

Tubi a modulazione di velocità - Klystron

22.1 - Klystron a due cavitá.

Al crescere della frequenza, i tubi di tipo classico non possono essere usati né come amplificatori né come oscillatori.

Un sistema sostitutivo ad alte frequenze é il **Klystron** (dal greco **klyzein**=infrangersi delle onde sulla spiaggia) che opera sul principio della modulazione di velocità di un fascetto di elettroni.

Un tipo di struttura é il Klystron a due cavitá che é illustrato in fig.22.1-1.

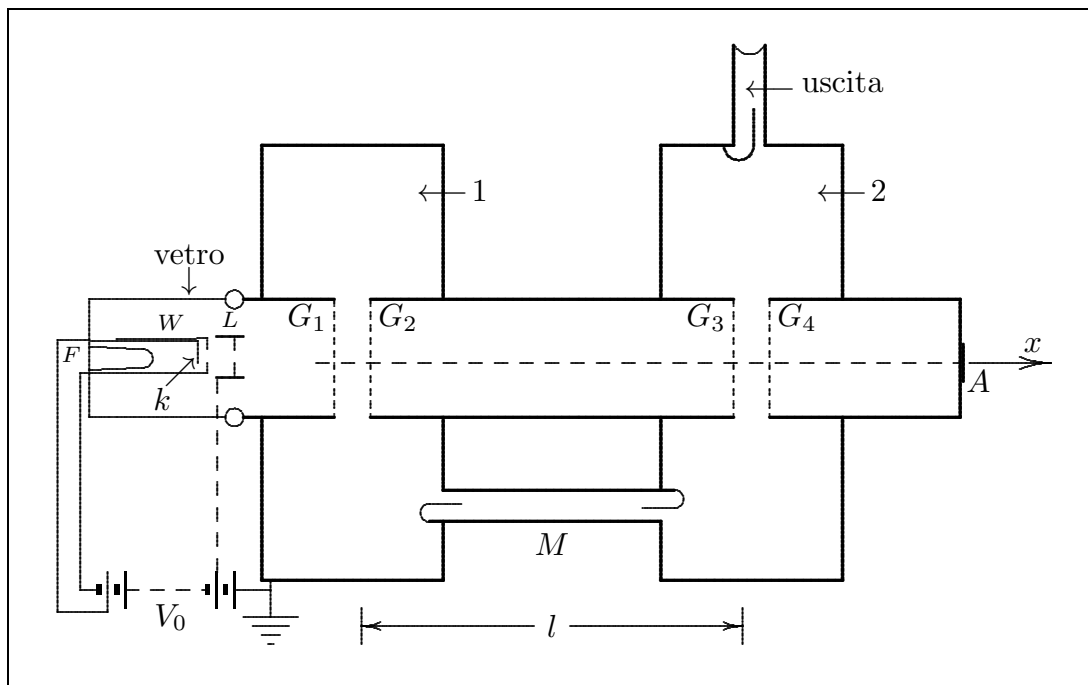


fig.22.1-1

Gli elettroni emessi dal catodo k , focalizzati dal cilindro W ed eventualmente dalla lente elettrostatica L , formano un fascio che percorre il tubo lungo l'asse x , attraverso la coppia di griglie modulatrici G_1, G_2 (buncher), il cilindro di raggruppamento compreso fra G_2, G_3 (drift), la coppia di griglie captatrice G_3, G_4 (catcher) fino a raggiungere in parte l'anodo A . La coppia di griglie G_1, G_2 fa parte della cavitá 1; la coppia di griglie G_3, G_4 fa parte della cavitá 2.

Le cavitá con le relative griglie, il cilindro di raggruppamento e l'anodo costituiscono una sola struttura metallica, generalmente connessa a terra, mentre gli elettrodi del cannone elettronico sono isolati e connessi a convenienti potenziali negativi. In fig.22.1-2 é

schematizzata una tipica cavità risonante utilizzata nei klystron.

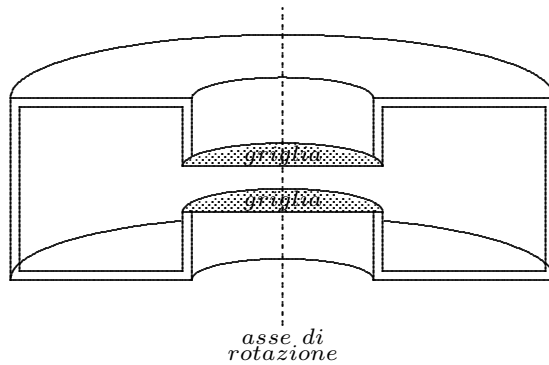


fig.22.1-2

22.2 - Modulazione di velocità.

Assumiamo che un fascio di elettroni passi attraverso una cavità del tipo mostrato in fig.22.1-2, fra le griglie della quale vi sia una tensione a radiofrequenza di periodo T . Supponiamo che le griglie siano così vicine per cui il tempo di transito attraverso di esse sia una piccola frazione del periodo. Esaminiamo ora il fenomeno di raggruppamento degli elettroni che si manifesta allorché essi proseguono il viaggio dopo avere attraversato la coppia di griglie $G_1 G_2$ che imprime loro la modulazione di velocità. Com'è noto gli elettroni giungono alla coppia di griglie con una velocità u_0 data da:

$$u_0 = \sqrt{\frac{2e}{m_0} V_0} = 5.95 \cdot 10^5 \sqrt{V_0} \quad \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad (22.2.1)$$

in cui e è la carica dell'elettrone, m_0 è la massa dell'elettrone, V_0 è la tensione acceleratrice degli elettroni esistente fra il catodo k e la coppia di griglie.

