hubble é considerato da molti essere stato il piú grande astronomo del ventesimo secolo. Certamente Egli fece buon uso del fatto che, quasi fin dall'inizio della sua carriera, ha lavorato con il piú grande telescopio del mondo e si é concentrato sul lavoro che poteva essere fatto solo con questo strumento.

The *Mount Wilson Observatory* in California, la base di Hubble, deve la sua esistenza a Hale<sup>4)</sup> che fu una straordinaria persona come astronomo e astrofisico e anche come raccoglitori di fondi e organizzatore.<sup>5)</sup> In Astronomia, Hale é meglio conosciuto per la sua scoperta dei campi magnetici nelle macchie solari. Profondamente interessato alla Scienza, Egli ebbe successo nel convincere persone ricche e organizzazioni a fornire fondi, a cominciare da suo padre che era ingegnere e produttore di ascensori idraulici per edifici elevati. Successivamente Egli fondó tre importanti osservatori che per quasi un secolo si sono alternati a vantare il telescopio piú potente. Il primo fu the *Yerkes Observatory* nel Wisconsin con un telescopio con lente di 40 inch (1.016 m) che cominció ad operare nel 1897. Esso era connesso all'Universitá di Chicago dove Hale era allora professore di Astronomia. The *Mount Wilson Observatory* fu fondato nel 1904. Il suo strumento piú grande, un telescopio con riflettore (specchio) di 100 inch (2.54 m), fu completato nel 1917 e rimase il piú grande al mondo fino al 1948. Soltanto allora fu costruito un riflettore di 200 inch (5.08 m), che appartiene al *Mount Palomar Observatory*, iniziato da Hale nel 1928. Il 200 inch, chiamato the *Hale Telescope*, rimase il piú grande al mondo fino al 1993.

Hubble nacque in Marshfield, Missouri, figlio di un avvocato che lavorava come agente di assicurazione. Avendo vinto una borsa di studio, Egli studió all'Universitá di Chicago e nel 1910 ottenne una laurea in Matematica e Astronomia. Per qualche tempo Egli fu assistente di laboratorio di Millikan. Era anche un atleta eccellente, soprattutto nella boxe. Negli anni dal 1910 al 1913 Hubble frequentó come Rhodes Scholar il Queen College, Oxford, studiando legge e laureandosi in tale disciplina. Egli si appassionó a tutto ciò che era inglese e sviluppó anche il manierismo britannico che non era piacevole a tutti quando tornó in America. Tornato negli Stati Uniti, Hubble non praticó l'avvocatura, ma lavoró per qualche tempo come insegnante nelle high school prima che Egli decidesse nel 1914 di ritornare a Chicago per un Ph.D. in Astronomia.

---

† Siegmund Brandt: *The Harvest of a Century - Discovery of Modern Physics in 100 Episodes* - Oxford University Press, 2009, pag.195.

<sup>1)</sup> Edwin Powell Hubble: 20 novembre 1889, Marshfield, Missouri, U.S.A. - 28 settembre 1953, San Marino, California, U.S.A. 1953).

<sup>2)</sup> Sandage, A., *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*, 83 (1989) 351.

<sup>3)</sup> Christianson, G. E., *Edwin Hubble - Mariner of the Nebulae*. Ferrar, Straus & Giroux, New York 1995..

<sup>4)</sup> George Ellery Hale (1868 - 1938).

<sup>5)</sup> Wright, H., *Explorer of the Universe - A Biography of George Ellery Hale*. Dutton, New York, 1966.

Per la sua tesi Hubble decise di studiare le nebulose, oggetti diffusi che, se osservati con un telescopio di sufficiente potenza, di solito sono costituiti da un numero molto grande di stelle. Nebulose note sono elencate nei cataloghi denominati M (for Messiers) o NGC (New General Catalogue). Nel 1915 e nel 1916, Egli prese lastre fotografiche della Nebulosa NGC 2261 e le confrontó accuratamente con quelle prese da altri astronomi nel 1913, 1908 e 1900. Con sua sorpresa Egli trovó che nel corto periodo di tempo la nebulosa aveva cambiato in quantitá misurabile la sua forma.<sup>6)</sup> Impressionato da questo lavoro, Hale, reclutava nuovi giovani riceercatori per il nuovo *Mount Wilson Observatory*, e offrí a Hubble una posizione da assumere dopo il conseguimento del Suo dottorato. Tuttavia, Hubble si congiunse allo staff del Mount Wilson solo nell'autunno del 1919. Quando gli Stati Uniti entrarono nella prima guerra mondiale egli si precipitó a completare la sua tesi e il suo esame e si uní all'esercito. Dopo l'addestramento arrivó in Francia poco prima dell'armistizio, terminando la guerra come Maggiore Hubble, un titolo con cui gli piaceva essere chiamato anche quando era ricercatore in montagna.

Hubble fece della dell'osservazione delle nebulose il soggetto scientifico della sua vita. Egli ideó uno schema di classificazione per le nebulose, ancora in uso, che egli descrisse in termini tecnici in articoli pubblicati fra il 1922 ed il 1926 e che é riassunto meglio dal diagramma a forcella incluso nel suo popolare libro *The Realm of the Nebulae* (Il Regno delle Nebulose).<sup>7)</sup> Nel 1924 Egli sposó la figlia di un ricco banchiere di Los Angeles. La coppia visse in una splendida casa costruita per loro e fu in grado di viaggiare estensivamente all'estero e di coltivare amicizie con milionari, scrittori alla moda e attori di Hollywood.

