

Cap. 21

**Teoria balistica della generazione di radiazione elettromagnetica.**

**21.1 - Tempo di transito di un circuito oscillante LC.**

Consideriamo l'interazione fra elettroni in "volo libero" attraverso il condensatore di un circuito LC.

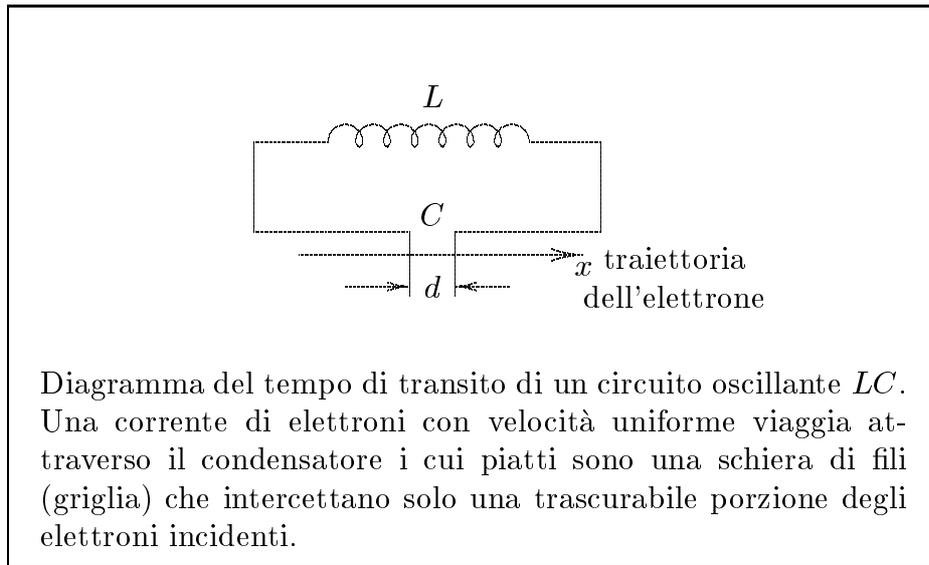


fig.21.1-1

Il circuito LC è accordato ad una certa frequenza  $\omega$  ed è eccitato anche prima dell'arrivo dell'elettrone.

Un elettrone con carica  $e = -|e|$  entrante nel campo del condensatore è sottoposto al suo campo elettrico  $E = \frac{1}{d}U$  dove  $d$  è la distanza fra le due armature del condensatore.

L'elettrone è sottoposto ad una forza  $eE$  ed ha una energia potenziale che consegna (o toglie) al circuito LC.

$$V_\varphi = -e \int_0^d E dx \quad (21.1.1)$$

La tensione ai capi del condensatore è:

$$U = U_0 \cos(\omega t + \varphi) \implies E = \frac{1}{d}U; \quad dx = v dt \quad (21.1.2)$$

che sostituita nella (21.1.1) comporta:

$$V_\varphi = -\frac{e}{d}U_0 \int_0^\tau v(t) \cos(\omega t + \varphi) dt \quad (21.1.3)$$

La velocità dell'elettrone nel condensatore non è costante ma è modificata dalla forza che il campo esercita sull'elettrone. Per trovare l'espressione per la velocità dell'elettrone ed il suo tempo di transito  $\tau$ , dobbiamo risolvere l'equazione del moto dell'elettrone,

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{e}{d} U_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (21.1.4)$$

La soluzione della (21.1.4) è:

$$v(t) = v_0 + \frac{eU_0}{m\omega d} \left[ \sin(\omega t + \varphi) - \sin \varphi \right] \quad (21.1.5)$$

Per ottenere il tempo di volo dell'elettrone attraverso il condensatore dobbiamo integrare ancora una volta:

$$x(t) = v_0 t + \frac{eU_0}{m\omega d} \left\{ \frac{1}{\omega} \left[ \cos \varphi - \cos(\omega t + \varphi) \right] - t \sin \varphi \right\} \quad (21.1.6)$$

Per  $t = \tau \implies x(\tau) = d$ , allora:

$$d = v_0 \tau + \frac{eU_0}{m\omega d} \left\{ \frac{1}{\omega} \left[ \cos \varphi - \cos(\omega \tau + \varphi) \right] - \tau \sin \varphi \right\} \quad (21.1.7)$$

E' impossibile avere una soluzione per  $\tau$  in forma funzionale.