Se fra la coppia di griglie modulatrice $G_1 G_2$ è applicata una tensione sinusoidale di pulsazione ω e di ampiezza V , la velocità u con cui gli elettroni escono da G_2 soddisfa alla relazione:

$$\frac{1}{2} m_0 u^2 = e (V_0 + V \sin \omega t) = e V_0 (1 + \alpha \sin \omega t) \quad (22.2.2)$$

per cui risulta:

$$u = u_0 \sqrt{1 + \alpha \sin \omega t} \quad (22.2.3)$$

dove si è posto $\alpha = \frac{V}{V_0} =$ **profondità di modulazione della velocità.**

Se α è piccolo la radice della formula (22.2.3) si può ritenere uguale ai primi due termini del suo sviluppo in serie binomiale cioè:

$$u \simeq u_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2} \sin \omega t \right) \quad (22.2.4)$$

La velocità varia quindi fra i limiti

$$u_{\max} = u_0 \sqrt{1 + \alpha} \simeq u_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$u_{\min} = u_0 \sqrt{1 - \alpha} \simeq u_0 \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

per cui, se per esempio $\alpha = 0.2$ si ottiene

$$u_{\max} \simeq 1.1u_0$$

$$u_{\min} \simeq 0.9u_0$$

Un elettrone che attraversi la coppia di griglie modulatrici nell'istante in cui la tensione fra queste é nulla prosegue il suo cammino con la velocità costante u_0 impressa dalla tensione V_0 e, in un periodo T , della tensione modulatrice, percorrerá lungo l'asse x del tubo, uno spazio λ_0 dato da:

$$\lambda_0 = u_0 T \tag{22.2.5}$$

che chiameremo convenzionalmente **lunghezza d'onda** degli elettroni.

Conviene utilizzare, invece di x e t i parametri relativi (numerici) che si ottengono riferendo x a λ_0 e t a T ; possiamo porre cioè:

$$\xi = \frac{x}{\lambda_0} ; \tau = \frac{t}{T} \tag{22.2.6}$$

si possono inoltre indicare con θ gli angoli:

$$\theta = \omega t = 2\pi\tau \tag{22.2.7}$$

L'equazione oraria del moto di ciascun elettrone é:

$$x = u_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2} \sin \omega t_0\right) (t - t_0) \tag{22.2.8}$$

essendo t_0 l'istante in cui l'elettrone lascia la prima coppia di griglie (supposte a distanza nulla) e t il tempo. Per $t = t_0$ si ha $x = 0$ ossia l'elettrone si trova tra le griglie $G_1 G_2$.

In coordinate normalizzate la (22.2.8) si scrive:

$$\xi = \frac{x}{u_0 T} = \left(1 + \frac{\alpha}{2} \sin 2\pi\tau_0\right) (\tau - \tau_0) \tag{22.2.9}$$

Tracciamo per $\alpha = 0.2$ e per ogni valore di τ_0 le rette espresse dalla (22.2.9) in un diagramma (τ, ξ) , denominato diagramma di **Applegate**, rappresentato in fig.22.2-1. In tale diagramma tracciamo, cioè, la distanza ξ di ciascun elettrone dalla coppia di griglie in funzione del tempo τ . La coppia di griglie, nella nostra ipotesi, può essere trattata come singolo piano.

Gli elettroni piú veloci hanno tendenza a raggiungere quelli partiti prima, mentre quelli piú lenti saranno raggiunti da quelli piú veloci che partiranno dopo; in tal modo, dopo un certo percorso, gli elettroni, che attraversano le griglie G_1 G_2 con densità uniforme, risulteranno alternativamente **addensati** o **diradati**.

Il raggruppamento degli elettroni in “pacchetti” é evidenziato dalla densità delle rette. Si noti che i “pacchetti” suddetti si formano intorno alle rette che passano per $\xi = 0$ negli istanti $0, T, \dots, nT$ cioè intorno a quegli elettroni che attraversano le griglie modulatrici quando il segnale passa per zero da valori negativi a valori positivi; mentre attorno alle rette corrispondenti a $(2n + 1)\frac{T}{2}$ si crea la massima rarefazione di elettroni.

Il grafico fornisce un quadro qualitativo del fenomeno di raggruppamento degli elettroni: fino ad una certa distanza dalle griglie non si ha raggruppamento; ad una distanza particolare (chiamata distanza focale) si verifica un forte raggruppamento degli elettroni che si ripete con il periodo T della tensione alternata. Dopo il primo raggruppamento il fascio elettronico si sdoppia e all’aumentare della distanza vi saranno due gruppi di elettroni che si susseguono all’interno del periodo.

Se il parametro α é piú piccolo ossia alla coppia di griglie é applicato un piccolo segnale a radiofrequenza la distanza focale diventa piú grande ma, come vedremo dallo studio analitico, l’intensità del raggruppamento é sempre la stessa. Questa é una grande caratteristica in quanto l’amplificatore klystron puó avere una fortissima amplificazione pur con un debole segnale di ingresso.

É utile osservare che il fenomeno di raggruppamento é piú efficace se si modulano le griglie con tensione a dente di sega, ossia con una tensione del tipo:

$$y = m(\tau_0 - nT) \quad (22.2.10)$$

essendo: m il coefficiente angolare della retta che rappresenta l’andamento della tensione modulatrice, $n \in N$ e

$$0 \leq \tau_0 \in \left[(2n - 1)\frac{T}{2}, (2n + 1)\frac{T}{2} \right] \quad (22.2.11)$$

In fig.22.2-2 sono rappresentate tali rette e si osserva la sparizione dello sdoppiamento dei gruppi nonché la maggiore concentrazione spaziale del raggruppamento.

