

Principi di Elettronica quantistica

26.1 - Statistica di Boltzmann.

Sappiamo dalla fisica quantistica che un sistema atomico o molecolare può esistere solo in certi stati quantizzati di energia interna del sistema.

Questa energia è generalmente data da diversi fattori, per esempio: energia associata al moto degli elettroni legati, energia vibrazionale di atomi legati insieme nelle molecole, energia rotazionale delle molecole, ed altre.

Indichiamo questi livelli con E_1, E_2, E_3, \dots con E_1 livello energetico (più basso) detto stato fondamentale.

La distribuzione degli atomi sui diversi livelli che caratterizzano un sistema atomico non è casuale ma dipende dalla temperatura cui si trova la sostanza composta dagli atomi stessi secondo una legge statistica detta **legge di Boltzmann**.

Siano N_1 il numero di atomi di energia E_1 ed N_2 il numero di atomi di energia E_2 con $E_2 > E_1$, si ha:

$$\boxed{\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{KT}\right)} \quad (26.1.1)$$

dove $K = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Joule}}{\text{Kelvin}}$, T è la temperatura assoluta.

Legge di Boltzmann - Popolazione dei livelli energetici

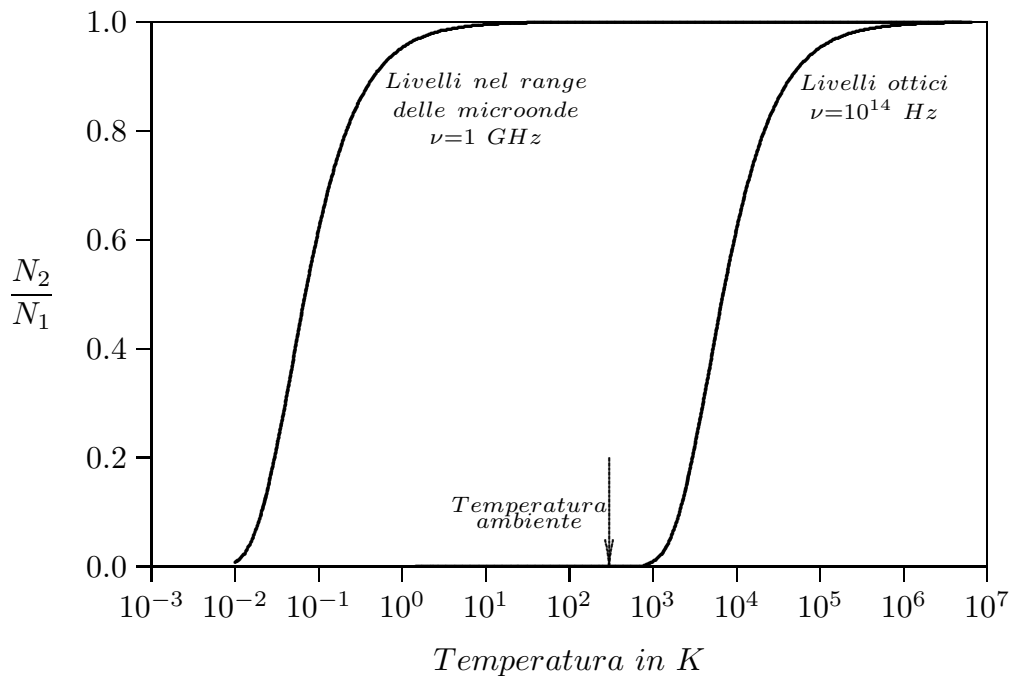


fig.26.1-1

Come si vede dalla figura 26.1-1, a temperatura ambiente $T = 300\text{ K}$ i due livelli a microonde sono quasi egualmente popolati mentre nel range ottico tutti gli atomi si trovano al livello fondamentale. I livelli più energetici sono meno popolati.

26.2 - Radiazione termica.

Consideriamo una cavità a temperatura $T \neq 0$. Esiste in essa radiazione elettromagnetica di origine puramente termica la cui intensità è governata dalla **legge di Planck**:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} \quad \left[\frac{\text{Joules}}{\text{m}^3\text{sec}^{-1}} \right] \quad (26.2.1)$$

↓

—————
energia raggiante per unità di volume per unità di frequenza
in corrispondenza della frequenza ν e della temperatura T .

Oppure:

$$I(\nu, T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\left(e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1 \right)} \quad \left[\frac{\text{Watt}}{\text{m}^2\text{sec}^{-1}} \right] \quad (26.2.2)$$

↓

—————
energia raggiante sull' unità di superficie, sull' unità di tempo
per intervallo unitario di frequenza in corrispondenza
della frequenza ν e della temperatura T .

dove $h = 6.62517 \cdot 10^{-34}\text{ J sec}$; $K = 1.38044 \cdot 10^{-23}\text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$. La (26.2.1) e (26.2.2) si possono esprimere come:

$$\begin{aligned} \rho(\nu) &= \bar{n} h\nu \\ I(\nu, T) &= \bar{\bar{n}} h\nu \end{aligned} \quad (26.2.3)$$

essendo:

\bar{n} = numero di fotoni per unità di volume per intervallo unitario di frequenza.

$\bar{\bar{n}}$ = numero di fotoni per unità di tempo, per unità di superficie per intervallo unitario di frequenza.