Nel 1925 Hubble guadagnó ampi riconoscimenti per le osservazioni che hanno messo fine a ciò che é stato successivamente chiamato il *grande dibattito*. **A quel tempo non veniva data alcuna risposta alla vecchia questione se tutti gli oggetti, osservati nel cielo, siano contenuti all'interno della Via Lattea o no.** Già nel diciottesimo secolo il filosofo tedesco Kant<sup>8)</sup> aveva espresso l'opinione che le nebulose siano via lattea o, per usare il nome greco, proprie galassie. Egli si era basato sull'assunto (corretto) che la Via Lattea, apparendo come una banda che attraversa il cielo, ha la forma di un disco piatto rotondo e che le nebulose, che hanno forme parzialmente circolari ma per lo piú ellittiche, sono proprio tali dischi visti da diversa direzione rispetto ai loro asse di simmetria. Sebbene molti astronomi condividevano questo parere, esso non si poteva mettere a prova finale, perché non c'era modo di misurare la distanza dalle nebulose. La misura delle distanze é il punto debole dell'astronomia, mentre gli angoli erano misurati con la proverbiale precisione astronomica. La distanza da oggetti relativamente vicini é determinata dalla convenzionale triangolazione con il diametro della orbita terrestre attorno al Sole assunta come base. Per distanze molto piú grande della base sono usati metodi indiretti. Vi é una classe di stelle, chiamate *Cefeidi variabili*, la cui luminositá varia periodicamente nel tempo in un modo molto caratteristico. Questo é stato osservato per primo da Leavitt.<sup>9)</sup> La brillantezza assoluta é connessa al periodo che, tipicamente, é dell'ordine di un mese. Quindi il primo puó essere calcolato dall'ultimo. La distanza dei Cefeidi era pressocché nota quando Hubble inizió

---

<sup>6)</sup> Hubble, E., *Astrophysical Journal*, 44 (1916) 190.

<sup>7)</sup> Hubble, E., *The Realm of the Nebulae*. Yale University Press, New Haven, 1936.

<sup>8)</sup> Immanuel Kant (1724 - 1804).

<sup>9)</sup> Henrietta Swan Leavitt (1868 - 1921).

il suo lavoro. (Ci vorrebbero piú pagine per raccontare come questo risultato sia stato raggiunto). Quella della Cefeide piú lontana potrebbe essere dedotta dalla sua apparente luminosità osservata sulla terra che, essenzialmente, é la luminosità assoluta divisa per il quadrato della distanza. Nel 1925 Hubble pubblicó un esteso articolo, in cui Egli riportó che Egli osservava per un lungo periodo di tempo la nebulosa NGC 6822 e trovó 11 Cefeidi in essa.<sup>10)</sup> Da queste Egli determinó la distanza di quella nebulosa essere 700000 anni luce e concluse:

*N.G.C. 6822 giace lontano oltre il limite del sistema galattico [...] e quindi può servire come un passo avanti per speculazioni concernenti gli abitanti oltre lo spazio.*

Un pó piú tardi Hubble potenzió questi risultati con osservazioni su M33 e M31. Il grande dibattito era finito: **Il mondo consiste di moltissime galassie. Quindi esso é stato anche chiamato *universo di isole*, le galassie essendo le isole. La nostra isola é la Via Lattea; le altre, se visibili, appaiono come nebulose. Hubble stesso, a proposito, usava il termine *nebulae* e non usava l'attuale parola comune *galassia*.**

La velocità degli oggetti celesti rispetto ad un osservatore sulla Terra può essere misurata osservando l'effetto Doppler della luce che ci arriva dall'oggetto. La luce con una data lunghezza d'onda nel sistema a riposo dell'oggetto ci appare di lunghezza d'onda piú grande, cioè shiftata verso il rosso dello spettro visibile, se l'oggetto si allontana da noi. Si parla, come sappiamo, di *red shift*. Esso viene osservato confrontando le linee spettrali conosciute da oggetti celesti con le linee corrispondenti da sorgenti di laboratorio. Era conosciuto, in particolare, attraverso il lavoro di Slipher<sup>11)</sup>, che le nebulose possono avere grandi redshifts. Nella sua pubblicazione di sei pagine del 1929<sup>12)</sup> Hubble presenta misure di velocità  $v$  e distanza  $r$  per 24 nebulose e trova che, entro gli errori, vi é una diretta proporzionalità fra le due quantità. La relazione é scritta nella forma:

$$\boxed{v = H_0 r} \quad \text{Legge di Hubble} \quad (28.11.1)$$

ed é chiamata **legge di Hubble**,  $H_0$  essendo la **costante di Hubble** che ha dimensioni dell'inverso del tempo ( $s^{-1}$ ).

Cinque anni prima, evidenza per la nascita del red shift con la distanza delle galassie fu pubblicata da Wirtz<sup>13)</sup> in Kiel.<sup>14)</sup> Egli stimó le distanze relative delle nebulose dalle loro apparenti dimensioni, assumendo che le loro dimensioni reali erano circa eguali. Dai dati che egli usó Wirtz concluse che l'aumento della velocità era meno pronunciato rispetto a quello trovato piú tardi da Hubble (distanza logaritmica, non lineare) La sua importante osservazione fu largamente ignorata.

**La nebulosa piú veloce nell'articolo di Hubble ha una velocità radiale di 1000 km/s.** Nel giornale, in cui era pubblicato, l'articolo di Hubble era preceduto da

<sup>10)</sup> Hubble, E., *Astrophysical Journal*, 62 (1925) 409.

<sup>11)</sup> Vesto Melvin Slipher (1875 - 1969)

<sup>12)</sup> Hubble, E., *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 15 (1929) 168.

<sup>13)</sup> Carl Wirtz (1876 - 1939)

<sup>14)</sup> Wirtz, C., *Astronomische Nachrichten*, 222 (1924) 21.



un articolo di Humason,<sup>14)</sup> che riportava una nebulosa vicino essere quattro volte piú veloce.<sup>15)</sup> I due uomini hanno lavorato insieme dall'arrivo di Hubble a Mount Wilson. A quel tempo Humason era *night assistant*, prendendosi cura delle questioni tecniche, sviluppando lastre, e simili. La sua prima posizione in montagna é stata quella di assistente e bidello. Le sue capacità e il suo vivo interesse per l'astronomia gli hanno infine fatto raggiungere la posizione di assistente astronomo, una posizione come quella che Hubble aveva quando é arrivato al Monte Wilson. Nel 1931, Hubble ed Humason pubblicarono un comprensivo articolo<sup>16)</sup> contenente dati su 40 nuovi oggetti ed estendente di un fattore di circa 20 l'intervallo di distanze e velocità rispetto all'articolo di Hubble del 1929. La legge di Hubble ancora vale fino ad oggi. Il valore numerico della *costante di Hubble*, tuttavia, é variato rispetto a quello che Hubble stesso aveva ottenuto. Questo é dovuto ad una migliore comprensione della misura delle distanze extragalattiche.

