

**Cavità risonanti**

**20.1 - Frequenze di risonanza**

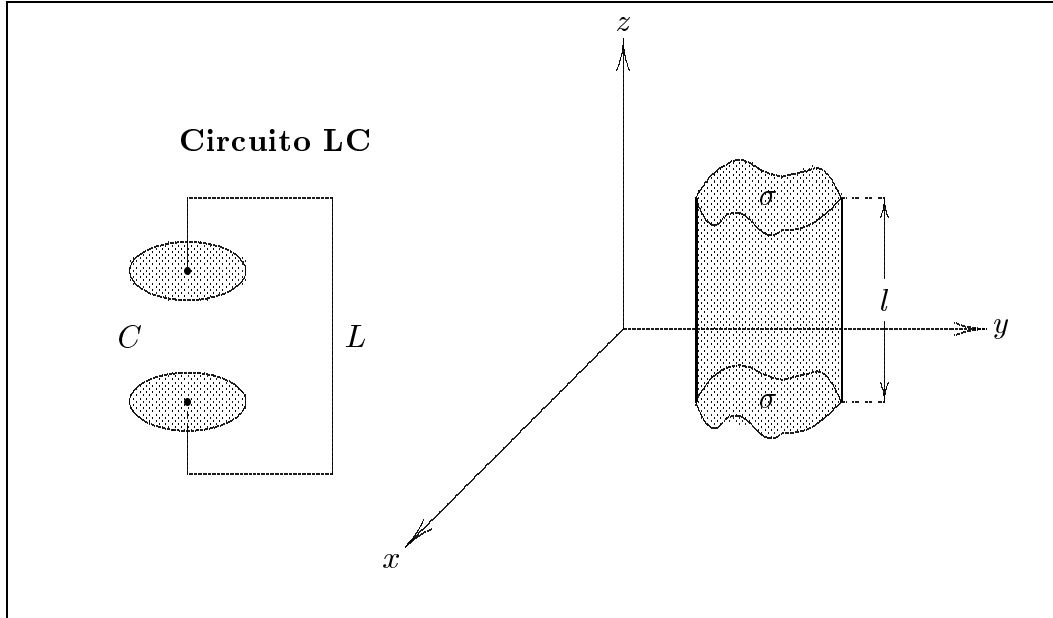


fig.20.1-1

Consideriamo una cavità cilindrica e sia  $l$  la distanza fra le due basi; indichiamo con  $\sigma$  la superficie di ciascuna di esse. La parete e le basi siano conduttori perfetti. Ovviamente, se  $\sigma$  è circolare, la cavità è cilindrica; se  $\sigma$  è rettangolare di lati  $a$  e  $b$  la cavità è un parallelepipedo rettangolo di spigoli  $a, b, l$ .

Disponiamo, al solito, un sistema di assi  $x, y, z$  con l'asse  $z$  parallelo alle generatrici del cilindro. Per valutare la possibilità dell'esistenza di un campo elettromagnetico all'interno della cavità cilindrica procediamo nella seguente maniera.

**Modi TM**

Consideriamo due modi TM che si propagano in una guida infinita di sezione  $\sigma$ , uno nel verso positivo dell'asse  $z$ , l'altro nel verso negativo.

La componente longitudinale del campo vale in questo caso:

$$E_z = (C_1 e^{-i\beta z} + C_2 e^{i\beta z}) \Phi(x, y) \tag{20.1.1}$$

dove  $C_1$  e  $C_2$  sono costanti e  $\Phi(x, y)$  è una soluzione non nulla dell'equazione di Helmholtz valida su tutta  $\sigma$

$$\nabla^2 \Phi + h^2 \Phi = 0 \quad \text{con } \Phi = 0 \text{ sul contorno} \tag{20.1.2}$$

Si ha poi

$$\vec{E}_t = -\frac{i\beta}{h^2} (C_1 e^{-i\beta z} - C_2 e^{i\beta z}) \vec{\nabla} \Phi \tag{20.1.3}$$

$$\vec{H}_t = -\frac{i\omega\epsilon}{h^2} \hat{z} \times (C_1 e^{-i\beta z} + C_2 e^{i\beta z}) \vec{\nabla} \Phi \tag{20.1.4}$$

Questo campo elettromagnetico soddisfa alle equazioni di Maxwell ed alle condizioni sulle superfici laterali della guida. Resta da verificare la condizione di annullamento della componente tangenziale del campo elettrico sulle superfici di base della cavità, componente che coincide con  $\vec{E}_t$ . Si ha cioè  $\vec{E}_t = 0$  per  $z = 0$  e  $z = l$ , il che comporta:

$$C_1 - C_2 = 0 \quad C_1 e^{-i\beta l} - C_2 e^{i\beta l} = 0 \quad (20.1.5)$$

ossia

$$C_1 = C_2 = \frac{C}{2} \quad (20.1.6)$$

infatti:

$$\begin{aligned} C_1 \left[ \cos \beta l - i \sin \beta l \right] - C_2 \left[ \cos \beta l + i \sin \beta l \right] &= 0 \\ (C_1 - C_2) \cos \beta l &= 0 \\ -i(C_1 + C_2) \sin \beta l &= 0 \end{aligned}$$

$C_1 - C_2 = 0$  è soddisfatta, allora:

$$\begin{aligned} \sin \beta l &= 0 \\ \beta l &= r\pi \quad r \text{ intero} \\ \beta^2 l^2 &= r^2 \pi^2 \end{aligned}$$

Ricordando l'espressione di  $\beta$ , dopo avere elevato al quadrato si ha:

$$\omega^2 \epsilon \mu - h^2 = \frac{r^2 \pi^2}{l^2}$$

dalla quale

$$\omega = c \sqrt{\frac{r^2 \pi^2}{l^2} + h^2} \quad (20.1.7)$$

Si può concludere che le oscillazioni proprie secondo modi TM di una cavità cilindrica hanno una frequenza di oscillazione data dalla (20.1.7) ed il campo risulta essere espresso da:

$$\vec{E}_t = -\frac{r\pi}{l} \frac{C}{h^2} \sin \frac{r\pi z}{l} \vec{\nabla} \Phi \quad (20.1.8)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= -\frac{i\beta}{h^2} (C_1 e^{-i\beta z} - C_2 e^{i\beta z}) \vec{\nabla} \Phi = \\ &= -\frac{i\beta}{h^2} \frac{C}{2} (-2i \sin \beta z) \vec{\nabla} \Phi = \\ &= -\frac{\beta}{h^2} C (\sin \beta z) \vec{\nabla} \Phi = \\ &= -\frac{r\pi}{l} \frac{C}{h^2} \sin \frac{r\pi}{l} z \vec{\nabla} \Phi \end{aligned} \quad (20.1.9)$$

$$E_z = C \cos \frac{r\pi z}{l} \Phi \quad (20.1.10)$$

$$\vec{H}_t = -i \frac{\epsilon\omega}{h^2} \hat{z} \times C \cos \frac{r\pi z}{l} \vec{\nabla} \Phi \quad H_z = 0 \quad (20.1.11)$$

### Cavitá rettangolari - Modi $TM$

Nel caso particolare del parallelepipedo ricordando il valore di  $h^2$  per la guida a sezione rettangolare, si ha:

$$(\nu)_{pqr}^{TM} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{p^2\pi^2}{a^2} + \frac{q^2\pi^2}{b^2} + \frac{r^2\pi^2}{l^2}} \quad (20.1.12)$$

e ricordando che  $\Phi = \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b}$  è facile scrivere l'espressione del campo elettromagnetico. Ovviamente nessuna delle  $p, q$  può annullarsi, altrimenti il campo sarebbe ovunque nullo.

### Cavitá circolari - Modi $TM$

Nel caso della cavità a sezione circolare di raggio  $a$ , valgono formule analoghe, solo che si deve porre:

$$\Phi = J_n \left( \frac{x_{n\nu}\rho}{a} \right) (D_n \cos n\phi + D'_n \sin n\phi) \quad (20.1.13)$$

$D_n$  e  $D'_n$  costanti arbitrarie.

$$h = \frac{x_{n\nu}}{a} \quad (20.1.14)$$

$$(\nu)_{n\nu r}^{TM} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{x_{n\nu}^2}{a^2} + \frac{r^2\pi^2}{l^2}} \quad (20.1.15)$$

Il campo quindi dipende da tre numeri interi ( $p, q, r$  o  $n, \nu, r$ ) cioè si ha una tripla infinitá di modi di tipo  $TM$ .

### Modi $TE$

Consideriamo ora due modi  $TE$  che si propagano in verso opposto:

$$H_z = (C_1 e^{-i\beta z} + C_2 e^{i\beta z}) \psi \quad (20.1.16)$$

$$\vec{E}_t = \frac{\mu i\omega}{h^2} \hat{z} \times (C_1 e^{-i\beta z} + C_2 e^{i\beta z}) \vec{\nabla} \psi \quad E_z = 0 \quad (20.1.17)$$

$$\vec{H}_t = -\frac{i\beta}{h^2} (C_1 e^{-i\beta z} - C_2 e^{i\beta z}) \vec{\nabla} \psi \quad (20.1.18)$$

dove  $\psi$  soddisfa la

$$\nabla^2\psi + h^2\psi = 0 \quad (20.1.19)$$

solo che adesso sul contorno di  $\sigma$  è nulla la  $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ .

Ragionando come prima si ha subito che le condizioni a cui deve soddisfare il campo elettromagnetico sono verificate se  $\vec{E}_t = 0$  per  $z = 0$  e  $z = l$ , cioè se:

$$C_1 + C_2 = 0 \quad C_1 e^{-i\beta l} + C_2 e^{i\beta l} = 0 \quad (20.1.20)$$

$$C_1 = -C_2 = \frac{C}{2} \quad \sin \beta l = 0 \quad (20.1.21)$$

Il campo è dato da:

$$\vec{E} = \frac{\mu\omega C}{h^2} \sin \frac{r\pi z}{l} \hat{z} \times \vec{\nabla}\psi \quad (20.1.22)$$

$$\vec{H}_t = -i \frac{r\pi}{l} \frac{C}{h^2} \cos \frac{r\pi z}{l} \vec{\nabla}\psi \quad (20.1.23)$$

$$H_z = -iC \sin \frac{r\pi z}{l} \psi \quad (20.1.24)$$

### Cavo coassiale

Consideriamo ora un cavo coassiale limitato. In questo caso si possono avere modi di oscillazione TEM rispetto all'asse  $z$ .

Consideriamo due modi TEM del tipo considerato nella teoria del cavo, che si propagano in verso opposto.

$$\vec{E} = - \left( C_1 e^{-i\frac{\omega}{c}z} + C_2 e^{i\frac{\omega}{c}z} \right) \vec{\nabla}V \quad (20.1.25)$$

$$\vec{H} = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{z} \times \left( C_1 e^{-i\frac{\omega}{c}z} - C_2 e^{i\frac{\omega}{c}z} \right) \vec{\nabla}V \quad (20.1.26)$$

essendo:

$$V = V_0 \frac{\ln \frac{\rho}{b}}{\ln \frac{a}{b}} \quad (20.1.27)$$

Ora, il solito ragionamento conduce alle condizioni:

$$\begin{aligned} C_1 = -C_2 = \frac{C}{2} \\ \sin \frac{\omega}{c}l = 0 \implies \omega = c \frac{r\pi}{l} \end{aligned} \quad (20.1.28)$$

Ne segue che i campi all'interno della cavità coassiale sono:

$$\vec{E} = iC \sin \frac{r\pi}{l} z \vec{\nabla} V \quad (20.1.28)$$

$$\vec{H} = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{z} \times \left( C \cos \frac{r\pi}{l} z \right) \vec{\nabla} V \quad (20.1.29)$$

D'altra parte:

$$\vec{\nabla} V = \hat{e}_\rho \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \frac{1}{\rho} \frac{1}{b} = \hat{e}_\rho \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \frac{1}{\rho} \quad (20.1.30)$$

Quindi:

$$\begin{cases} E_\rho = iC \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \frac{1}{\rho} \sin \frac{r\pi}{l} z \\ H_\phi = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} C \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \frac{1}{\rho} \cos \frac{r\pi}{l} z \end{cases} \quad (20.1.31)$$

**Tabella 20.1-1**

**Frequenze di risonanza, riferite a quella del modo dominante, per i diversi modi  $TE_{pqr}$  e  $TM_{pqr}$  in cavità rettangolari, ossia:**

$$R_{101}^{pqr} = \frac{(f_r)_{pqr}}{(f_r)_{101}^{TE}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{l}\right)^2}}$$

$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{l}$	$TE_{101}$	$TE_{011}$	$TM_{110}$	$\frac{TE_{111}}{TM_{111}}$	$TE_{102}$	$TE_{201}$	$TE_{021}$	$TE_{012}$	$TM_{210}$	$TM_{120}$	$\frac{TE_{112}}{TM_{112}}$
1	1	1	1	1	1.22	1.58	1.58	1.58	1.58	1.58	1.58	1.73
1	2	1	1	1.26	1.34	1.26	1.84	1.84	1.26	2.00	2.00	1.55
2	2	1	1.58	1.58	1.73	1.58	1.58	2.91	2.00	2.00	2.91	2.12
2.25	2.25	1	1.74	1.74	1.88	1.58	1.58	3.26	2.13	2.13	3.26	2.24
2	4	1	1.84	2.00	2.05	1.26	1.84	3.60	2.00	2.53	3.68	2.19
2.25	4	1	2.02	2.15	2.20	1.31	1.81	3.95	2.19	2.62	4.02	2.36
4	4	1	2.91	2.91	3.00	1.58	1.58	5.71	3.16	3.16	5.71	3.24
4	8	1	3.62	3.65	3.66	1.26	1.84	7.20	3.65	4.03	7.25	3.82