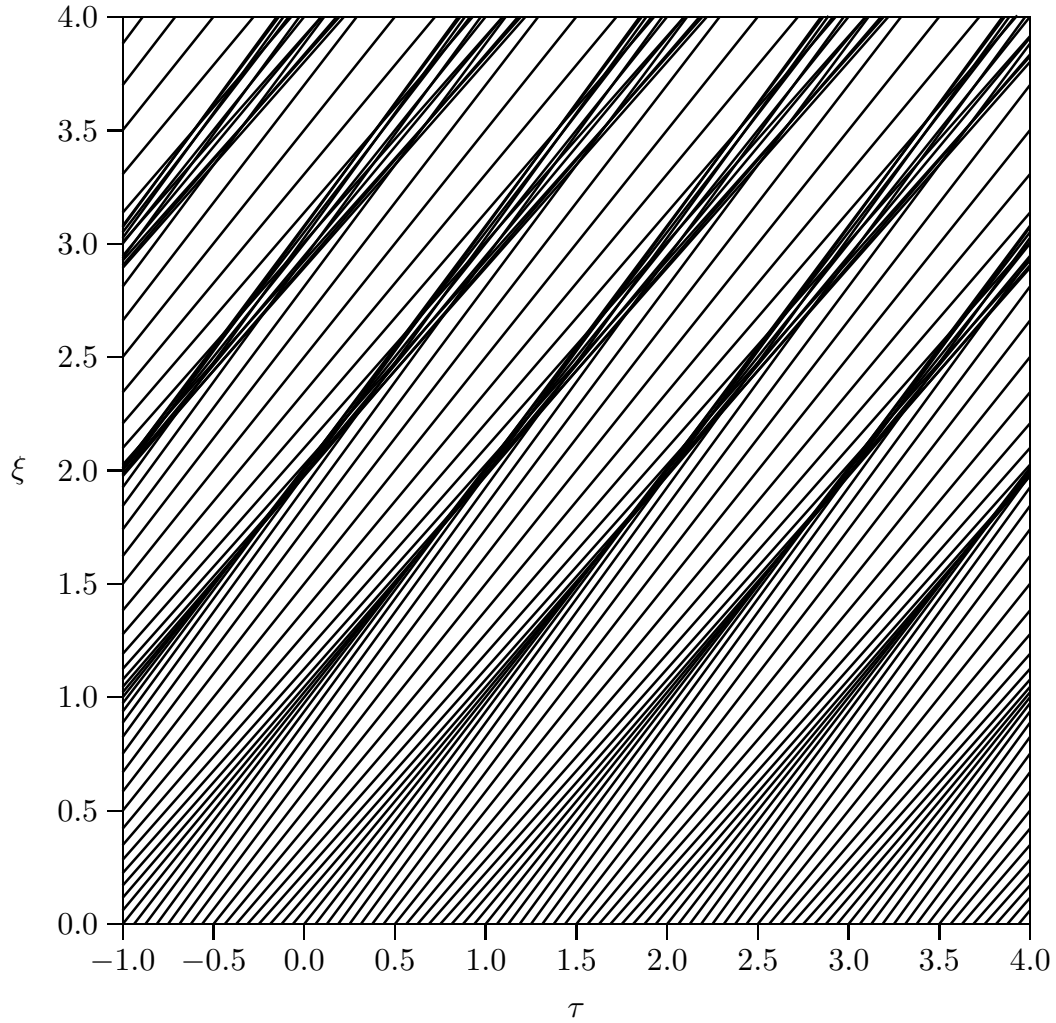
Programma matlab per il diagramma di Applegate.

APPLEGATE.m

```
delete(get (0, 'children'));
alfa=0.2;
axes('Position',[0.1 0.3 .8 .8])
for tau0=-5:0.05:6;
tau=-1:0.1:6;
x=(1+(alfa./2).*sin(2.*pi.*tau0)).*(tau-tau0);
hold on
plot(tau,x)
xlabel ('\tau')
ylabel ('\xi')
```

```
title ('Diagramma di Applegate')
axis ([-1,4, 0, 4])
end
axes('Position',[0.1 0.1 .8 .1])
tau0=-1:.1:4;
y=sin(2.*pi.*tau0);
plot(tau0,y)
axis ([-1,4, -1, 1])
xlabel ('\tau_0')
grid on
text(1.2,-3,'fig.22.2-1')
title ('Tensione applicata normalizzata (sin2\pi\tau_0)')
```

Diagramma di Applegate



Tensione applicata normalizzata ($\sin 2\pi\tau_0$)