La legge di Hubble ha un numero di implicazioni importanti. Come abbiamo detto all'inizio, essa mostra che l'Universo é in espansione. Essa individua una particolare classe di soluzioni delle equazioni del campo di Einstein della relatività generale. Altre soluzioni permesse descriverebbero un Universo statico o un Universo che si contrae. Einstein stesso, nel 1915, informato dagli astronomi che le strutture principali osservate nel cielo non hanno dato indicazioni di cambiamento, aveva scritto una soluzione statica. Il fatto che tutte le galassie si allontanano da noi non significa che noi siamo al centro dell'Universo. Hubble stesso usó l'analogia con un pallone che viene gonfiato. Dei punti dipinti sulla superficie del palloncino allora si allontanano l'uno dall'altro. **La legge di Hubble suggerisce che in qualche istante iniziale tutta la materia era concentrata in una piccola regione e da allora é in espansione nello spazio. Questa é la teoria del *Big Bang*, un termine coniato da Hoyle.**<sup>17)</sup> Nel piú semplice modello del *Big Bang* l'età  $T$  dell'Universo é l'inverso della costante di Hubble. Il suo valore numerico si accorda, entro gli errori, con quello trovato in altri modi. Hubble stesso, che, attraverso le sue osservazioni e analisi, fornì molte informazioni sul cosmo, si tenne lontano dalla cosmologia teorica, per non parlare di speculazioni. Nemmeno un commento sull'importanza della semplice proporzionalità formale della sua legge può essere trovata nei suoi scritti.

Nel 1990, fu lanciato un satellite con a bordo un potente telescopio, *Hubble Space Telescope*. Nei primi quindici anni di operazioni esso prese 700000 fotografie. Esso aggiunse considerevole conoscenza sul cosmo ed anche, poiché la maggior parte delle spettacolari fotografie furono spesso riprodotte nei libri, diede molta attenzione al nome di Hubble.

---

<sup>14)</sup> Milton La Salle Humason (1891 - 1972).

<sup>15)</sup> Humason, M. L., Proceedings of the National Academy of Sciences, 15 (1929) 167.

<sup>16)</sup> Hubble, E., and Humason, M. L., Astrophysical Journal, 74 (1931) 43.

<sup>17)</sup> Sir Fred Hoyle (1915 - 2001).

## 28.12 - Radiazione di Corpo Nero dall'Universo Primordiale†

Il Rumore Radio Atmosferico (**A**tmospheric **R**adio **N**oise - **ARN**) chiamato anche "static"<sup>1)</sup> é causato da scariche elettriche fra le nuvole che si verificano naturalmente nei temporali con fulmini nell'atmosfera terrestre. Esse contengono una vasta gamma di spettro radio e la loro intensit  varia in rapporto inverso alla frequenza. I loro effetti sono significativi fino a 30 MHz che comprende le bande di trasmissione. In tutti i sistemi di radio comunicazione il rumore   un limite alla soddisfacente ricezione dei segnali radio.

**I fondamenti della Radio Astronomia furono posti nel 1933 nei Bell Telephone Laboratories in Holmdel, New Jersey.** Un giovane fisico dell'Oklahoma, Karl Guthe Jansky (1905-1950), ebbe assegnato il compito di studiare il fenomeno chiamato statico, disturbante la comunicazione, con onde radio corte. Lavorando con un'antenna ruotabile ad una lunghezza d'onda di 14.5 metri ( $\nu \simeq 21 \text{ MHz}$ )<sup>2)</sup> identific  sorgenti di rumore dovuti a temporali vicini e lontani nonch  provenienti dalla nostra Galassia.<sup>3)</sup> Lo sviluppo del Radar per usi militari port  alla costruzioni di ricevitori sensibili alle lunghezze d'onde centimetriche o al di sotto, che furono posti alla utilizzazione per applicazioni scientifiche dopo la seconda guerra mondiale. Il gas interstellare, che contiene atomi e molecole emittenti radiazione in questo range di frequenze, per esempio Idrogeno *H* e gruppi ciano *CN*, diventarono cos  "visibili". La Radio Astronomia divenne un nuovo campo di ricerca. **Nel 1965, sempre nei Bell Labs in Holmdel, fu scoperta un particolare tipo di radiazione proveniente dallo spazio da Penzias<sup>4)</sup> e Wilson<sup>5)</sup>, due fisici che erano diventati Radioastronomi.**

Penzias nacque a Monaco in Germania. Egli e la sua famiglia furono vittime delle persecuzioni contro gli Ebrei. Essi furono posti in un treno per essere deportati in Polonia. Qualche giorno pi  tardi si trovarono di nuovo a Monaco e furono lasciati andare in Inghilterra nella primavera del 1939. Alla fine di quell'anno la famiglia si spost  a New York. Penzias cominci  a studiare Ingegneria Chimica al City College di New York, ma presto cambi  in Fisica. Egli fu accettato alla Columbia University e svolse la sua tesi di dottorato (Ph.D.) sotto la direzione di Charles Townes<sup>5)</sup>, costruendo un maser come

---

† Siegmund Brandt: The Harvest of a Century - Discovery of Modern Physics in 100 Episodes - Oxford University Press, 2009, pag.418.

<sup>1)</sup> D.R. Lakshmi, Mangal Sain, M.M. Gupta and Raksha Marwah: Atmospheric radio noise measurements in India - 1989 Sixth International Conference on Antennas and Propagation, ICAP 89 (Conf. Publ. No.301) Vol 2, Page(s): 36-39.

<sup>2)</sup> Karl G. Jansky: Directional Studies of Atmospherics at High Frequencies - Proceedings of the Institute of Radio Engineers, Volume 20, Number 12, December, 1932 pp. 1920-1932.

<sup>3)</sup> Karl G. Jansky: Electrical Disturbances Apparently of Extraterrestrial Origin - Proceedings of the Institute of Radio Engineers, Volume 21, Number 10, October, 1933 pp. 1387-1398.

<sup>4)</sup> Arno Allan Penzias nato a Monaco nel 1933: Premio Nobel per la Fisica del 1978.

<sup>5)</sup> Robert Woodrow Wilson nato in Texas nel 1936: Premio Nobel per la Fisica del 1978.