Usiamo un calcolo perturbativo assumendo che  $\tau$  sia soltanto poco differente dal tempo di transito imperturbato

$$\tau_0 = \frac{d}{v_0} \quad (21.1.8)$$

in assenza del campo a radiofrequenza nel condensatore.

Prendendo  $\tau = \tau_0 + \eta$  con  $\eta \ll \tau_0$  si ha:

$$d = v_0 \tau_0 + v_0 \eta + \frac{eU_0}{m\omega d} \left\{ \frac{1}{\omega} \left[ \cos \varphi - \cos(\omega \tau_0 + \omega \eta + \varphi) \right] - \tau_0 \sin \varphi - \eta \sin \varphi \right\} \quad (21.1.9)$$

Poichè  $d$  può porsi eguale a  $v_0 \tau_0$  si ha:

$$v_0 \eta \simeq \frac{eU_0}{m\omega^2 d} \left\{ \omega \tau_0 \sin \varphi + \cos(\omega \tau_0 + \varphi) - \cos \varphi \right\} \quad (21.1.10)$$

avendo trascurato il termine  $\eta \sin \varphi$  ed il termine  $\omega \eta$  nell'argomento del coseno; da cui si ha:

$$\eta = \frac{eU_0}{m\omega^2 d v_0} \left\{ \omega \tau_0 \sin \varphi + \cos(\omega \tau_0 + \varphi) - \cos \varphi \right\} \quad (21.1.11)$$

Calcoliamo  $V_\varphi$  dopo avere sostituito la (21.1.5) nella (21.1.3)

$$\begin{aligned}
 V_\varphi &= -\frac{e}{d}U_0 \int_0^\tau v_0 \cos(\omega t + \varphi) dt - \frac{e^2 U_0^2}{m\omega d^2} \int_0^\tau \left[ \sin(\omega t + \varphi) - \sin \varphi \right] \cos(\omega t + \varphi) dt = \\
 &= -\frac{eU_0 v_0}{d\omega} \left[ \sin(\omega t + \varphi) \right]_0^\tau + \frac{1}{4} \frac{e^2 U_0^2}{m\omega^2 d^2} \left[ \cos(2\omega t + 2\varphi) \right]_0^\tau + \frac{e^2 U_0^2}{m\omega^2 d^2} \sin \varphi \left[ \sin(\omega t + \varphi) \right]_0^\tau = \\
 &= -\frac{eU_0}{\omega d} \left( v_0 - \frac{eU_0}{m\omega d} \sin \varphi \right) \left[ \sin(\omega\tau + \varphi) - \sin \varphi \right] + \frac{1}{m} \left( \frac{eU_0}{2\omega d} \right)^2 \left[ \cos(2\omega\tau + 2\varphi) - \cos 2\varphi \right]
 \end{aligned} \tag{21.1.12}$$