**Tabella 20.1-2**

**Frequenze di risonanza, riferite a quella del modo dominante,  
per i diversi modi  $TE_{n\nu r}$  e  $TM_{n\nu r}$  in cavità circolari, ossia:**

$$R_{dom}^{n\nu r} = \frac{(f_r)_{n\nu r}}{(f_r)_{dom}}$$

$\frac{l}{a}$	$R_{dom}^{n\nu r}$									
0	$\frac{TM_{010}}{TM_{010}}$	$\frac{TM_{110}}{TM_{010}}$	$\frac{TM_{210}}{TM_{010}}$	$\frac{TM_{020}}{TM_{010}}$	$\frac{TM_{310}}{TM_{010}}$	$\frac{TM_{120}}{TM_{010}}$	$\frac{TM_{410}}{TM_{010}}$	$\frac{TM_{220}}{TM_{010}}$	$\frac{TM_{030}}{TM_{010}}$	$\frac{TM_{510}}{TM_{010}}$
	1.000	1.593	2.136	2.295	2.653	2.917	3.155	3.500	3.598	3.647
0.5	$\frac{TM_{010}}{TM_{010}}$	$\frac{TM_{110}}{TM_{010}}$	$\frac{TM_{210}}{TM_{010}}$	$\frac{TM_{020}}{TM_{010}}$	$\frac{TM_{310}}{TM_{010}}$	$\frac{TE_{111}}{TM_{010}}$	$\frac{TM_{011}}{TM_{010}}$	$\frac{TM_{211}}{TM_{010}}$	$\frac{TM_{120}}{TM_{010}}$	$\frac{TE_{011}}{TM_{010}}$
	1.000	1.593	2.136	2.295	2.653	2.722	2.797	2.905	2.917	3.060
1	$\frac{TM_{010}}{TM_{010}}$	$\frac{TE_{111}}{TM_{010}}$	$\frac{TM_{110}}{TM_{010}}$	$\frac{TM_{011}}{TM_{010}}$	$\frac{TE_{211}}{TM_{010}}$	$\frac{TM_{111}}{TM_{010}}$	$\frac{TE_{011}}{TM_{010}}$	$\frac{TM_{210}}{TM_{010}}$	$\frac{TM_{311}}{TM_{010}}$	$\frac{TE_{020}}{TM_{010}}$
	1.000	1.514	1.593	1.645	1.822	2.060	2.060	2.136	2.181	2.295
2.03	$\frac{TM_{010}}{TM_{010}}$	$\frac{TE_{111}}{TE_{111}}$	$\frac{TM_{011}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{211}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{212}}{TE_{111}}$	$\frac{TM_{110}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{012}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{011}}{TE_{111}}$	$\frac{TM_{111}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{212}}{TE_{111}}$
	1.000	1.000	1.189	1.424	1.497	1.593	1.630	1.718	1.718	1.808
3	$\frac{TE_{111}}{TE_{111}}$	$\frac{TM_{010}}{TE_{111}}$	$\frac{TM_{011}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{112}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{012}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{211}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{113}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{212}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{110}}{TE_{111}}$	$\frac{TM_{013}}{TE_{111}}$
	1.000	1.136	1.238	1.317	1.506	1.524	1.719	1.748	1.809	1.868
4	$\frac{TE_{111}}{TE_{111}}$	$\frac{TM_{010}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{112}}{TE_{111}}$	$\frac{TM_{011}}{TE_{111}}$	$\frac{TM_{012}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{113}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{211}}{TE_{111}}$	$\frac{TM_{013}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{212}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{114}}{TE_{111}}$
	1.000	1.202	1.209	1.264	1.435	1.494	1.575	1.682	1.717	1.819
5	$\frac{TE_{111}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{112}}{TE_{111}}$	$\frac{TM_{010}}{TE_{111}}$	$\frac{TM_{011}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{113}}{TE_{111}}$	$\frac{TM_{012}}{TE_{111}}$	$\frac{TM_{013}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{114}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{211}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{212}}{TE_{111}}$
	1.000	1.146	1.236	1.278	1.354	1.395	1.571	1.602	1.603	1.698
10	$\frac{TE_{111}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{112}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{113}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{114}}{TE_{111}}$	$\frac{TM_{010}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{115}}{TE_{111}}$	$\frac{TM_{011}}{TE_{111}}$	$\frac{TM_{012}}{TE_{111}}$	$\frac{TM_{013}}{TE_{111}}$	$\frac{TE_{116}}{TE_{111}}$
	1.000	1.042	1.107	1.194	1.288	1.296	1.299	1.331	1.383	1.411

### 20.2 - Attenuazione nelle cavità risonanti - Coefficiente di merito $Q$

Nel paragrafo precedente abbiamo supposto la cavità priva di perdite di qualunque tipo. Questo vuol dire che, una volta cessata l'eccitazione della cavità, all'interno di essa

puó essere sostenuto indefinitamente un campo elettromagnetico. Ci si avvicina alla realtà ammettendo che la cavità presenti delle deboli perdite (ohmiche sulle pareti, dielettriche nel mezzo che la riempie, di accoppiamento con l'esterno). In tal caso se si sopprime l'eccitazione, la cavità diventa sede di un campo elettromagnetico che si attenuerà nel tempo.

A condizione che le perdite siano deboli, possiamo supporre a priori che le frequenze di risonanza e le configurazioni dei campi competenti ai diversi modi restino invariate rispetto al caso di cavità ideale, come del resto abbiamo supposto nello studio dell'attenuazione nelle guide d'onda.

Supponiamo, in analogia con altri fenomeni della stessa natura, che lo smorzamento dei campi in funzione del tempo sia esponenziale ma lento rispetto al periodo delle oscillazioni.

Se indichiamo con  $\langle W(t) \rangle$  l'energia, mediata in un periodo, immagazzinata all'interno della cavità all'istante  $t$ , essa, in assenza di eccitazione, si attenua secondo il fattore  $e^{-2\alpha t}$  e si riduce al valore di  $1/e$  del suo valore iniziale  $\langle W(0) \rangle$  dopo un tempo  $\tau = 1/2\alpha$ , ossia:

$$\langle W(t) \rangle = \langle W(0) \rangle e^{-2\alpha t} \quad (20.2.1)$$

Dopo un tempo pari ad un periodo  $T$ , si ha:

$$\langle W(t+T) \rangle = \langle W(0) \rangle e^{-2\alpha(t+T)} = \langle W(t) \rangle e^{-2\alpha T} \quad (20.2.2)$$

Nell'ipotesi  $2\alpha T \ll 1$  si può porre  $e^{-2\alpha T} \simeq 1 - 2\alpha T$  e la (20.2.2) diventa:

$$\langle W(t+T) \rangle \simeq \langle W(t) \rangle (1 - 2\alpha T) \quad (20.2.3)$$

ossia:

$$\langle W(t) \rangle - \langle W(t+T) \rangle = 2\alpha T \langle W(t) \rangle \quad (20.2.4)$$

da cui:

$$\alpha = \frac{\langle W(t) \rangle - \langle W(t+T) \rangle}{2T \langle W(t) \rangle} \quad (20.2.5)$$

La quantità  $\langle W_p \rangle = \langle W(t) \rangle - \langle W(t+T) \rangle$  é l'energia media dissipata in un periodo.

La quantità  $\langle P_p \rangle = \frac{\langle W_p \rangle}{T} = \frac{\langle W(t) \rangle - \langle W(t+T) \rangle}{T}$  é la potenza, mediata in un periodo, dissipata all'interno del risonatore.

Si definisce **fattore di merito o di qualità**  $Q$  di una cavità risonante la quantità:

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \frac{\text{Energia totale, mediata in un periodo, contenuta all'interno del risonatore}}{\text{Energia, mediata in un periodo, dissipata per periodo}} = \\ &= 2\pi \frac{\langle W \rangle}{\langle W_p \rangle} = \\ &= \omega \frac{\text{Energia totale, mediata in un periodo, contenuta all'interno del risonatore}}{\text{Potenza, mediata in un periodo, dissipata all'interno del risonatore}} = \\ &= \omega \frac{\langle W \rangle}{\langle P_p \rangle} \end{aligned} \quad (20.2.6)$$

Ne segue:

$$\alpha = \frac{2\pi}{2TQ} = \frac{\omega}{2Q} \quad (20.2.7)$$

Il coefficiente di merito (o di qualità)  $Q$  di una cavità risonante é un numero (senza dimensioni) relativamente grande, dell'ordine di  $10^4$  o piú per una cavità vuota. L'energia immagazzinata nella cavità si attenua secondo il fattore  $e^{-(\omega/Q)t}$  e si riduce al valore di  $1/e$  del suo valore iniziale dopo un tempo  $\tau = Q/\omega$ . I campi si attenueranno secondo il fattore  $e^{-(\omega/2Q)t}$ .

Ogni causa di perdita di energia abbassa il fattore  $Q$  ed aumenta il coefficiente di attenuazione. In generale si usa distinguere le diverse energie che causano le perdite. Esse sono: l'energia dissipata per effetto Joule sulle pareti ( $W_0$ ), l'energia dissipata nel mezzo dielettrico contenuto all'interno della cavità ( $W_d$ ) e l'energia irradiata attraverso un foro verso l'esterno ( $W_{ex}$ ). L'energia totale perduta si può, pertanto, scrivere:

$$\langle W_p \rangle = \langle W_0 \rangle + \langle W_d \rangle + \langle W_{ex} \rangle \quad (20.2.8)$$

Se inoltre le diverse perdite sono indipendenti si può scrivere, per la (20.2.6):

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_{ex}} \quad (20.2.9)$$

Si definisce coefficiente di qualità interno o proprio di una cavità risonante la quantità:

$$\frac{1}{Q_{pr}} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_d} \quad (20.2.10)$$

Cosí:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_{pr}} + \frac{1}{Q_{ex}} \quad (20.2.11)$$

### 20.3 - Curva di risposta di una cavità

Una cavità ideale (senza perdite) ha uno spettro discreto di frequenze di risonanza monocromatiche ossia é costituito da righe di risonanza di larghezza nulla. In realtà le perdite allargano le suddette righe. Questo effetto si mette in evidenza considerando le oscillazioni smorzate come sovrapposizione di una infinitá di oscillazioni armoniche non smorzate. Supponiamo che il campo elettromagnetico di un modo proprio (o risonante) é istantaneamente creato all'interno della cavità all'istante  $t = 0$ . Scriviamo, per una componente generica  $F_\nu(t)$  del campo elettrico o magnetico:

$$F_\nu(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ A_\nu e^{-\alpha_\nu t} e^{i\omega_\nu t} & \text{per } t \geq 0 \end{cases} \quad (20.3.1)$$



dove  $\nu$  indica il modo considerato, di cui  $\omega_\nu$  é la pulsazione propria. Possiamo, allora, scrivere:

$$F_\nu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_\nu(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (20.3.2)$$

essendo  $\mathcal{F}_\nu(\omega)$  la trasformata (o l'integrale) di Fourier della funzione  $F_\nu(t)$ :

$$\mathcal{F}_\nu(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left( A_\nu e^{-\alpha_\nu t} e^{i\omega_\nu t} \right) e^{-i\omega t} dt = \frac{A_\nu}{2\pi} \frac{1}{\alpha_\nu - i(\omega_\nu - \omega)} \quad (20.3.3)$$

Dividendo numeratore e denominatore della (20.3.3) per  $\omega_\nu$ , si ha:

$$\mathcal{F}_\nu(\omega) = \frac{A_\nu}{2\pi} \frac{1/\omega_\nu}{\frac{\alpha_\nu}{\omega_\nu} + i \frac{\omega - \omega_\nu}{\omega_\nu}} \quad (20.3.4)$$

Ponendo  $\frac{\omega - \omega_\nu}{\omega_\nu} = x_\nu$  e, per la (20.2.7),  $\frac{\alpha_\nu}{\omega_\nu} = \frac{1}{2Q_\nu}$ , si ha:

$$\mathcal{F}_\nu(\omega) = \frac{A_\nu}{2\pi} \frac{1/\omega_\nu}{\frac{1}{2Q_\nu} + ix_\nu} = \frac{A_\nu Q_\nu}{\pi \omega_\nu} \frac{1}{1 + i2Q_\nu x_\nu} \quad (20.3.5)$$

e, quindi:

$$|\mathcal{F}_\nu(\omega)| = G_\nu(\omega) = \frac{A_\nu Q_\nu}{\pi \omega_\nu} \frac{1}{\sqrt{1 + (2Q_\nu x_\nu)^2}} \quad (20.3.6)$$

La funzione  $G_\nu(\omega)$  esprime le ampiezze delle componenti contenute nello spettro delle oscillazioni smorzate. Il suo quadrato esprime lo spettro in potenza delle oscillazioni contenute in cavità. Il grafico di  $G^2$  in funzione di  $\omega$  é la **curva di risposta** in potenza della cavità per il modo considerato. In figura 20.3-1 é tracciata una curva di risposta di una

cavitá eccitata in un modo cui compete un  $Q = 1000$ .

**Curva di risposta in potenza di una cavitá**

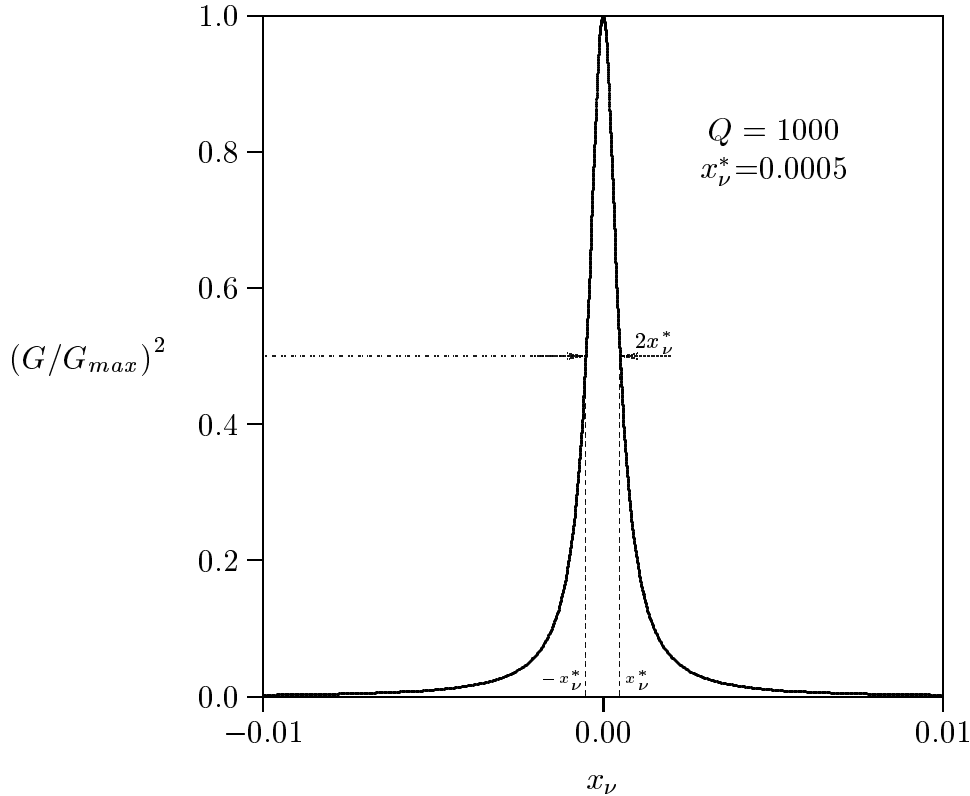


fig.20.3-1

Dalla (20.3.6) si ha che:

$$(G/G_{max})^2 = \frac{1}{2} \quad \text{quando} \quad 1 + (2Q_\nu x_\nu^*)^2 = 2 \quad (20.3.7)$$

ossia:

$$1 + 4Q_\nu^2 x_\nu^{*2} = 2 \implies x_\nu^{*2} = \frac{1}{4Q_\nu^2} \implies x_\nu^* = \pm \frac{1}{2Q_\nu} \quad (20.3.8)$$

Ne segue:

$$\left| \frac{\omega^* - \omega_\nu}{\omega_\nu} \right| = \frac{1}{2Q_\nu} \quad (20.3.9)$$

essendo  $\omega^*$  la pulsazione del campo alla quale corrisponde metá potenza nella curva di risposta.