<sup>5)</sup> Chales Hard Townes, (Greenville, Carolina del Sud, 28 Luglio 1915 - Oakland, Ca-

amplificatore per osservazioni radioastronomiche. Nel 1961 Penzias entró a far parte dei Bell Labs, dove sarebbe diventato vice presidente.

Wilson, studió Fisica alla Rice University in Houston. Continuó gli studi a Caltech (California Institute of Technology), dove era stato da poco costruito the 'Owens Valley Radio Observatory', e presto si trovó a fare ricerca in Radio Astronomia. Attraverso il suo lavoro di tesi, che richiedeva masers, entró in contatto con i Bell Labs e vi divenne ricercatore nel 1963.

Poco dopo, Penzias e Wilson cominciarono a costruire un radio telescopio particolarmente sensibile ad una frequenza di 7.35 centimetri ( $\simeq 4 GHz$ ). Il suo componente piú largo era un'antenna a horn con una apertura di 20 piedi ( $\simeq 6 metri$ ). Tale telescopio era stato originariamente costruito per prove di telecomunicazioni transatlantiche usando un primo satellite chiamato Echo, che essenzialmente era un grande pallone con una superficie metallizzata, riflettente le onde che esso riceveva. La radiazione, entrando nell'antenna attraverso l'apertura trapezoidale, cadeva su uno specchio parabolico e veniva focalizzata nel collo dell'horn. Qui, con un filtro appropriato, veniva selezionata una banda di frequenza stretta e la sua intensitá veniva misurata da un radiometro e registrata. L'antenna era altamente direttiva, sopprimendo fortemente i segnali provenienti da direzioni diverse da quelle previste. Il radiometro era un amplificatore maser, raffreddato alla temperatura dell'elio liquido ( $4.2 K$ ). Il segnale d'uscita dal radiometro é dato dalla radiazione ricevuta dall'antenna piú il rumore generato nel sistema di rivelazione stesso, in particolare nell'antenna e nel radiometro. La lunghezza d'onda o lo spettro in frequenza di tale rumore é ben descritto dalla legge di radiazione di Planck e quindi caratterizzata da una temperatura. Penzias e Wilson calibrarono accuratamente il loro dispositivo con un trasmettitore esterno, lo compararono alla radiazione di un 'corpo nero' mantenuta alla temperatura dell'elio liquido e furono in grado di attribuire le effettive temperature di rumore, descriventi contributi nel segnale d'uscita, alle differenti parti del loro sistema, al suolo, su cui l'antenna era montata, e all'aria sopra l'antenna.

**Quando puntarono il loro telescopio al cielo, Penzias e Wilson ossevarono, in aggiunta ai differenti contributi di rumore, un eccesso di segnale a cui venne attribuita una temperatura di  $(3.5 \pm 1.0)K$ . La radiazione che lo causava era 'entro i limiti delle loro osservazioni, isotropa, non polarizzata, e libera da variazioni stagionali'.<sup>6)</sup>** Un risultato come questo era stato previsto, anche se non da Penzias e Wilson, che avevano inteso il loro sistema per l'osservazione di oggetti astronomici localizzati. Infatti, alla Princeton University, solo circa 30 miglia da Holmdel, un gruppo di scienziati guidato da Dicke aveva preparato un simile esperimento.

Dicke<sup>7)</sup> aveva conseguito il suo Ph.D. all'Universitá di Rochester nel 1941 e aveva lavorato sui radar durante la guerra. Nel 1946, Egli fu il primo ad usare la combinazione di una (piccola) antenna ad horn ed un radiometro (senza amplificatore laser, naturalmente)

---

lifornia, 27 Gennaio 2015) - Nel 1964 ricevette il Premio Nobel per la Fisica, assieme a Nikolaj Gennadievic Basov e Aleksandr Michailovic Prochorov, per il fondamentale lavoro nel campo dell'elettronica quantistica, che ha portato alla costruzione di oscillatori e amplificatori basati sul principio del maser-laser.

<sup>6)</sup> Penzias, A. A. and Wilson, R. W.: Astrophysical Journal, 142 (1965) pag. 419.

<sup>7)</sup> Robert Henry Dicke (1916-1997).

per studiare la radiazione dal vapore acqueo atmosferico e anche dal sole e dalla luna ed aveva dato un limite superiore di circa  $20 K$  sulla temperatura 'di radiazione della materia cosmica alle lunghezze d'onda del radiometro' che erano attorno ad  $1 \text{ cm}$ .<sup>8)</sup> Anche Dicke nel 1946 venne a Princeton. Egli cominció ad interessarsi di Cosmologia ed, in particolare, della possibilitá di un Universo oscillante.

Il primo a scrivere equazioni per descrivere l'Universo nel contesto della Relativitá Generale, giá nel 1917, fu Einstein stesso.<sup>8)</sup> Il suo modello é quello di un Universo omogeneo ed isotropo, cioé, la massa che esso contiene ha la stessa densitá ovunque e non vi é alcuna direzione privilegiata. (Queste ipotesi possono descrivere il mondo reale con la sua densitá di massa mediata su distanze sufficientemente grandi). Poiché non vi era alcuna evidenza astronomica per una variazione nel tempo del mondo su una grande scala, Einstein cercó una soluzione indipendente dal tempo della sua equazione. Egli trovó una soluzione, a spese di avere introdotto nella sua equazione un termine addizionale, contenente quella che é ora chiamata la **costante Cosmologica**.