Per i termini proporzionali a  $\left( \frac{eU_0}{\omega d} \right)^2$  il tempo di transito  $\tau$  può essere sostituito da  $\tau_0$ , mentre per i termini lineari in  $\frac{eU_0}{m\omega d}$  a  $\tau$  va sostituito  $\tau_0 + \eta$

$$\begin{aligned}
 V_\varphi &= -\frac{eU_0}{\omega d} v_0 \left[ \sin(\omega\tau_0 + \omega\eta + \varphi) - \sin \varphi \right] + \frac{e^2 U_0^2}{m\omega^2 d^2} \sin \varphi \left[ \sin(\omega\tau_0 + \varphi) - \sin \varphi \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{m} \left( \frac{eU_0}{2\omega d} \right)^2 \left[ \cos(2\omega\tau_0 + 2\varphi) - \cos 2\varphi \right] = \\
 &= -\frac{eU_0}{\omega d} v_0 \left[ \sin(\omega\tau_0 + \varphi) \cos \omega\eta + \cos(\omega\tau_0 + \varphi) \sin \omega\eta - \sin \varphi \right] + \\
 &\quad + \frac{e^2 U_0^2}{m\omega^2 d^2} \sin \varphi \left[ \sin(\omega\tau_0 + \varphi) - \sin \varphi \right] + \frac{1}{m} \left( \frac{eU_0}{2\omega d} \right)^2 \left[ \cos(2\omega\tau_0 + 2\varphi) - \cos 2\varphi \right]
 \end{aligned} \tag{21.1.13}$$

Ponendo  $\cos \omega\eta \simeq 1$  e  $\sin \omega\eta \simeq \omega\eta$  con  $\eta$  dato dalla (21.1.11) si ha:

$$\begin{aligned}
 V_\varphi &= -\frac{eU_0 v_0}{\omega d} \left[ \sin(\omega\tau_0 + \varphi) - \sin \varphi \right] - \frac{eU_0 v_0}{\omega d} \cos(\omega\tau_0 + \varphi) \omega \frac{eU_0}{m\omega^2 d v_0} \left[ \omega\tau_0 \sin \varphi + \right. \\
 &\quad \left. + \cos(\omega\tau_0 + \varphi) - \cos \varphi \right] + \frac{e^2 U_0^2}{m\omega^2 d^2} \sin(\omega\tau_0 + \varphi) \sin \varphi - \frac{e^2 U_0^2}{m\omega^2 d^2} \sin^2 \varphi + \\
 &\quad + \frac{1}{m} \left( \frac{eU_0}{2\omega d} \right)^2 \cos(2\omega\tau_0 + 2\varphi) - \frac{1}{m} \left( \frac{eU_0}{2\omega d} \right)^2 \cos 2\varphi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_\varphi &= -\frac{eU_0 v_0}{\omega d} \left[ \sin(\omega\tau_0 + \varphi) - \sin \varphi \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{m} \left( \frac{eU_0}{\omega d} \right)^2 \left[ \frac{1}{4} \cos(2\omega\tau_0 + 2\varphi) - \frac{1}{4} \cos 2\varphi + \sin(\omega\tau_0 + \varphi) \sin \varphi - \sin^2 \varphi - \right. \\
 &\quad \left. - \omega\tau_0 \cos(\omega\tau_0 + \varphi) \sin \varphi - \cos^2(\omega\tau_0 + \varphi) + \cos \varphi \cos(\omega\tau_0 + \varphi) \right]
 \end{aligned} \tag{21.1.14}$$

