

Magnetron

24.1 - Introduzione

Il **magnetron** fu il primo veramente pratico dispositivo a microonde. Esso fu sviluppato in Inghilterra negli anni '30 del ventesimo secolo e fornì la spinta per lo sviluppo del radar a microonde durante la seconda guerra mondiale. Da allora, molti dispositivi a microonde sono stati sviluppati per la generazione e l'amplificazione della radiazione a microonde. Anche se, negli anni recenti, dispositivi a stato solido hanno occupato molte aree che prima erano riservate ai tubi a microonde, i tubi elettronici a microonde hanno certe proprietà uniche che possono, poco probabilmente, essere superati dai dispositivi a stato solido, specialmente nel dominio delle alte potenze ($10\text{ KW} \div 10\text{ MW}$) ed alte frequenze (1 GHz e più).

Il magnetron¹⁾ è costituito da una camera con sezione circolare circondata da lobi, in cui è stato effettuato il vuoto. Al centro è collocato un filo mantenuto incandescente, il catodo, e ad un potenziale elettrico negativo molto elevato, costante o impulsivo, come illustrato in figura 24.1-1.

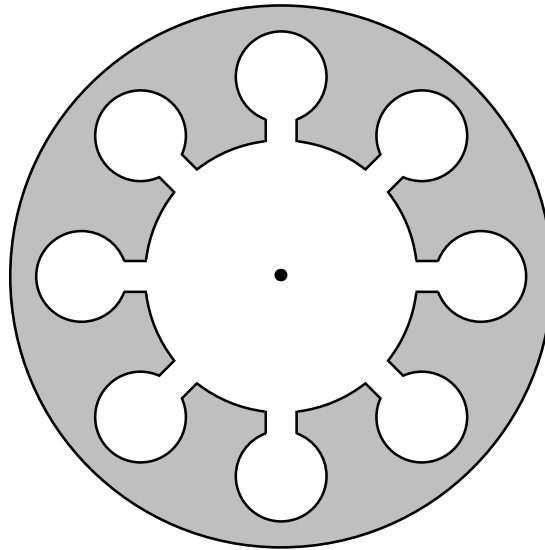


fig.24.1-1

Parallelamente all'asse della camera è mantenuto un campo magnetico prodotto da un magnete permanente. Il filamento e il catodo sono costituiti da un unico elettrodo realizzato in filo di tungsteno a forma elicoidale, con un numero di spire variabile fra 8 e 12, di raggio circa pari alla lunghezza. Il catodo è rivestito di un materiale idoneo ad emettere elettroni. Gli elettroni emessi per effetto termoionico dal filamento tendono a muoversi

¹⁾ L.Brillouin: Electronic Theory of the Plane Magnetron - Advances in Electronics,1951, pagg. 85-144.

verso le pareti della camera, mantenute a potenziale zero, che corrispondono all'anodo, positivo rispetto al catodo. La presenza del campo magnetico però causa una curvatura nella loro traiettoria per effetto della forza di Lorentz, portandoli a seguire un percorso a spirale. Sul perimetro della camera sono ricavate delle aperture opportunamente spaziate e comunicanti con delle cavità. Gli elettroni, raggiungendo il bordo delle cavità si riuniscono in fasci che vibrano e producono un campo elettromagnetico ad alta frequenza. Una parte di questo campo è prelevato da una speciale antenna connessa ad una guida d'onda (un tubo metallico in grado di convogliare le microonde), e da questa inviato al carico utilizzatore, che sia la camera del forno a microonde oppure una antenna trasmittente. La dimensione delle cavità determina la frequenza di risonanza e quindi la frequenza delle onde radio prodotte. Questa frequenza non è molto precisa né modificabile. Questo non è un problema nelle applicazioni tipiche del magnetron, quali il radar e la cottura dei cibi. Ove sia richiesta precisione si usano altri dispositivi, per esempio il Klystron. La potenza irradiata dipende dalla tensione applicata e dalle caratteristiche costruttive del tubo. Dopo il lavoro originale di Hull²⁾ sui magnetron, un gran numero di teorie sono state formulate; la maggior parte tuttavia sembra inadeguata o inesatta. Certi autori considerarono il moto elettronico mentre trascurarono la carica spaziale; altri usarono la carica spaziale calcolata da Langmuir per un diodo senza campo magnetico. Tali studi necessariamente sono poco accurati poiché un campo magnetico elevato modifica notevolmente la traiettoria degli elettroni e, conseguentemente, la carica spaziale. Al contrario, autori che hanno cercato di valutare la carica spaziale in presenza di un campo magnetico non sembra abbiano fornito soluzioni pratiche. Quindi appare necessario considerare il problema daccapo e calcolare direttamente sia la carica spaziale sia le distribuzioni del potenziale nel magnetron; senza questi dati essenziali, lo sviluppo di una teoria coerente è impossibile.

Storia del magnetron

Il primo oscillatore a radio frequenza fu sviluppato durante e dopo la prima guerra mondiale utilizzando il triodo scoperto da de Forest nel 1906 dopo la scoperta del diodo dovuto a Fleming nel 1904. Successivamente i ricercatori cominciarono a voler produrre alte frequenze e man mano che aumentava la frequenza i circuiti elettronici e relative valvole (diodi e triodi) cominciarono a non funzionare bene. Si cominciò a pensare ad altri modi per generare alte radiofrequenza. Il primo generatore, ancora oggi molto in uso, fu il magnetron.

Il magnetron¹⁾ è un diodo, generalmente cilindrico, con un campo di induzione magnetica parallelo al suo asse. Nell'uso moderno, tuttavia, la parola implica un diodo che, con l'aiuto di un campo magnetico, produce onde elettromagnetiche ad alta frequenza, ed è con questo significato che il termine magnetron è usato. Quei magnetron che producono radiazione di lunghezza d'onda compresa fra 1 e 30 cm (ossia di frequenza compresa fra 1 GHz e 30 GHz) sono definiti come magnetron a microonde.

²⁾ Hull Albert W: The effect of a uniform magnetic field on the motion of electrons between coaxial cylinders - Physical Review, Vol.18, n.1 (1921), pag.31.

¹⁾ Microwave Magnetrons - Radiation Laboratory Series Vol. 6 - M.I.T. - George B. Collins Ed.

Questa classe di tubi é talvolta chiamata magnetron a cavità per il fatto che, nel suo usuale disegno, il circuito risonante é costituito da un certo numero di cavità accoppiate contenute all'interno della porzione vuota del tubo.