Nel 1922 il matematico, meteorologo e fisico russo Friedmann,<sup>9)</sup> in Pietroburgo, mostró<sup>10)</sup> che le equazioni (con o senza costante cosmologica) ammettevano anche soluzioni dipendenti dal tempo. Nella Relativitá Generale la curvatura dello spazio é determinata dalle distribuzioni delle masse nello spazio, e, a sua volta influenza il moto delle masse. Il termine cosmologico di Einstein, se presente, contribuisce anche alla curvatura. La curvatura é costante in tutto lo spazio ma puó cambiare con il tempo. Nel suo lavoro,<sup>11)</sup> intitolato *On the Curvature of Space*, Friedmann discusse i casi di una curvatura monotonicamente decrescente e di una curvatura periodica. Nel primo caso la curvatura diminuisce con il tempo ma rimane positiva (o si avvicina allo zero); l'Universo continua ad espandersi. Estrapolando indietro, si trova un tempo corrispondente alla curvatura infinita. Friedmann chiamó questo istante, matematicamente descritto da una singolaritá, **la Creazione del Mondo**. Nel secondo caso la curvatura é periodica, scende fino a un certo tempo, poi sale verso la singolaritá, cade di nuovo, ecc.; l'Universo periodicamente si espande e si contrae. Il tempo per completare un intero ciclo era chiamato da Friedmann *world period*. Egli sottolineó che la conoscenza astronomica era assolutamente insufficiente per decidere quale caso si potesse applicare all'Universo. Ma ha portato un esempio numerico: "Se noi assumiamo [la costante cosmologica essere]  $\lambda = 0$  e [la massa dell'Universo essere]  $M = 5 \cdot 10^{21}$  masse solari, allora il *world period* diventa dell'ordine di  $10^{10}$  anni".

Einstein pensó di aver individuato un errore nel ragionamento di Friedmann e, in breve, affermava che le conclusioni di questo ultimo non erano valide. Tuttavia, quando Friedmann gli spedí una lettera con i dettagli dei suoi calcoli, Einstein non esitó a ritirare le sue obiezioni e chiamó i risultati di Friedmann "corretti e chiarificatori". Friedmann morí di febbre tifoide all'età di soli trentasette anni, quattro anni prima che Hubble pubblicasse la sua osservazione di un universo in espansione. Alla fine degli anni 1920 e 1930 venivano

---

<sup>8)</sup> Dicke, R. H. et al. *Physical Review*, 70 (1946) 340.

<sup>8)</sup> Einstein, A., *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin)*, (1911) 142.

<sup>9)</sup> Aleksandr Aleksandrovich Friedmann (1888-1925).

<sup>10)</sup> Tropp, E. A., Frenkel, V. Y., and Chernin, A. D., *Alexander A. Friedmann: The Man who Made the Universe Expand. Cambridge University Press, Cambridge, 1993*.

<sup>11)</sup> Friedmann, A. *Zeitschrift für Physik*, 10 (1922) 377.

studiati modelli cosmologici, tra gli altri, da Einstein, da Eddington, e, in particolare, da Lemaitre,<sup>12)</sup> un astrofisico belga che era anche un prete cattolico e un canonico. Lemaitre si riferì alla singolarità di Friedmann non come 'la creazione del mondo', ma come 'l'atomo primordiale' ('l'atome primitif' nella sua nativa Francia). Sullo stato attuale dell'Universo, che si è evoluto, Egli scrive:<sup>13)</sup>

*L'evoluzione del mondo può essere paragonata ad una visualizzazione di fuochi di artifico appena finiti: alcuni piccoli fuochi rossi, cenere e fumo. In piedi sulla cenere fredda, vediamo la lenta dissolvenza dei soli, e cerchiamo di ricordare le origini scomparse dei mondi.*

Questo era più o meno l'obiettivo di Dicke. Peebles<sup>14)</sup> riferisce<sup>15)</sup> che Dicke era impressionato dalla Cosmologia di Lemaitre, specificamente di un Universo oscillante. Alla fine di una fase di contrazione, la temperatura sarebbe stata così elevata che tutti gli atomi e nuclei erano dissociati nei loro costituenti. La radiazione elettromagnetica e le particelle materiali (elettroni e nucleoni) sarebbero stati in equilibrio termodinamico, formando un plasma molto caldo. Lo spettro di radiazione sarebbe stato dato dalla legge di Planck e determinata da un solo parametro, la temperatura. Dicke considera possibile che i resti di quella radiazione, raffreddati dall'espansione dell'universo, si potessero trovare sperimentalmente. Egli chiese a Roll e Wilkinson<sup>16)</sup> di costruire un'antenna e un radionetro e cercare di rivelare questa radiazione. Inoltre, egli suggeriva che Peebles studiasse l'implicazione della rivelazione o non rivelazione. Così facendo, Peebles divenne consapevole di una predizione quantitativa di quella che è ora chiamata la (**C**osmic **B**ackground **R**adiation - **CBR**) o anche (**C**osmic **M**icrowave **B**ackground - **CMB**).

La previsione risale al lavoro di Gamow<sup>17)</sup> che ha studiato in Pietrograd quando Friedmann era un professore e che abbiamo incontrato quando applicava la meccanica quantistica alla fisica nucleare. Gamow è ritornato in Unione Sovietica nel 1931 per diventare professore in Leningrad ma presto trovò l'atmosfera troppo opprimente. Insieme alla moglie fece diversi tentativi falliti per fuggire; uno fu quello di provare con le pagaie in un kayak attraverso il Mar Nero verso la Turchia. Quando gli fu permesso di partecipare nel 1933 al Congresso Solvay a Bruxelles, accompagnato da sua moglie, egli non ritornò più ma accettò un posto di professore alla George Washington University in Washington, D.C. Gamow introdusse la Fisica Nucleare nella Cosmologia, che, fino ad allora, era basata soltanto sulla Teoria della Relatività Generale, cioè sulla Gravitazione. Insieme con

---

<sup>12)</sup> Georges Henry Lemaitre (Charleroi (Belgio) 17 Luglio 1894 - Louvain (Belgio) 20 Giugno 1966).

<sup>13)</sup> Lemaitre, G., *The Primeval Atom: An Essay in Cosmogony*. Van Nostrand, Toronto, 1950.

<sup>14)</sup> Philip James Peebles: (Winnipeg (Canada) 1935).

<sup>15)</sup> Peebles, P. J. E., *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, Princeton, 1993.

<sup>16)</sup> David Todd Wilkinson (1935 - 2002).