Legge di Planck - Radiazione emessa da un corpo nero

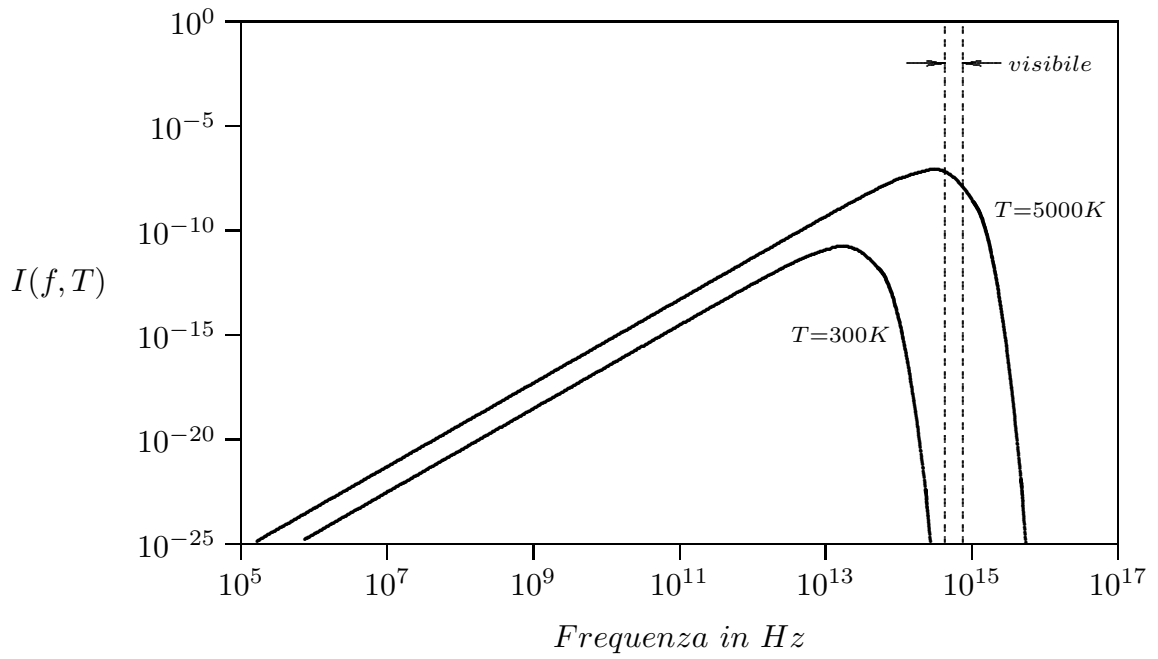


fig.26.2-1

Consideriamo un sistema a due soli livelli:

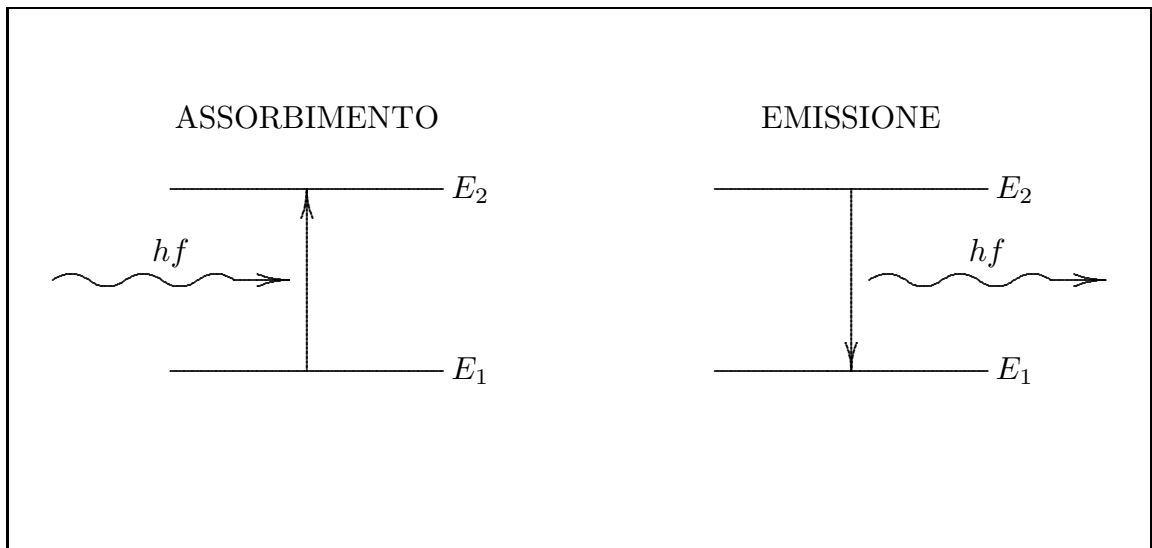


fig.26.2-2

Assorbimento

Un fotone di energia $hf = E_2 - E_1$ colpisca un atomo inizialmente nello stato fondamentale.

In queste condizioni può accadere che l'atomo si porti dal livello 1 al livello 2: è avvenuto un processo di assorbimento.

Sia n_1 il numero di atomi che, al tempo t , si trovano sul livello fondamentale, si definisce probabilità di assorbimento W_{12} la quantità data dalla:

$$\frac{dn_1}{dt} = -W_{12}n_1 \quad (26.2.4)$$



numero di atomi per unità di tempo che subiscono il processo di assorbimento

W_{12} dipende sia dalle caratteristiche del materiale, sia dall'intensità I dell'onda elettromagnetica incidente.

Possiamo scrivere:

$$W_{12} = \gamma_{12}I \quad (26.2.5)$$

γ_{12} dipende solo dal materiale.

Emissione spontanea

Supponiamo che, per cause esterne, quali collisioni con altre molecole di un gas, aumento di temperatura o per un precedente processo di assorbimento, l'atomo si trovi sul livello energetico E_2 .

Spontaneamente l'atomo si può portare al livello di energia inferiore E_1 emettendo radiazione elettromagnetica di frequenza

$$f = \frac{E_2 - E_1}{h} \quad (26.2.6)$$

La transizione dal livello 2 al livello 1 con la conseguente emissione di un quanto hf costituisce un processo di emissione spontanea.

La probabilità che tale processo avvenga è caratterizzata dall'equazione

$$\frac{dn_2}{dt} = -An_2 \quad (26.2.7)$$



numero di atomi per unità di tempo che subiscono il processo di emissione spontanea

A è un coefficiente di proporzionalità detto coefficiente di emissione spontanea e dipende solamente dalle caratteristiche del materiale.

Emissione stimolata

Se un atomo si trova in uno stato eccitato al livello E_2 e viene colpito da radiazione di energia $hf = E_2 - E_1$, l'emissione non è più spontanea ma è stimolata dal quanto incidente.

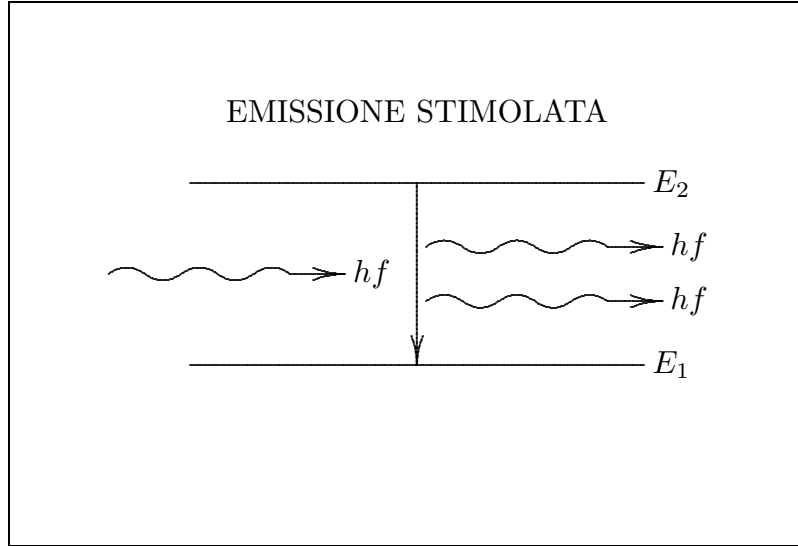


fig.26.2-3

Si definisce probabilità di emissione stimolata come:

$$\frac{dn_2}{dt} = -W_{21}n_2 \quad (26.2.8)$$

W_{21} dipende sia dalle caratteristiche dell'atomo che compie la "transizione $2 \rightarrow 1$ " sia dall'intensità I della radiazione elettromagnetica presente.