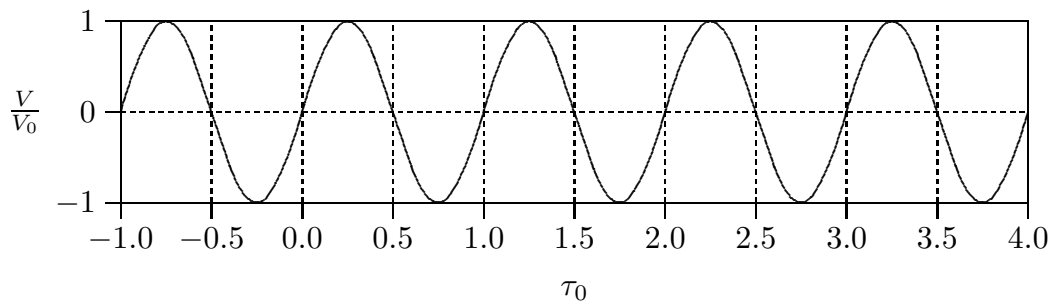


fig.22.2-1

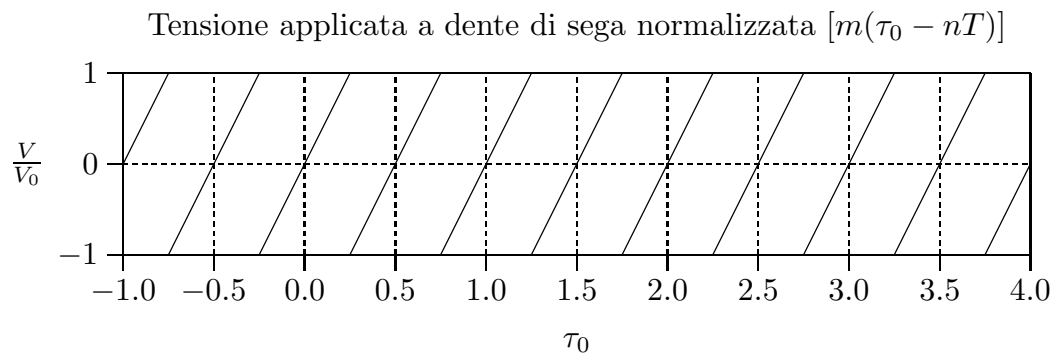
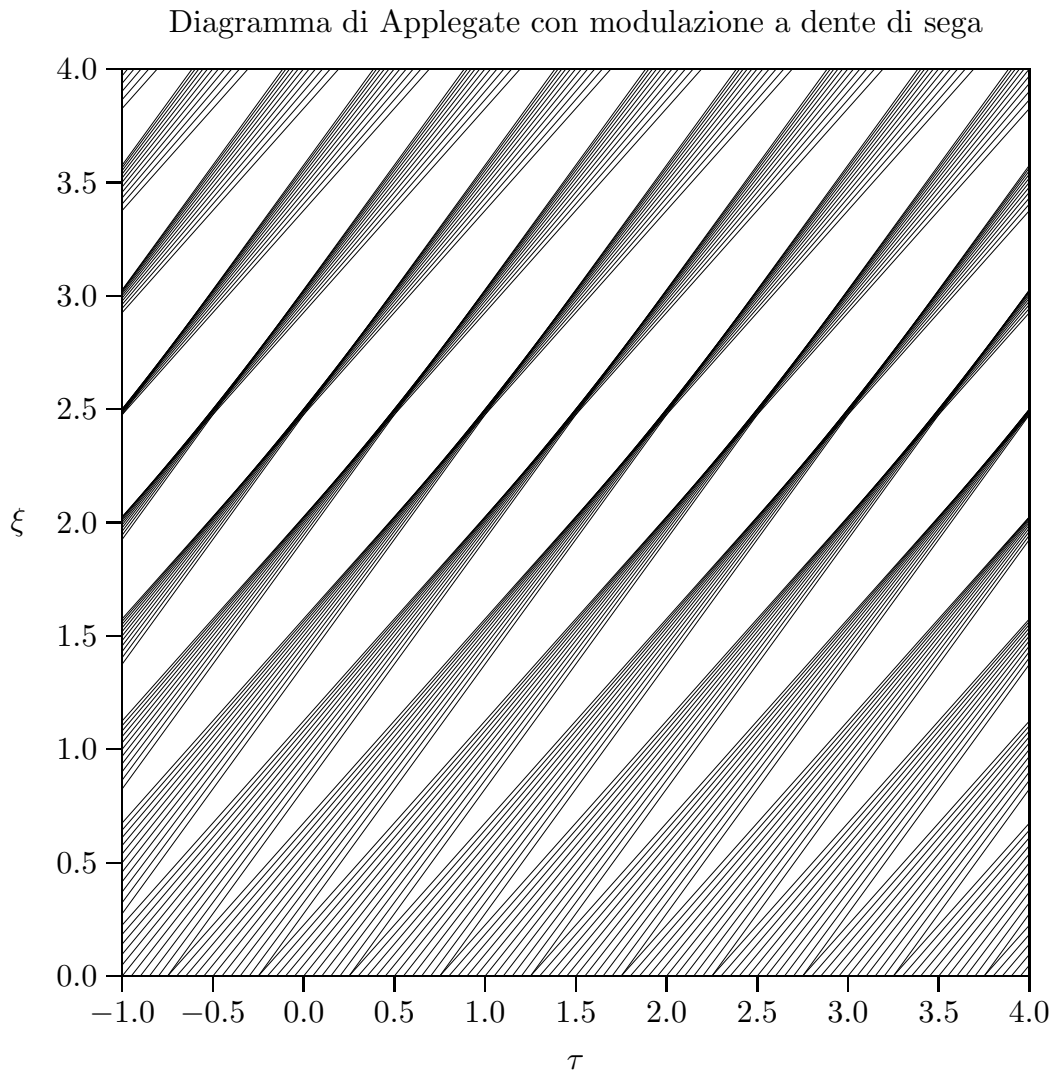


fig.22.2-2

22.3 - Diagramma $\tau - \tau_0$

Una seconda rappresentazione del raggruppamento degli elettroni causato dalla modulazione di velocità é mostrata in fig. 22.3-1 dove in ascissa é riportato il tempo τ in cui l'elettrone raggiunge un dato punto ξ lungo il fascio e in ordinata l'istante di tempo τ_0 in cui l'elettrone lascia la griglia. Per graficare tali curve procediamo nella seguente maniera.

Dalla (22.2.9) si ha:

$$\tau - \tau_0 = \frac{\xi}{1 + \frac{\alpha}{2} \sin 2\pi\tau_0} \quad (22.3.1)$$

che sviluppando in serie può scriversi:

$$\tau \simeq \tau_0 + \xi \left(1 - \frac{\alpha}{2} \sin 2\pi\tau_0 \right) \quad (22.3.2)$$

Posto $\xi = \frac{x}{u_0 T} = \frac{t_{x0}}{T} = \tau_{x0}$, si ha:

$$\tau \simeq \tau_0 + \tau_{x0} - \frac{\alpha\xi}{2} \sin 2\pi\tau_0 \quad (22.3.3)$$

dove τ_{x0} é il tempo (in unità di T) che un elettrone impiega a percorrere lo spazio x con velocità u_0 .

Posto $k = \alpha\xi\pi$ la (22.3.3) si può scrivere:

$$\tau = \tau_0 + \tau_{x0} - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\tau_0 \quad (22.3.4)$$

k prende il nome di **parametro di raggruppamento**. Per $\alpha = 0.2$, per ogni valore di ξ risulta fissato k ; si può così graficare τ_0 in funzione di τ per alcuni valori di ξ come in figura 22.3-1.

Qualunque sia ξ si può osservare che per certi valori di τ_0 gli elettroni lasciano la griglia con velocità maggiore di u_0 impiegando così meno tempo per raggiungere il piano ξ ; per altri valori di τ_0 essi lasciano la griglia con velocità minore di u_0 impiegando così più tempo per raggiungere il piano ξ . Così le curve risultanti deviano dalla linea retta. Osserviamo, tuttavia, che all'aumentare di ξ la curva può avere una tangente verticale per un certo valore di esso e che addirittura per valori maggiori può mostrare una pendenza opposta. Questo rappresenta un **raggruppamento degli elettroni**.

Infatti, poiché gli elettroni lasciano le griglie uniformemente, ad eguali intervalli sull'asse delle ordinate corrisponderá lo stesso numero di elettroni. Possiamo allora trovare la densità degli elettroni su ciascun piano ξ come funzione del tempo di arrivo τ , misurando la differenza di ordinate corrispondenti a due punti vicini sull'asse delle ascisse e dividendo per questo intervallo orizzontale. É chiaro, quindi, che dove la curva ha una tangente verticale, la densità degli elettroni diventerá infinita. Per calcolare questa tangente deriviamo:

$$\frac{d\tau}{d\tau_0} = 1 - k \cos 2\pi\tau_0 \quad (22.3.5)$$

e poniamo $\frac{d\tau}{d\tau_0} = 0$.
 Si ottiene

$$k \cos 2\pi\tau_0 = 1 \tag{22.3.6}$$

Per diversi valori di k si ottiene in corrispondenza di τ_0 :

k	τ_0	k	τ_0
1	0	2.5	0.18
1.5	0.13	3	0.20
2	0.17	3.5	0.20

La distanza che per un dato valore di α rende soddisfatta la (22.3.6) si chiama **distanza focale** e viene indicata con ξ_f .