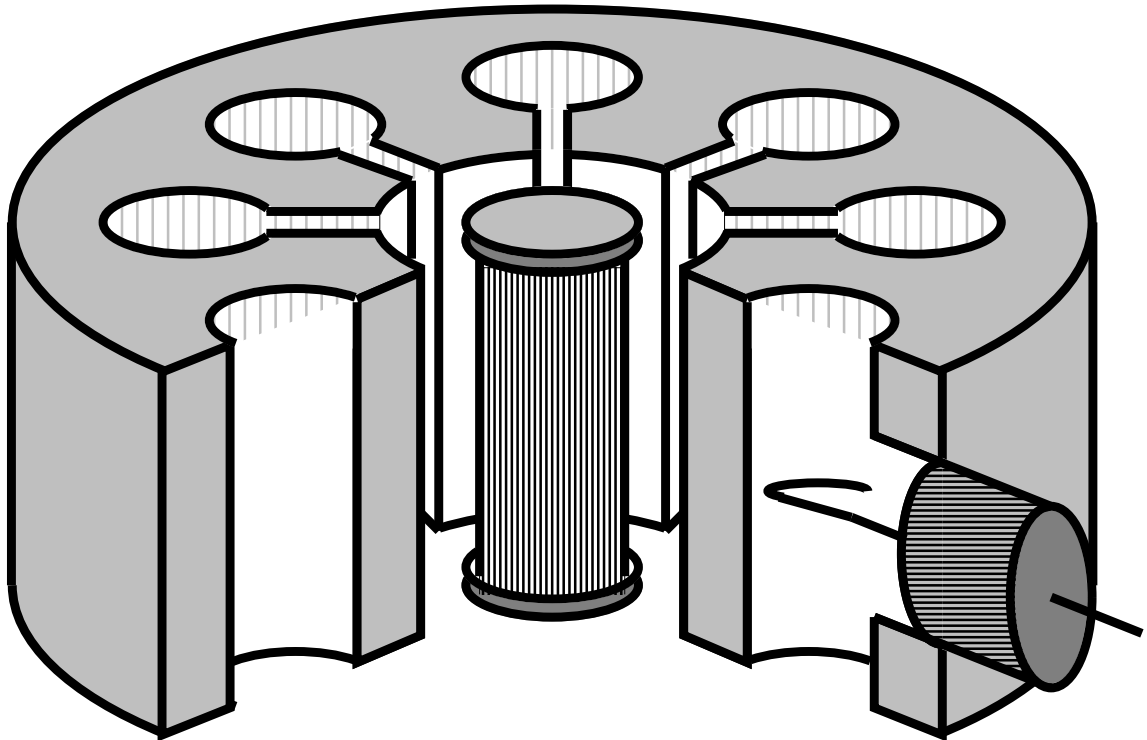


fig.24.1-1: Interno di un magnetron

I magnetron a microonde e la teoria del loro funzionamento hanno la loro origine nel lavoro di molti ricercatori che risale almeno nel 1921.

Diodi non oscillanti con campi magnetici

La base per gran parte della teoria del funzionamento del magnetron fu posta da **Hull**²⁾ che studiò il comportamento degli elettroni in un diodo cilindrico in presenza di un campo di induzione magnetica parallelo al suo asse. Tale diodo é illustrato in figura

²⁾ Hull Albert W: The effect of a uniform magnetic field on the motion of electrons between coaxial cylinders - Physical Review, Vol.18, n.1 (1921), pag.31.

24.1-2.

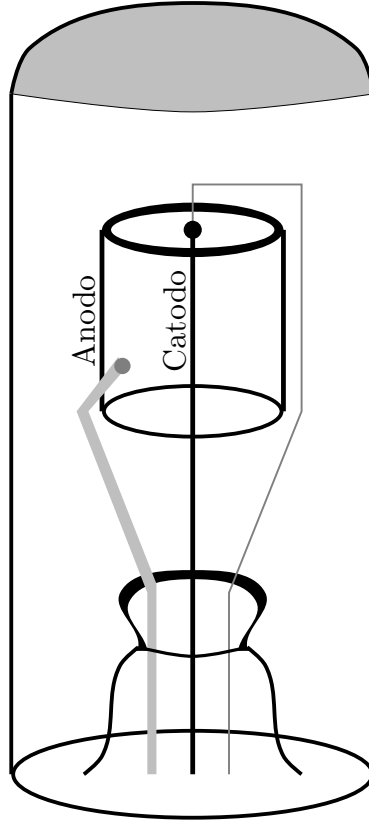


fig.24.1-1a

Un anodo cilindrico circonda un catodo posto centralmente, che é riscaldato affinché emetta elettroni. Un campo di induzione magnetica praticamente uniforme parallelo all'asse del tubo é prodotto da un solenoide o da un campo magnetico esterno non mostrati in figura. Nei campi elettrici e magnetici incrociati che esistono fra il catodo e l'anodo un elettrone che é emesso dal catodo si muove sotto l'influenza di una forza $\vec{F}_e = e\vec{E}$ e da una forza $\vec{F}_m = e\vec{v} \times \vec{B}$, dove \vec{E} é il campo elettrico, \vec{B} il campo di induzione magnetica, \vec{v} la velocità dell'elettrone, ed e é la sua carica. La soluzione del moto risultante, che trascura gli effetti di carica spaziale, mostra che la traiettoria dell'elettrone é un'orbita quasi cicloidale con una frequenza che approssimativamente é data da:

$$f_T = \frac{eB}{m} \quad (24.1.1)$$

Quando l'orbita tocca l'anodo, si dice che é nella condizione di cutoff, data dalla seguente equazione:

$$\frac{V}{B^2} = \frac{er_a^2}{8m} \left[1 - \left(\frac{r_c}{r_a} \right)^2 \right]^2 \quad (24.1.2)$$

dove V é la differenza di potenziale fra l'anodo ed il catodo ed r_a ed r_c sono i loro raggi. Questa é una relazione molto importante dal punto di vista del funzionamento del magnetron. Essa implica che per $\frac{V}{B^2}$ minore del secondo membro dell'equazione 24.1.2), nes-

suna corrente fluisce e, man mano che $\frac{V}{B^2}$ aumenta attraversando la condizione di cutoff, si ottiene un rapido aumento della corrente. Per ragioni oscure la riduzione della corrente al cutoff, che é osservata sperimentalmente, non é cosí brusca come la teoria illustrata sopra indicherebbe.

Oscillazioni alla frequenza di ciclotrone

Il tipo di diodo mostrato in figura 24.1-1 puó essere fatto oscillare a frequenze elevate se il catodo e l'anodo sono parte di un circuito risonante con ragionevole alta impedenza e basse perdite. Le condizioni per l'oscillazione sono che V/B^2 deve essere regolato vicino alla condizione di cutoff data dall'equazione 24.1.2 e che la frequenza della corrente risonante deve essere eguale alla frequenza di transito degli elettroni. Una spiegazione di queste oscillazioni é data dalla figura 24.1-1.

24.2 - Moto degli elettroni in campi elettrici e magnetici - Il magnetron DC

Prima di cominciare la discussione dell'elettronica dell'oscillatore magnetron é bene rivedere brevemente il moto degli elettroni in vari tipi e diverse combinazioni di campi elettrici e magnetici, e l'operazione del magnetron DC.

Un elettrone di carica e e di massa m , che si muove in un campo elettrico di intensitá E , é sottoposto ad una forza, indipendente dalla velocitá dell'elettrone, di intensitá eE , diretta in verso opposto alla convenzionale direzione del campo. Se il campo é costante ed uniforme, il moto dell'elettrone é identico a quello di un corpo che si muove in un campo gravitazionale uniforme.

Un elettrone che si muove in un campo di induzione magnetica di intensitá B , tuttavia é sottoposto ad una forza che dipende dalla intensitá della velocitá dell'elettrone v , dall'intensitá del campo, e da come la direzione del moto é orientata rispetto alla direzione del campo. La forza é diretta in direzione normale al piano contenente il vettore velocitá ed il vettore campo di induzione magnetica e la sua intensitá é proporzionale alla velocitá, all'intensitá del campo di induzione magnetica, ed al seno dell'angolo θ fra i due vettori.

Cosí la forza é il prodotto vettoriale fra \vec{v} e \vec{B} :

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}, \quad F = evB \sin \theta \quad (24.2.1)$$

Un elettrone che si muove nella stessa direzione del campo di induzione magnetica ($\sin \theta = 0$) non subirá forza alcuna. Un elettrone che si muove in direzione ortogonale ad un campo magnetico uniforme ($\sin \theta = 1$) é costretto a muoversi su una circonferenza dalla forza magnetica che é sempre ortogonale in ciascun punto della sua traiettoria. Poiché questa forza é bilanciata dalla forza centrifuga, il raggio ρ , della traiettoria circolare dipende dalla quantitá di moto dell'elettrone e dall'intensitá del campo di induzione magnetica; cioè:

$$Bev = \frac{mv^2}{\rho} \quad (24.2.2)$$

ossia:

$$\rho = \frac{mv}{eB} \quad (24.2.3)$$

Il tempo T_c (periodo), impiegato dall'elettrone per percorrere la circonferenza é indipendente dal raggio e, quindi, dalla velocità dell'elettrone:

$$T_c = \frac{2\pi\rho}{v} = \frac{2\pi m}{eB} \quad (24.2.4)$$

cosí la frequenza angolare, cosiddetta *frequenza di ciclotrone*, dipende dal solo campo di induzione magnetica ed é data da:

$$\omega_c = 2\pi f_c = 2\pi \frac{1}{T_c} = \frac{e}{m} B \quad (24.2.5)$$

Nel magnetron il moto dell'elettrone si svolge in un campo elettrico ed in un campo di induzione magnetica incrociati.