Si ha:

$$W_{21} = \gamma_{21}I \quad (26.2.9)$$

γ_{21} è il coefficiente di emissione stimolata, dipende solo dalle caratteristiche del materiale.

Dimostriamo che $\gamma_{21} = \gamma_{12}$

Consideriamo un sistema atomico a due soli livelli e supponiamo che esso si trovi in una cavità a temperatura T in presenza quindi della sola radiazione termica di densità $\rho(\nu)$.

In equilibrio termodinamico si ha:

$$I(\nu)\gamma_{21}n_2 + An_2 = \gamma_{12}I(\nu)n_1 \quad (26.2.10)$$

da cui:

$$I(\nu) = \frac{An_2}{\gamma_{12}n_1 - \gamma_{21}n_2} = \frac{A}{\gamma_{12}\frac{n_1}{n_2} - \gamma_{21}} = \frac{A}{\gamma_{12}e^{\frac{h\nu}{KT}} - \gamma_{21}} \quad (26.2.11)$$

che deve essere uguale all'espressione della densità di radiazione termica, uguagliando quindi la (26.2.11) e la (26.2.2) si ha:

$$\frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} = \frac{A}{\gamma_{12} e^{\frac{h\nu}{KT}} - \gamma_{21}} \quad (26.2.12)$$

La (26.2.12) è verificata per

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= \gamma_{21} = \gamma \\ \frac{A}{\gamma} &= \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \end{aligned} \quad (26.2.13)$$

In definitiva è interessante calcolare il seguente rapporto

$$\frac{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{\text{stim.}}}{\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{\text{spont.}}} = \frac{\gamma_{21}}{A} I \quad (26.2.14)$$

Riportiamo nella seguente tabella i valori dei rapporti $\frac{A}{I\gamma}$ tra emissione spontanea ed emissione stimolata per sistemi in equilibrio termodinamico, cioè in presenza di sola radiazione termica:

$$\frac{A}{I\gamma} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{2\pi h\nu^3} \left(e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1 \right) \quad (26.2.15)$$

$$\frac{A}{I\gamma} = e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1 = -\frac{n_2 - n_1}{n_2} \quad (26.2.16)$$

$2\pi f$ (sec ⁻¹)	Temperatura K				
	1	10	100	1000	10000
10 ¹⁰	7.9 · 10 ⁻²	7.6 · 10 ⁻³	7.6 · 10 ⁻⁴	7.6 · 10 ⁻⁵	7.6 · 10 ⁻⁶
10 ¹¹	1.1	7.9 · 10 ⁻²	7.6 · 10 ⁻³	7.6 · 10 ⁻⁴	7.6 · 10 ⁻⁵
10 ¹²	2.1 · 10 ³	1.1	7.9 · 10 ⁻²	7.6 · 10 ⁻³	7.6 · 10 ⁻⁴
10 ¹³	1.5 · 10 ³³	2.1 · 10 ³	1.1	7.9 · 10 ⁻²	7.6 · 10 ⁻³
10 ¹⁴	10 ⁴⁹⁹	1.5 · 10 ³³	2.1 · 10 ³	1.1	7.9 · 10 ⁻²
10 ¹⁵	—	—	1.5 · 10 ³³	2.1 · 10 ³	1.1

Si ha: $\frac{I\gamma}{A} \simeq 1$ per $\lambda = 60\mu \rightarrow 5 \cdot 10^{12}\text{Hz}$ a $T = 300\text{ K}$. A frequenze ottiche è più probabile l'emissione spontanea.

É interessante valutare il solo rapporto

$$\frac{A}{\gamma} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \tag{26.2.17}$$

$\nu(\text{s}^{-1})$	$\frac{A}{\gamma}$
10^6	$2.49 \cdot 10^{-32}$
10^9	$2.49 \cdot 10^{-23}$
10^{10}	$2.49 \cdot 10^{-20}$
10^{15}	$2.49 \cdot 10^{-5}$

26.3 - Inversione di popolazione dei livelli.

Consideriamo una onda elettromagnetica di frequenza ν (monocromatica) che incida su un materiale composto da atomi aventi due livelli energetici la cui separazione in energia, sia eguale a $h\nu$.

Nell'interazione si può avere:

- i) assorbimento di quanti di energia $h\nu$.
- ii) emissione spontanea di quanti di energia $h\nu$.
- iii) emissione stimolata di quanti di energia $h\nu$.

Indichiamo con $I = Nh\nu$ l'intensità dell'onda elettromagnetica incidente

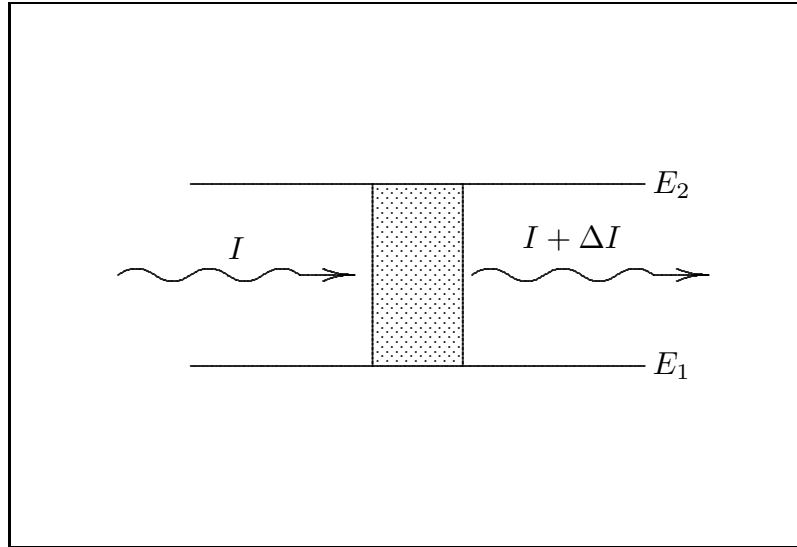


fig.26.3-1

Vogliamo valutare la variazione di intensità per unità di spessore attraversato.