Per esempio: per $k = 1$ e $\alpha = 0.2 \implies \xi_f = 1.59$.

In sostanza la distanza focale é quella, lungo lo spazio di addensamento degli elettroni, per la quale si ha per la prima volta un massimo teoricamente infinito. Oltre tale distanza il massimo suddetto si sdoppia in due, che si allontanano fra loro mentre l'insellatura fra questi due massimi si approfondisce.

Gli addensamenti suddetti si propagano con la velocità u_0 che é la velocità media del fascio elettronico.

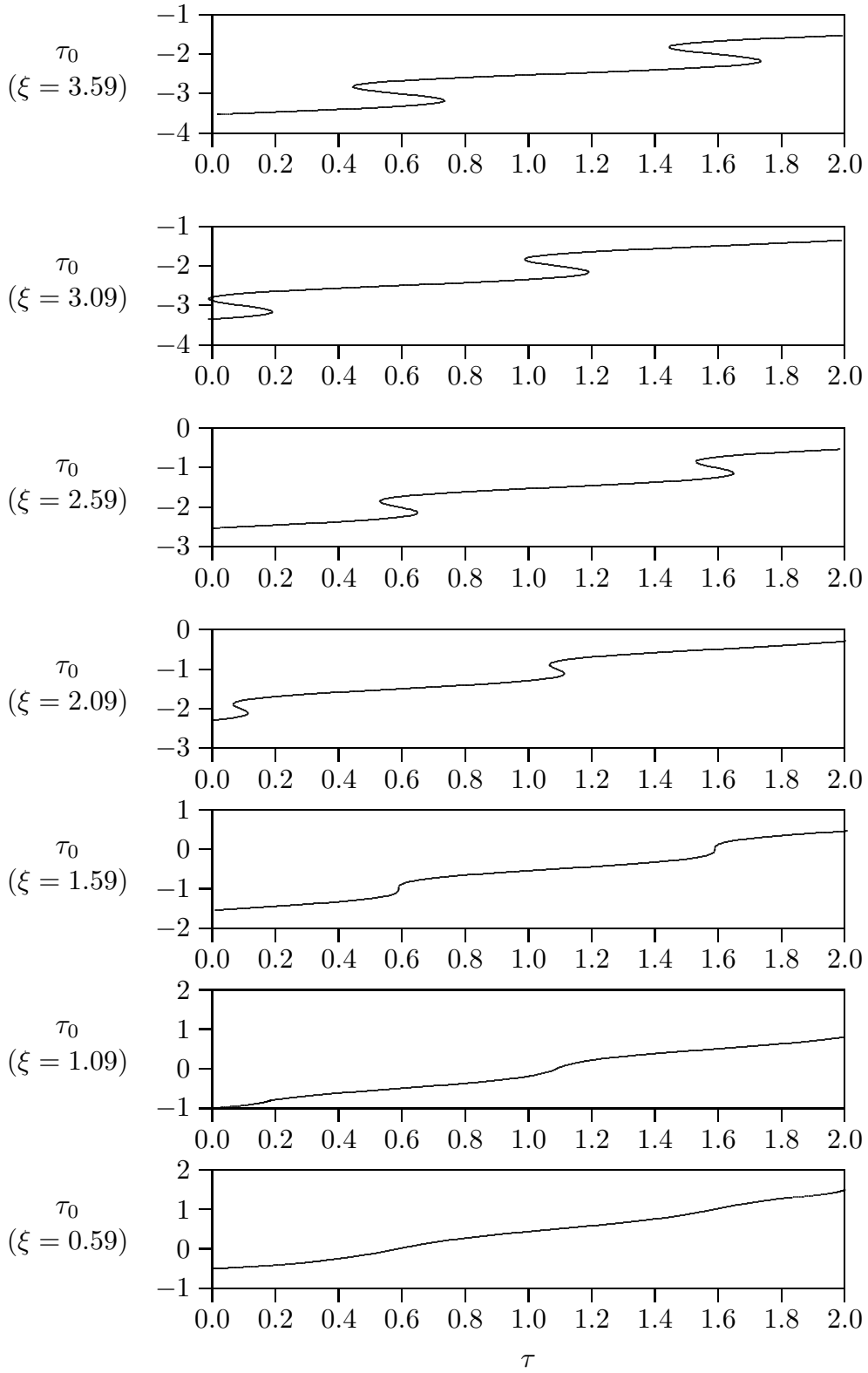


fig.22.3-1

22.4 - Andamento della corrente.

La corrente $I(\xi, \tau)$ che attraversa la sezione ξ all'istante τ é:

$$I(\xi, \tau) = \frac{dq}{d\tau} = \frac{dq}{d\tau_0} \frac{d\tau_0}{d\tau} = \frac{dq}{d\tau_0} \frac{1}{1 - k \cos 2\pi\tau_0} = I_0 \frac{1}{1 - k \cos 2\pi\tau_0} \quad (22.4.1)$$

Grafichiamo la funzione $i(\xi, \tau) = \frac{I(\xi, \tau)}{I_0}$, cioè la corrente, misurata nella sezione ξ all'istante τ , normalizzata alla corrente presente tra le griglie modulatrici:

$$i(\tau) = \frac{1}{1 - k \cos 2\pi\tau_0} \quad (22.4.2)$$

dove τ_0 é l'istante di partenza degli elettroni.