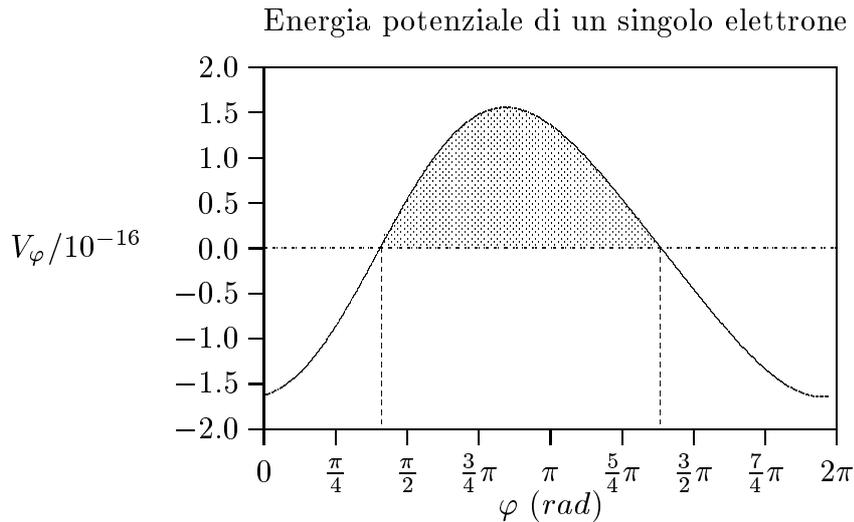


fig.21.1-2

I parametri usati per il grafico della figura 21.1-2 sono:

$$m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}, e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}, U_0 = 1000 \text{ V}, v_0 = 10^7 \text{ m/s}, d = 10^{-3} \text{ m}, f = 10^9 \text{ Hz}$$

### 21.2 - Estensione ad una corrente continua di elettroni.

L'equazione (21.1.14) dà la potenza che un particolare elettrone trasferisce a un campo la cui fase ha un definito valore  $\varphi$ . Se una corrente continua di elettroni  $I$  entra nel campo del condensatore, la potenza che questa corrente trasferisce al campo si ottiene mediando su tutte le possibili fasi a cui i vari elettroni entrano nel campo e moltiplicando per il numero di elettroni  $I/e$  che entrano nel condensatore al secondo.

$$\Delta P = \frac{I}{e} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_\varphi d\varphi \quad (21.2.1)$$

Svolgendo gli integrali, si ha:

$$\int_0^{2\pi} \sin(\omega\tau_0 + \varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos(2\omega\tau_0 + 2\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi = 0$$

Per svolgere gli altri integrali, utilizziamo le formule di Werner:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\omega\tau_0 + \varphi) \sin \varphi = -\frac{1}{2} [\cos(\omega\tau_0 + 2\varphi) - \cos \omega\tau_0] \\ \cos(\omega\tau_0 + \varphi) \sin \varphi = \frac{1}{2} [\sin(\omega\tau_0 + 2\varphi) + \sin(-\omega\tau_0)] \\ \cos \varphi \cos(\omega\tau_0 + \varphi) = \frac{1}{2} [\cos(\omega\tau_0 + 2\varphi) + \cos \omega\tau_0] \\ \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \\ \cos^2(\omega\tau_0 + \varphi) = \frac{1 + \cos 2(\omega\tau_0 + \varphi)}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \sin(\omega\tau_0 + \varphi) \sin \varphi d\varphi = + \left[ \frac{1}{2} \cos \omega\tau_0 \right] 2\pi \\ \int_0^{2\pi} \cos(\omega\tau_0 + \varphi) \sin \varphi d\varphi = - \left[ \frac{1}{2} \sin \omega\tau_0 \right] 2\pi \\ \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cos(\omega\tau_0 + \varphi) d\varphi = + \left[ \frac{1}{2} \cos \omega\tau_0 \right] 2\pi \\ \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi \\ \int_0^{2\pi} \cos^2(\omega\tau_0 + \varphi) d\varphi = \pi \end{array} \right.$$

Quindi:

$$\Delta P = \frac{1}{m} \left( \frac{eU_0}{\omega d} \right)^2 \frac{I}{e} \frac{1}{2\pi} \left[ 2\pi \frac{1}{2} \cos \omega\tau_0 - \pi + \omega\tau_0 2\pi \frac{1}{2} \sin \omega\tau_0 - \pi + 2\pi \frac{1}{2} \cos \omega\tau_0 \right]$$