Si ha:

$$\frac{\Delta I}{\Delta x} = \Delta N h\nu \quad (26.3.1)$$

dove ΔN è la variazione del numero di fotoni.

$$\frac{\Delta I}{\Delta x} = -\Delta n_1 h\nu + (\Delta n_2 h\nu)_{\text{spont.}} + (\Delta n_2 h\nu)_{\text{stim.}} \quad (26.3.2)$$

dove Δn_1 è la variazione di fotoni (o di livelli) dovuta a processi di assorbimento.

$$\frac{\Delta I}{\Delta x} = -\gamma_{12}n_1 I h\nu + An_2 h\nu + \gamma_{21}n_2 I h\nu \quad (26.3.3)$$

Tenendo conto della (26.2.13) ($\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma$) si ha:

$$\frac{\Delta I}{\Delta x} = \gamma I(n_2 - n_1)h\nu + An_2 h\nu \quad (26.3.4)$$

ove potendo trascurare l'emissione spontanea rispetto alla stimolata (vedi varie tabelle) si ha:

$$\frac{\Delta I}{\Delta x} = \gamma I(n_2 - n_1)h\nu \quad (26.3.5)$$

$$\frac{\Delta I}{\Delta x} > 0 \quad \text{se } n_2 > n_1 \quad (26.3.6)$$

cioè il materiale si comporta da amplificatore,

$$\frac{\Delta I}{\Delta x} < 0 \quad \text{se } n_2 < n_1 \quad (26.3.7)$$

quest'ultima condizione rappresenta la situazione di normale distribuzione dei livelli energetici in condizioni di equilibrio termodinamico.

Se con un artificio detto **“pompaggio”** si riesce ad alterare la distribuzione di equilibrio termodinamico si otterrà $n_2 > n_1$ ed in tal caso l'emissione è prevalente sull'assorbimento.

26.4 - Pompaggio.

I metodi usati per generare un'inversione di popolazione sono diversi.

La prima idea è quella di invertire il sistema a due livelli con un'intensa onda elettromagnetica a frequenza tale che $h\nu = \Delta E$.

All'equilibrio termico, abbiamo visto che ci sono più atomi al livello 1 che sul livello 2 (più alto) e pertanto prevarrà il fenomeno dell'assorbimento su quello dell'emissione stimolata.

Pertanto, irradiando il sistema con la nostra onda elettromagnetica e prevalendo il fenomeno di assorbimento, passano più atomi dal livello 1 al livello 2 che non dal livello 2 al livello 1 fino a quando non si raggiunge la condizione di eguaglianza nelle popolazioni 1 e 2 (cioè $n_2 = n_1$).

Da questo momento in poi il materiale diventa trasparente in quanto i due fenomeni di assorbimento e di emissione stimolata vengono ad eguagliarsi.

Usando quindi un sistema a due soli livelli non è possibile generare una inversione di popolazione.

Nel maser a gas, saranno utilizzati due livelli, ma si useranno tecniche particolari.

26.5 - Maser ad ammoniaca.

La molecola di ammoniaca NH_3 ha la forma di una piramide la cui base, a forma di triangolo equilatero, è costituita da tre atomi di idrogeno e in cima alla quale vi è l'atomo di azoto.

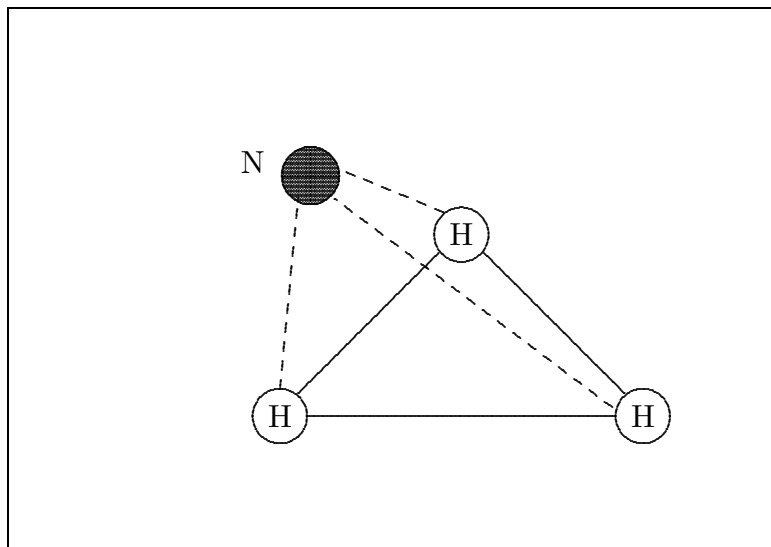


fig.26.5-1

L'energia totale si può esprimere come:

$$W = W_T + W_V + W_R + W_I \quad (26.5.1)$$

rispettivamente energie di traslazione (W_T), di vibrazione (W_V), di rotazione (W_R) e interazione fra rotazione e traslazione (W_I).

Il termine preponderante e di primario interesse per la fisica del maser è W_V .

W_V è costituito da due possibili livelli energetici.

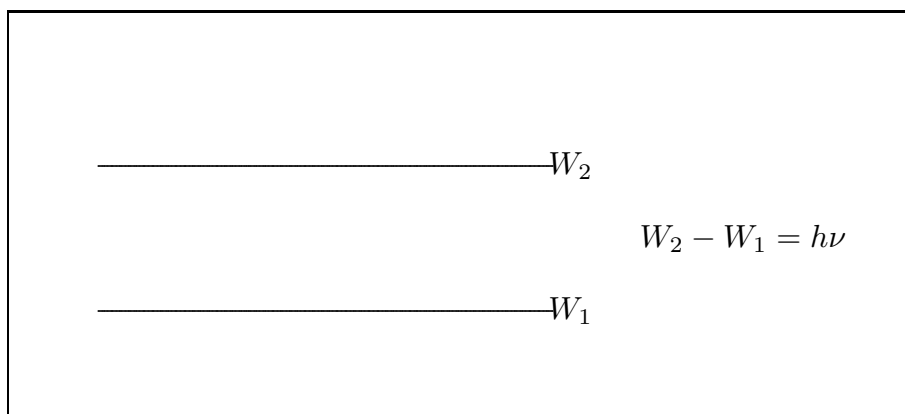


fig.26.5-2

con $\nu = 23.870 \cdot 10^9$ Hertz cioè campo delle **microonde**.