Consideriamo inizialmente tale moto fra due elettrodi piani paralleli, trascurando la carica spaziale.

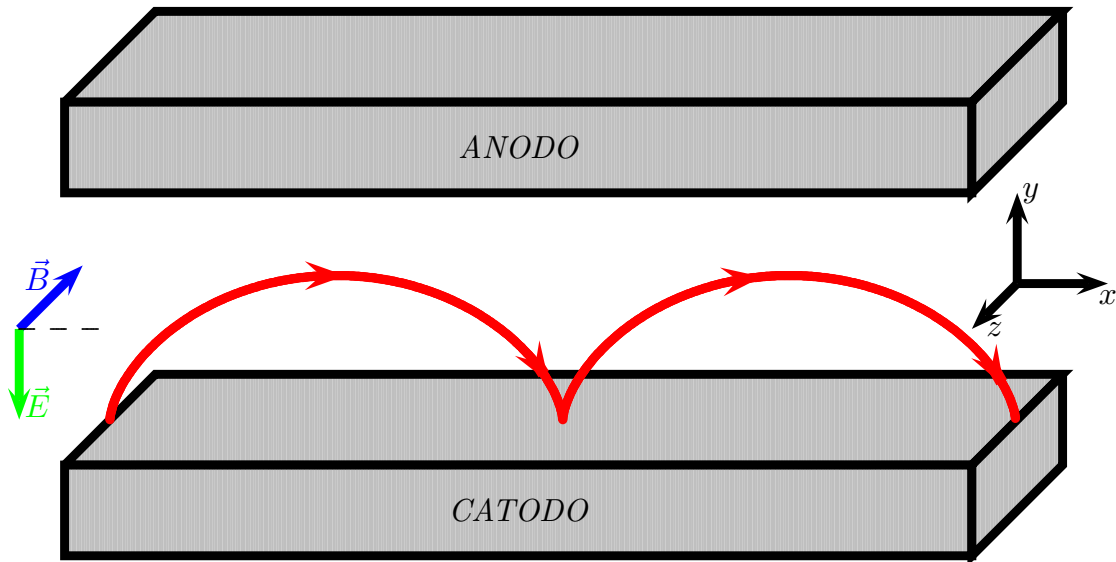


fig.24.2-2

Se, come in figura 24.5-2, il campo elettrico é diretto nella direzione negativa dell'asse y ed il campo di induzione magnetica nella direzione negativa dell'asse z , l'equazioni del moto dell'elettrone é:

$$m\ddot{\vec{r}} = eE + e\dot{\vec{r}} \times \vec{B} \quad (24.2.6)$$

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{x}(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y) + \hat{y}(\dot{z}B_x - \dot{x}B_z) + \hat{z}(\dot{x}B_y - \dot{y}B_x) \quad (24.2.7)$$

Quindi, in coordinate cartesiane, l'equazione (24.2.6) é equivalente al seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{e}{m}E_x + \frac{e}{m}(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y) \\ \ddot{y} = \frac{e}{m}E_y + (\dot{z}B_x - \dot{x}B_z) \\ \ddot{z} = \frac{e}{m}E_z + (\dot{x}B_y - \dot{y}B_x) \end{cases} \quad (24.2.8)$$

Poiché nel nostro caso $\vec{E} = E_y\hat{y}$ e $\vec{B} = B_z\hat{z}$, il sistema di equazioni (24.2.8) diventa:

$$\begin{cases} \ddot{x} = +\frac{e}{m}\dot{y}B_z \\ \ddot{y} = -\dot{x}B_z + \frac{e}{m}E_y \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad (24.2.9)$$

che si può scrivere:

$$\begin{cases} \dot{v}_x = +\frac{e}{m}v_yB_z \\ \dot{v}_y = -v_xB_z + \frac{e}{m}E_y \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases} \quad (24.2.10)$$

Moltiplicando la seconda equazione per -i e sommando alla prima otterremo:

$$\dot{v}_x - i\dot{v}_y = \omega_c(v_y + iv_x) - i\frac{e}{m}E \quad (24.2.11)$$

ossia:

$$\dot{v}_x - i\dot{v}_y = i\omega_c(v_x - iv_y) - i\frac{e}{m}E \quad (24.2.12)$$

Posto $v^- = v_x - iv_y$, l'equazione (24.2.12) si scrive:

$$\dot{v}^- - i\omega_cv^- = -i\frac{e}{m}E \quad (24.2.13)$$

L'integrale generale della (24.2.13) é la somma dell'integrale generale della omogenea associata e di un integrale particolare.

L'integrale generale dell'omogenea associata é:

$$v_o^- = Ae^{+i\omega_ct} \quad (24.2.14)$$

essendo A una costante complessa.

L'integrale particolare si cerca nella classe $\bar{y} = K$, che sostituita nella (24.2.14) restituisce:

$$-i\omega_cK = -i\frac{e}{m}E \quad (24.2.15)$$

ossia:

$$K = \bar{y} = \frac{E}{B} \quad (24.2.16)$$

Quindi, l'integrale generale della equazione (24.2.13) é.

$$v^- = Ae^{+i\omega_c t} + \frac{E}{B} \quad (24.2.17)$$

ossia:

$$\begin{cases} v_x = A \cos \omega_c t + \frac{E}{B} \\ v_y = A \sin \omega_c t \end{cases} \quad (24.2.18)$$

Troviamo la costante A imponendo che per $t = 0$ $v_x = v_y = 0$. Risulta, ovviamente $A = -\frac{E}{B}$. Quindi il sistema definitivo si scrive:

$$\begin{cases} v_x = -\frac{E}{B} (\cos \omega_c t - 1) \\ v_y = \frac{E}{B} \sin \omega_c t \end{cases} \quad (24.2.19)$$

Integrando:

$$\begin{cases} x = -\frac{E}{B} \frac{1}{\omega_c} (\sin \omega_c t - \omega_c t) + C_1 \\ y = -\frac{E}{B} \frac{1}{\omega_c} \cos \omega_c t + C_2 \end{cases} \quad (24.2.20)$$

$$\begin{cases} x = -\frac{m}{e} \frac{E}{B^2} (\sin \omega_c t - \omega_c t) + C_1 \\ y = -\frac{m}{e} \frac{E}{B^2} \cos \omega_c t + C_2 \end{cases} \quad (24.2.21)$$

Troviamo le costanti in modo che per $t = 0$ risulti $x = y = 0$. Risulta $C_1 = 0$ e $C_2 = \frac{m}{e} \frac{E}{B^2}$. Poniamo $\rho_c = \frac{m}{e} \frac{E}{B^2}$. Si ha:

$$\begin{cases} x = -\rho_c (\sin \omega_c t - \omega_c t) \\ y = \rho_c (1 - \cos \omega_c t) \end{cases} \quad (24.2.22)$$

ossia:

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho_c (\omega_c t - \sin \omega_c t) \\ y = \rho_c (1 - \cos \omega_c t) \end{cases}} \quad (24.2.23)$$

Le equazioni (24.2.24) descrivono il moto dell'elettrone nel campo elettrico e magnetico incrociati. Esso può essere considerato come una combinazione di un moto rettilineo di velocità $v_c = E/B$, nella direzione dell'asse x , perpendicolare sia ad E che a B , e del moto nel piano xy che è una traiettoria circolare di raggio ρ_c , con una frequenza angolare ω_c che è la cosiddetta frequenza di ciclotrone. La figura 24.2-2 mostra la **traiettoria cicloidale**.

24.3 - Equazioni del moto di un elettrone in presenza di un campo elettrico e di un campo di induzione magnetica²⁾

Come studio preliminare alla teoria del magnetron è interessante stabilire alcuni risultati circa le traiettorie elettroniche in un campo elettrico con simmetria centrale, quando un campo magnetico agisce sul sistema. Assumiamo un dispositivo elettrico dove il potenziale elettrico $V(r)$ è una funzione della distanza r dall'asse z , mentre il campo di induzione magnetica \vec{B} abbia la direzione parallela allo stesso asse. L'equazione del moto è:

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{\nabla}V(r) + e\dot{\vec{r}} \times \vec{B} \quad (24.3.1)$$

essendo e una quantità negativa ed avendo posto $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r)$.