Se indichiamo con  $\Delta\omega_\nu$  la **larghezza della curva a metá altezza (FWHP)** ossia:

$$\Delta\omega_\nu = 2|\omega^* - \omega_\nu| \quad (20.3.10)$$

si ha la ben nota relazione, utilissima per la misura del  $Q$  di una cavitá risonante:

$$\boxed{Q_\nu = \frac{\omega_\nu}{\Delta\omega_\nu} = \frac{f_\nu}{\Delta f_\nu}} \quad (20.3.11)$$

Essendo, di solito, il coefficiente di qualità  $Q$  di una cavità una quantità molto elevata le curve di risposta, ciascuna delle quali individua un modo all'interno della cavità, sono molto strette e quindi completamente separate l'una dall'altra; questo ci consente di affermare che in generale i modi sono indipendenti l'uno dall'altro come nel caso delle cavità ideali. Ma se le perdite sono relativamente elevate o/e i modi sono troppo ravvicinati in frequenza, le curve di risposta possono sovrapporsi parzialmente e questo comporta un **accoppiamento** fra i modi.

#### 20.4 - Espressione del coefficiente $Q_0$

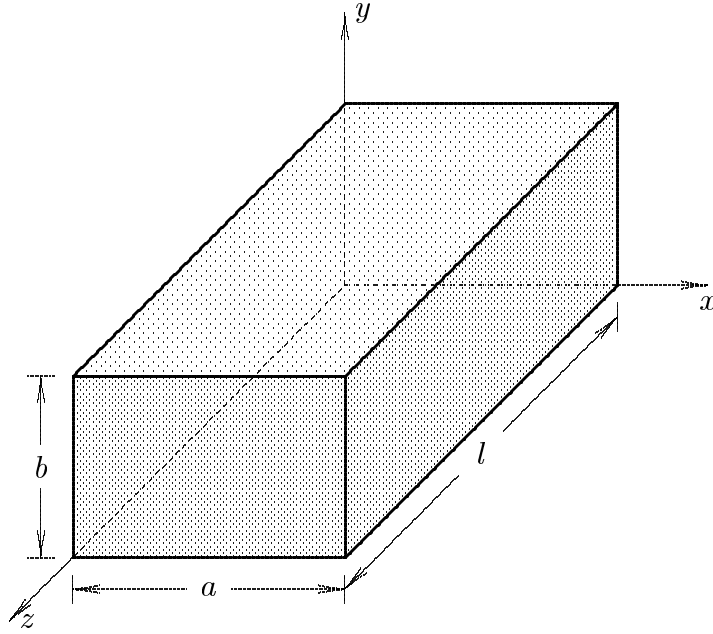
Per valutare il coefficiente di qualità interno  $Q_0$  di una cavità risonante dobbiamo applicare la formula (20.2.6) ed é conveniente farlo nella sua seconda espressione. Da un lato dobbiamo calcolare l'energia, mediata in un periodo, immagazzinata nella cavità; dall'altro la potenza dissipata in perdite ohmiche.

Per prima cosa scriviamo le componenti del campo elettromagnetico all'interno della cavità. Per questo applichiamo le formule (20.1.8), (20.1.10) e (20.1.11) per i modi  $TM$  e le formule (20.1.22), (20.1.23) e (20.1.24) per i modi  $TE$ .

$$\text{Modi } TM : \begin{cases} \vec{E}_t = -\frac{r\pi}{l} \frac{C}{h^2} \sin \frac{r\pi z}{l} \vec{\nabla} \Phi \\ E_z = C \cos \frac{r\pi z}{l} \Phi \\ \vec{H}_t = -i \frac{\epsilon\omega}{h^2} \hat{z} \times C \cos \frac{r\pi z}{l} \vec{\nabla} \Phi \\ H_z = 0 \end{cases} \quad (20.4.1)$$

$$\text{Modi } TE : \begin{cases} \vec{E}_t = \frac{\mu\omega C}{h^2} \sin \frac{r\pi z}{l} \hat{z} \times \vec{\nabla} \psi \\ E_z = 0 \\ \vec{H}_t = -i \frac{r\pi}{l} \frac{C}{h^2} \cos \frac{r\pi z}{l} \vec{\nabla} \psi \\ H_z = -iC \sin \frac{r\pi z}{l} \psi \end{cases} \quad (20.4.2)$$

#### Cavità rettangolari



In questo caso, dalla teoria delle guide d'onda, risulta:

$$\begin{cases} \Phi = \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} & \text{Modo } TM \\ \psi = \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} & \text{Modo } TE \end{cases} \quad (20.4.3)$$

Pertanto:

$$\text{Modi } TM : \begin{cases} \vec{E}_t = -\frac{r\pi}{l} \frac{C}{h^2} \sin \frac{r\pi z}{l} \left( \hat{x} \frac{p\pi}{a} \cos \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} + \hat{y} \frac{q\pi}{b} \sin \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \right) \\ E_z = C \cos \frac{r\pi z}{l} \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} \\ \vec{H}_t = -i \frac{\epsilon\omega}{h^2} C \cos \frac{r\pi z}{l} \left( \hat{y} \frac{p\pi}{a} \cos \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} - \hat{x} \frac{q\pi}{b} \sin \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \right) \\ H_z = 0 \end{cases} \quad (20.4.4)$$

$$\text{Modi } TE : \begin{cases} \vec{E}_t = \frac{\mu\omega C}{h^2} \sin \frac{r\pi z}{l} \left( -\hat{y} \frac{p\pi}{a} \sin \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} + \hat{x} \frac{q\pi}{b} \cos \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} \right) \\ E_z = 0 \\ \vec{H}_t = -i \frac{r\pi}{l} \frac{C}{h^2} \cos \frac{r\pi z}{l} \left( -\hat{x} \frac{p\pi}{a} \sin \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} - \hat{y} \frac{q\pi}{b} \cos \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} \right) \\ H_z = -iC \sin \frac{r\pi z}{l} \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \end{cases} \quad (20.4.5)$$

ossia:

$$\text{Modi } TM : \left\{ \begin{array}{l} E_x = -\frac{\pi^2}{h^2} \frac{pr}{al} C \cos \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} \sin \frac{r\pi z}{l} \\ E_y = -\frac{\pi^2}{h^2} \frac{qr}{bl} C \sin \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \sin \frac{r\pi z}{l} \\ E_z = C \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} \cos \frac{r\pi z}{l} \\ H_x = i \frac{\epsilon\omega}{h^2} \frac{q\pi}{b} C \sin \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \cos \frac{r\pi z}{l} \\ H_y = -i \frac{\epsilon\omega}{h^2} \frac{p\pi}{a} C \cos \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} \cos \frac{r\pi z}{l} \\ H_z = 0 \end{array} \right. \quad (20.4.6)$$

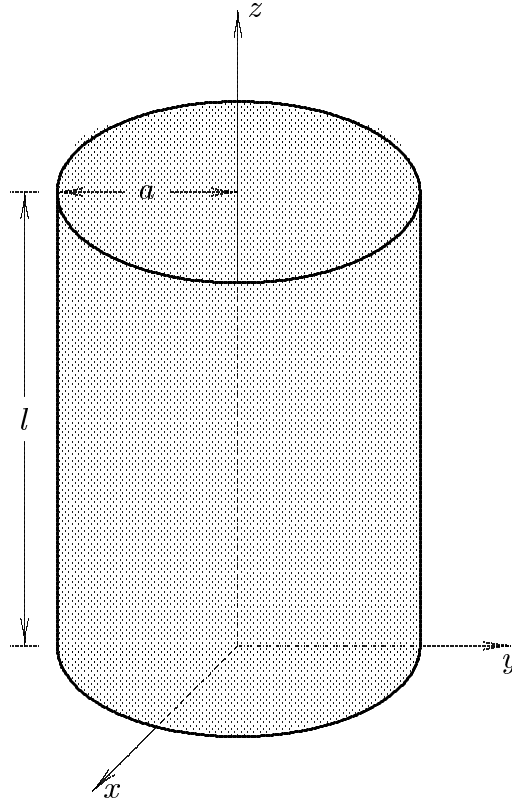
Dall'esame delle componenti (20.4.6) si vede che non possono esistere modi (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,0,1), (0,1,1). Il modo di ordine minimo fisicamente possibile é il modo (1,1,0) di cui la frequenza caratteristica é:

$$f_{110} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

$$\text{Modi } TE : \left\{ \begin{array}{l} E_x = \frac{\mu\omega}{h^2} \frac{q\pi}{b} C \cos \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} \sin \frac{r\pi z}{l} \\ E_y = -\frac{\mu\omega}{h^2} \frac{p\pi}{a} C \sin \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \sin \frac{r\pi z}{l} \\ E_z = 0 \\ H_x = i \frac{\pi^2}{h^2} \frac{pr}{al} C \sin \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \cos \frac{r\pi z}{l} \\ H_y = i \frac{\pi^2}{h^2} \frac{qr}{bl} C \cos \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} \cos \frac{r\pi z}{l} \\ H_z = -iC \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \sin \frac{r\pi z}{l} \end{array} \right. \quad (20.4.7)$$

In questo caso i modi inferiori sono i modi (0,1,1) e (1,0,1).

### Cavitá circolari



In questo caso, dalla teoria delle guide d'onda, risulta:

$$\begin{cases} \Phi = C_n J_n \left( \frac{x_{n\nu} \rho}{a} \right) \cos n\phi & \text{Modo } TM \\ \psi = C_n J_n \left( \frac{x'_{n\nu} \rho}{a} \right) \cos n\phi & \text{Modo } TE \end{cases} \quad (20.4.8)$$

Pertanto:

$$\text{Modi } TM : \begin{cases} \vec{E}_t = -\frac{r\pi C_n}{l h^2} \sin \frac{r\pi z}{l} \left[ \hat{e}_\rho \frac{x_{n\nu}}{a} J'_n \left( \frac{x_{n\nu} \rho}{a} \right) \cos n\phi - \hat{e}_\phi \frac{n}{\rho} J_n \left( \frac{x_{n\nu} \rho}{a} \right) \sin n\phi \right] \\ E_z = C_n \cos \frac{r\pi z}{l} J_n \left( \frac{x_{n\nu} \rho}{a} \right) \cos n\phi \\ \vec{H}_t = -i \frac{\epsilon\omega}{h^2} C_n \cos \frac{r\pi z}{l} \left[ \hat{e}_\phi \frac{x_{n\nu}}{a} J'_n \left( \frac{x_{n\nu} \rho}{a} \right) \cos n\phi + \hat{e}_\rho \frac{n}{\rho} J_n \left( \frac{x_{n\nu} \rho}{a} \right) \sin n\phi \right] \\ H_z = 0 \end{cases} \quad (20.4.9)$$

$$\text{Modi TE : } \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_t = \frac{\mu\omega C_n}{h^2} \sin \frac{r\pi z}{l} \left[ \hat{e}_\phi \frac{x'_{n\nu}}{a} J'_n \left( \frac{x'_{n\nu}\rho}{a} \right) \cos n\phi + \hat{e}_\rho \frac{n}{\rho} J_n \left( \frac{x'_{n\nu}\rho}{a} \right) \sin n\phi \right] \\ E_z = 0 \\ \vec{H}_t = -i \frac{r\pi}{l} \frac{C_n}{h^2} \cos \frac{r\pi z}{l} \left[ \hat{e}_\rho \frac{x'_{n\nu}}{a} J'_n \left( \frac{x'_{n\nu}\rho}{a} \right) \cos n\phi - \hat{e}_\phi \frac{n}{\rho} J_n \left( \frac{x'_{n\nu}\rho}{a} \right) \sin n\phi \right] \\ H_z = -i \sin \frac{r\pi z}{l} C_n J_n \left( \frac{x'_{n\nu}\rho}{a} \right) \cos n\phi \end{array} \right. \quad (20.4.10)$$

ossia:

$$\text{Modi TM : } \left\{ \begin{array}{l} E_\rho = -\frac{x_{n\nu}}{a} \frac{r}{l} \frac{\pi}{h^2} C_n J'_n \left( \frac{x_{n\nu}\rho}{a} \right) \cos n\phi \sin \frac{r\pi z}{l} \\ E_\phi = \frac{n}{\rho} \frac{r}{l} \frac{\pi}{h^2} C_n J_n \left( \frac{x_{n\nu}\rho}{a} \right) \sin n\phi \sin \frac{r\pi z}{l} \\ E_z = C_n J_n \left( \frac{x_{n\nu}\rho}{a} \right) \cos n\phi \cos \frac{r\pi z}{l} \\ H_\rho = -i \frac{\epsilon\omega}{h^2} \frac{n}{\rho} C_n J_n \left( \frac{x_{n\nu}\rho}{a} \right) \sin n\phi \cos \frac{r\pi z}{l} \\ H_\phi = -i \frac{\epsilon\omega}{h^2} \frac{x_{n\nu}}{a} C_n J'_n \left( \frac{x_{n\nu}\rho}{a} \right) \cos n\phi \cos \frac{r\pi z}{l} \\ H_z = 0 \end{array} \right. \quad (20.4.11)$$

Da queste espressioni si vede che, in questo caso,  $r$  può essere nullo, cioè può esistere un campo elettrico completamente assiale e, quindi, con frequenza di risonanza indipendente dalla lunghezza del risuonatore. Il modo fondamentale è quello competente alla terna  $(0,1,0)$ .

$$\text{Modi TE : } \left\{ \begin{array}{l} E_\rho = \frac{\mu\omega}{h^2} \frac{n}{\rho} C_n J_n \left( \frac{x'_{n\nu}\rho}{a} \right) \sin n\phi \sin \frac{r\pi z}{l} \\ E_\phi = \frac{\mu\omega}{h^2} \frac{x'_{n\nu}}{a} C_n J'_n \left( \frac{x'_{n\nu}\rho}{a} \right) \cos n\phi \sin \frac{r\pi z}{l} \\ E_z = 0 \\ H_\rho = -i \frac{r}{l} \frac{\pi}{h^2} \frac{x'_{n\nu}}{a} C_n J'_n \left( \frac{x'_{n\nu}\rho}{a} \right) \cos n\phi \cos \frac{r\pi z}{l} \\ H_\phi = i \frac{r}{l} \frac{\pi}{h^2} \frac{n}{\rho} C_n J_n \left( \frac{x'_{n\nu}\rho}{a} \right) \sin n\phi \cos \frac{r\pi z}{l} \\ H_z = -i C_n J_n \left( \frac{x'_{n\nu}\rho}{a} \right) \cos n\phi \sin \frac{r\pi z}{l} \end{array} \right. \quad (20.4.12)$$

In questo caso fra i modi definiti dalla terna  $(n, \nu, r)$  non esistono quelli per cui  $r = 0$ . Il modo fondamentale é quello competente alla terna  $(1, 1, 1)$ ; la corrispondente frequenza può essere minore o maggiore di quella del modo fondamentale  $TM_{010}$  a seconda dei valori relativi di  $a$  e di  $l$ .