Poichè abbiamo visto che non si può avere inversione di popolazione irradiando con onde elettromagnetiche un sistema a due livelli, cerchiamo un artificio che ci permetta di separare l'una dall'altra le molecole di NH_3 aventi livelli diversi. Ciò è possibile sfruttando l'**effetto Stark** che è illustrato dal seguente grafico:

EFFETTO STARK

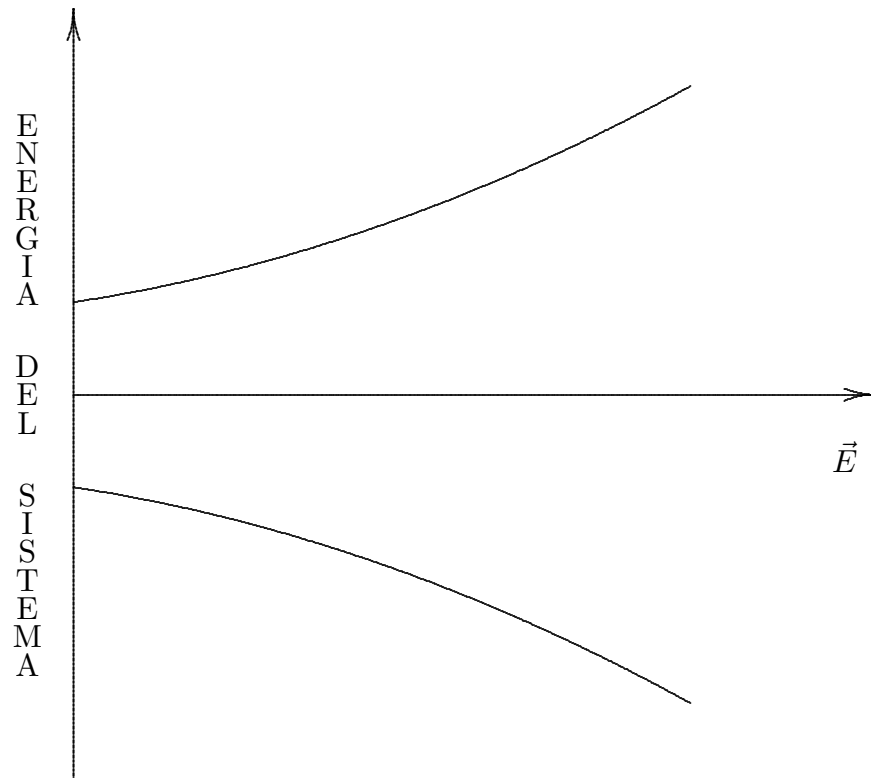


fig.26.5-3

In un campo elettrico disuniforme le molecole nello stato energetico più alto aumentano la loro energia all'aumentare del campo e viceversa.

Poichè la forza che agisce è:

$$f = -\frac{\partial W}{\partial r} \quad (26.5.2)$$

le molecole ad energia più alta si spostano laddove il campo è meno intenso; quelle ad energia più bassa laddove il campo è più intenso.

Schema del maser

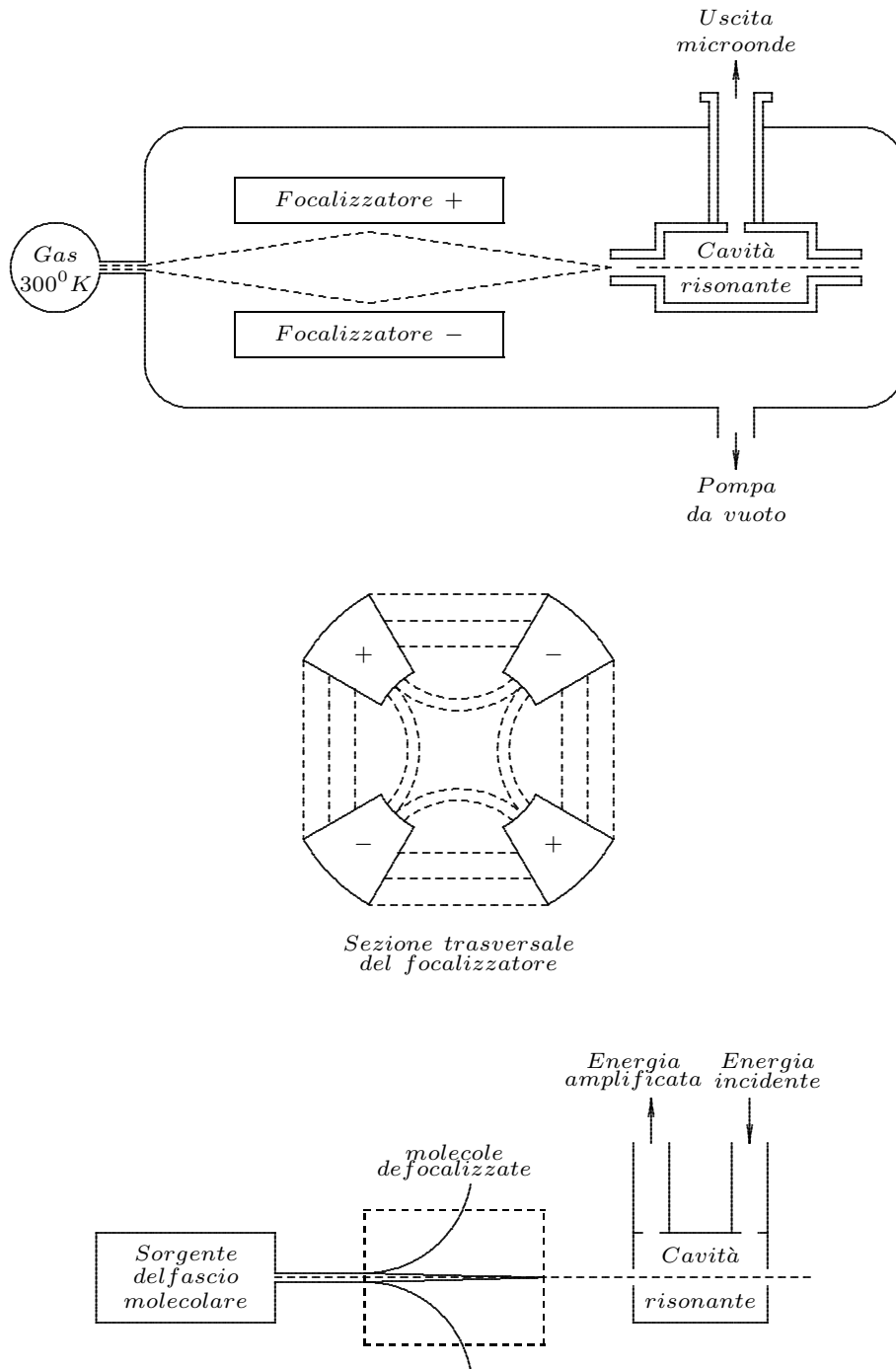


fig.26.5-4

È chiaro quindi che con un dispositivo come in figura 26.5-4 è possibile separare i due livelli energetici.

La sorgente è costituita da una camera contenente ammoniaca ad una pressione di pochi mm di Hg.