Scegliamo un sistema di riferimento con l'asse z lungo la direzione del campo di induzione magnetica e introduciamo nel piano del moto un sistema di coordinate polari con centro in O e formante un sistema di riferimento destrorso con l'asse z , come è descritto dalla figura 24.3-1.

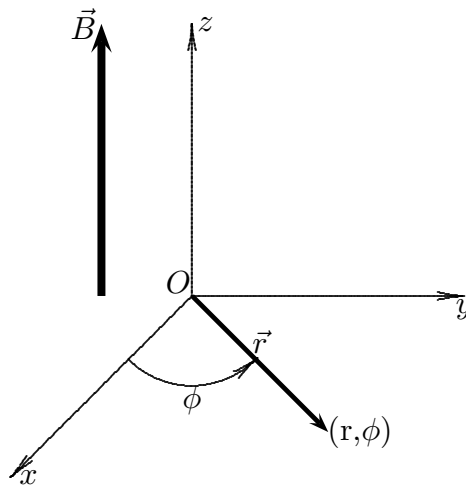


fig.24.3-1

Siano x, y, z le coordinate cartesiane di un punto P e ρ, ϕ, z le sue coordinate cilindriche. Si ha:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{x} = \hat{e}_\rho \cos \phi - \hat{e}_\phi \sin \phi \\ \hat{y} = \hat{e}_\rho \sin \phi + \hat{e}_\phi \cos \phi \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases} \quad (24.3.2)$$

Esprimiamo in coordinate cilindriche la velocità della particella carica. Siano v_x, v_y, v_z le componenti cartesiane del vettore velocità \vec{v} e v_ρ, v_ϕ e v_z le componenti del vettore velocità della particella in coordinate cilindriche. Quindi:

$$\begin{aligned} v_x \hat{x} &= \frac{dx}{dt} \hat{x} = (\dot{\rho} \cos \phi - \dot{\phi} \rho \sin \phi)(\hat{e}_\rho \cos \phi - \hat{e}_\phi \sin \phi) = \\ &= \dot{\rho} \cos^2 \phi \hat{e}_\rho - \dot{\rho} \sin \phi \cos \phi \hat{e}_\phi - \dot{\phi} \rho \sin \phi \cos \phi \hat{e}_\rho + \dot{\phi} \rho \sin^2 \phi \hat{e}_\phi \end{aligned} \quad (24.3.3)$$

$$\begin{aligned} v_y \hat{y} &= \frac{dy}{dt} \hat{y} = (\dot{\rho} \sin \phi + \dot{\phi} \rho \cos \phi)(\hat{e}_\rho \sin \phi + \hat{e}_\phi \cos \phi) = \\ &= \dot{\rho} \sin^2 \phi \hat{e}_\rho + \dot{\rho} \sin \phi \cos \phi \hat{e}_\phi + \dot{\phi} \rho \sin \phi \cos \phi \hat{e}_\rho + \dot{\phi} \rho \cos^2 \phi \hat{e}_\phi \end{aligned} \quad (24.3.4)$$

$$v_z \hat{z} = \frac{dz}{dt} \hat{z} = \dot{z} \hat{z} \quad (24.3.5)$$

In definitiva:

$$\begin{aligned} \vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} &= (\underline{\dot{\rho} \cos^2 \phi} + \underline{\dot{\rho} \sin^2 \phi} - \cancel{\dot{\phi} \rho \sin \phi \cos \phi} + \cancel{\dot{\phi} \rho \sin \phi \cos \phi}) \hat{e}_\rho + \\ &+ (-\cancel{\dot{\rho} \sin \phi \cos \phi} + \cancel{\dot{\rho} \sin \phi \cos \phi} + \underline{\dot{\phi} \rho \sin^2 \phi} + \underline{\dot{\phi} \rho \cos^2 \phi}) \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{z} \end{aligned} \quad (24.3.6)$$

ossia:

$$\vec{v} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \dot{\phi} \rho \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{z} \quad (24.3.7)$$

Il primo membro dell'equazione del moto (24.3.1), in coordinate cilindriche, si scrive:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d}{dt} (v_\rho \hat{e}_\rho + v_\phi \hat{e}_\phi + v_z \hat{z}) \quad (24.3.8)$$

Si ha:

$$\frac{dv_\rho}{dt} = \ddot{\rho} \quad (24.3.9)$$

$$\frac{dv_\phi}{dt} = \ddot{\phi} \rho + \dot{\phi} \dot{\rho} \quad (24.3.10)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \ddot{z} \quad (24.3.11)$$

Tenendo conto che:

$$\hat{e}_\rho = \hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi, \quad \hat{e}_\phi = -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi, \quad \hat{z} = \hat{z} \quad (24.3.12)$$

si ha:

$$\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = -\hat{x}(\dot{\phi} \sin \phi) + \hat{y}(\dot{\phi} \cos \phi) = \dot{\phi} \hat{e}_\phi \quad (24.3.13)$$

$$\frac{d\hat{e}_\phi}{dt} = -\hat{x}(\dot{\phi} \cos \phi) - \hat{y}(\dot{\phi} \sin \phi) = -\dot{\phi} \hat{e}_\rho \quad (24.3.14)$$

$$\frac{d\hat{z}}{dt} = 0 \quad (24.3.15)$$

Ne segue:

$$\frac{d}{dt}(v_\rho \hat{e}_\rho) = \ddot{\rho} \hat{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\phi} \hat{e}_\phi \quad (24.3.16)$$

$$\frac{d}{dt}(v_\phi \hat{e}_\phi) = (\ddot{\phi} \rho + \dot{\phi} \dot{\rho}) \hat{e}_\phi - \dot{\phi}^2 \rho \hat{e}_\rho \quad (24.3.17)$$

$$\frac{d}{dt}(v_z \hat{e}_z) = \ddot{z} \quad (24.3.18)$$

D'altra parte si ha:

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \hat{e}_\phi & \hat{z} \\ v_\rho & v_\phi & v_z \\ B_\rho & B_\phi & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \hat{e}_\phi & \hat{z} \\ \dot{\rho} & \dot{\phi} \rho & \dot{z} \\ B_\rho & B_\phi & B_z \end{vmatrix} = \quad (24.3.19)$$

$$= \hat{e}_\rho (\dot{\phi} \rho B_z - \dot{z} B_\phi) + \hat{e}_\phi (\dot{z} B_\rho - \dot{\rho} B_z) + \hat{z} (\dot{\rho} B_\phi - \dot{\phi} \rho B_\rho)$$

L'equazione del moto (24.3.1), proiettata sui tre assi coordinati, diventa il seguente sistema:

$$m(\ddot{\rho} - \dot{\phi}^2 \rho) = -e \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} + e(\dot{\phi} \rho B_z - \dot{z} B_\phi) \quad (24.3.20)$$

$$m(\ddot{\phi} \rho + 2\dot{\phi} \dot{\rho}) = e(\dot{z} B_\rho - \dot{\rho} B_z) \quad (24.3.21)$$

$$m\ddot{z} = e(\dot{\rho} B_\phi - \dot{\phi} \rho B_\rho) \quad (24.3.22)$$

Ponendo $B_\rho = B_\phi = 0$ e dividendo per m il sistema di equazioni (24.3.20 ÷ 24.3.22) si scrive:

$$\ddot{\rho} - \dot{\phi}^2 \rho = -\frac{e}{m} \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} + \frac{e}{m} \dot{\phi} \rho B_z \quad (24.3.23)$$

$$\ddot{\phi} \rho + 2\dot{\phi} \dot{\rho} = -\frac{e}{m} \dot{\rho} B_z \quad (24.3.24)$$

$$\ddot{z} = 0 \quad (24.3.25)$$

Il primo membro della seconda equazione (24.3.24) si può anche scrivere:

$$\ddot{\phi} \rho + 2\dot{\phi} \dot{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \left(\rho^2 \frac{d\phi}{dt} \right) \quad (24.3.26)$$