### Energia elettromagnetica

Indicando con  $\langle W_e \rangle$  e con  $\langle W_m \rangle$  l'energia, mediata in un periodo, immagazzinata nel risuonatore di tipo elettrico e di tipo magnetico rispettivamente, si ha:

$$\langle W_e \rangle = \frac{1}{4} \int_V \epsilon |E|^2 d^3r \quad (20.4.13)$$

$$\langle W_m \rangle = \frac{1}{4} \int_V \mu |H|^2 d^3r \quad (20.4.14)$$

Consideriamo il teorema di Poynting per campi armonici nel tempo, (vedi Appunti di Campi elettromagnetici):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S}_c = -\langle Q \rangle + 2i\omega(\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle) \quad (20.4.15)$$

Nel caso di una cavità ideale (completamente chiusa, priva di perdite e non contenente sorgenti di energia) che oscilla in un modo risonante, i due primi termini dell'equazione (20.4.15) sono nulli e quindi l'ultimo termine risulta nullo comportando l'importante risultato:

$$\langle W_e \rangle = \langle W_m \rangle \quad (20.4.16)$$

**ossia: in una cavità ideale, le energie mediate in un periodo, elettrica e magnetica, immagazzinata in ciascun modo risonante, sono eguali.**

Conseguentemente l'energia totale elettromagnetica immagazzinata nella cavità é:

$$\langle W \rangle = 2\langle W_e \rangle = 2\langle W_m \rangle \quad (20.4.17)$$

Per quanto riguarda i valori istantanei delle energie, si ha:

$$W_e(t) = \frac{1}{2}\epsilon \int_V \left| \Re \left[ \vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t} \right] \right|^2 d^3r = 2\langle W_e \rangle \cos^2 \omega t \quad (20.4.18)$$

$$W_m(t) = \frac{1}{2}\mu \int_V \left| \Re \left[ \vec{H}(\vec{r})e^{i\omega t} \right] \right|^2 d^3r = 2\langle W_m \rangle \sin^2 \omega t \quad (20.4.19)$$

Ne segue:

$$W(t) = W_e(t) + W_m(t) = \langle W \rangle \quad (20.4.20)$$

**ossia: in una cavità ideale, l'energia elettromagnetica istantanea totale é costante ed eguale al valore, mediato in un periodo, dell'energia immagazzinata totale.**



Dalle equazioni (20.4.18) e (20.4.19) si deduce che, se ad un certo istante l'energia é totalmente elettrica, un quarto di periodo dopo sará totalmente magnetica.

### Potenza dissipata in un periodo

Il calcolo della potenza dissipata per effetto Joule implica la conoscenza della resistenza superficiale delle pareti metalliche della cavità (19.1.15):

$$R_s = \frac{1}{\sigma_p \delta_p} \quad (20.4.21)$$

essendo:

$$\delta_p = \sqrt{\frac{2}{\mu_p \sigma_p \omega}} \quad (20.4.22)$$

la profonditá di penetrazione nelle pareti di conducibilitá  $\sigma_p$  e di permeabilitá magnetica  $\mu_p$ .

Si ha, allora:

$$\langle P_p \rangle = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_p} R_s \vec{J}_s \cdot \vec{J}_s^* d\Sigma_p = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_p} R_s \vec{H} \cdot \vec{H}^* d\Sigma_p \quad (20.4.23)$$

in quanto  $\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}$  essendo  $\vec{H}$  il campo magnetico associato al modo considerato in assenza di perdite.

Conseguentemente:

$$Q_0 = \omega \frac{\frac{1}{2} \int_V \mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r}{\frac{1}{2} \int_{\Sigma_p} R_s \vec{H} \cdot \vec{H}^* d\Sigma_p} \quad (20.4.24)$$

essendo  $\mu$  la permeabilitá del mezzo che riempie la cavità e  $\Sigma_p$  la superficie che racchiude la cavità.

Se la cavità é interamente riempita di un solo dielettrico e le sue pareti sono costituite di un solo metallo, la (20.4.24) si può scrivere:

$$Q_0 = 2K \frac{\mu}{\mu_p} \frac{V}{\Sigma_p \delta_p} \quad (20.4.25)$$

essendo:

$$K = \frac{\frac{1}{V} \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r}{\frac{1}{\Sigma_p} \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d\Sigma_p} \quad (20.4.26)$$

essendo  $\frac{V}{\Sigma_p}$  il rapporto fra il volume della cavità e la superficie che la racchiude; esso é massimo per una cavità sferica.

$K$  é un numero adimensionato, dipende dalla forma geometrica della cavità e dal modo, **resta generalmente vicino all'unità per i modi di indice basso**. Poiché abitualmente  $\mu_p \simeq \mu \simeq \mu_0$ , si deduce che il coefficiente di qualità  $Q_0$  della cavità vuota e non accoppiata é generalmente dell'ordine di  $V/\Sigma_p \delta_p$ , ossia **dell'ordine del rapporto fra il volume della cavità ed il volume delle pareti metalliche che contiene praticamente tutta la corrente**.

### 20.5 - Determinazione delle espressioni del coefficiente di qualità $Q_0$ di cavità risonanti di forma rettangolare.

Scriviamo i campi relativi ad una cavità risonante eccitata nel modo  $TM$  dati dalle formule (20.4.6).

#### Cavità rettangolari: modi $TM$

$$\text{Modi } TM : \begin{cases} H_x = i \frac{\epsilon\omega}{h_{pq}^2} \frac{q\pi}{b} C \sin \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \cos \frac{r\pi z}{l} \\ H_y = -i \frac{\epsilon\omega}{h_{pq}^2} \frac{p\pi}{a} C \cos \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} \cos \frac{r\pi z}{l} \\ H_z = 0 \end{cases} \quad (20.5.1)$$

essendo  $h_{pq}^2 = \frac{p^2\pi^2}{a^2} + \frac{q^2\pi^2}{b^2}$  l'autovalore del modo guidato in una guida rettangolare eccitata nel modo  $TM$ .

Si ha:

$$\vec{H} \cdot \vec{H}^* = \frac{\epsilon^2\omega^2}{h_{pq}^4} C^2 \left[ \frac{q^2\pi^2}{b^2} \sin^2 \frac{p\pi x}{a} \cos^2 \frac{q\pi y}{b} \cos^2 \frac{r\pi z}{l} + \frac{p^2\pi^2}{a^2} \cos^2 \frac{p\pi x}{a} \sin^2 \frac{q\pi y}{b} \cos^2 \frac{r\pi z}{l} \right] \quad (20.5.2)$$

$$\begin{aligned} \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r &= \frac{\epsilon^2\omega^2}{h_{pq}^4} C^2 \int_0^a \int_0^b \int_0^l \left[ \frac{q^2\pi^2}{b^2} \sin^2 \frac{p\pi x}{a} \cos^2 \frac{q\pi y}{b} \cos^2 \frac{r\pi z}{l} \right] dx dy dz + \\ &+ \frac{\epsilon^2\omega^2}{h_{pq}^4} C^2 \int_0^a \int_0^b \int_0^l \left[ \frac{p^2\pi^2}{a^2} \cos^2 \frac{p\pi x}{a} \sin^2 \frac{q\pi y}{b} \cos^2 \frac{r\pi z}{l} \right] dx dy dz = \\ &= \frac{\epsilon^2\omega^2}{h_{pq}^4} C^2 \left[ \frac{q^2\pi^2}{b^2} \int_0^a \sin^2 \frac{p\pi x}{a} dx \int_0^b \cos^2 \frac{q\pi y}{b} dy \int_0^l \cos^2 \frac{r\pi z}{l} dz \right] + \\ &+ \frac{\epsilon^2\omega^2}{h_{pq}^4} C^2 \left[ \frac{p^2\pi^2}{a^2} \int_0^a \cos^2 \frac{p\pi x}{a} dx \int_0^b \sin^2 \frac{q\pi y}{b} dy \int_0^l \cos^2 \frac{r\pi z}{l} dz \right] \end{aligned} \quad (20.5.3)$$

Tenendo conto che:

$$\int_0^a \sin^2 \frac{p\pi x}{a} dx = \int_0^a \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2p\pi x}{a} \right) dx = \begin{cases} \frac{1}{2}a & \text{se } p \neq 0 \\ 0 & \text{se } p = 0 \end{cases} \quad (20.5.4)$$

$$\int_0^a \cos^2 \frac{p\pi x}{a} dx = \int_0^a \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{2p\pi x}{a} \right) dx = \begin{cases} \frac{1}{2}a & \text{se } p \neq 0 \\ a & \text{se } p = 0 \end{cases} \quad (20.5.5)$$

$$\int_0^b \sin^2 \frac{q\pi y}{b} dy = \int_0^b \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2q\pi y}{b} \right) dy = \begin{cases} \frac{1}{2}b & \text{se } q \neq 0 \\ 0 & \text{se } q = 0 \end{cases} \quad (20.5.6)$$

$$\int_0^b \cos^2 \frac{q\pi y}{b} dy = \int_0^b \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{2q\pi y}{b} \right) dy = \begin{cases} \frac{1}{2}b & \text{se } q \neq 0 \\ \frac{1}{2}b & \text{se } q = 0 \end{cases} \quad (20.5.7)$$

$$\int_0^l \sin^2 \frac{r\pi z}{l} dz = \int_0^l \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2r\pi z}{l} \right) dz = \begin{cases} \frac{1}{2}l & \text{se } r \neq 0 \\ 0 & \text{se } r = 0 \end{cases} \quad (20.5.8)$$

$$\int_0^l \cos^2 \frac{r\pi z}{l} dz = \int_0^l \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{2r\pi z}{l} \right) dz = \begin{cases} \frac{1}{2}l & \text{se } r \neq 0 \\ \frac{1}{2}l & \text{se } r = 0 \end{cases} \quad (20.5.9)$$

$$\int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r = \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{pq}^4} C^2 \frac{abl}{8} \left( \frac{p^2 \pi^2}{a^2} + \frac{q^2 \pi^2}{b^2} \right) = \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{pq}^2} C^2 \frac{abl}{8} \quad (p \neq 0; q \neq 0) \quad (20.5.10)$$

Per il calcolo dell'integrale di superficie, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r &= \int_0^a \int_0^b \left( \vec{H} \cdot \vec{H}^* \right)_{(z=0)} dx dy + \int_0^a \int_0^b \left( \vec{H} \cdot \vec{H}^* \right)_{(z=l)} dx dy + \\ &+ \int_0^b \int_0^l \left( \vec{H} \cdot \vec{H}^* \right)_{(x=0)} dy dz + \int_0^b \int_0^l \left( \vec{H} \cdot \vec{H}^* \right)_{(x=a)} dy dz + \\ &+ \int_0^a \int_0^l \left( \vec{H} \cdot \vec{H}^* \right)_{(y=0)} dx dz + \int_0^a \int_0^l \left( \vec{H} \cdot \vec{H}^* \right)_{(y=b)} dx dz \end{aligned} \quad (20.5.11)$$

Sostituendo l'equazione (20.5.2) nella (20.5.11), si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r &= 2 \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{pq}^4} C^2 \left[ \int_0^a \int_0^b \left( \frac{q^2 \pi^2}{b^2} \sin^2 \frac{p\pi x}{a} \cos^2 \frac{q\pi y}{b} + \frac{p^2 \pi^2}{a^2} \cos^2 \frac{p\pi x}{a} \sin^2 \frac{q\pi y}{b} \right) dx dy + \right. \\ &+ \left. \int_0^b \int_0^l \left( \frac{p^2 \pi^2}{a^2} \sin^2 \frac{q\pi y}{b} \cos^2 \frac{r\pi z}{l} \right) dy dz + \int_0^a \int_0^l \left( \frac{q^2 \pi^2}{b^2} \sin^2 \frac{p\pi x}{a} \cos^2 \frac{r\pi z}{l} \right) dx dz \right] = \\ &= 2 \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{pq}^4} C^2 \left[ \left( \frac{p^2 \pi^2}{a^2} + \frac{q^2 \pi^2}{b^2} \right) \frac{ab}{4} + \frac{p^2 \pi^2}{a^2} \frac{bl}{4} + \frac{q^2 \pi^2}{b^2} \frac{al}{4} \right] = \\ &= 2 \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{pq}^4} C^2 \frac{\pi^2}{4} \left[ \frac{p^2}{a^2} b(a+l) + \frac{q^2}{b^2} a(b+l) \right] \end{aligned} \quad (20.5.12)$$

Il fattore  $K$  dato dalla formula (20.4.26) é:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\frac{1}{V} \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r}{\frac{1}{\Sigma_p} \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d\Sigma_p} = \frac{\frac{1}{abl} \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{pq}^2} C^2 \frac{abl}{8}}{\frac{1}{2(ab+al+bl)} 2 \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{pq}^4} C^2 \frac{\pi^2}{4} \left[ \frac{p^2}{a^2} b(a+l) + \frac{q^2}{b^2} a(b+l) \right]} = \\ &= \frac{h_{pq}^2 \frac{1}{8}}{\frac{1}{2(ab+al+bl)} \frac{\pi^2}{2} \left[ \frac{p^2}{a^2} b(a+l) + \frac{q^2}{b^2} a(b+l) \right]} = \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right)}{\frac{1}{ab+al+bl} \left[ \frac{p^2}{a^2} b(a+l) + \frac{q^2}{b^2} a(b+l) \right]} \end{aligned} \quad (20.5.13)$$

Il fattore di qualità  $Q_0$  dato dalla formula (20.4.25) é:

$$Q_0 = 2K \frac{\mu}{\mu_p} \frac{V}{\Sigma_p \delta_p} \quad (20.5.14)$$

$$Q_0 = 2 \frac{\mu}{\mu_p} \frac{V}{\Sigma_p \delta_p} \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right)}{\frac{1}{ab + al + bl} \left[ \frac{p^2}{a^2} b(a+l) + \frac{q^2}{b^2} a(b+l) \right]} = \frac{\mu}{\mu_p} \frac{abl}{\delta_p} \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right)}{\left[ \frac{p^2}{a^2} b(a+l) + \frac{q^2}{b^2} a(b+l) \right]} \quad (20.5.15)$$

ossia dividendo numeratore e denominatore per  $abl$ :

$$Q_0 = \mu \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\sigma \nu}{\mu_p}} \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right)}{\left[ \frac{p^2}{a^2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{l} \right) + \frac{q^2}{b^2} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{l} \right) \right]} \quad (20.5.16)$$

Scriviamo i campi relativi ad una cavità risonante eccitata nel modo  $TE$  dati dalle formule (20.4.7).

### Cavità rettangolari: modi $TE$

$$Modi TE : \begin{cases} H_x = i \frac{\pi^2}{h_{pq}^2} \frac{pr}{al} C \sin \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \cos \frac{r\pi z}{l} \\ H_y = i \frac{\pi^2}{h_{pq}^2} \frac{qr}{bl} C \cos \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} \cos \frac{r\pi z}{l} \\ H_z = -iC \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \sin \frac{r\pi z}{l} \end{cases} \quad (20.5.17)$$

essendo  $h_{pq}^2 = \frac{p^2 \pi^2}{a^2} + \frac{q^2 \pi^2}{b^2}$  l'autovalore del modo guidato in una guida rettangolare eccitata nel modo  $TE$ .