Il fascio passa attraverso il focalizzatore ove, per la geometria del sistema, il campo è nullo sull'asse ed aumenta allontanandosi radialmente.

Le molecole allo stato più alto entrano quindi in una cavità risonante **accordata** alla frequenza di $23.870 \cdot 10^9$ Hertz.

Esse ivi trovano la radiazione termica e quindi sono sottoposte ad emissione stimolata emettendo radiazione della stessa frequenza cui è accordata la cavità rafforzando quindi il campo elettromagnetico.

Il processo continua ed è facile convincersi che si innesca un campo a frequenza delle microonde.

26.6 - Maser a tre livelli.

Il modo più interessante di realizzare un maser è quello di utilizzare sistemi atomici che hanno tre livelli energetici.

Consideriamo, infatti, il seguente schema:

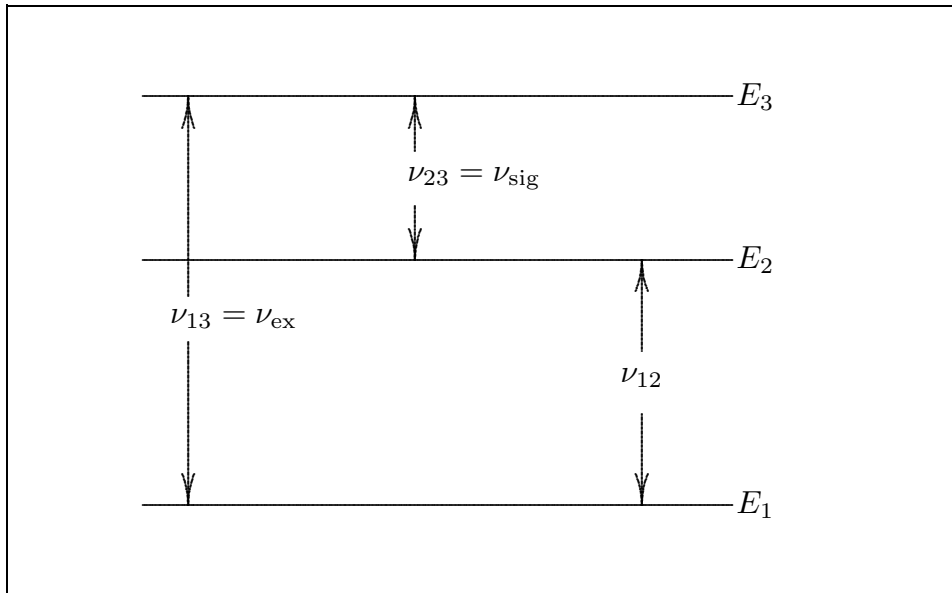


fig.26.6-1

Gli stati 2 e 3 sono separati da una energia corrispondente alla frequenza delle microonde che si desiderano amplificare o generare.

All'equilibrio termico si ha:

$$N_{1eq} > N_{2eq} > N_{3eq} \quad (26.6.1)$$

Se inviamo una radiazione esterna corrispondente alla transizione energetica ν_{13} si indurrà transizione dallo stato 1 allo stato 3 e dallo stato 3 allo stato 1 fino a quando (a causa della maggiore popolazione del livello 1) essa sarà saturata cioè i due livelli saranno egualmente popolati.

Se in queste condizioni risulta $N_3 > N_2$ si è ottenuta l'inversione di popolazione fra i livelli 2 e 3 e quindi la realizzazione del maser.

26.7 - Collegamenti telefonici mediante laser.

L'impiego dei laser nelle telecomunicazioni viene richiesto dalla necessità di disporre di nuove bande di frequenza poichè quelle attualmente utilizzate stanno subendo una progressiva ed inesorabile saturazione.

I vantaggi di un sistema di collegamento telefonico mediante fascio laser sono i seguenti:

- 1) Una ottima direttività, cioè il laser consente un notevole guadagno di antenna e quindi una minor potenza in trasmissione.
- 2) La disponibilità di nuove bande di frequenza molto più estese di quelle delle radiotrasmissioni e dei sistemi a microonde.

Consideriamo lo schema a blocchi di un sistema di collegamento telefonico mediante laser.

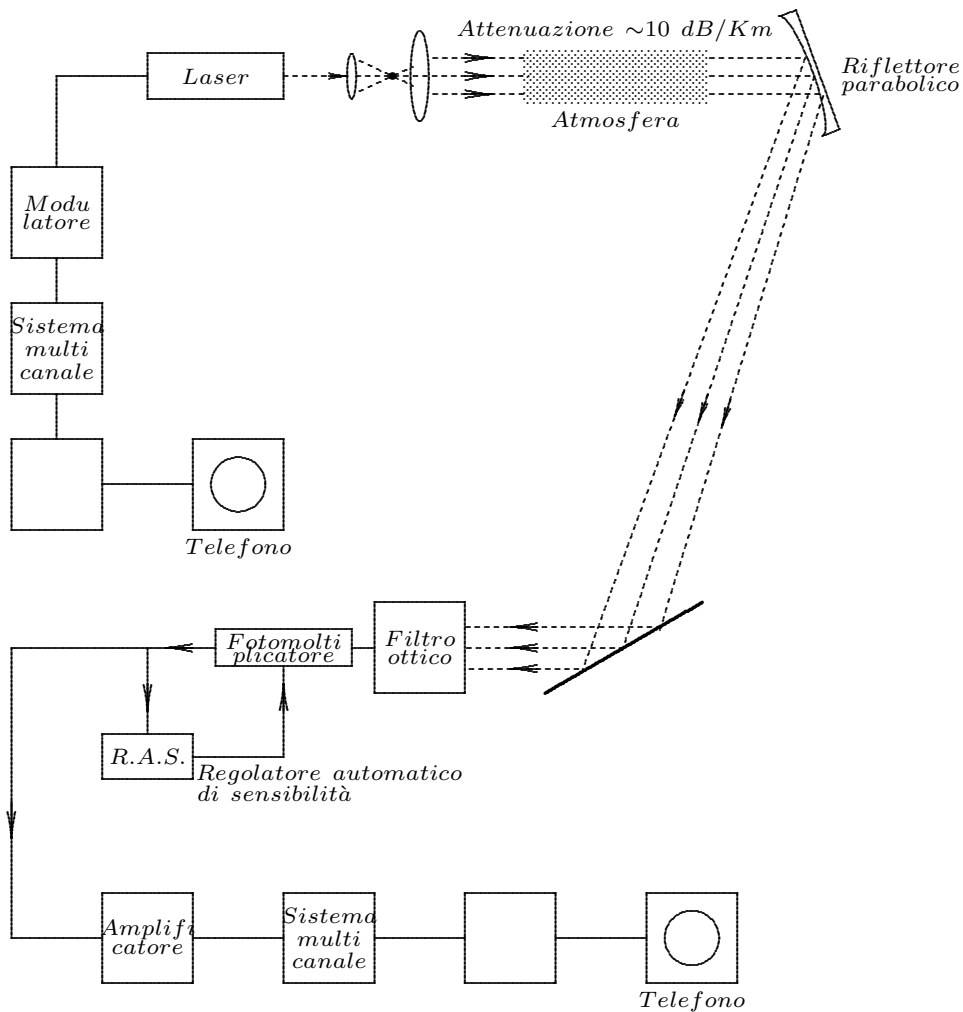


fig.26.7-1

Il generatore dell'onda portante trasmessa è un laser.