In definitiva il sistema (24.3.23) ÷ (24.3.25) diventa:

$$\ddot{\rho} - \dot{\phi}^2 \rho = -\frac{e}{m} \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} + \frac{e}{m} \dot{\phi} \rho B_z \quad (24.3.27)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \left(\rho^2 \frac{d\phi}{dt} \right) = -\frac{e}{m} \dot{\rho} B_z \quad (24.3.28)$$

$$\ddot{z} = 0 \quad (24.3.29)$$

Moltiplicando ciascun membro dell'equazione (24.3.28) per ρ e tenendo conto che:

$$\rho\dot{\rho} = \frac{1}{2} \frac{d\rho^2}{dt} \quad (24.3.30)$$

il sistema di equazioni (24.3.27) \div (24.3.29) diventa:

$$\ddot{\rho} - \dot{\phi}^2 \rho = -\frac{e}{m} \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} + \frac{e}{m} \dot{\phi} \rho B_z \quad (24.3.31)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\rho^2 \frac{d\phi}{dt} \right) = -\frac{e}{m} B_z \frac{1}{2} \frac{d\rho^2}{dt} \quad (24.3.32)$$

$$\ddot{z} = 0 \quad (24.3.33)$$

La seconda equazione (24.3.32) é immediatamente integrabile, risultando:

$$\left(\rho^2 \frac{d\phi}{dt} \right) = -\frac{e}{m} B_z \frac{1}{2} \rho^2 + C \quad (24.3.34)$$

essendo C una costante arbitraria d'integrazione.

La costante d'integrazione C é determinata dalle condizioni iniziali:

$$u_0 = \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_{t=0} ; v_0 = \rho_0 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)_{t=0} ; w_0 = \left(\frac{dz}{dt} \right)_{t=0} \quad (24.3.35)$$

essendo ρ_0 la coordinata radiale iniziale di un punto posto a codesta distanza dall'origine, per esempio sulla superficie di un catodo cilindrico. Quindi, per $t = 0$, l'equazione (24.3.34) diventa:

$$\rho_0 v_0 = -\frac{e}{m} B_z \frac{1}{2} \rho_0^2 + C \quad (24.3.36)$$

da cui:

$$C = \rho_0 v_0 + \frac{e}{2m} B_z \rho_0^2 \quad (24.3.37)$$

che sostituita nell'equazione (24.3.34) comporta:

$$\left(\rho^2 \frac{d\phi}{dt} \right) = -\frac{e}{m} B_z \frac{1}{2} \rho^2 + \rho_0 v_0 + \frac{e}{2m} B_z \rho_0^2 \quad (24.3.38)$$

Dividendo per ρ^2 :

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{e}{2m} B_z + \frac{\rho_0 v_0}{\rho^2} + \frac{e}{2m} B_z \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \quad (24.3.39)$$

che si può ancora scrivere:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \left(\frac{v_0}{\rho_0} + \frac{e}{2m} B_z \right) - \frac{e}{2m} B_z \quad (24.3.40)$$

Posto $\omega_L = -\frac{e}{2m}B_z$, che é la frequenza angolare di Larmor o ciclotronica o giromagnetica, l'equazione (24.3.40) si scrive:

$$\boxed{\frac{d\phi}{dt} = \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \left(\frac{v_0}{\rho_0} - \omega_L \right) + \omega_L} \quad (24.3.41)$$

$$\left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \frac{\rho_0^4}{\rho^4} \left(\frac{v_0^2}{\rho_0^2} + \omega_L^2 - 2\omega_L \frac{v_0}{\rho_0} \right) + 2\omega_L \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \left(\frac{v_0}{\rho_0} - \omega_L \right) + \omega_L^2 \quad (24.3.42)$$

Sostituendo le equazioni (24.3.42) e (24.3.41) nella (24.3.31), si ha:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - \frac{\rho_0^4}{\rho^3} \left(\frac{v_0^2}{\rho_0^2} + \omega_L^2 - 2\omega_L \frac{v_0}{\rho_0} \right) - 2\omega_L \frac{\rho_0^2}{\rho} \left(\frac{v_0}{\rho_0} - \omega_L \right) - \underline{\omega_L^2 \rho} = \\ = -\frac{e}{m} \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} - 2\omega_L \frac{\rho_0^2}{\rho} \left(\frac{v_0}{\rho_0} - \omega_L \right) - \underline{2\omega_L^2 \rho} \end{aligned} \quad (24.3.43)$$

che si può, quindi, scrivere:

$$\boxed{\ddot{\rho} - \frac{\rho_0^4}{\rho^3} \left(\frac{v_0^2}{\rho_0^2} + \omega_L^2 - 2\omega_L \frac{v_0}{\rho_0} \right) = -\frac{e}{m} \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} - \omega_L^2 \rho} \quad (24.3.44)$$

Ammettendo che $w_0 = 0$, ossia che la velocità di emissione degli elettroni da parte del catodo abbia componente di velocità nulla lungo l'asse del campo magnetico, asse z , il moto degli elettroni avviene sul piano $z = costante$, che per ipotesi sia il piano $z = 0$. Quindi il moto elettronico é completamente descritto dalle equazioni (24.3.41) e (24.3.44).

24.4 - Relazione fra il campo di induzione magnetica, la differenza di potenziale ed il percorso degli elettroni

Applichiamo il teorema di conservazione dell'energia totale meccanica; si ha:

$$\frac{1}{2}m(u_0^2 + v_0^2) + eV(\rho_0) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) + eV(\rho) = costante \quad (24.4.1)$$

Vogliamo determinare la condizione sulla differenza di potenziale affinché l'elettrone non raggiunga l'anodo, ossia imponiamo che quando $\rho = \rho_{max} \implies \dot{\rho}(\rho_{max}) = 0$. Quindi, la condizione che l'elettrone non raggiunga l'anodo si determina dalla (24.4.1):

$$\frac{1}{2}mu_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\rho_{max}^2\dot{\phi}^2 + e(\Delta V)_{max} \quad (24.4.2)$$

essendo $(\Delta V)_{max}$ la differenza di potenziale fra catodo e anodo affinché gli elettroni raggiungano la distanza r_{max} dal catodo.

Sostituendo la (24.4.42) nella (24.4.2) si ottiene:

$$\frac{1}{2}mu_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\rho_{max}^2 \left[\frac{\rho_0^4}{\rho_{max}^4} \left(\frac{v_0^2}{\rho_0^2} + \omega_L^2 - 2\omega_L \frac{v_0}{\rho_0} \right) + 2\omega_L \frac{\rho_0^2}{\rho_{max}^2} \left(\frac{v_0}{\rho_0} - \omega_L \right) + \omega_L^2 \right] + e(\Delta V)_{max} \quad (24.4.3)$$

$$\frac{1}{2}mu_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\rho_{max}^2 \left[\frac{\rho_0^2}{\rho_{max}^2} \left(\frac{v_0}{\rho_0} - \omega_L \right) + \omega_L \right]^2 + e(\Delta V)_{max} \quad (24.4.4)$$

$$\frac{1}{2}mu_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\rho_{max}^2 \left[\omega_L \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho_{max}^2} \right) + \frac{\rho_0^2}{\rho_{max}^2} \frac{v_0}{\rho_0} \right]^2 + e(\Delta V)_{max} \quad (24.4.5)$$

$$\frac{1}{2}mu_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\rho_{max}^2 \left[\omega_L^2 \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho_{max}^2} \right)^2 + \frac{\rho_0^4}{\rho_{max}^4} \frac{v_0^2}{\rho_0^2} + 2\frac{\rho_0^2}{\rho_{max}^2} \frac{v_0}{\rho_0} \omega_L \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho_{max}^2} \right) \right] + e(\Delta V)_{max} \quad (24.4.6)$$

$$(\Delta V)_{max} = \frac{m}{2e} \left[v_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho_{max}^2} \right) - \rho_{max}^2 \omega_L^2 \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho_{max}^2} \right)^2 - 2\omega_L \rho_0 v_0 \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho_{max}^2} \right) \right] + \frac{m}{2e} u_0^2 \quad (24.4.7)$$

Se un conduttore cilindrico di raggio ρ_{max} é posto nella posizione della superficie ρ_{max} , tutti gli elettroni lo raggiungeranno se il suo potenziale é piú grande di $(\Delta V)_{max}$, e nessuno lo raggiungerá se il suo potenziale é minore di $(\Delta V)_{max}$.