Si ha:

$$\vec{H} \cdot \vec{H}^* = \frac{\pi^2}{h_{pq}^4} \frac{r^2}{l^2} C^2 \left[ \frac{p^2 \pi^2}{a^2} \sin^2 \frac{p\pi x}{a} \cos^2 \frac{q\pi y}{b} \cos^2 \frac{r\pi z}{l} + \frac{q^2 \pi^2}{b^2} \cos^2 \frac{p\pi x}{a} \sin^2 \frac{q\pi y}{b} \cos^2 \frac{r\pi z}{l} \right] + C^2 \cos^2 \frac{p\pi x}{a} \cos^2 \frac{q\pi y}{b} \sin^2 \frac{r\pi z}{l} \quad (20.5.18)$$

$$\begin{aligned}
 \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r &= \frac{\pi^2}{h_{pq}^4} \frac{r^2}{l^2} C^2 \int_0^a \int_0^b \int_0^l \left[ \frac{p^2 \pi^2}{a^2} \sin^2 \frac{p\pi x}{a} \cos^2 \frac{q\pi y}{b} \cos^2 \frac{r\pi z}{l} \right] dx dy dz + \\
 &+ \frac{\pi^2}{h_{pq}^4} \frac{r^2}{l^2} C^2 \int_0^a \int_0^b \int_0^l \left[ \frac{q^2 \pi^2}{a^2} \cos^2 \frac{p\pi x}{a} \sin^2 \frac{q\pi y}{b} \cos^2 \frac{r\pi z}{l} \right] dx dy dz + \\
 &+ C^2 \int_0^a \int_0^b \int_0^l \cos^2 \frac{p\pi x}{a} \cos^2 \frac{q\pi y}{b} \sin^2 \frac{r\pi z}{l} dx dy dz = \\
 &= \frac{\pi^2}{h_{pq}^4} \frac{r^2}{l^2} C^2 \left[ \frac{p^2 \pi^2}{a^2} \int_0^a \sin^2 \frac{p\pi x}{a} dx \int_0^b \cos^2 \frac{q\pi y}{b} dy \int_0^l \cos^2 \frac{r\pi z}{l} dz \right] + \\
 &+ \frac{\pi^2}{h_{pq}^4} \frac{r^2}{l^2} C^2 \left[ \frac{q^2 \pi^2}{a^2} \int_0^a \cos^2 \frac{p\pi x}{a} dx \int_0^b \sin^2 \frac{q\pi y}{b} dy \int_0^l \cos^2 \frac{r\pi z}{l} dz \right] + \\
 &+ C^2 \int_0^a \cos^2 \frac{p\pi x}{a} dx \int_0^b \cos^2 \frac{q\pi y}{b} dy \int_0^l \sin^2 \frac{r\pi z}{l} dz
 \end{aligned} \tag{20.5.19}$$

Tenendo conto delle (20.5.4)÷(20.5.9), risulta:

$$\int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r = \frac{\pi^2}{h_{pq}^4} \frac{r^2}{l^2} C^2 \frac{abl}{8} \left( \frac{p^2 \pi^2}{a^2} + \frac{q^2 \pi^2}{b^2} \right) + C^2 \frac{abl}{8} = C^2 \frac{abl}{8} \left( 1 + \frac{\pi^2}{h_{pq}^2} \frac{r^2}{l^2} \right) \quad (p \neq 0; q \neq 0) \tag{20.5.20}$$

Per il calcolo dell'integrale di superficie, si ha:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r &= \int_0^a \int_0^b (\vec{H} \cdot \vec{H}^*)_{(z=0)} dx dy + \int_0^a \int_0^b (\vec{H} \cdot \vec{H}^*)_{(z=l)} dx dy + \\
 &+ \int_0^b \int_0^l (\vec{H} \cdot \vec{H}^*)_{(x=0)} dy dz + \int_0^b \int_0^l (\vec{H} \cdot \vec{H}^*)_{(x=a)} dy dz + \\
 &+ \int_0^a \int_0^l (\vec{H} \cdot \vec{H}^*)_{(y=0)} dx dz + \int_0^a \int_0^l (\vec{H} \cdot \vec{H}^*)_{(y=b)} dx dz
 \end{aligned} \tag{20.5.21}$$

Sostituendo l'equazione (20.5.18) nella (20.5.21), si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r &= 2 \frac{\pi^2}{h_{pq}^4} \frac{r^2}{l^2} C^2 \left[ \int_0^a \int_0^b \left( \frac{p^2 \pi^2}{a^2} \sin^2 \frac{p\pi x}{a} \cos^2 \frac{q\pi y}{b} + \frac{q^2 \pi^2}{b^2} \cos^2 \frac{p\pi x}{a} \sin^2 \frac{q\pi y}{b} \right) dx dy + \right. \\
 &+ \int_0^b \int_0^l \left( \frac{q^2 \pi^2}{b^2} \sin^2 \frac{q\pi y}{b} \cos^2 \frac{r\pi z}{l} \right) dy dz + \int_0^a \int_0^l \left( \frac{p^2 \pi^2}{a^2} \sin^2 \frac{p\pi x}{a} \cos^2 \frac{r\pi z}{l} \right) dx dz \left. \right] + \\
 &+ 2C^2 \int_0^b \int_0^l \cos^2 \frac{q\pi y}{b} \sin^2 \frac{r\pi z}{l} dy dz + 2C^2 \int_0^a \int_0^l \cos^2 \frac{p\pi x}{a} \sin^2 \frac{r\pi z}{l} dx dz = \\
 &= 2 \frac{\pi^2}{h_{pq}^4} \frac{r^2}{l^2} C^2 \left[ \left( \frac{p^2 \pi^2}{a^2} + \frac{q^2 \pi^2}{b^2} \right) \frac{ab}{4} + \frac{q^2 \pi^2}{b^2} \frac{bl}{4} + \frac{p^2 \pi^2}{a^2} \frac{al}{4} \right] + 2C^2 \frac{bl}{4} + 2C^2 \frac{al}{4} = \\
 &= 2 \frac{\pi^2}{h_{pq}^4} \frac{r^2}{l^2} C^2 \frac{\pi^2}{4} \left[ \frac{p^2}{a^2} a(b+l) + \frac{q^2}{b^2} b(a+l) \right] + 2C^2 \frac{1}{4} (al + bl)
 \end{aligned} \tag{20.5.22}$$

Pertanto il fattore  $K$  é:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{\frac{1}{V} \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r}{\frac{1}{\Sigma_p} \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d\Sigma_p} = \\
 &= \frac{\frac{1}{abl} C^2 \frac{abl}{8} \left( 1 + \frac{\pi^2 r^2}{h_{pq}^2 l^2} \right)}{\frac{1}{2(ab + al + bl)} \left\{ 2 \frac{\pi^2 r^2}{h_{pq}^4 l^2} C^2 \frac{\pi^2}{4} \left[ \frac{p^2}{a^2} a(b+l) + \frac{q^2}{b^2} b(a+l) \right] + 2C^2 \frac{1}{4} (al + bl) \right\}}
 \end{aligned} \tag{20.5.23}$$

Quindi:

$$Q_0 = 2 \frac{\mu}{\mu_p} \frac{1}{\delta_p} \frac{C^2 \frac{abl}{8} \left( 1 + \frac{\pi^2 r^2}{h_{pq}^2 l^2} \right)}{\left\{ 2 \frac{\pi^2 r^2}{h_{pq}^4 l^2} C^2 \frac{\pi^2}{4} \left[ \frac{p^2}{a^2} a(b+l) + \frac{q^2}{b^2} b(a+l) \right] + 2C^2 \frac{1}{4} (al + bl) \right\}} \tag{20.5.24}$$

ossia dividendo numeratore e denominatore per  $abl$ :

$$Q_0 = \mu \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\sigma \nu}{\mu_p}} \frac{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\pi^2 r^2}{h_{pq}^2 l^2} \right)}{\left\{ \frac{\pi^2 r^2}{h_{pq}^4 l^2} \pi^2 \left[ \frac{p^2}{a^2} \left( \frac{1}{l} + \frac{1}{b} \right) + \frac{q^2}{b^2} \left( \frac{1}{l} + \frac{1}{a} \right) \right] + \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right\}} \tag{20.5.25}$$

## 20.6 - Determinazione delle espressioni del coefficiente di qualità $Q_0$ di cavità risonanti di forma cilindrica circolare.

Scriviamo i campi relativi ad una cavità risonante cilindrica circolare eccitata nel modo  $TM$  dati dalle formule (20.4.11).

### Cavità circolari: modi $TM$

$$\text{Modi } TM : \begin{cases} H_\rho = -i \frac{\epsilon \omega}{h_{n\nu}^2} \frac{n}{\rho} C_n J_n(h_{n\nu} \rho) \sin n\phi \cos \frac{r\pi z}{l} \\ H_\phi = -i \frac{\epsilon \omega}{h_{n\nu}} C_n J'_n(h_{n\nu} \rho) \cos n\phi \cos \frac{r\pi z}{l} \\ H_z = 0 \end{cases} \tag{20.6.1}$$

essendo  $h_{n\nu} = \frac{x_{n\nu}}{a}$  l'autovalore del modo guidato in una guida circolare eccitata nel modo  $TM$ ,  $a$  il raggio della cavità e  $x_{n\nu}$  la radice  $\nu$ -esima della funzione di Bessel di ordine  $n$ .

Si ha:

$$\vec{H} \cdot \vec{H}^* = \frac{\epsilon^2 \omega^2 n^2}{h_{n\nu}^4 \rho^2} C_n^2 J_n^2(h_{n\nu} \rho) \sin^2 n\phi \cos^2 \frac{r\pi z}{l} + \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 J_n'^2(h_{n\nu} \rho) \cos^2 n\phi \cos^2 \frac{r\pi z}{l} \quad (20.6.2)$$

$$\begin{aligned} \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3 r = \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* \rho d\rho d\phi dz = & \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \int_0^a \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 \rho^2} J_n^2(h_{n\nu} \rho) \rho d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2 n\phi d\phi \int_0^l \cos^2 \frac{r\pi z}{l} dz + \\ & + \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \int_0^a J_n'^2(h_{n\nu} \rho) \rho d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 n\phi d\phi \int_0^l \cos^2 \frac{r\pi z}{l} dz \end{aligned} \quad (20.6.3)$$

Tenendo conto della (20.5.9) e che:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 n\phi d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2n\phi}{2} d\phi = \pi = \int_0^{2\pi} \cos^2 n\phi d\phi \quad (20.6.4)$$

l'equazione (20.6.3) diventa:

$$\begin{aligned} \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3 r = & \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{n\nu}^2} \pi \frac{1}{2} l C_n^2 \left\{ \int_0^a \left[ J_n'^2(h_{n\nu} \rho) + \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 \rho^2} J_n^2(h_{n\nu} \rho) \right] \rho d\rho \right\} = \\ = & \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{n\nu}^2} \pi \frac{1}{2} l C_n^2 \left\{ \int_0^a \left[ J_n'^2(h_{n\nu} \rho) - 2 \frac{n}{h_{n\nu} \rho} J_n'(h_{n\nu} \rho) J_n(h_{n\nu} \rho) + \right. \right. \quad (20.6.5) \\ & \left. \left. + \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 \rho^2} J_n^2(h_{n\nu} \rho) + 2 \frac{n}{h_{n\nu} \rho} J_n'(h_{n\nu} \rho) J_n(h_{n\nu} \rho) \right] \rho d\rho \right\} \end{aligned}$$

avendo aggiunto e sottratto la quantità  $2 \frac{n}{h_{n\nu} \rho} J_n'(h_{n\nu} \rho) J_n(h_{n\nu} \rho)$  nel terzo membro della (20.6.5). Ne segue:

$$\begin{aligned} \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3 r = & \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{n\nu}^2} \pi \frac{1}{2} l C_n^2 \left\{ \int_0^a \left[ J_n'(h_{n\nu} \rho) - \frac{n}{h_{n\nu} \rho} J_n(h_{n\nu} \rho) \right]^2 \rho d\rho + \right. \\ & \left. + \frac{n}{h_{n\nu}} \int_0^a 2 J_n'(h_{n\nu} \rho) J_n(h_{n\nu} \rho) d\rho \right\} = \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{n\nu}^2} \pi \frac{1}{2} l C_n^2 \left\{ \int_0^a \left[ J_n'(h_{n\nu} \rho) - \frac{n}{h_{n\nu} \rho} J_n(h_{n\nu} \rho) \right]^2 \rho d\rho + \right. \\ & \left. + \frac{n}{h_{n\nu}^2} \int_{J_n^2(0)}^{J_n^2(h_{n\nu} a)} d[J_n^2(h_{n\nu} \rho)] \right\} \end{aligned} \quad (20.6.6)$$

Tenendo conto che  $J_n^2(h_{n\nu} a) = 0$  qualunque sia  $n$ , l'ultimo integrale della (20.6.6) si può scrivere:

$$\int_{J_n^2(0)}^{J_n^2(h_{n\nu} a)} d[J_n^2(h_{n\nu} \rho)] = -J_n^2(0) \quad (20.6.7)$$

che é certamente nullo per  $n \neq 0$ . Pertanto l'ultimo termine della (20.6.6) é sempre nullo qualunque sia  $n$ .



L'equazione (20.6.6) diventa, quindi:

$$\int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r = \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{n\nu}^2} \pi \frac{1}{2} l C_n^2 \int_0^a \left[ J_n'(h_{n\nu} \rho) - \frac{n}{h_{n\nu} \rho} J_n(h_{n\nu} \rho) \right]^2 \rho d\rho \quad (20.6.8)$$

Ricordando l'espressione ricorrente per le funzioni di Bessel:

$$x J_n'(x) = n J_n(x) - x J_{n+1}(x) \quad (20.6.9)$$

si ha:

$$J_n'(h_{n\nu} \rho) - \frac{n}{h_{n\nu} \rho} J_n(h_{n\nu} \rho) = -J_{n+1}(h_{n\nu} \rho) \quad (20.6.10)$$

Pertanto l'equazione (20.6.8) diventa:

$$\int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r = \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{n\nu}^2} \pi \frac{1}{2} l C_n^2 \int_0^a J_{n+1}^2(h_{n\nu} \rho) \rho d\rho \quad (20.6.11)$$

che si risolve con la formula di Lommel:

$$\int_0^a x J_n^2(kx) dx = \frac{1}{2} a^2 \left[ J_n'^2(ka) + \left( 1 - \frac{n^2}{k^2 a^2} \right) J_n^2(ka) \right] \quad (20.6.12)$$

In definitiva si ha:

$$\int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r = \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{n\nu}^2} \pi \frac{1}{2} l C_n^2 \frac{1}{2} a^2 \left[ J_{n+1}'^2(h_{n\nu} a) + \left( 1 - \frac{(n+1)^2}{h_{n\nu}^2 a^2} \right) J_{n+1}^2(h_{n\nu} a) \right] \quad (20.6.13)$$

Dalla nota relazione sulle funzioni cilindriche si ha:

$$J_{n+1}(x) = -J_n'(x) + \frac{n}{x} J_n(x) \quad (20.6.14)$$

Derivando rispetto a  $x$  entrambi i membri dell'equazione (20.6.14) otteniamo:

$$J_{n+1}'(x) = -J_n''(x) + \frac{n}{x} J_n'(x) - \frac{n}{x^2} J_n(x) \quad (20.6.15)$$