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{2eIU_0^2}{md^2\omega^2} \left[ \frac{1}{4} \cos \omega\tau_0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \omega\tau_0 \sin \omega\tau_0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos \omega\tau_0 \right] = \\ &= \frac{2eIU_0^2}{md^2\omega^2} \left[ \frac{1}{2} \cos \omega\tau_0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \omega\tau_0 \sin \omega\tau_0 \right] = \\ &= \frac{2eIU_0^2}{md^2\omega^2} \left[ \frac{1}{2} (\cos \omega\tau_0 - 1) + \frac{1}{4} \omega\tau_0 \sin \omega\tau_0 \right] \end{aligned} \tag{21.2.2}$$

Ma, ricordando che

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \text{oppure } \cos \alpha &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ \text{oppure } \cos \alpha &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ \text{cioé } \frac{\cos \alpha - 1}{2} &= -\sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

la (21.2.2) diventa:

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{2eIU_0^2}{md^2\omega^2} \left[ -\sin^2 \frac{\omega\tau_0}{2} + \frac{1}{4}\omega\tau_0 2 \sin \frac{\omega\tau_0}{2} \cos \frac{\omega\tau_0}{2} \right] = \\ &= \frac{2eIU_0^2}{md^2\omega^2} \left[ -\sin^2 \frac{\omega\tau_0}{2} + \frac{1}{2}\omega\tau_0 \sin \frac{\omega\tau_0}{2} \cos \frac{\omega\tau_0}{2} \right] = \\ &= \frac{2eIU_0^2}{md^2\omega^2} \left[ \frac{1}{2}\omega\tau_0 \cot \frac{1}{2}\omega\tau_0 - 1 \right] \sin^2 \frac{\omega\tau_0}{2} \end{aligned} \quad (21.2.3)$$

Posto

$$\gamma = \frac{1}{2}\omega\tau_0$$

si ha:

$$\Delta P = \frac{2eIU_0^2}{md^2\omega^2} (\gamma \cot \gamma - 1) \sin^2 \gamma$$

(21.2.4)

D'altra parte sappiamo che l'energia totale  $E_T$  immagazzinata in un circuito  $LC$  è:

$$E_T = \frac{1}{2}CU_0^2 \quad (21.2.5)$$

da cui

$$U_0^2 = \frac{2E_T}{C} \quad (21.2.6)$$

Sostituendo la (21.2.6) nella (21.2.4) si ha:

$$\Delta P = \frac{4eIE_T}{md^2\omega^2 C} (\gamma \cot \gamma - 1) \sin^2 \gamma$$

(21.2.7)

Il calcolo classico qui presentato non tiene conto del fatto che la tensione nel condensatore varia come risultato della interazione dell'elettrone con il campo. Tuttavia, anche tenendo conto di questo il risultato non varia in maniera apprezzabile.

Il meccanismo per cui gli elettroni trasferiscono potenza al circuito  $LC$  è un effetto del tempo di transito. La potenza trasferita può essere negativa, risultando quindi una perdita dell'energia elettromagnetica nel circuito (cioè una diminuzione dell'energia elettromagnetica) o positiva, risultando quindi un guadagno dell'energia elettromagnetica. Il segno del processo di trasferimento dipende solo dalla funzione

$$f(\gamma) = (\gamma \cot \gamma - 1) \sin^2 \gamma \quad (21.2.8)$$

**Calcolo della funzione  $f_1(\gamma) = (\gamma \cot \gamma - 1)$**

$\gamma(\text{rad})$	$f_1(\gamma)$	$\gamma(\text{rad})$	$f_1(\gamma)$	$\gamma(\text{rad})$	$f_1(\gamma)$
0.5	-0.0847	$\pi$	$-\infty$	5	-2.47
1	-0.358	3.2	53.72	5.5	-6.52
1.5	-0.89	3.3	19.65	6	-21.62
2	-1.91	3.4	11.86	6.5	28.5
2.5	-4.35	3.5	8.34	7	7.03
3	-22.04	4	2.45	7.5	1.77
3.1	-75.49	4.5	-0.029	8	-2.18

Poichè la funzione  $f_1(\gamma)$  presenta divergenze grafichiamo la  $f(\gamma)$ .