Quindi se si osserva la corrente nel cilindro come funzione di $(\Delta V)_{max}$ con B costante, o come funzione di B con $(\Delta V)_{max}$ costante, questa corrente cadrá bruscamente a zero al valore critico di ΔV o di B . Tutto questo é stato trovato sperimentalmente.

Le equazioni scritte sopra si riferiscono sia agli elettroni che agli ioni, emessi da ciascun punto in qualunque direzione con qualunque velocità iniziale. Quattro casi speciali saranno considerati.

Caso I. Catodo interno - Gli elettroni cominciano il moto da un filamento rettilineo di raggio ρ_0 e viaggiano fino ad un anodo cilindrico concentrico di raggio R , **grande rispetto al filamento** (fig.24.4.1).

Ponendo, allora, $\rho_{max} = R$ e quindi $\rho_0 \ll R$ l'equazione (24.4.7) diventa:

$$(\Delta V)_{max} = -\frac{m}{2e} R^2 \omega_L^2 - \frac{m}{e} \omega_L \rho_0 v_0 + \frac{m}{2e} (u_0^2 + v_0^2) \quad (\rho_0 \ll R) \quad (24.4.8)$$

L'ultimo termine del secondo membro rappresenta l'energia cinetica iniziale di emissione degli elettroni, espressa nelle stesse unità di $(\Delta V)_{max}$.

Se le energie iniziali sono quelle di emissione termica, fra zero e due volts, allora gli ultimi due termini dell'equazione (24.4.8) sono trascurabili per la

maggior parte degli elettroni, le cui energie iniziali sono minori di 1/10 di volt; ed essi sono trascurabili anche per elettroni con energie iniziali piú alte quando $(\Delta V)_{max}$ ed ω_L (ossia il campo di induzione magnetica) sono grandi.

In queste condizioni l'equazione (24.4.8) si può scrivere:

$$(\Delta V)_{max} = -\frac{m}{2e} R^2 \omega_L^2 \quad (24.4.9)$$

ossia:

$$(\Delta V)_{max} = -\frac{e}{8m} R^2 B^2 \quad (24.4.10)$$

che si può ancora meglio comprendere se scritta nella seguente maniera:

$$\boxed{\left(\frac{\Delta V}{B^2}\right)_{max} = -\frac{e}{8m} R^2} \quad (24.4.11)$$

Questa é una relazione molto importante dal punto di vista del funzionamento del magnetron. Essa implica che per $\frac{\Delta V}{B^2}$ minore del secondo membro dell'equazione (24.4.11), nessuna corrente fluisce e, man mano che $\frac{\delta V}{B^2}$ aumenta attraversando la condizione di cutoff, si ottiene un rapido aumento della corrente. Per ragioni oscure la riduzione della corrente al cutoff, che é osservata sperimentalmente, non é cosí brusca come la teoria illustrata sopra indicherebbe.

24.5 - Traiettoria degli elettroni

I fenomeni discussi finora sono indipendenti dalla distribuzione del potenziale all'interno della struttura. La determinazione completa della traiettoria degli elettroni richiede una conoscenza della distribuzione del potenziale che dipende dalla carica spaziale degli elettroni. Certe proprietà del moto possono essere ottenute, tuttavia, senza questa conoscenza, e una soluzione approssimata può essere ottenuta nell'ipotesi che la distribuzione di carica spaziale sia la stessa di quella che esiste senza il campo magnetico. Vi é evidenza sperimentale che questa ipotesi non sia lontana dalla verità.

La **velocità angolare** dell'elettrone é data dall'equazione (24.3.41):

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \left(\frac{v_0}{\rho_0} - \omega_L \right) + \omega_L \quad (24.5.1)$$

Nel caso di un elettrone che lascia il filamento di raggio ρ_0 con velocità iniziale:

$$v_0 \leq \rho_0 \omega_L \quad (24.5.2)$$

il primo membro del secondo membro della (24.5.1) diventa trascurabile rispetto al secondo termine non appena l'elettrone abbia raggiunto una distanza ρ eguale a circa 10 volte il

raggio del filamento ($\rho \gg \rho_0$). Da questo punto in poi la sua velocità angolare ($\dot{\phi}$) è costante ed è eguale ad ω_L . Nei casi usuali questa distanza è dell'ordine di 0.5 millimetri.

Per esempio nel caso di un filo di 1/1000-esimo di pollice di diametro ($\rho_0 = 0.0012 \text{ cm}$) ed elettroni con velocità iniziale di $2 \cdot 10^6 \text{ cm/s}$, se $B = 200 \text{ Gauss}$, risulta:

$$\frac{v_0}{\rho_0} \simeq 1.7 \cdot 10^9 \text{ (s}^{-1}\text{)}; \quad \omega_L = -\frac{e}{2m}B \simeq 1.76 \cdot 10^9 \text{ rad/s}; \quad 10\rho_0 = 0.012 \text{ cm} \quad (24.5.3)$$

l'elettrone acquista il 99 per cento della sua massima velocità angolare dopo una distanza pari ad 1/10 mm dal filamento. Quindi:

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_L \begin{cases} \rho > 0.01 \text{ cm} \\ B > \frac{2mv_0}{er_0} \end{cases} \quad (24.5.4)$$

cioè per elettroni con piccola velocità iniziale da un millesimo di pollice dal filamento, *tranne nella piccola regione entro 1/10 di mm dal filamento in cui la velocità angolare degli elettroni è costante ed eguale a $\frac{eB}{2m}$.*

Se un elettrone inizia con velocità angolare iniziale $\frac{v_0}{\rho_0}$ grande rispetto a $\frac{eB}{2m}$, questa velocità angolare diminuirà rapidamente inizialmente con un tasso proporzionale a $1/\rho^3$, poi meno rapidamente quando essa si avvicina al valore limite $\frac{eB}{2m}$, e non raggiungerà il suo valore limite in una distanza corta come quella data dall'equazione (24.5.4). Per esempio nel caso di un filamento di un millesimo di pollice di diametro e di un campo magnetico di 200 Gauss considerato precedentemente, gli elettroni con un decimo di volt di energia iniziale ($v_0 = 2 \cdot 10^7 \text{ cm/s}$) devono viaggiare 1 mm prima che la loro velocità angolare diminuisce all'1% del suo valore costante, ed elettroni con 2 volts di energia iniziale ($v_0 = 8 \cdot 10^7$) deve viaggiare 4 mm prima che la loro velocità angolare sia costante entro l'1%.

Ci proponiamo, ora, di determinare l'espressione della traiettoria delle particelle. Indichiamo con $d\vec{s}$ un elemento di tale traiettoria. Esso si può scrivere come:

$$d\vec{s} = d\rho\hat{e}_\rho + \rho d\phi\hat{e}_\phi \quad (24.5.5)$$

L'angolo ψ fra il raggio vettore e la tangente alla traiettoria è dato dalla relazione:

$$\tan \psi = \frac{\rho d\phi}{d\rho} \quad (24.5.6)$$

Per valutare tale angolo utilizziamo le equazioni del moto (24.4.41) e (24.4.44)

Consideriamo l'equazione (24.4.44) imponendo in essa la condizione che la velocità iniziale sia nulla:

$$\ddot{\rho} - \frac{\rho_0^4}{\rho^3}\omega_L^2 = -\frac{e}{m}\frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} - \omega_L^2\rho \quad (24.5.7)$$