Dall'equazione differenziale di Bessel:

$$J_n''(x) + \frac{1}{x} J_n'(x) + \left( 1 - \frac{n^2}{x^2} \right) J_n(x) = 0 \quad (20.6.16)$$

segue:

$$J_n''(x) = -\frac{1}{x} J_n'(x) - \left( 1 - \frac{n^2}{x^2} \right) J_n(x) \quad (20.6.17)$$

che sostituita nella (20.6.15) comporta:

$$J_{n+1}'(x) = +\frac{1}{x} J_n'(x) + \left( 1 - \frac{n^2}{x^2} \right) J_n(x) + \frac{n}{x} J_n'(x) - \frac{n}{x^2} J_n(x) \quad (20.6.18)$$

Ora, per  $x = h_{n\nu}a$  risulta  $J_n(h_{n\nu}a) = 0$ ; pertanto le equazioni (20.6.14) e (20.6.18) diventano:

$$J_{n+1}(h_{n\nu}a) = -J'_n(h_{n\nu}a) \quad (20.6.19)$$

$$J'_{n+1}(h_{n\nu}a) = +\frac{1}{h_{n\nu}a}J'_n(h_{n\nu}a) + \frac{n}{h_{n\nu}a}J'_n(h_{n\nu}a) \quad (20.6.20)$$

Sostituendo la (20.6.19) e la (20.6.20) nella (20.6.13), quest'ultima diventa:

$$\int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r = \frac{\epsilon^2\omega^2}{h_{n\nu}^2} \pi \frac{1}{2} l C_n^2 \frac{1}{2} a^2 \left[ \left( \frac{n+1}{h_{n\nu}a} \right)^2 J_n'^2(h_{n\nu}a) + \left( 1 - \frac{(n+1)^2}{h_{n\nu}^2 a^2} \right) J_n'^2(h_{n\nu}a) \right] \quad (20.6.21)$$

ossia:

$$\int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r = \frac{\epsilon^2\omega^2}{h_{n\nu}^2} \pi \frac{1}{2} l C_n^2 \frac{1}{2} a^2 J_n'^2(h_{n\nu}a) \quad \text{per } r \neq 0 \quad (20.6.22)$$

$$\int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r = \frac{\epsilon^2\omega^2}{h_{n\nu}^2} \pi l C_n^2 \frac{1}{2} a^2 J_n'^2(h_{n\nu}a) \quad \text{per } r = 0 \quad (20.6.23)$$

Per il calcolo dell'integrale di superficie, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (\vec{H} \cdot \vec{H}^*)_{(z=0)} \rho d\rho d\phi + \int_0^{2\pi} \int_0^a (\vec{H} \cdot \vec{H}^*)_{(z=l)} \rho d\rho d\phi + \\ &+ \int_0^{2\pi} \int_0^l (\vec{H} \cdot \vec{H}^*)_{(\rho=a)} a d\phi dz \end{aligned} \quad (20.6.24)$$

Sostituendo l'espressione (20.6.2) nella (20.6.24), si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r &= 2 \frac{\epsilon^2\omega^2}{h_{n\nu}^4} C_n^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{n^2}{\rho^2} J_n^2(h_{n\nu}\rho) (\sin^2 n\phi) \rho d\rho d\phi + \\ &+ 2 \frac{\epsilon^2\omega^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a J_n'^2(h_{n\nu}\rho) (\cos^2 n\phi) \rho d\rho d\phi + \\ &+ \frac{\epsilon^2\omega^2}{h_{n\nu}^4} \frac{n^2}{a^2} C_n^2 \int_0^{2\pi} \int_0^l J_n^2(h_{n\nu}a) (\sin^2 n\phi) \left( \cos^2 \frac{r\pi z}{l} \right) a d\phi dz + \\ &+ \frac{\epsilon^2\omega^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \int_0^{2\pi} \int_0^l J_n'^2(h_{n\nu}a) (\cos^2 n\phi) \left( \cos^2 \frac{r\pi z}{l} \right) a d\phi dz \end{aligned} \quad (20.6.25)$$

Per la (20.5.9) e la (20.6.4), tenendo conto che  $J_n^2(h_{n\nu}a) = 0$ , la (20.6.25) si scrive:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r &= 2 \frac{\epsilon^2\omega^2}{h_{n\nu}^4} C_n^2 \pi \int_0^a \frac{n^2}{\rho^2} J_n^2(h_{n\nu}\rho) \rho d\rho + \\ &+ 2 \frac{\epsilon^2\omega^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi \int_0^a J_n'^2(h_{n\nu}\rho) \rho d\rho + \frac{\epsilon^2\omega^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi a \frac{1}{2} l J_n'^2(h_{n\nu}a) \end{aligned} \quad (20.6.26)$$

ossia:

$$\int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r = 2 \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi \int_0^a \left[ J_n'^2(h_{n\nu} \rho) + \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 \rho^2} J_n^2(h_{n\nu} \rho) \right] \rho d\rho + \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi a \frac{1}{2} l J_n'^2(h_{n\nu} a) \quad (20.6.27)$$

L'integrale al secondo membro é identico a quello della (20.6.5). Per cui risulta:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r &= 2 \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{n\nu}^2} \pi C_n^2 \frac{1}{2} a^2 \left[ J_{n+1}'^2(h_{n\nu} a) + \left( 1 - \frac{(n+1)^2}{h_{n\nu}^2 a^2} \right) J_{n+1}^2(h_{n\nu} a) \right] + \\ &+ \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi a \frac{1}{2} l J_n'^2(h_{n\nu} a) \end{aligned} \quad (20.6.28)$$

che per la (20.6.19) e la (20.6.20) diventa:

$$\int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r = 2 \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{n\nu}^2} \pi C_n^2 \frac{1}{2} a^2 J_n'^2(h_{n\nu} a) + \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi a \frac{1}{2} l J_n'^2(h_{n\nu} a) \quad (20.6.29)$$

ossia:

$$\int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r = \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{n\nu}^2} \pi C_n^2 \left[ a^2 + a \frac{1}{2} l \right] J_n'^2(h_{n\nu} a) \quad \text{per } r \neq 0 \quad (20.6.30)$$

$$\int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r = \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{n\nu}^2} \pi C_n^2 [a^2 + al] J_n'^2(h_{n\nu} a) \quad \text{per } r = 0 \quad (20.6.31)$$

Pertanto il fattore  $K$  é:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\frac{1}{V} \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r}{\frac{1}{\Sigma_p} \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d\Sigma_p} = \\ &= \frac{\frac{1}{\pi a^2 l} \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{n\nu}^2} \pi \frac{1}{2} l C_n^2 \frac{1}{2} a^2 J_n'^2(h_{n\nu} a)}{\frac{1}{2\pi a^2 + 2\pi al} \frac{\epsilon^2 \omega^2}{h_{n\nu}^2} \pi C_n^2 \left\{ a^2 + a \frac{1}{2} l \right\} J_n'^2(h_{n\nu} a)} = \\ &= \frac{\frac{1}{\pi a^2 l} l \frac{1}{4} a^2}{\frac{1}{2\pi a^2 + 2\pi al} \left\{ a^2 + a \frac{1}{2} l \right\}} \end{aligned} \quad (20.6.32)$$

Quindi:

$$Q_0 = \frac{\mu}{\mu_p} \frac{1}{\delta_p} \frac{l \frac{1}{2} a^2}{\left\{ a^2 + a \frac{1}{2} l \right\}} \quad \text{per } r \neq 0 \quad (20.6.33)$$

$$Q_0 = \frac{\mu}{\mu_p} \frac{1}{\delta_p} \frac{la^2}{\{a^2 + al\}} \quad \text{per } r = 0 \quad (20.6.34)$$

Dividendo numeratore e denominatore della (20.6.33) per  $l\frac{1}{2}a^2$ , si ha:

$$Q_0 = \mu\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\sigma\nu}{\mu_p}} \frac{1}{\left\{\frac{2}{l} + \frac{1}{a}\right\}} \quad \text{per } r \neq 0 \quad (20.6.35)$$

Dividendo numeratore e denominatore della (20.6.34) per  $la^2$ , si ha:

$$Q_0 = \mu\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\sigma\nu}{\mu_p}} \frac{1}{\left\{\frac{1}{l} + \frac{1}{a}\right\}} \quad \text{per } r = 0 \quad (20.6.36)$$

Scriviamo i campi relativi ad una cavità risonante cilindrica circolare eccitata nel modo  $TE$  dati dalle formule (20.4.12).

### Cavità circolari: modi TE

$$\text{Modi } TE : \begin{cases} H_\rho = -i\frac{r}{l} \frac{\pi}{h_{n\nu}} C_n J'_n(h_{n\nu}\rho) \cos n\phi \cos \frac{r\pi z}{l} \\ H_\phi = i\frac{r}{l} \frac{\pi}{h_{n\nu}^2} \frac{n}{\rho} C_n J_n(h_{n\nu}\rho) \sin n\phi \cos \frac{r\pi z}{l} \\ H_z = -iC_n J_n(h_{n\nu}\rho) \cos n\phi \sin \frac{r\pi z}{l} \end{cases} \quad (20.6.37)$$

essendo  $h_{n\nu} = \frac{x'_{n\nu}}{a}$ , l'autovalore del modo guidato in una guida circolare eccitata nel modo TE,  $a$  il raggio della cavità e  $x'_{n\nu}$  la radice  $\nu$ -esima della derivata prima della funzione di Bessel di ordine  $n$ .

Si ha:

$$\begin{aligned} \vec{H} \cdot \vec{H}^* &= \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 J_n'^2(h_{n\nu}\rho) \cos^2 n\phi \cos^2 \frac{r\pi z}{l} + \\ &+ \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^4} \frac{n^2}{\rho^2} C_n^2 J_n^2(h_{n\nu}\rho) \sin^2 n\phi \cos^2 \frac{r\pi z}{l} + C_n^2 J_n^2(h_{n\nu}\rho) \cos^2 n\phi \sin^2 \frac{r\pi z}{l} \end{aligned} \quad (20.6.38)$$

$$\begin{aligned}
 \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r &= \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* \rho d\rho d\phi dz = \\
 &= \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \int_0^a J_n'^2(h_{n\nu}) \rho d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 n\phi d\phi \int_0^l \cos^2 \frac{r\pi z}{l} dz + \\
 &+ \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \int_0^a \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 \rho^2} J_n^2(h_{n\nu}\rho) \rho d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2 n\phi d\phi \int_0^l \cos^2 \frac{r\pi z}{l} dz + \\
 &+ C_n^2 \int_0^a J_n^2(h_{n\nu}\rho) \rho d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 n\phi d\phi \int_0^l \sin^2 \frac{r\pi z}{l} dz
 \end{aligned} \tag{20.6.39}$$

Tenendo conto della (20.5.8), della (20.5.9) e della (20.6.4) si ha:

$$\begin{aligned}
 \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r &= \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi \frac{1}{2} l \int_0^a J_n'^2(h_{n\nu}) \rho d\rho + \\
 &+ \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi \frac{1}{2} l \int_0^a \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 \rho^2} J_n^2(h_{n\nu}\rho) \rho d\rho + C_n^2 \pi \frac{1}{2} l \int_0^a J_n^2(h_{n\nu}\rho) \rho d\rho
 \end{aligned} \tag{20.6.40}$$

$$\begin{aligned}
 \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r &= \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi \frac{1}{2} l \int_0^a \left[ J_n'^2(h_{n\nu}\rho) + \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 \rho^2} J_n^2(h_{n\nu}\rho) \right] \rho d\rho + \\
 &+ C_n^2 \pi \frac{1}{2} l \int_0^a J_n^2(h_{n\nu}\rho) \rho d\rho
 \end{aligned} \tag{20.6.41}$$

Il primo integrale del secondo membro é stato calcolato per i modi *TM*, mentre il secondo integrale é l'integrale di Lommel.

Quindi:

$$\begin{aligned}
 \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r &= \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi \frac{1}{2} l \frac{1}{2} a^2 \left\{ J_{n+1}'^2(h_{n\nu}a) + \left[ 1 - \frac{(n+1)^2}{h_{n\nu}^2 a^2} \right] J_{n+1}^2(h_{n\nu}a) \right\} + \\
 &+ \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi \frac{1}{2} l \frac{n}{h_{n\nu}^2} J_n^2(h_{n\nu}a) + C_n^2 \pi \frac{1}{2} l \frac{1}{2} a^2 \left[ J_n'^2(h_{n\nu}a) + \left( 1 - \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 a^2} \right) J_n^2(h_{n\nu}a) \right]
 \end{aligned} \tag{20.6.42}$$

Poiché per i modi *TE* risulta:  $J_n'(h_{n\nu}a) = 0$ , l'equazione (20.6.42) diventa:

$$\begin{aligned}
 \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r &= \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi \frac{1}{2} l \frac{1}{2} a^2 \left\{ J_{n+1}'^2(h_{n\nu}a) + \left[ 1 - \frac{(n+1)^2}{h_{n\nu}^2 a^2} \right] J_{n+1}^2(h_{n\nu}a) \right\} + \\
 &+ \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi \frac{1}{2} l \frac{n}{h_{n\nu}^2} J_n^2(h_{n\nu}a) + C_n^2 \pi \frac{1}{2} l \frac{1}{2} a^2 \left[ \left( 1 - \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 a^2} \right) J_n^2(h_{n\nu}a) \right]
 \end{aligned} \tag{20.6.43}$$

Analogamente poiché per i modi *TE* per  $x = h_{n\nu}a$  risulta  $J_n'(h_{n\nu}a) = 0$ , le equazioni (20.6.19) e (20.6.20) assumono la forma:

$$J_{n+1}(h_{n\nu}a) = \frac{n}{h_{n\nu}a} J_n(h_{n\nu}a) \tag{20.6.44}$$

$$J_{n+1}'(h_{n\nu}a) = \left( 1 - \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 a^2} \right) J_n(h_{n\nu}a) - \frac{n}{h_{n\nu}^2 a^2} J_n(h_{n\nu}a) \tag{20.6.45}$$

Sostituendo la (20.6.44) e la (20.6.45) nella (20.6.43), quest'ultima diventa:

$$\begin{aligned}
 \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r &= \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi \frac{1}{2} \frac{1}{2} a^2 \left\{ \left( 1 - \frac{n(n+1)}{h_{n\nu}^2 a^2} \right)^2 J_n^2(h_{n\nu} a) + \right. \\
 &+ \left. \left[ 1 - \frac{(n+1)^2}{h_{n\nu}^2 a^2} \right] \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 a^2} J_n^2(h_{n\nu} a) \right\} + \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi \frac{1}{2} l \frac{n}{h_{n\nu}^2} J_n^2(h_{n\nu} a) + \\
 &+ C_n^2 \pi \frac{1}{2} l \frac{1}{2} a^2 \left[ \left( 1 - \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 a^2} \right) J_n^2(h_{n\nu} a) \right]
 \end{aligned} \tag{20.6.46}$$

ossia:

$$\begin{aligned}
 \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r &= \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi \frac{1}{2} l \frac{1}{2} a^2 \left\{ \left[ 1 - \frac{n(n+2)}{h_{n\nu}^2 a^2} \right] + \frac{2}{a^2} \frac{n}{h_{n\nu}^2} \right\} J_n^2(h_{n\nu} a) + \\
 &+ C_n^2 \pi \frac{1}{2} l \frac{1}{2} a^2 \left( 1 - \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 a^2} \right) J_n^2(h_{n\nu} a) = \\
 &= C_n^2 \pi \frac{1}{2} l \frac{1}{2} a^2 \left\{ \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} \left[ 1 - \frac{n(n+2)}{h_{n\nu}^2 a^2} + \frac{2}{a^2} \frac{n}{h_{n\nu}^2} \right] + \left( 1 - \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 a^2} \right) \right\} J_n^2(h_{n\nu} a) = \\
 &= C_n^2 \pi \frac{1}{2} l \frac{1}{2 h_{n\nu}^2} a^2 \left\{ \left( \frac{r^2 \pi^2}{l^2} + h_{n\nu}^2 \right) \left( 1 - \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 a^2} \right) \right\} J_n^2(h_{n\nu} a)
 \end{aligned} \tag{20.6.47}$$