<sup>17)</sup> Georgij Antonovic Gamov, poi cambiato in George Gamow: Odessa, Ucraina, 4 Marzo 1904 - Boulder, Colorado, stati Uniti, 19 Agosto 1968.

il suo studente Ph.D. Alpher<sup>18)</sup>, egli studiò la formazione di nuclei piú pesanti da protoni e neutroni nell'Universo Primordiale. Nel 1948, egli trovó che la variazione delle condizioni dovuta all'espansione dell'Universo era necessaria per spiegare la distribuzione delle abbondanze osservate dei diversi nuclei. (Ora si crede che solo nuclei fino a quelli di elio, litio e berillio siano stati formati cosí presto e che elementi piú pesanti siano stati composti in stelle). Gamow, che aveva un senso di umorismo altamente sviluppato, convinse Bethe a essere coautore della pubblicazione con Alpher, affinché potesse essere ricordata come  $\alpha\beta\gamma$  ossia con le iniziali dei tre autori.<sup>19)</sup> Anche nel 1948, Gamow presentó un semplice argomento dal quale egli ottenne la temperatura dell'Universo e la sua densità di materia al tempo della formazione del deuterio.<sup>20),21)</sup> Utilizzando questi valori e le conosciute proprietà termodinamiche dell'Universo in espansione, l'attuale temperatura della Cosmic Microwave Background puó essere valutata dalla attuale densità di massa.

### Condizione di Gamow e Temperatura CMB

Gamow consideró il primo passo della nucleosintesi, la formazione di un deutone  $d$  da un protone  $p$  e un neutrone  $n$ , in cui l'energia superflua é rilasciata sotto la forma di un quanto  $\gamma$ .



La sezione d'urto  $\sigma$  per questa reazione era conosciuta da esperimenti di fisica nucleare. La reazione diventa importante alla temperature  $T = 10^9 K$ , corrispondente alla velocità di un nucleone di  $v = 5 \cdot 10^8 \text{ cm s}^{-1}$ . (A piú alte temperature il deutone si dissocia attraverso le collisioni con fotoni o nucleoni). Gamow trovó la condizione  $\sigma v \Delta t n_p \simeq 1$ , connettente le quattro quantità  $\sigma$  (conosciuta dagli esperimenti),  $v$  (conosciuta dalla temperatura), il tempo  $\Delta t$ , in cui avviene la maggior parte della reazione (1), e la densità del protone  $n_p$  (o, generalmente, la densità del nucleone  $n_N$ ). Con una ipotesi ragionevole per  $\Delta t$  la densità del nucleone  $n_N$  e la densità di massa  $\rho = mn_N$  potrebbe essere calcolata ( $m$  é la massa del nucleone). Un'ipotesi per  $\Delta t$  é la vita media del neutrone<sup>21)</sup>, perché il neutrone deve interagire prima di decadere. Gamow trovó a  $T = 10^9 K$  una densità di materia di  $\rho = 10^{-6} \text{ gcm}^{-3}$ , mentre la densità di radiazione (la sua densità di energia divisa per  $c^2$ ) era molto piú grande, circa  $10 \text{ gcm}^{-3}$ . Quindi, quando l'universo si espande, la radiazione si raffredda, essenzialmente, come se nessuna materia fosse presente. Se  $R$  é una distanza fra due punti, aumentando durante l'espansione, allora la temperatura é proporzionale all'inverso di  $R$ ,  $T \propto R^{-1}$ ; la densità é inversamente proporzionale alla terza potenza di  $R$ ,  $\rho \propto R^{-3}$ . Questo conduce alla semplice relazione fra due temperature  $T_1, T_2$  dell'Universo e le corrispondenti densità di massa sono  $\rho_1, \rho_2$ ,

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{1/3}. \quad (2)$$

---

<sup>18)</sup> Ralph Asher Alpher (1921-2007).

<sup>19)</sup> Alpher, R. A., Bethe, H., and Gamow, G., *Physical Review*, 73 (1948) 803.

<sup>20)</sup> Gamow, G., *Physical Review*, 74 (1948) 505.

<sup>21)</sup> Gamow, G., *Nature*, 162 (1948) 680.

Gamow, tuttavia, utilizzò l'informazione ottenuta sull'universo Primordiale per spiegare lo sviluppo delle Galassie ed esprimere la loro dimensione in termini di costanti fondamentali. Ma nel 1949 Alpher e il suo collega Herman,<sup>22),23)</sup> prendendo come attuale densità di massa un valore determinato da Hubble,  $10^{-30} \text{ gcm}^{-3}$ , arrivarono ad una temperatura di circa 5 K.

Poiché il gruppo di Dicke a Princeton non si aspettava alcuna competizione, Peebles fece un seminario alla John Hopkins University in Baltimore sulla Radiazione Cosmica di Fondo e la loro speranza di rivelarla. Le parole arrivarono a Penzias e Wilson. I gruppi da Holmdel e Princeton si incontrarono e concordarono sulla natura del segnale osservato ai Bell Labs. Due pubblicazioni furono preparate per apparire simultaneamente in *Astrophysical Journal*. La prima, dal gruppo di Princeton<sup>24)</sup>, intitolata Cosmic Black-Body Radiation, si concentrava su considerazioni cosmologiche. La seconda, da Penzias and Wilson<sup>6)</sup>, porta il sobrio titolo *A measurement of Excess Antenna Temperature at 4800 Mc/s* e spiega la nuda osservazione. Agli inizi del 1966, Roll e Wilkinson riportarono i risultati ottenuti con i loro strumenti. Ad una lunghezza di 3.2 cm essi osservarono un segnale corrispondente ad una temperatura di  $(3.0 \pm 0.5)K$ .<sup>25)</sup>

**Il concetto dell'Universo in espansione, in evoluzione da uno stato iniziale molto denso e caldo, è ora generalmente chiamato *modello del Bing Bang*.** Sembra che il nome *Bing Bang* fu coniato da Hoyle, in un dibattito radiofonico transatlantico con Gamow, trasmesso dalla BBC nel 1949. Nella discussione, che 'apparentemente diventò calda',<sup>26)</sup> Hoyle si opponeva al punto di vista di Gamow.