Integrando rispetto a ρ , si ha:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d^2\rho}{dt^2} d\rho = \omega_L^2 \rho_0^4 \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\rho^3} d\rho - \frac{e}{m} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} d\rho - \omega_L^2 \int_{\rho_0}^{\rho} \rho d\rho \quad (24.5.8)$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d^2\rho}{dt^2} dr = \omega_L^2 \rho_0^4 \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho_0^2} \right) - \frac{e}{m} [V(\rho) - V(\rho_0)] - \omega_L^2 \frac{1}{2} (\rho^2 - \rho_0^2) \quad (24.5.9)$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d^2\rho}{dt^2} dr = \frac{1}{2} \omega_L^2 \rho_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right) - \frac{e}{m} [V(\rho) - V(\rho_0)] - \frac{1}{2} \omega_L^2 \rho^2 \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right) \quad (24.5.10)$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d^2\rho}{dt^2} dr = \frac{1}{2} \omega_L^2 \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right) (\rho_0^2 - \rho^2) - \frac{e}{m} [V(\rho) - V(\rho_0)] \quad (24.5.11)$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d^2\rho}{dt^2} dr = -\frac{1}{2} \frac{1}{\rho^2} \omega_L^2 (\rho^2 - \rho_0^2)^2 - \frac{e}{m} [V(\rho) - V(\rho_0)] \quad (24.5.12)$$

Ora:

$$\frac{dr}{dt} = v_r \quad \text{quindi} \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{dr} \frac{dr}{dt} = v_r \frac{dv_r}{dr} \quad (24.5.13)$$

Quindi la (24.5.12) si scrive:

$$\frac{1}{2} v_r^2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\rho^2} \omega_L^2 (\rho^2 - \rho_0^2)^2 - \frac{e}{m} [V(\rho) - V(\rho_0)] \quad (24.5.14)$$

ossia:

$$\left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 = -\frac{1}{\rho^2} \omega_L^2 (\rho^2 - \rho_0^2)^2 - 2 \frac{e}{m} [V(\rho) - V(\rho_0)] \quad (24.5.15)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \pm \sqrt{-\frac{1}{\rho^2} \omega_L^2 (\rho^2 - \rho_0^2)^2 - 2 \frac{e}{m} [V(\rho) - V(\rho_0)]} \quad (24.5.16)$$

Quindi:

$$\tan \psi = \frac{\rho d\phi}{d\rho} = \pm \frac{\rho \omega_L \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right)}{\frac{1}{\rho} \sqrt{-2 \frac{e}{m} V(\rho) \rho^2 - \omega_L^2 (\rho^2 - \rho_0^2)^2}} = \pm \frac{\omega_L (\rho^2 - \rho_0^2)}{\sqrt{-2 \frac{e}{m} V(\rho) \rho^2 - \omega_L^2 (\rho^2 - \rho_0^2)^2}}$$

(24.5.17)

avendo posto $V(\rho_0) = 0$.

Poiché V é una funzione di ρ soltanto, l'equazione (24.5.17) ha lo stesso valore numerico per un elettrone viaggiante in direzione dell'asse che per uno viaggiante in direzione opposta, quindi gli elettroni ritornano nella traiettoria della stessa forma come quelle in cui essi escono. Questo mostra che gli elettroni, se essi non riescono a raggiungere l'anodo, non continuano circolarmente attorno al catodo in orbite approssimativamente circolari per

sempre (o fino a quando essi colpiscono le molecole del gas), ma ritornano periodicamente al catodo. L'angolo totale che essi descrivono prima di ritornare dipende dalla distribuzione dell'intensità del campo elettrico come funzione di r . Se la distribuzione di carica spaziale fosse la stessa senza campo magnetico questo angolo sarebbe 270 gradi. La carica spaziale reale che é stata recentemente calcolata da Langmuir, é leggermente piú grande di quella senza campo magnetico e dá un angolo totale di $288^{\circ}.5$.

Vi sono due casi speciali di distribuzione del campo elettrico che portano a semplici soluzioni per la traiettoria. Il primo rappresenta la condizione iniziale, prima che la carica spaziale ha avuto il tempo di crearsi. Il secondo rappresenta molto vicino alla condizione stazionaria.

Caso I - La carica spaziale é trascurabile.

Sia a il raggio della superficie esterna di un cilindro conduttore, e sia b il raggio della superficie interna di una cavità cilindrica.

É evidente che il campo dipende solo dalla distanza dall'asse di simmetria, per cui l'equazione di Laplace in coordinate cilindriche si scrive:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \text{costante} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \frac{\text{costante}}{\rho} \quad \rightarrow \quad \Phi = C_1 + C_2 \ln \rho \quad (24.5.18)$$

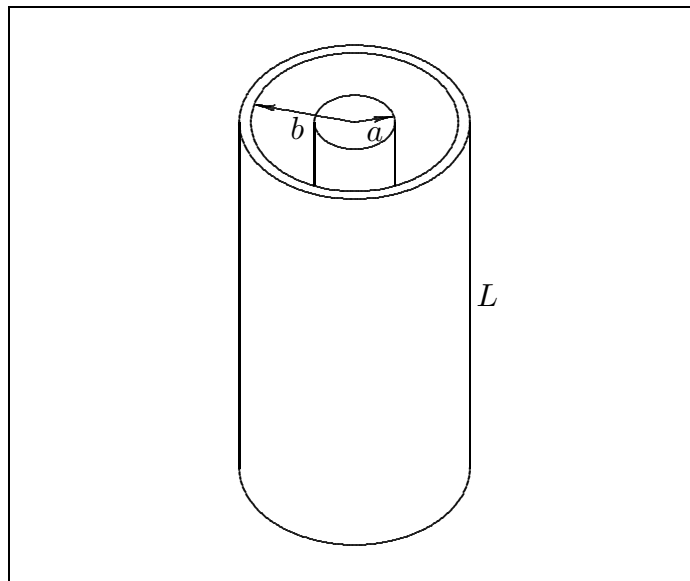


fig.24.5-1

Poiché $\Phi = V_A$ per $\rho = a$ e $\Phi = V_B$ per $\rho = b$ si ha il seguente sistema:

$$\begin{aligned} V_A &= C_1 + C_2 \ln a \\ V_B &= C_1 + C_2 \ln b \end{aligned} \quad (24.5.19)$$

da cui:

$$C_1 = \frac{V_B \ln a - V_A \ln b}{\ln \frac{a}{b}} \quad C_2 = \frac{V_A - V_B}{\ln \frac{a}{b}} \quad (24.5.20)$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{V_B \ln a - V_A \ln b}{\ln \frac{a}{b}} + \frac{V_A - V_B}{\ln \frac{a}{b}} \ln \rho = \frac{V_B \ln a - V_B \ln \rho - V_A \ln b + V_A \ln \rho}{\ln \frac{a}{b}} = \\ &= \frac{V_B \ln \frac{a}{\rho} + V_A \ln \frac{\rho}{b}}{\ln \frac{a}{b}} = \frac{V_A \ln \frac{b}{\rho} + V_B \ln \frac{\rho}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \end{aligned} \quad (24.5.21)$$

Il campo elettrico é dato da:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\hat{e}_\rho = -\frac{-V_A\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}V_B}{\ln \frac{b}{a}}\hat{e}_\rho = \frac{V_A - V_B}{\rho \ln \frac{b}{a}}\hat{e}_\rho \quad (24.5.22)$$

ossia:

$$E = \frac{V}{\rho \log \frac{R}{r_0}} \quad (24.5.23)$$

dove R ed r_0 sono i raggi del cilindro e del filamento rispettivamente. Se r_0 é molto piccolo, l'intensitá del campo elettrico é trascurabile tranne nella regione molto prossima al filamento. L'elettrone si muoverá allora con velocitá costante (perché si é in presenza di solo il campo magnetico), e la sua traiettoria sará un circonferenza di raggio:

$$\frac{\sqrt{2\frac{m}{e}V}}{H} \quad (24.5.24)$$

Questa soluzione rappresenta la condizione iniziale, prima gli elettroni che non riescono a raggiungere il cilindro hanno avuto il tempo di accumularsi nello spazio in quantitá apprezzabile. Lo stato stazionario, tuttavia piccola l'emissione, deve essere quella della piena carica spaziale.

Caso II - La carica spaziale é la stessa di quella competente in assenza di campo magnetico¹⁾.