Ovviamente bisogna esplicitare l'argomento del coseno in funzione di τ per capire come varia la $i(\tau)$; l'istante τ di arrivo é una funzione di τ_0 , e viceversa τ_0 é una funzione di τ , nel senso che, fissato l'istante di arrivo τ di un certo elettrone, si può risalire al suo (o ai suoi) istante di partenza τ_0 . Per far ciò é necessario invertire la funzione $\tau(\tau_0)$, il che é possibile solo numericamente perché l'equazione che lega τ e τ_0 é non lineare. In fig.22.4-1 sono riportati alcuni grafici di $i(\tau)$ in varie sezioni, ottenuti valutando numericamente $\tau_0(\tau)$ ed assumendo $\alpha = 0.2$.

Prima di graficare la corrente é utile effettuare una previsione qualitativa della corrente descritta dall'espressione (22.4.2).

Da quanto detto ci si aspetta che per $k < 1$ ($\xi < 1.59$) non ci sia raggruppamento, ovvero che il massimo della corrente sia minore del $\sup[i(k, \tau)] = +\infty$; ciò é confermato dal fatto che per $k < 1$ il denominatore di $i(\tau)$ non può annullarsi. Tuttavia al tendere di k all'unità il denominatore si approssima allo zero, per cui il massimo di $i(\tau)$ cresce all'aumentare di k nell'intervallo $(0, 1)$. I diversi grafici confermano le previsioni.

Si noti, inoltre, che τ é normalizzata al periodo T del campo armonico generato dal klystron. Nella sezione $\xi = 0.59$ si ha il massimo della corrente, per $t \simeq 0.6T$, pari a circa due volte la corrente continua fornita dal catodo all'ingresso della cavità modulatrice.

Per $\xi = 1.59$ ci si attende che i massimi siano infiniti, dato che $k = 1$.

Si noti che l'istante in cui si ha il massimo é successivo all'istante di massimo del grafico precedente; é una regola del tutto generale: i picchi relativi alle sezioni più lontane hanno luogo in istanti di tempo successivi ai massimi delle sezioni più vicine alle griglie modulatrici; fisicamente, ciò é facilmente intuibile: tra un grafico ed il successivo, l'andamento temporale é traslato a destra, cioè si ha un ritardo, dovuto al fatto che gli elettroni impiegano più tempo per raggiungere sezioni più lontane.

Per $\xi > 1.59$ é palese che l'andamento sia traslato verso destra, rispetto al grafico per $\xi = 1.59$. Inoltre si nota uno sdoppiamento del massimo in due picchi, tra i quali é presente un "avvallamento", come del resto é evidente dal diagramma di Applegate.

Man mano che aumenta ξ , i picchi si sono distanziati maggiormente rispetto ai grafici delle sezioni precedenti; anche questo fatto é del tutto generale: all'aumentare di ξ , cioè della distanza fra le due cavità, i picchi si allontanano. Questo era già facilmente intuibile dai grafici dell'istante di arrivo in funzione di quello di partenza: é evidente che

all'aumentare di k , cioè della distanza fra le due cavità, gli istanti di arrivo corrispondenti ai punti a derivata nulla si distanziano sempre più.

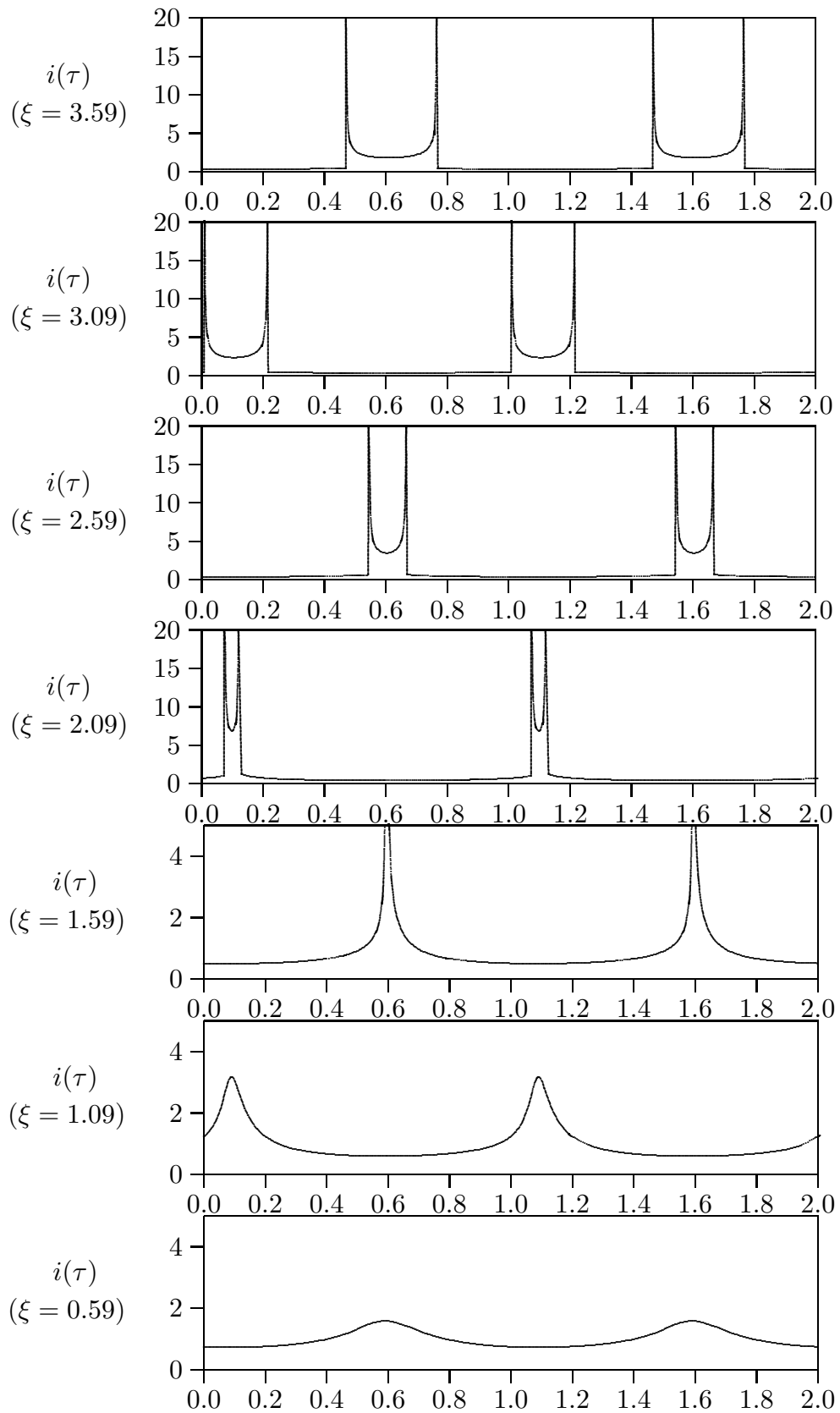
Per quanto detto, quindi, ci aspettiamo che i grafici successivi, relativi a k via via crescenti, siano simili a quelli già presentati, eccetto che per la traslazione verso destra e per l'aumento della distanza fra i massimi.