**Cosmic background Radiation, oltre alla legge di Hubble divenne il principale pilastro empirico del modello Big Bang e fu studiato in grande dettaglio.** Un nuovo livello di precisione fu raggiunto quando un satellite fu usato come piattaforma per i rivelatori di radiazione. Dopo quindici anni di preparazione il satellite **COBE - Cosmic Background Explorer** - fu lanciato nel 1984. Esso trasportava tre strumenti complementari: il **Diffuse Infrared Background Experiment - DIRBE**, the **Far Infrared Absolute Spectrophotometer - FIRAS**, e **Differential Microwave Radiometer - DMR**.<sup>27)</sup> Più di 1000 persone lavorarono per il progetto COBE. Il leader del progetto COBE ed anche il responsabile di FIRAS era Mather<sup>28)</sup> da NASA's Goddard Space Flight Center in Greenbelt, Maryland. Leaders dei gruppi DIRBE e DMR erano Michael Hauser (anche da Goddard) e Smoot<sup>29)</sup> da Berkeley, rispettivamente. La scelta dell'orbita del satellite permise l'osservazione del cielo intero. Gli strumenti erano protetti da uno schermo dalla

---

<sup>22)</sup> Robert C. Herman (1914 - 1997).

<sup>23)</sup> Alpher, R. A. and Herman R. C., *Physical Review*, 75 (1949) 1089.

<sup>24)</sup> Dicke, R. H., Peebles, P. J. E., Roll, P. G., and Wilkinson, D. T., *Astrophysical Journal*, 142 (1965) 414.

<sup>25)</sup> Roll, P. G. and Wilkinson, D. T., *Physical Review Letter*, 16 (1966) 405.

<sup>26)</sup> Alpher, R. A. and Herman, R., *Genesis of the Big Bang*. Oxford University Press, Oxford, 2001.

<sup>27)</sup> Bogges, N. W. et al., *Astrophysical Journal*, 397 (1992) 420.

<sup>28)</sup> John C. Mather (nato nel 1946, vincitore del premio Nobel per la Fisica nel 2006).

<sup>29)</sup> George F. Smoot (nato nel 1945, vincitore del premio Nobel per la Fisica nel 2006).

radiazione termica della Terra e del Sole.

FIRAS misurava l'intensità spettrale nel range di lunghezze d'onda compreso fra 0.1 mm e 10 mm. Esso confrontava il segnale ricevuto per mezzo di una antenna ad horn, sottostante un angolo di  $7^{\circ}$  del cielo, con quello di un corpo nero a bordo. Le differenze fra la legge della radiazione di Planck e quella osservata erano meno di cinquanta parti per milione del valore massimo dello spettro. La temperatura della Cosmic Background Radiation era misurata  $(2.78 \pm 0.004) K$ .<sup>30)</sup>

DMR é stato progettato per registrare possibili piccole differenze di temperatura in tutto il cielo. Due antenne ad horn di  $7^{\circ}$  appositamente progettate hanno guardato le patch del cielo, che erano  $60^{\circ}$  e la differenza dei due segnali é stata misurata, mentre tutto il cielo é stato scansionato. **Piccole fluttuazioni di temperatura furono effettivamente osservate**<sup>31)</sup> come previsto dai cosmologi. Essi pensavano di dare un'idea dell'inizio della composizione (clustering) della materia nell'universo precoce che, alla fine, ha portato alla formazione di galassie. Mentre l'universo si raffreddava, c'era ancora qualche interazione tra radiazioni e materia finché la temperatura era abbastanza alta, circa  $10^5 K$ , per la ionizzazione degli atomi di idrogeno. Le fluttuazioni di materia a quel punto sono ancora conservate in fluttuazioni di temperatura delle radiazioni cosmiche.

---

<sup>30)</sup> Fixsen, D. J. et al., *Astrophysical Journal*, 473 (1996) 576.

<sup>31)</sup> Bennett, C. L. et al., *Astrophysical Journal*, 464 (1996) L1.



**Legge di Planck - Radiazione emessa da un corpo nero**

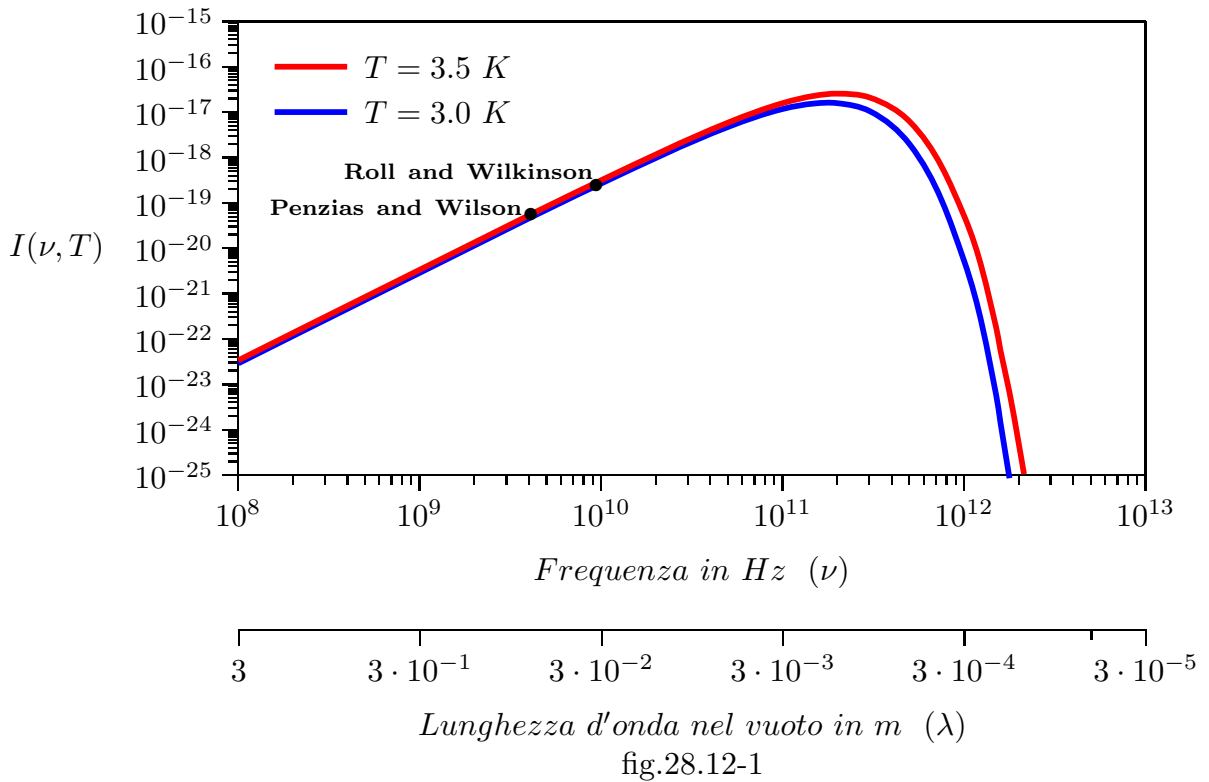


fig.28.12-1

Essendo:

$$I(\nu, T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2 \left( e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1 \right)} \quad \left[ \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2 \text{sec}^{-1}} \right] \quad (28.12.1)$$

energia raggiante sull' unità di superficie, sull' unità di tempo  
per intervallo unitario di frequenza in corrispondenza  
della frequenza  $\nu$  e della temperatura  $T$ .