$\gamma(\text{rad})$	$f(\gamma)$	$\gamma(\text{rad})$	$f(\gamma)$	$\gamma(\text{rad})$	$f(\gamma)$
0.5	-0.0195	3.6	1.23	5.5	-3.25
1	-0.25	3.7	1.38	6	-1.69
1.5	-0.89	3.8	1.46	6.5	1.31
2	-1.58	3.9	1.47	7	3.035
2.5	-1.55	4	1.4	7.5	1.55
3	-0.43	4.5	-0.028	8	-2.13
3.5	1.026	5	-2.279	$\diamond$	$\diamond$

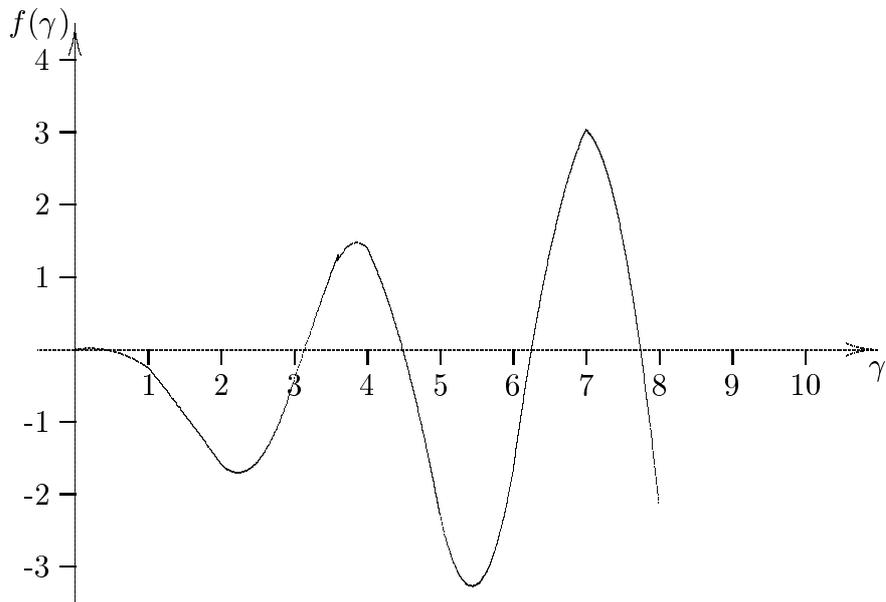


fig.21.2-1

Può indurre fuori strada il fatto che il segno della carica  $e$  delle particelle determinerebbe il segno di  $\Delta P$ . Tuttavia,  $e$  compare unitamente alla corrente  $I$  e risulta

$$eI = e^2 n A v \tag{21.2.9}$$

dove  $n$  è la densità delle particelle,  $A$  è l'area della sezione trasversale del fascio di particelle, e  $v$  è la velocità delle particelle.

L'equazione (21.2.9) mostra che la quantità  $eI$  è sempre positiva indipendentemente dal fatto che  $e = |e|$  oppure  $e = -|e|$ .

La velocità non può mai essere negativa perchè il calcolo era basato sulla ipotesi che le particelle si muovono nella direzione positiva dell'asse  $x$ .