Per il calcolo dell'integrale di superficie, si ha:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (\vec{H} \cdot \vec{H}^*)_{(z=0)} \rho d\rho d\phi + \int_0^{2\pi} \int_0^a (\vec{H} \cdot \vec{H}^*)_{(z=l)} \rho d\rho d\phi + \\
 &+ \int_0^{2\pi} \int_0^l (\vec{H} \cdot \vec{H}^*)_{(\rho=a)} a d\phi dz
 \end{aligned} \tag{20.6.48}$$

Sostituendo l'espressione (20.6.38) nella (20.6.48), si ha:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r &= 2 \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a J_n'^2(h_{n\nu} \rho) \cos^2 n\phi \rho d\rho d\phi + \\
 &+ 2 \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 \rho^2} J_n^2(h_{n\nu} \rho) \sin^2 n\phi \rho d\rho d\phi + \\
 &+ \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \int_0^{2\pi} \int_0^l J_n'^2(x'_{n\nu}) \cos^2 n\phi \cos^2 \frac{r\pi z}{l} a d\phi dz + \\
 &+ \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \int_0^{2\pi} \int_0^l \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 a^2} J_n^2(x'_{n\nu}) \sin^2 n\phi \cos^2 \frac{r\pi z}{l} a d\phi dz + \\
 &+ C_n^2 \int_0^{2\pi} \int_0^l J_n^2(x'_{n\nu}) \cos^2 n\phi \sin^2 \frac{r\pi z}{l} a d\phi dz
 \end{aligned} \tag{20.6.49}$$

Per la (20.5.9) e la (20.6.4), tenendo conto che  $J'_n(x'_{n\nu})=0$ , la (20.6.45) si scrive:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r &= 2 \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi \int_0^a J_n'^2(h_{n\nu}\rho) \rho d\rho + \\ &+ 2 \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi \int_0^a \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 \rho^2} J_n^2(h_{n\nu}\rho) \rho d\rho + \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^4} \frac{n^2}{a^2} C_n^2 \pi \frac{1}{2} l J_n^2(x'_{n\nu}) a + C_n^2 \pi \frac{1}{2} l J_n^2(x'_{n\nu}) a \end{aligned} \quad (20.6.50)$$

ossia:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r &= 2 \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi \int_0^a \left[ J_n'^2(h_{n\nu}\rho) + \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 \rho^2} J_n^2(h_{n\nu}\rho) \right] \rho d\rho + \\ &+ \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^4} \frac{n^2}{a^2} C_n^2 \pi \frac{1}{2} l J_n^2(x'_{n\nu}) a + C_n^2 \pi \frac{1}{2} l J_n^2(x'_{n\nu}) a \end{aligned} \quad (20.6.51)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r &= 2 \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi \frac{1}{2} a^2 \left\{ J_{n+1}'^2(h_{n\nu}a) + \left[ 1 - \frac{(n+1)^2}{h_{n\nu}^2 a^2} \right] J_{n+1}^2(h_{n\nu}a) \right\} + \\ &+ \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^4} \frac{n^2}{a^2} C_n^2 \pi \frac{1}{2} l J_n^2(x'_{n\nu}) a + 2 \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi \frac{n}{h_{n\nu}^2} J_n^2(h_{n\nu}a) + C_n^2 \pi \frac{1}{2} l J_n^2(x'_{n\nu}) a \end{aligned} \quad (20.6.52)$$

che per la (20.6.44) e per la (20.6.45) diventa:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r &= 2 \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi \frac{1}{2} a^2 \left\{ \left( 1 - \frac{n(n+1)}{h_{n\nu}^2 a^2} \right)^2 J_n^2(h_{n\nu}a) + \right. \\ &+ \left. \left[ 1 - \frac{(n+1)^2}{h_{n\nu}^2 a^2} \right] \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 a^2} J_n^2(h_{n\nu}a) + \frac{2}{a^2} \frac{n}{h_{n\nu}^2} J_n^2(h_{n\nu}a) \right\} + \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^4} \frac{n^2}{a^2} C_n^2 \pi \frac{1}{2} l J_n^2(x'_{n\nu}) a + \\ &+ C_n^2 \pi \frac{1}{2} l J_n^2(x'_{n\nu}) a \end{aligned} \quad (20.6.53)$$

che si può scrivere:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r &= \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} C_n^2 \pi a^2 \left[ 1 - \frac{n(n+2)}{h_{n\nu}^2 a^2} + \frac{2}{a^2} \frac{n}{h_{n\nu}^2} \right] J_n^2(h_{n\nu}a) + \\ &+ \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^4} \frac{n^2}{a^2} C_n^2 \pi \frac{1}{2} l J_n^2(x'_{n\nu}) a + C_n^2 \pi \frac{1}{2} l J_n^2(x'_{n\nu}) a \end{aligned} \quad (20.6.54)$$

$$\int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r = C_n^2 \pi \left\{ \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^2} a^2 \left[ 1 - \frac{n(n+2)}{h_{n\nu}^2 a^2} + \frac{2}{a^2} \frac{n}{h_{n\nu}^2} \right] + \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2}{h_{n\nu}^4} \frac{n^2}{a^2} a \frac{1}{2} l + \frac{1}{2} l a \right\} J_n^2(x'_{n\nu}) \quad (20.6.55)$$

ossia:

$$\int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r = C_n^2 \pi \left\{ \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2 a^2}{h_{n\nu}^2} - \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2 n^2 a^2}{h_{n\nu}^4 a^2} + \frac{r^2}{l^2} \frac{\pi^2 n^2}{h_{n\nu}^4 a^2} \frac{1}{2} a l + \frac{1}{2} a l \right\} J_n^2(x'_{n\nu}) \quad (20.6.56)$$

Mettendo in evidenza la quantità  $\frac{al}{2h_{n\nu}^2}$ , si ha:

$$\int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r = C_n^2 \pi \frac{al}{2h_{n\nu}^2} \left\{ 2 \frac{r^2 \pi^2 a}{l^3} - 2 \frac{r^2 \pi^2 n^2}{h_{n\nu}^2 l^3 a} + \frac{r^2 \pi^2 n^2}{l^2 a^2 h_{n\nu}^2} + h_{n\nu}^2 \right\} J_n^2(x'_{n\nu}) \quad (20.6.57)$$

ossia:

$$\int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r = C_n^2 \pi \frac{al}{2h_{n\nu}^2} \left\{ h_{n\nu}^2 + 2 \frac{r^2 \pi^2 a}{l^3} + \frac{r^2 \pi^2 n^2}{h_{n\nu}^2 al^2} \left( \frac{1}{a} - \frac{2}{l} \right) \right\} J_n^2(x'_{n\nu}) \quad (20.6.58)$$

Pertanto il fattore  $K$  é:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\frac{1}{V} \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r}{\frac{1}{\Sigma_p} \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d\Sigma_p} = \\ &= \frac{\frac{1}{\pi a^2 l} C_n^2 \pi \frac{1}{2} l \frac{1}{2h_{n\nu}^2} a^2 \left\{ \left( \frac{r^2 \pi^2}{l^2} + h_{n\nu}^2 \right) \left( 1 - \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 a^2} \right) \right\}}{\frac{1}{2\pi a^2 + 2\pi al} C_n^2 \pi \frac{al}{2h_{n\nu}^2} \left\{ h_{n\nu}^2 + 2 \frac{r^2 \pi^2 a}{l^3} + \frac{r^2 \pi^2 n^2}{h_{n\nu}^2 al^2} \left( \frac{1}{a} - \frac{2}{l} \right) \right\}} \end{aligned} \quad (20.6.59)$$

Pertanto il fattore di qualità  $Q_0$  é:

$$Q_0 = 2 \frac{\mu}{\mu_p} \frac{1}{\delta_p} \frac{C_n^2 \pi \frac{1}{2} l \frac{1}{2h_{n\nu}^2} a^2 \left\{ \left( \frac{r^2 \pi^2}{l^2} + h_{n\nu}^2 \right) \left( 1 - \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 a^2} \right) \right\}}{C_n^2 \pi \frac{al}{2h_{n\nu}^2} \left\{ h_{n\nu}^2 + 2 \frac{r^2 \pi^2 a}{l^3} + \frac{r^2 \pi^2 n^2}{h_{n\nu}^2 al^2} \left( \frac{1}{a} - \frac{2}{l} \right) \right\}} \quad (20.6.60)$$

ossia:

$$Q_0 = 2 \frac{\mu}{\mu_p} \frac{1}{\delta_p} \frac{\frac{1}{2} a \left\{ \left( \frac{r^2 \pi^2}{l^2} + h_{n\nu}^2 \right) \left( 1 - \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 a^2} \right) \right\}}{\left\{ h_{n\nu}^2 + 2 \frac{r^2 \pi^2 a}{l^3} + \frac{r^2 \pi^2 n^2}{h_{n\nu}^2 al^2} \left( \frac{1}{a} - \frac{2}{l} \right) \right\}} \quad (20.6.61)$$

$$Q_0 = 2\mu\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\sigma\nu}{\mu_p}} \frac{\frac{1}{2} a \left\{ \left( \frac{r^2 \pi^2}{l^2} + h_{n\nu}^2 \right) \left( 1 - \frac{n^2}{h_{n\nu}^2 a^2} \right) \right\}}{\left\{ h_{n\nu}^2 + 2 \frac{r^2 \pi^2 a}{l^3} + \frac{r^2 \pi^2 n^2}{h_{n\nu}^2 al^2} \left( \frac{1}{a} - \frac{2}{l} \right) \right\}} \quad (20.6.62)$$



**20.7 - Determinazione delle espressioni del coefficiente di qualità  $Q_0$  di cavitá risonanti coassiali.**

Il tipo piú comune di risuonatore a cavitá é un tratto di cavo coassiale chiuso alle estremitá, che oscilla nel modo principale  $TEM$ .

Scriviamo i campi relativi ad una cavitá risonante coassiale eccitata nel modo  $TEM$  dati dalle formule (20.1.31):

$$\begin{cases} E_\rho = iC \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \frac{1}{\rho} \sin \frac{r\pi}{l} z \\ H_\phi = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} C \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \frac{1}{\rho} \cos \frac{r\pi}{l} z \end{cases} \quad (20.7.1)$$

Si ha:

$$\vec{H} \cdot \vec{H}^* = \frac{\epsilon}{\mu} C^2 \frac{V_0^2}{\left(\ln \frac{a}{b}\right)^2} \frac{1}{\rho^2} \cos^2 \frac{r\pi}{l} z \quad (20.7.2)$$

$$\begin{aligned} \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r &= \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* \rho d\rho d\phi dz = \frac{\epsilon}{\mu} C^2 \frac{V_0^2}{\left(\ln \frac{a}{b}\right)^2} \int_V \frac{1}{\rho} \cos^2 \frac{r\pi}{l} z d\rho d\phi dz = \\ &= \frac{\epsilon}{\mu} C^2 \frac{V_0^2}{\left(\ln \frac{a}{b}\right)^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho \int_0^l \cos^2 \frac{r\pi}{l} z dz = \frac{\epsilon}{\mu} C^2 \frac{V_0^2}{\left(\ln \frac{a}{b}\right)^2} 2\pi \frac{1}{2} l \ln \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (20.7.3)$$

Per il calcolo dell'integrale di superficie, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r &= \int_0^{2\pi} \int_a^b \left(\vec{H} \cdot \vec{H}^*\right)_{(z=0)} \rho d\rho d\phi + \int_0^{2\pi} \int_a^b \left(\vec{H} \cdot \vec{H}^*\right)_{(z=l)} \rho d\rho d\phi + \\ &+ \int_0^{2\pi} \int_0^l \left(\vec{H} \cdot \vec{H}^*\right)_{(\rho=a)} a d\phi dz + \int_0^{2\pi} \int_0^l \left(\vec{H} \cdot \vec{H}^*\right)_{(\rho=b)} b d\phi dz \end{aligned} \quad (20.7.4)$$

Sostituendo l'espressione (20.7.2) nella (20.7.4), si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r &= \frac{\epsilon}{\mu} C^2 \frac{V_0^2}{\left(\ln \frac{a}{b}\right)^2} \left\{ 2 \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{\rho^2} \rho d\rho d\phi + \right. \\ &\left. + \int_0^{2\pi} \int_0^l \frac{1}{a^2} \cos^2 \frac{r\pi}{l} z a d\phi dz + \int_0^{2\pi} \int_0^l \frac{1}{b^2} \cos^2 \frac{r\pi}{l} z b d\phi dz \right\} \end{aligned} \quad (20.7.5)$$

$$\int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^2r = \frac{\epsilon}{\mu} C^2 \frac{V_0^2}{\left(\ln \frac{a}{b}\right)^2} \left( 4\pi \ln \frac{b}{a} + 2\pi \frac{1}{2} l \frac{1}{a} + 2\pi \frac{1}{2} l \frac{1}{b} \right) \quad (20.7.6)$$

Pertanto il fattore  $K$  é:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{\frac{1}{V} \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* d^3r}{\frac{1}{\Sigma_p} \int_{\Sigma_p} \vec{H} \cdot \vec{H}^* d\Sigma_p} = \\
 &= \frac{\frac{1}{\pi l(b^2 - a^2)} \frac{\epsilon}{\mu} C^2 \frac{V_0^2}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^2} 2\pi \frac{1}{2} l \ln \frac{b}{a}}{\frac{1}{(2\pi(b^2 - a^2) + 2\pi l(b + a))} \frac{\epsilon}{\mu} C^2 \frac{V_0^2}{\left(\ln \frac{a}{b}\right)^2} \left(4\pi \ln \frac{b}{a} + 2\pi \frac{1}{2} l \frac{1}{a} + 2\pi \frac{1}{2} l \frac{1}{b}\right)} \quad (20.7.7)
 \end{aligned}$$

Pertanto il fattore di qualità  $Q_0$  é:

$$Q_0 = 2\mu\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\sigma\nu}{\mu_p}} \frac{\frac{1}{2} l \ln \frac{b}{a}}{\left(2 \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{2} l \frac{1}{a} + \frac{1}{2} l \frac{1}{b}\right)} \quad (20.7.8)$$

Dividendo per  $\frac{1}{2}l$  numeratore e denominatore, si ha:

$$Q_0 = 2\mu\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\sigma\nu}{\mu_p}} \frac{\ln \frac{b}{a}}{\left(4 \frac{1}{l} \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \quad (20.7.9)$$

Moltiplicando per  $b$  numeratore e denominatore, si ha, in definitiva:

$$\boxed{Q_0 = 2\mu\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\sigma\nu}{\mu_p}} \frac{b \ln \frac{b}{a}}{\left(1 + \frac{b}{a} + 4 \frac{b}{l} \ln \frac{b}{a}\right)}} \quad (20.7.10)$$

Risulta:

$$\frac{d}{d\left(\frac{b}{a}\right)} \left[ \frac{\ln \frac{b}{a}}{\left(1 + \frac{b}{a} + 4 \frac{b}{l} \ln \frac{b}{a}\right)} \right] = \frac{\frac{a}{b} \left(1 + \frac{b}{a} + 4 \frac{b}{l} \ln \frac{b}{a}\right) - \left(1 + 4 \frac{a}{l}\right) \ln \frac{b}{a}}{\left(1 + \frac{b}{a} + 4 \frac{b}{l} \ln \frac{b}{a}\right)^2} \quad (20.7.11)$$

che si annulla quando:

$$1 + \frac{a}{b} - \ln \frac{b}{a} = 0 \quad (20.7.12)$$

L'equazione (20.7.12) afferma che la funzione  $f\left(\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{\ln \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a} + 4\frac{b}{l} \ln \frac{b}{a}}\right)$  ha un estremo che é indipendente dal rapporto  $\frac{b}{l}$ .