L'ottica di trasmissione serve a diminuire la divergenza del fascio.

Il filtro ottico serve per separare la radiazione emessa dal laser da altre radiazioni spurie che vengono a costituire il segnale di fondo.

26.8 - Orologi atomici¹⁾

L'accurata misura del tempo e della frequenza é molto importante in molti campi della Scienza e della Tecnologia, per esempio nella Geodesia, nella Radio Astronomia e nei **Sistemi di Navigazione Satellitare (GPS e GALILEO) come abbiamo visto nel capitolo 8 degli Appunti di Campi elettromagnetici**. In tutti questi campi gli **Standard di Frequenza Atomica (AFSs)** basati sulla transizione iperfine del Cesio a 9.2 GHz hanno giocato un importante ruolo per decenni. Immediatamente dopo la dimostrazione del primo dispositivo nei **National Physical Laboratory NPL**, UK, nel 1955 dovuta a Essen and Parry,²⁾ una variante commerciale, denominata **Atomichron**, fu sviluppata negli Stati Uniti nel 1958.³⁾ Oggi migliaia di orologi commerciali atomici al cesio sono usati nei centri scientifici e militari.

É comunemente assunto che le proprietá atomiche quali le differenze di energia fra autostati atomici e cosí le frequenze di transizione atomica sono costanti naturali e non dipendono dallo spazio e dal tempo (a parte dagli effetti relativistici). Come abbiamo visto nei paragrafi precedenti, una transizione che differisce in energia di ΔE comporta un assorbimento o emissione di radiazione elettromagnetica di frequenza $f = \Delta E/h$, essendo h la costante di Planck.

Sin dai primi anni 1950 l'elemento **Cesio** é stato identificato come candidato allo Standard di Frequenza Atomica. La transizione di riferimento é quella fra gli stati $F_g = 4$ e 3 (g =ground) dei livelli di energia della struttura iperfine dello stato fondamentale dell'isotopo ^{133}Cs che, favorevolmente, é il solo isotopo stabile di questo elemento.

In figura 26.8-1 é mostrato il principio di un orologio atomico al Cesio. Un fascio di atomi viene emesso da un forno e passa attraverso un forte campo magnetico disuniforme. A seconda degli effettivi momenti degli atomi il magnete li deflette in tante direzioni in modo che alcuni di questi passano attraverso una cavità a microonde. Nella cosí chiamata cavità di Ramsey, fatta con una guida d'onda a forma di **U**, gli atomi vengono irradiati due volte con un campo a microonde stazionarie di frequenza f_p . Un secondo magnete (analizzatore) discrimina fra atomi che hanno fatto una transizione e quelli che sono rimasti nello stato iniziale e dirige gli atomi in un rivelatore a filo caldo. Gli atomi vengono ionizzati, e la corrente ionica viene elaborata per fornire il segnale di controllo I_D . Quando

¹⁾ Andreas Bauch: Caesium atomic clocks: function, performance and applications - Meas. Sci. Technol. 14 (2003) 1159-1173.

²⁾ Essen L. and Parry J. V. L.: The caesium resonator as a standard of frequency and time - Phil. Trans. R. Soc. A 250 45-69, 1957.

³⁾ Forman P.: Atomichron: the atomic clock from concept to commercial product - Proc. IEEE 73, 1181-1204, 1985.

f_p é sintonizzata su f_r , I_D mostra una risonanza caratteristica centrata attorno f_r .