dove  $h = 6.62517 \cdot 10^{-34} \text{ J sec}$ ;  $K = 1.38044 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

### 28.13 - Le stelle Pulsar

La prima osservazione di una 'pulsar' risale al 1967 a opera di **Antony Hewish, Jocelyn Bell** ed altri.<sup>1)</sup> Questi scienziati attraverso una serie di antenne radio, rivelarono la presenza di una misteriosa sorgente pulsante. Inizialmente proprio per la sua regolarità, venne associata ad un segnale di origine artificiale e chiamato simpaticamente '**LGM**' (**L**ittle **G**reen **M**en, *piccoli omini verdi*), perchè qualcuno scherzò sul fatto che, essendo così regolari, potessero essere segnali trasmessi da una qualche forma di vita extraterrestre. Dopo molte speculazioni, una spiegazione più prosaica fu trovata in una stella di neutroni, un oggetto fino ad allora solo ipotizzato. Per la scoperta Hewish ebbe il premio Nobel per la Fisica nel 1974, premio che però trascurò il contributo della Bell che riceverà 44 anni dopo lo Special Breakthrough Prize con un premio in denaro di 3 milioni di dollari.

Nel 1968 un piccolo gruppo di ricercatori che lavorava con un nuovo radiotelescopio all'Università di Cambridge (U.K.) ebbe la sorpresa di scoprire che i deboli e spasmodici segnali radio provenienti da un punto fra le stelle risultavano, ad una analisi più accurata, **costituiti da una successione di impulsi intervallati con una regolarità paragonabile a quella di un segnale orario radiofonico**. La figura seguente 28.13-1 riporta la sequenza di impulsi ripresa dall'articolo originale del riferimento <sup>1)</sup>.

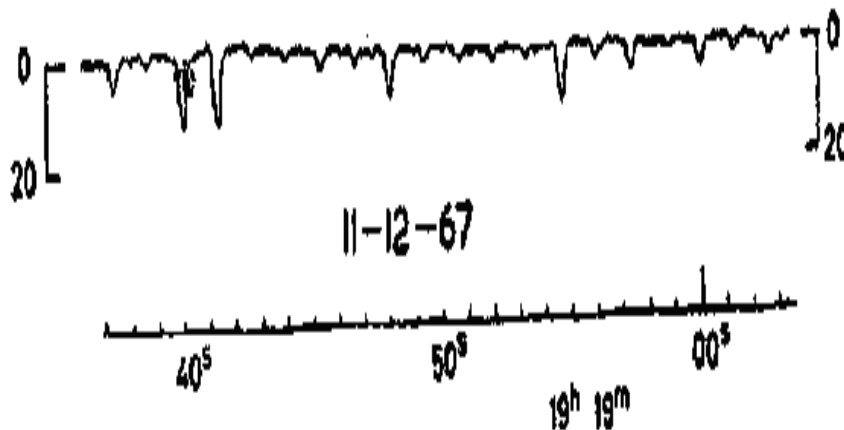


fig.28.13-1

Nel luglio del 1967, un grande telescopio operante ad una frequenza di 81.5 MHz cominciò ad essere utilizzato nel *Mullard Radio Astronomy Observatory* situato circa 8 km a sud ovest di Cambridge, in Inghilterra. Indagini sistematiche nell'esplorazione del cielo cominciarono nel mese di Novembre e mostrarono che i segnali radio, quando presenti, **consistevano di una serie di impulsi di durata circa 0.3 secondi ciascuno e con un periodo di ripetizione di circa 1.337 secondi che ben presto si scoprì essere sempre lo stesso con estrema accuratezza**. Ulteriori osservazioni hanno mostrato che

<sup>1)</sup> A. Hewish, S. J. Bell, J. D. H. Pilkington, P. F. Scott, R. A. Collins: Observation of a Rapidly Pulsating Radio Pulse - Nature vol. 217, February 24, pag. 709 - 713, 1968.

il periodo vero è costante per più di 1 parte su  $10^7$  anche se vi è una sistematica variazione dovuta al moto orbitale della Terra.

La particolare natura di questi segnali inizialmente suggeriva una origine in termini di trasmissioni fatte dall'uomo che possono nascere da sonde dello spazio profondo, da radar planetari o da riflessione di segnali terrestri dalla Luna. Nessuna di queste interpretazioni, può, tuttavia essere accettata perchè l'assenza di ogni parallasse mostra che la sorgente giace lontano fuori dal sistema solare. Una ricerca preliminare di ulteriori sorgenti pulsanti ha già rivelato la presenza di tre altre aventi notevoli proprietà simili che suggerisce che questo tipo di sorgente può essere relativamente comune con una densità di flusso bassa.

**L'antenna consisteva di un array rettangolare contenente 2048 dipoli ad onda intera disposti in 16 righe di 128 elementi. Ogni riga è lunga 470 metri nella direzione E-W e l'estensione dell'array nella direzione N-S è di 45 m. La figura 28.13-1 mostra la regolare periodicità degli impulsi e la caratteristica variazione irregolare dell'ampiezza degli impulsi.**

Negli Esercizi svolti di Campi elettromagnetici sono riportati i seguenti numeri riguardanti le stelle pulsar: esercizio 06-4) n. 4 del 23/01/2006, esercizio 07-4) n. 4 del 26/01/2007, esercizio 07-15) n. 3 del 27/07/2007, esercizio 08-11) n. 3 del 09/05/2008. Essi descrivono il comportamento di un segnale proveniente da una stella pulsare che attraversa la ionosfera ed arriva sulla Terra.