I massimi per $k \geq 1$ sono infiniti, come previsto, e quindi la distanza focale ($k = 1$) è la prima sezione con picco non limitato che si incontra viaggiando tra le due cavità nel verso degli elettroni.

Si noti che dai grafici di $i(\tau)$ non si evince alcuna informazione che possa suggerire quale sia il valore ottimale di k (che abbiamo precedentemente visto essere pari all'unità) ai fini del massimo raggruppamento: per $k \geq 1$ i massimi sono tutti infiniti, cioè vi è un istante di tempo in cui gli elettroni giungono pressoché contemporaneamente. Per capire come i concetti introdotti in questo e nel precedente paragrafo siano collegati è necessario evidenziare che in pratica non si può ottenere una corrente infinita; ciò avviene in quanto non sono verificate in modo esatto le ipotesi sulla perfetta uguaglianza delle velocità di ingresso dei vari elettroni alle griglie modulatrici, sul poter trascurare l'interazione tra gli elettroni (che certo esercitano gli uni sugli altri delle forze piccole, ma non nulle), sul poter considerare istantaneo il volo tra le griglie di ciascuna cavità.

Allora nella pratica realizzazione di un generatore klystron a due cavità bisogna scegliere k in modo che il raggruppamento sia migliore possibile: i picchi non saranno più infiniti, e per quanto detto il massimo più elevato si avrà per $k = 1$, in quanto la $\tau(\tau_0)$ è massimamente piatta e quindi $\frac{\Delta q}{\Delta \tau}$ è il massimo possibile fra le sezioni a $k \geq 1$.

Nella pagina successiva è presentata una serie di grafici che permette di verificare la correttezza delle osservazioni sin qui proposte. È riportato l'andamento della corrente in un klystron a due cavità: ogni diagramma si riferisce ad una sezione (indicata a lato); sull'asse delle ascisse vi è il tempo, sulle ordinate l'intensità di corrente normalizzata alla corrente presente all'ingresso delle griglie modulatrici.



τ
fig.22.4-1

22.5 - Algoritmo di inversione della funzione $\tau(\tau_0)$.

Per graficare la funzione $i(\tau)$ é necessario esplicitare la relazione che esprime il valore dell'istante di partenza degli elettroni che giungono all'ingresso del catcher all'istante τ nel quale si vuole valutare l'ampiezza della corrente.

Dalla teoria conosciamo la funzione $\tau(\tau_0)$, purtroppo é impossibile invertire tale funzione in modo simbolico, in quanto tale espressione é non lineare a causa del termine cosinusoidale.

Allora si é costretti a procedere numericamente, fissando di volta in volta la sezione ξ : per ogni τ nel quale si vuole calcolare la corrente, é necessario ricavare l'istante di partenza τ_0 che soddisfa la nota equazione $\tau = f(\tau_0)$. A tal uopo, utilizzando un qualunque programma di calcolo, si puó valutare numericamente il valore di τ_0 che, per un certo τ , soddisfa la $\tau = f(\tau_0)$, ovvero la soluzione dell'equazione $\tau - f(\tau_0) = 0$.

Quindi il problema dell'inversione della funzione $\tau(\tau_0)$ nella $\tau_0(\tau)$ si riduce semplicemente al calcolo iterativo, al variare di τ , degli zeri della funzione $\tau - f(\tau_0)$, che si effettua facilmente. Presentiamo un programma Matlab che effettua tale inversione e calcola la corrente. Bisogna tuttavia far attenzione che quando la curva $\tau_0(\tau)$ é a tre soluzioni, ossia per ogni valore di τ esistono tre valori di τ_0 e quindi della corrente, bisogna sommare i tre valori della corrente (in valore assoluto) per tracciare il grafico.

Programma MODVELO.m

```

delete(get(0,'children'));
csi=3.59;
alfa=0.2;
k=csi.*alfa.*pi;
for tau=0.:01:2;
delta=0.001;
tau0=-4.5;
for i=1:3000
F(i)=tau0+(csi./(1+(alfa./2).*sin(2.*pi.*tau0)))-tau;
tau0=tau0+delta;
G(i)=tau0+(csi./(1+(alfa./2).*sin(2.*pi.*tau0)))-tau;
HH(i)=F(i).*G(i);
[tau0 F(i) G(i) HH(i)]
if HH(i)<0
[tau tau0]
I=1./(1-k.*cos(2.*pi.*tau0));
[tau0 tau I F(i)]
end
end
end

```

Fine del Cap.22

```

delete(get (0, 'children'));
alfa=0.2;
axes('Position',[0.1 0.3 .8 .8])
for tau0=-5:0.05:6;
kern+20pt tau=-1:0.1:6;
x=(1+(alfa./2).*sin(2.*pi.*tau0)).*(tau-tau0);
hold on
plot(tau,x)
xlabel ('τ')
ylabel ('ξ')
title ('Diagramma di Applegate')
axis ([-1,4, 0, 4])
end
axes('Position',[0.1 0.1 .8 .1])
tau0=-1:.1:4;
y=sin(2.*pi.*tau0);
plot(tau0,y)
axis ([-1,4, -1, 1])
xlabel ('τ0')
grid on
text(1.2,-3,'fig.22.2-1')
title ('Tensione applicata normalizzata (sin2\pi\tau_0)')
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
Dalla formula 22.4.2 - Slater (Microwave Electronics) pag. 230
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

```

Consideriamo la formula (22.4.2). Il parametro di bunching k non può essere trattato come una quantità piccola, anche se $\alpha = V/V_0$ è assunto essere piccolo.