La variabile  $\gamma$  di  $f(\gamma)$  è proporzionale al rapporto fra il tempo di transito degli elettroni ed il periodo delle oscillazioni del circuito  $LC$ . La dipendenza funzionale di  $f(\gamma)$  è mostrata nella tabella. Per piccoli valori di  $\gamma$ , cioè per basse frequenze,  $f(\gamma)$  è negativa. Questo significa che se noi sintonizziamo il circuito  $LC$  a bassissime frequenze e variamo la risonanza fino a frequenze più alte, tenendo costante la velocità degli elettroni e quindi il loro tempo di transito, l'elettrone estrae potenza dal circuito  $LC$ . Inizialmente, la potenza perduta dal circuito aumenta all'aumentare della frequenza, raggiunge un massimo, e diminuisce. Solo dopo che  $\gamma > \pi$  o ( $\tau = T$ ) il fascio di elettroni comincia a consegnare potenza al circuito. Il primo massimo trasferimento positivo di potenza è raggiunto a  $\gamma = 3.9$ . Dopo di ciò la quantità di trasferimento positivo di potenza diminuisce e diventa di nuovo negativa per  $\gamma > 4.5$ . Regioni di trasferimento di potenza negativa e positiva si alternano indefinitamente. Possiamo pensare che questo sia un modo per produrre realmente alte frequenze. Tuttavia, le più alte regioni di potenza positiva trasferita sono via via più difficili da utilizzare. Questa analisi assume che il fascio di elettroni incidente sia strettamente monoenergetico.

In pratica vi è sempre una distribuzione delle velocità degli elettroni, che diventa via via più importante quando si utilizzano regioni di trasferimento positivo di potenza di ordine più alto. La distribuzione delle velocità degli elettroni causa una distribuzione nel  $\gamma$  che lo porta a coprire regioni positive e negative adiacenti cosicchè l'efficienza del trasferimento di potenza peggiora.

È meglio, quindi, usare regioni di ordine più basso con  $\pi \leq \gamma \leq 4.5$ .

### **Esempio**

Assumiamo:  $f = 100\text{MHz}$ ,  $d = 0.01\text{ m}$  e  $\gamma = 3.9$  cosicchè vi è un massimo di efficienza. Poichè

$$\gamma = \frac{1}{2}2\pi f\tau_0 = \frac{1}{2}2\pi f \frac{d}{v_0} \implies v_0 = \frac{\pi}{\gamma}fd$$

Utilizzando i numeri dati:

$$v_0 = 8.05 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

Il potenziale che li accelera è:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = eV \implies V = \frac{1}{2} \frac{m}{e} v_0^2 = 1.84\text{V}$$

che è molto piccolo.

Per avere una idea di quanta corrente deve essere richiesta per ottenere oscillazioni, deriviamo le condizioni di oscillazione.

Il fattore di qualità  $Q$  di un circuito è definito come

$$Q = 2\pi \frac{E_p}{e_d} \quad (21.2.10)$$

dove  $E_p$  è l'energia immagazzinata nel circuito ed  $e_d$  è l'energia dissipata per ciclo.

Tuttavia, l'energia dissipata per ciclo  $e_d$  è correlata alla potenza perduta dalla:

$$p = \frac{e_d}{T} = e_d \frac{\omega}{2\pi} \implies Q = \omega \frac{E_p}{p} \quad (21.2.11)$$

Il circuito oscilla se noi forniamo ad esso più potenza  $\Delta P$  di quanta ne perda.

La soglia di oscillazione è quindi

$$p \leq \Delta P$$

cioè

$$\omega \frac{E_p}{Q} \leq \frac{4eIE_p}{md^2\omega^2C} f(\gamma) \quad (21.2.12)$$

Nel nostro esempio:

$$f(3.9) = 1.5, \quad Q = 10$$

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad \text{con } A = 0.01\text{m}^2 \quad \epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \implies C = 8.854 \text{ pF}$$

La corrente richiesta per sostenere l'oscillazione è

$$I \geq \frac{m\omega^3 d^2 C}{4eQ f(\gamma)}$$

e ricordando che  $m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{Kg}$ ,  $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{C}$  otteniamo:

$$I \geq 21\text{mA}$$

Forse non è molto facile ottenere una corrente di 21mA con un potenziale di 1.8V; tuttavia non è impossibile. É più arduo avere frequenze più alte poichè la corrente di soglia aumenta come la terza potenza della frequenza. Inoltre circuiti  $LC$  concentrati (lumped) smettono di lavorare a frequenze maggiori di 100MHz.

---

Fine del Cap.21