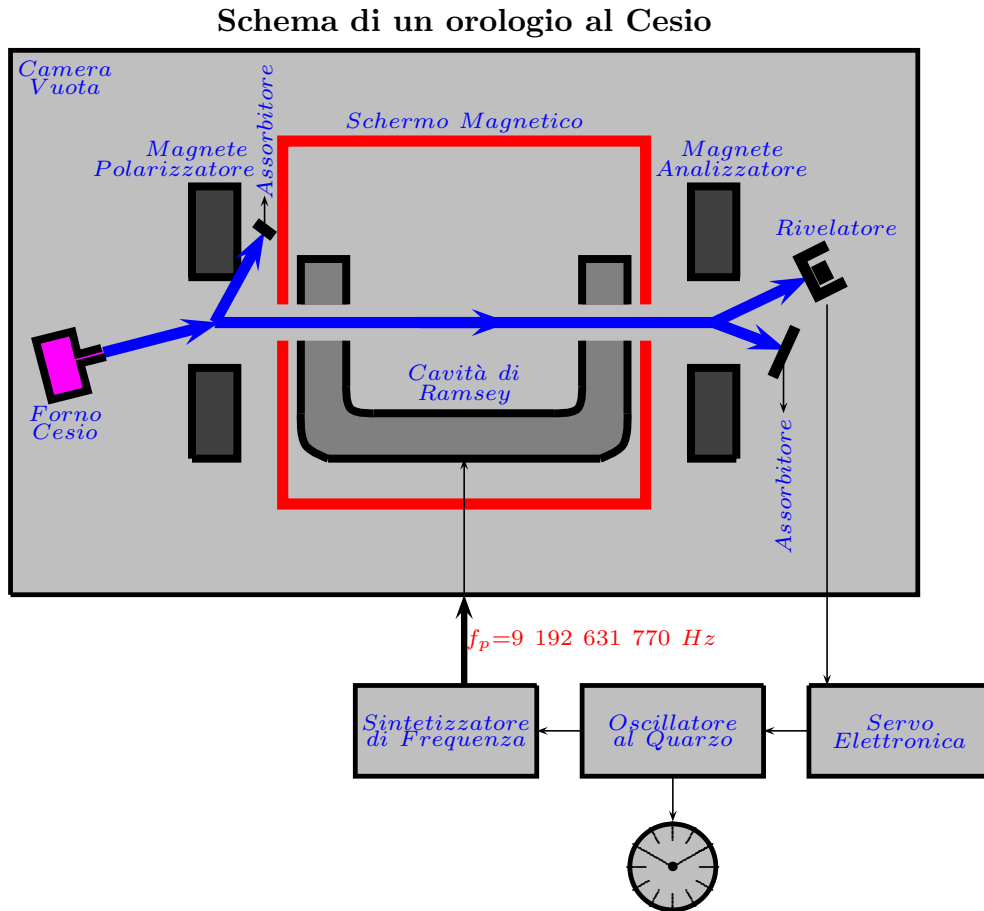


fig.26.8-1

26.9 - L'atomo di Cesio⁴⁾

Il Cesio é un atomo complicato con stati fondamentali $F = 3$ e $F = 4$ (vedi figura 26.9-1). Ogni stato atomico é caratterizzato non solo dal numero quantico F , ma anche da un secondo numero quantico m_F , che puó avere valori interi compresi fra $-F$ e $+F$. Quindi, vi sono 16 possibili stati magnetici del Cesio, ma solo la transizione gli stati $|4, 0\rangle$ e $|3, 0\rangle$ é utile per uno standard primario di frequenza, perché questa transizione é, al primo ordine, insensibile ai campi magnetici. Questa transizione iperfine $|4, 0\rangle < - > |3, 0\rangle$ produce la frequenza usata per definire il secondo nella *SI*.

Come mostrato sul lato sinistro della figura 26.8-1, atomi ^{133}Cs sono riscaldati allo stato gassoso in un forno. Un fascio di atomi emerge dal forno ad una temperatura di circa 100°C e viaggia attraverso un campo magnetico, dove il fascio é diviso in due fasci di atomi

⁴⁾ Lombardi Michael, Heavner Thomas P. and Jefferts Steven R.: NIST Primary Frequency Standards and the Realization of the SI Second - The Journal of Measurement Science Vol. 2, N0. 4, December 2007, p. 74.

con differenti stati magnetici. Un fascio é assorbito dall'assorbitore e non é di ulteriore interesse, ma l'altro fascio é deflesso dentro la cavità risonante a microonde di Ramsey.

All'interno della cavità di Ramsey il fascio di Cesio é esposto alla frequenza delle microonde proveniente da un sintetizzatore di frequenza a quarzo. Se questa frequenza é sintonizzata precisamente accordata alla frequenza di risonanza del Cesio (9 192 631 770 Hz), alcuni degli atomi cambieranno il loro stato magnetico. Dopo aver lasciato la cavità di Ramsey, gli atomi passano attraverso un secondo campo magnetico. Questi magneti dirigono solo gli atomi che hanno cambiato stato verso il rivelatore; gli altri atomi sono diretti verso l'assorbitore e, quindi, da esso assorbiti.

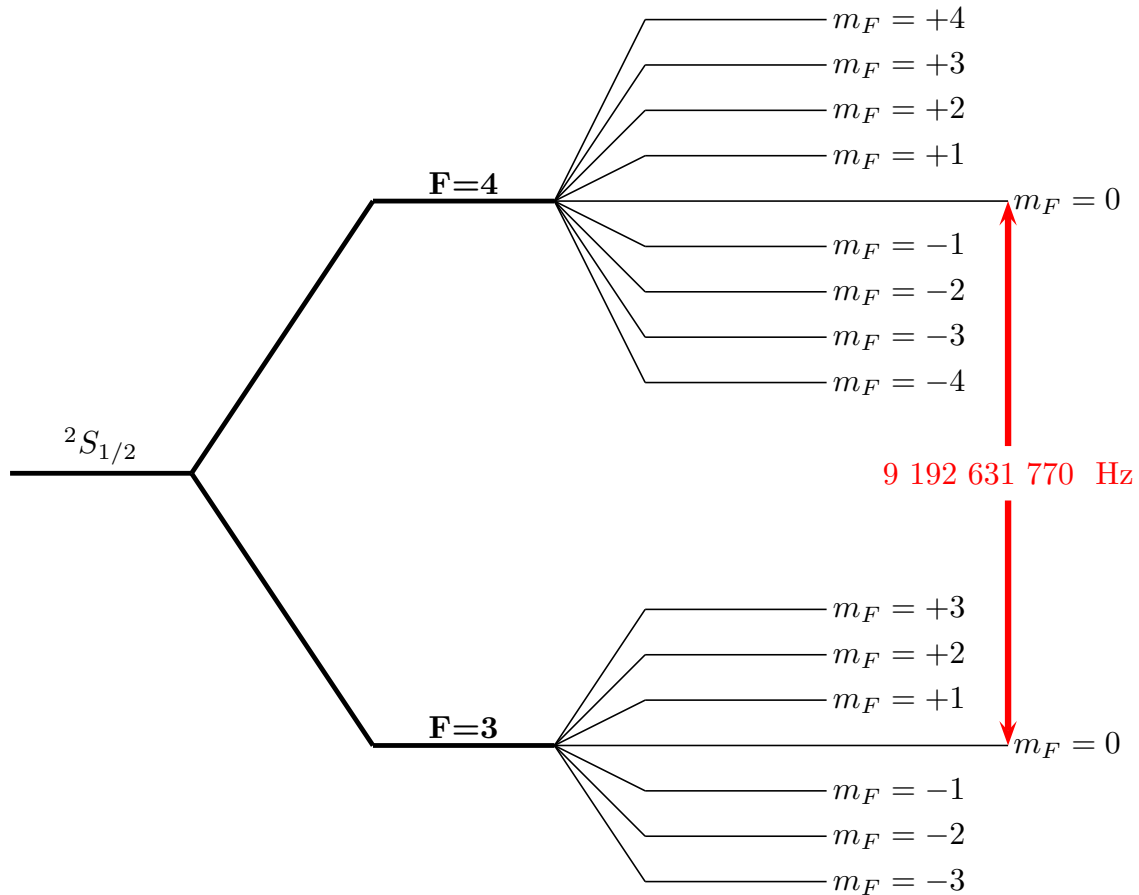


fig.26.9-1

In sostanza, i magneti situati su entrambi i lati della cavità di Ramsey servono come una "porta" che permette soltanto agli atomi che subiscono la desiderata transizione di energia $|4,0\rangle \leftrightarrow |3,0\rangle$ di passare attraverso e raggiungere il rivelatore. Il rivelatore manda un segnale di feedback ad un servo circuito che continuamente sintonizza l'oscillatore al quarzo in modo che il numero massimo di atomi raggiunga il rivelatore, aumentando così la potenza del segnale. Questo processo é analogo alla sintonizzazione attenta di un radiocomando finché non si sente il segnale piú forte e piú chiaro, e mantiene la frequenza dell'oscillatore del quarzo bloccata il piú strettamente possibile alla risonanza del Cesio.

Fine del Cap.26