Considerata la funzione sinusoidale al denominatore della (22.4.2), si osserva che la corrente $I(\tau)$ ha una componente a radiofrequenza di frequenza ω . L'equazione (22.4.2) non è, tuttavia, una formula conveniente dalla quale determinare la componente a radiofrequenza, in quanto esprime I in termini di τ_0 piuttosto che in termini di τ . Ciò nondimeno, noi possiamo utilizzare la (22.4.2) per trovare lo sviluppo in serie di Fourier della corrente I . In un punto ξ possiamo esprimere $I(\tau)$ nella forma:

$$I = I_1 + \sum_n [A_n \cos 2\pi n(\tau - \xi) + B_n \sin 2\pi n(\tau - \xi)] \quad (1)$$

dove:

$$\begin{cases} I_1 = \int_0^1 I(\tau) d\tau \\ A_n = 2 \int_0^1 I(\tau) \cos 2\pi n(\tau - \xi) d\tau \\ B_n = 2 \int_0^1 I(\tau) \sin 2\pi n(\tau - \xi) d\tau \end{cases} \quad (2)$$

Dalla formula (22.4.2), I é una funzione di τ_0 ; convertiamo, allora, gli integrali nella equazione (2) in integrali su τ_0 invece che su τ . Per fare questo notiamo che dalla (22.4.1) risulta $I d\tau = I_0 d\tau_0$. Inpiú osserviamo che $2\pi(\tau - \xi) = 2\pi\tau_0 - k \cos 2\pi\tau_0$.

Cosí noi troviamo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} I_1 = I_0 & \\ A_n = \frac{I_0}{\pi} \int_0^1 \cos 2\pi n(\phi - \xi \cos \phi) d\phi = (-1)^{n/2} I_0 J_n(n\xi) & n \text{ pari} \\ A_n = 0 & n \text{ dispari} \\ B_n = \frac{I_0}{\pi} \int_0^1 \sin 2\pi n(\phi - \xi \cos \phi) d\phi = (-1)^{(n-1)/2} I_0 2J_n(n\xi) & n \text{ dispari} \\ B_n = 0 & n \text{ pari} \end{array} \right. \quad (2)$$

Nella derivazione della (2) noi abbiamo fatto il cambiamento della variabile $\phi = \omega t_0$. In piú, poiché l'integrale nella (2) é su un periodo completo di t , e poiché questo é anche un periodo completo di t_0 , e poiché la funzione di t_0 , o di ϕ é periodica cosicché ogni periodo completo é equivalente a qualunque altro, abbiamo usato i limiti di integrazione da 0 a 2π per ϕ nella (2). le funzioni di Bessel J_n nascono dalle ben conosciute formule per il tipo di integrali incontrate nelle espressioni.

Quindi la corrente I in funzione del tempo si può esprimere:

$$\begin{aligned} I = I_0 [& 1 + 2J_1(\xi) \sin \omega(t - \xi) + 2J_2(\xi) \cos \omega(t - \xi) - \\ & - 2J_3(\xi) \sin 3\omega(t - \xi) - 2J_4(\xi) \cos 4\omega(t - \xi) \dots] \end{aligned} \quad (3)$$

Come nel caso della sezione I noi troviamo un set di onde armoniche, di cui il termine fondamentale, con frequenza angolare ω , é il piú importante in un amplificatore o oscillatore. Questa frequenza fondamentale implica la variazione temporale $\sin \omega(t - -z/v_0)$, mostrando che essa viaggia con velocità v_0 , ma é moltiplicata dal termine di ampiezza $2I_0 J_1(\xi)$, che dipende da z attraverso la (2.5). Questa é la conseguenza della modulazione di velocità per cui gli elettroni si raggruppano o si diradano a differenti distanza dalla griglia. La funzione $J_1(\xi)$ é mostrata in figura. Essa é zero per $\xi = 0$, corrispondente al fatto che non vi é raggruppamento sulla griglia. Esso poi nasce al suo massimo valore di 0.5819, che si ottiene per $\xi = 1.84$. Questo allora é il valore ottimale del parametro di bunching dal punto di vista di ottenere larghe ampiezze di corrente a radio frequenza; e a questo punto la corrente é $1.16I_0$, di nuovo dello stesso ordine di grandezza della corrente continua (d.c.). A piú grandi valori del parametro di bunching, vediamo che vi é una successione di ulteriori massimi di corrente r.f., ma questi non sono grandi come il primo massimo e non sono ordinariamente di importanza pratica. Noi verifichiamo il fatto, menzionato prima in questa sezione, che il raggruppamento, o la corrente a radiofrequenza, dipende dal parametro di bunching, che può diventare grande anche per piccole tensioni a radiofrequenza V , purché lo spazio di drift z_0 sia convenientemente grande. Per raggruppamenti ottimali vediamo dalla (2.5) che il tempo impiegato da un elettrone per raggiungere il piano z dalla griglia é $0.59 (V_0/V)$ periodi della radiofrequenza.

Possiamo ora vedere come il raggruppamento del klystron si comporta quando si passa da un debole ad un forte segnale di ingresso. Supponiamo che z sia costante al variare dell'ampiezza del segnale. Allora per piccole tensioni sulla cavità d'ingresso noi possiamo assumere che ξ , il parametro di bunching sia piccolo. La funzione $J_1(\xi)$ é circa $\xi/2$ per piccoli valori di ξ ; così la corrente a radiofrequenza diventa $I_0\xi$ per piccoli valori di ξ . Questo é il regime a basso livello, in cui la corrente a radiofrequenza é proporzionale al segnale d'ingresso. Nelle operazioni ad alto livello, d'altra parte, ξ diventa dell'ordine dell'unitá, e la corrente a radiofrequenza, come abbiamo visto, raggiunge un massimo possibile valore di $1.16I_0$ dopo che esso comincia a crescere di nuovo. In altre parole, se noi desideriamo usare un amplificatore klystron per operazioni a basso livello, possiamo scegliere le variabili in modo tale che ξ sia piccolo rispetto all'unitá, mentre se noi desideriamo operazioni ad alto livello, con potenza massima d'uscita, noi dobbiamo avere ξ nell'intorno del valore ottimale 1.84.

Fine del Cap.22