Sia un filo di raggio a posto nell'asse di un cilindro di raggio R . Si i la corrente termoionica per unitá di lunghezza dal filo. Per il caso di simmetria cilindrica, l'equazione di Laplace diventa:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(r \frac{dV}{d\rho} \right) = 4\pi\rho_c \quad (24.5.25)$$

¹⁾ Langmuir Irving: The effect of space charge and residual gases on thermionic currents in high vacuum - Physical Review, 2, pag.450, 1913.

oppure:

$$\frac{d}{d\rho} \left(r \frac{dV}{d\rho} \right) = 4\pi\rho_c\rho \quad (24.5.26)$$

essendo ρ_c la densità di carica nello spazio compreso fra i due cilindri.

L'equazione della corrente i si scrive:

$$i = 2\pi\rho\rho_c v \quad (24.5.27)$$

e la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV \quad (24.5.28)$$

Dalla (24.5.26) risulta:

$$\rho_c = \frac{i}{2\pi\rho v} \quad (24.5.29)$$

Sostituendo nella (24.5.28) l'espressione di v dalla (24.5.27), si ha:

$$\rho_c = \frac{i}{2\pi\rho\sqrt{\frac{2eV}{m}}} \quad (24.5.30)$$

L'equazione di Poisson diventa quindi:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = i\sqrt{\frac{2m}{eV}} \quad (24.5.31)$$

Questa equazione probabilmente non può essere integrata direttamente, ma è possibile ottenere il risultato in termine di sviluppo in serie

La soluzione finale prende la forma:

$$i_0 = \frac{2\sqrt{2}}{9} \sqrt{\frac{e}{m}} \frac{V^{3/2}}{\rho\beta^2} \quad (28.4.32)$$

essendo β un parametro compreso fra 0 e 1. Nel nostro caso ($R \gg \rho_0$) è stato valutato $\beta \simeq 1$. Si ha, quindi:

$$V = \left(\frac{9}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m}{e}} i_0 \right)^{2/3} \rho^{2/3} \quad (24.5.33)$$

dove i_0 è la massima corrente elettronica per cm di lunghezza dal filamento ad un cilindro concentrico di raggio ρ a potenziale V .

Consideriamo l'equazione (24.5.17), per $\rho_0 = 0$:

$$\frac{d\phi}{d\rho} = \frac{\omega_L}{\sqrt{-2\frac{e}{m}V - \omega_L^2\rho^2}} \quad (24.5.34)$$

Sostituendo al posto di V , nell'equazione (24.5.34), l'espressione data dall'equazione (24.5.33), si ha:

$$\frac{d\phi}{d\rho} = \frac{\omega_L}{\sqrt{\sqrt{-2\frac{e}{m} \left(\frac{9}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m}{e}} i_0 \rho \right)^{2/3} - \omega_L^2 \rho^2}}} \quad (24.5.35)$$

ossia:

$$\frac{d\phi}{d\rho} = \frac{\omega_L}{\sqrt{-\left(9\frac{e}{m} i_0 \rho\right)^{2/3} - \omega_L^2 \rho^2}} \quad (24.5.36)$$

Posto $\delta^2 = \left(9\frac{e}{m} i_0\right)^{2/3}$, l'equazione (24.5.36) si può scrivere:

$$\frac{d\phi}{d\rho} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{\delta^2}{\omega_L^2} \rho^{2/3} - \rho^2}} \quad (24.5.37)$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} x = \rho^{2/3} &\implies \rho = x^{3/2} \implies \rho^2 = x^3 \implies dx = \frac{2}{3} \rho^{-1/3} d\rho \\ &\implies d\rho = \frac{3}{2} \rho^{1/3} dx \implies d\rho = \frac{3}{2} x^{1/2} dx \end{aligned} \quad (24.5.38)$$

$$d\phi = \frac{\frac{3}{2} x^{1/2} dx}{\sqrt{\frac{\delta^2}{\omega_L^2} x - x^3}} \quad (24.5.39)$$

ossia:

$$d\phi = \frac{\frac{3}{2} dx}{\sqrt{\frac{\delta^2}{\omega_L^2} - x^2}} \quad (24.5.40)$$

che si può scrivere:

$$d\phi = \frac{\frac{3}{2} \frac{\omega_L}{\delta} dx}{\sqrt{1 - \frac{\omega_L^2}{\delta^2} x^2}} \quad (24.5.41)$$

Posto $u = \frac{\omega_L}{\delta} x \implies dx = \frac{\delta}{\omega_L} du$, l'equazione (24.5.41) diventa, allora:

$$d\phi = \frac{\frac{3}{2} du}{\sqrt{1 - u^2}} \quad (24.5.42)$$

Integrando:

$$\phi = \frac{3}{2} \arcsin(u) + \phi_0 \quad (24.5.43)$$

Ricordando che:

$$u = \frac{\omega_L}{\delta} x = \frac{\omega_L}{\left(9 \frac{e}{m} i_0\right)^{1/3}} \rho^{2/3} \quad (24.5.44)$$

la soluzione dell'equazione differenziale (24.5.34) é, dunque:

$$\boxed{\phi = \frac{3}{2} \arcsin \left(\frac{\omega_L}{\left(9 \frac{e}{m} i_0\right)^{1/3}} \rho^{2/3} \right) + \phi_0} \quad (24.5.45)$$

Posto $K = \frac{\omega_L}{\left(9 \frac{e}{m} i_0\right)^{1/3}}$, l'equazione (24.5.45) si puó, per comoditá scrivere:

$$\phi = \frac{3}{2} \arcsin \left(K \rho^{2/3} \right) + \phi_0 \quad (24.5.46)$$

ossia:

$$\left(\rho^{2/3} \right) = \frac{1}{K} \sin \left[\frac{2}{3} (\phi - \phi_0) \right] \quad (24.5.47)$$

da cui:

$$\boxed{\rho = \left\{ \frac{1}{K} \sin \left[\frac{2}{3} (\phi - \phi_0) \right] \right\}^{3/2}} \quad (24.5.48)$$

Traiettoria di un elettrone

$$K = 1$$

rosso : $\theta_0 = 0^\circ$, blu : $\theta_0 = 90^\circ$, verde : $\theta_0 = 180^\circ$
 90°

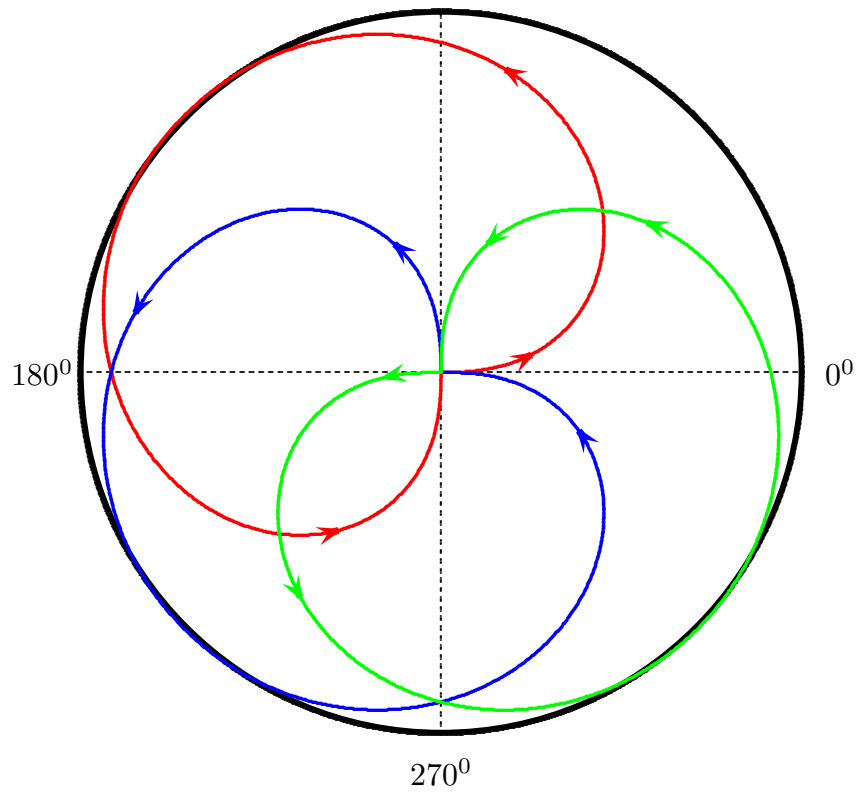


fig.24.5-2