Tale estremo é un massimo, come si deduce dal grafico seguente, in corrispondenza di  $\frac{b}{a} \simeq 3.59$ . Questo valore é in perfetto accordo con il risultato che abbiamo ottenuto nel caso dell'attenuazione di un cavo coassiale eccitato nel modo *TEM*; infatti in tal caso, in corrispondenza di tale valore il coefficiente  $\alpha$  risulta minimo.

Il valore di  $Q_{0(max)}$  si ottiene sostituendo nella (20.7.10) l'espressione di  $\ln \frac{b}{a}$  ottenuta dalla (20.7.12); in tal caso si ha:

$$Q_{0(max)} = 2\mu\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\sigma\nu}{\mu_p}} \frac{b \left(1 + \frac{a}{b}\right)}{\left(1 + \frac{b}{a}\right) + 4\frac{b}{l} \left(1 + \frac{a}{b}\right)} \quad (20.7.13)$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per  $\frac{a}{b}$ , si ha:

$$Q_{0(max)} = 2\mu\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\sigma\nu}{\mu_p}} \frac{a \left(1 + \frac{a}{b}\right)}{\left(1 + \frac{a}{b}\right) + 4\frac{a}{l} \left(1 + \frac{a}{b}\right)} = 2\mu\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\sigma\nu}{\mu_p}} \frac{a}{\left(1 + 4\frac{a}{l}\right)} \quad (20.7.14)$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per  $\frac{b}{a}$  si ha, infine:

$$Q_{0(max)} = 2\mu\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\sigma\nu}{\mu_p}} \frac{b}{\left(\frac{b}{a} + 4\frac{b}{l}\right)} = 2\mu\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\sigma\nu}{\mu_p}} \frac{b}{\left(3.59 + 4\frac{b}{l}\right)} \quad (20.7.15)$$

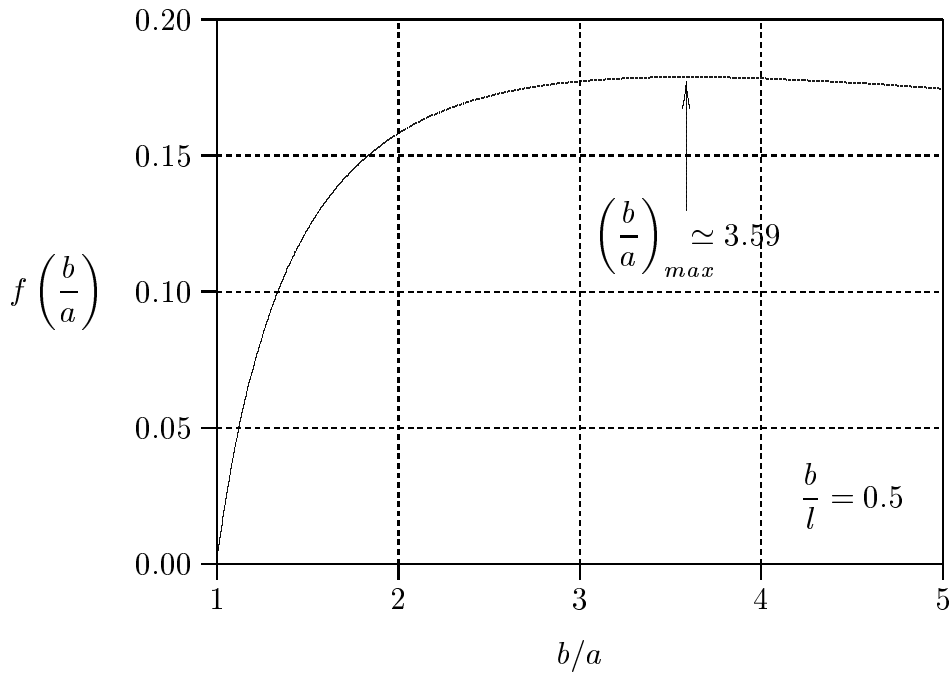


fig.20.7-1

### 20.8 - Carte dei modi

Per confrontare il fattore di qualità di modi diversi di una data forma di cavità si utilizza il fattore di forma  $F$  così definito:

$$F = Q_0 \frac{\delta_p}{\lambda} \quad (20.8.1)$$

essendo  $\lambda$  la lunghezza d'onda di risonanza del modo considerato.

Esso é indipendente dalla conducibilità delle pareti e dipende soltanto dalla forma delle cavità e dal modo di oscillazione e varia da circa 0.1 a 1.

#### Cavità cilindriche circolari eccitate nel modo $TM$

Per una cavità cilindrica circolare eccitata nel modo  $TM$ , la frequenza di risonanza, data dalla (20.1.15) é:

$$\nu = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{x_{n\nu}^2}{a^2} + \frac{r^2 \pi^2}{l^2}} \quad (20.8.2)$$

la cui lunghezza d'onda é:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{x_{n\nu}^2}{a^2} + \frac{r^2 \pi^2}{l^2}}} \quad (20.8.3)$$

Pertanto il fattore di forma  $F$  si scrive, dalla (20.6.35):

$$F = Q_0 \frac{\delta_p}{\lambda} = \frac{\mu}{\mu_p} \frac{1}{\left\{ \frac{2}{l} + \frac{1}{a} \right\}} \frac{\sqrt{\frac{x_{n\nu}^2}{a^2} + \frac{r^2 \pi^2}{l^2}}}{2\pi} \quad (20.8.4)$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per  $a$ , si ottiene:

$$F = Q_0 \frac{\delta_p}{\lambda} = \frac{\mu}{\mu_p} \frac{1}{\left\{ \frac{2a}{l} + 1 \right\}} \frac{\sqrt{x_{n\nu}^2 + \frac{r^2 \pi^2 a^2}{l^2}}}{2\pi} \quad \text{per } r \neq 0 \quad (20.8.5)$$

Per  $r = 0$ , dalla (20.6.36), si ha:

$$F = Q_0 \frac{\delta_p}{\lambda} = \frac{\mu}{\mu_p} \frac{1}{\left\{ \frac{1}{l} + \frac{1}{a} \right\}} \frac{\sqrt{\frac{x_{n\nu}^2}{a^2}}}{2\pi} \quad (20.8.6)$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per  $2a$ , si ottiene:

$$F = Q_0 \frac{\delta_p}{\lambda} = \frac{\mu}{\mu_p} \frac{1}{\left\{ \frac{2a}{l} + 2 \right\}} \frac{\sqrt{x_{n\nu}^2}}{\pi} \quad \text{per } r = 0 \quad (20.8.7)$$

dalle quali si evince che il fattore di forma dipende dal rapporto  $a/l$

Riportiamo in tabella i valori di  $x_{n\nu}$  e di  $x'_{n\nu}$  per ciascun modo  $TM$  e  $TE$  rispettivamente.

<i>Modi TM</i>		<i>Modi TE</i>	
$n, \nu, r$	$x_{n\nu r}$	$n, \nu, r$	$x'_{n\nu r}$
0 1 $r$	2.404 8	1 1 $r$	1.841 2
1 1 $r$	3.831 7	2 1 $r$	3.054 2
2 1 $r$	5.135 6	0 1 $r$	3.831 7
0 2 $r$	5.520 1	3 1 $r$	4.201 2
3 1 $r$	6.380 2	4 1 $r$	5.317 5
1 2 $r$	7.015 6	1 2 $r$	5.331 4
4 1 $r$	7.588 3	5 1 $r$	6.415 6
2 2 $r$	8.417 2	2 2 $r$	6.706 1
0 3 $r$	8.653 7	0 2 $r$	7.015 6
5 1 $r$	8.771 4	6 1 $r$	7.501 3

**Fattore di forma  $F = Q_0 \delta_p / \lambda$  in funzione di  $2a/l$   
per una cavità cilindrica di sezione circolare.  
Modi  $TM$**

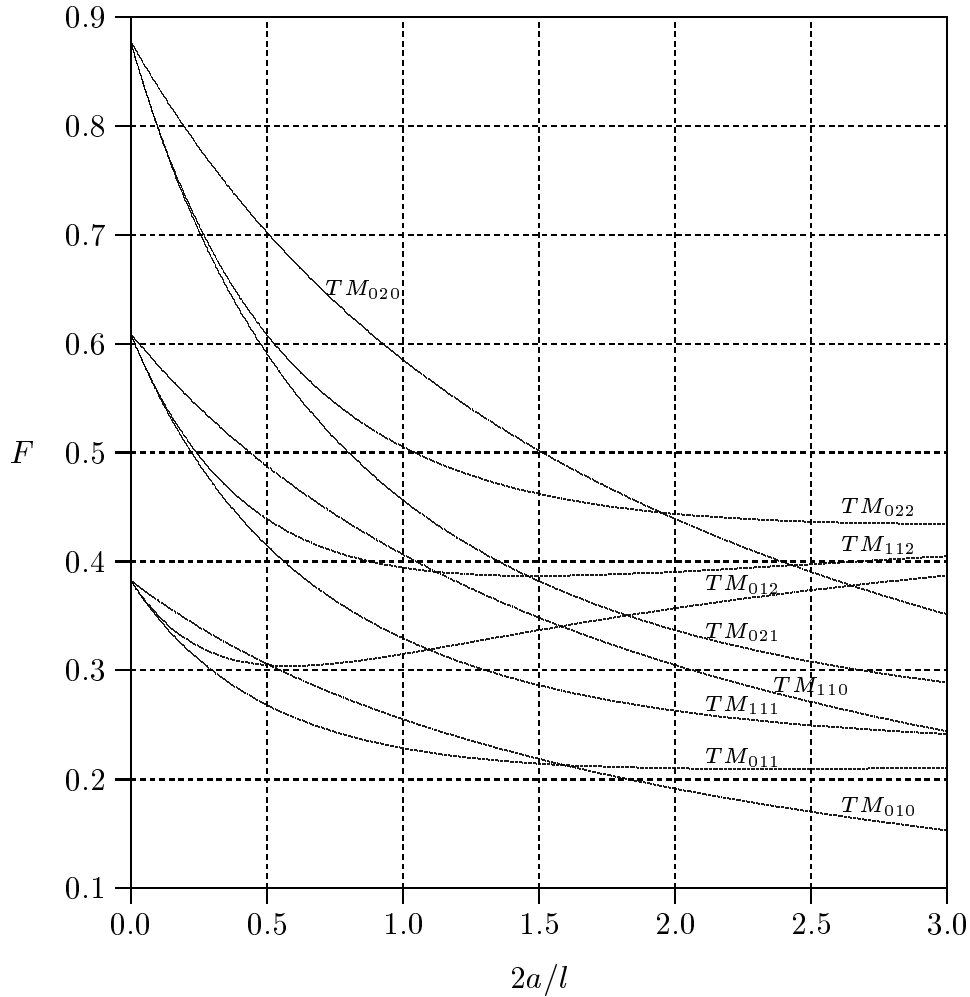


fig.20.8-1

**Cavità cilindriche circolari eccitate nel modo  $TE$**

Per una cavità cilindrica circolare eccitata nel modo  $TE$ , la frequenza di risonanza, data dalla (20.1.15) é:

$$\nu = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{x_{n\nu}^2}{a^2} + \frac{r^2 \pi^2}{l^2}} \quad (20.8.8)$$

la cui lunghezza d'onda é:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{x_{n\nu}^2}{a^2} + \frac{r^2 \pi^2}{l^2}}} \quad (20.8.9)$$

Pertanto il fattore di forma  $F$  si scrive, dalla (20.6.62):

$$F = Q_0 \frac{\delta_p}{\lambda} = \frac{\mu}{\mu_p} \frac{\frac{1}{2} a \left\{ \left( \frac{x'_{n\nu}}{a^2} + \frac{r^2 \pi^2}{l^2} \right)^{(3/2)} \left( 1 - \frac{n^2}{x'_{n\nu}} \right) \right\}}{\pi \left\{ \frac{x'_{n\nu}}{a^2} + 2 \frac{r^2 \pi^2 a}{l^3} + \frac{r^2 \pi^2 n^2}{x'_{n\nu} l^2} \left( 1 - \frac{2a}{l} \right) \right\}} \quad (20.8.10)$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per  $a^2$ , si ha:

$$F = Q_0 \frac{\delta_p}{\lambda} = \frac{\mu}{\mu_p} \frac{\frac{1}{2} \left\{ \left( x'_{n\nu} + \frac{r^2 \pi^2 a^2}{l^2} \right)^{(3/2)} \left( 1 - \frac{n^2}{x'_{n\nu}} \right) \right\}}{\pi \left\{ x'_{n\nu} + 2 \frac{r^2 \pi^2 a^3}{l^3} + \frac{r^2 \pi^2 n^2 a^2}{x'_{n\nu} l^2} \left( 1 - \frac{2a}{l} \right) \right\}} \quad (20.8.11)$$

e, ancora:

$$F = Q_0 \frac{\delta_p}{\lambda} = \frac{\mu}{\mu_p} \frac{\left\{ \left[ x'_{n\nu} + \frac{r^2 \pi^2}{4} \left( \frac{2a}{l} \right)^2 \right]^{(3/2)} \left( 1 - \frac{n^2}{x'_{n\nu}} \right) \right\}}{2\pi \left\{ x'_{n\nu} + \frac{r^2 \pi^2}{4} \left( \frac{2a}{l} \right)^3 + \frac{r^2 \pi^2 n^2}{x'_{n\nu} 4} \left( \frac{2a}{l} \right)^2 \left( 1 - \frac{2a}{l} \right) \right\}} \quad (20.8.12)$$

dalla quale si evince che il fattore di forma dipende dal rapporto  $a/l$

**Fattore di forma  $F = Q_0 \delta_p / \lambda$  in funzione di  $2a/l$   
per una cavità cilindrica di sezione circolare.**

**Modi  $TE$**

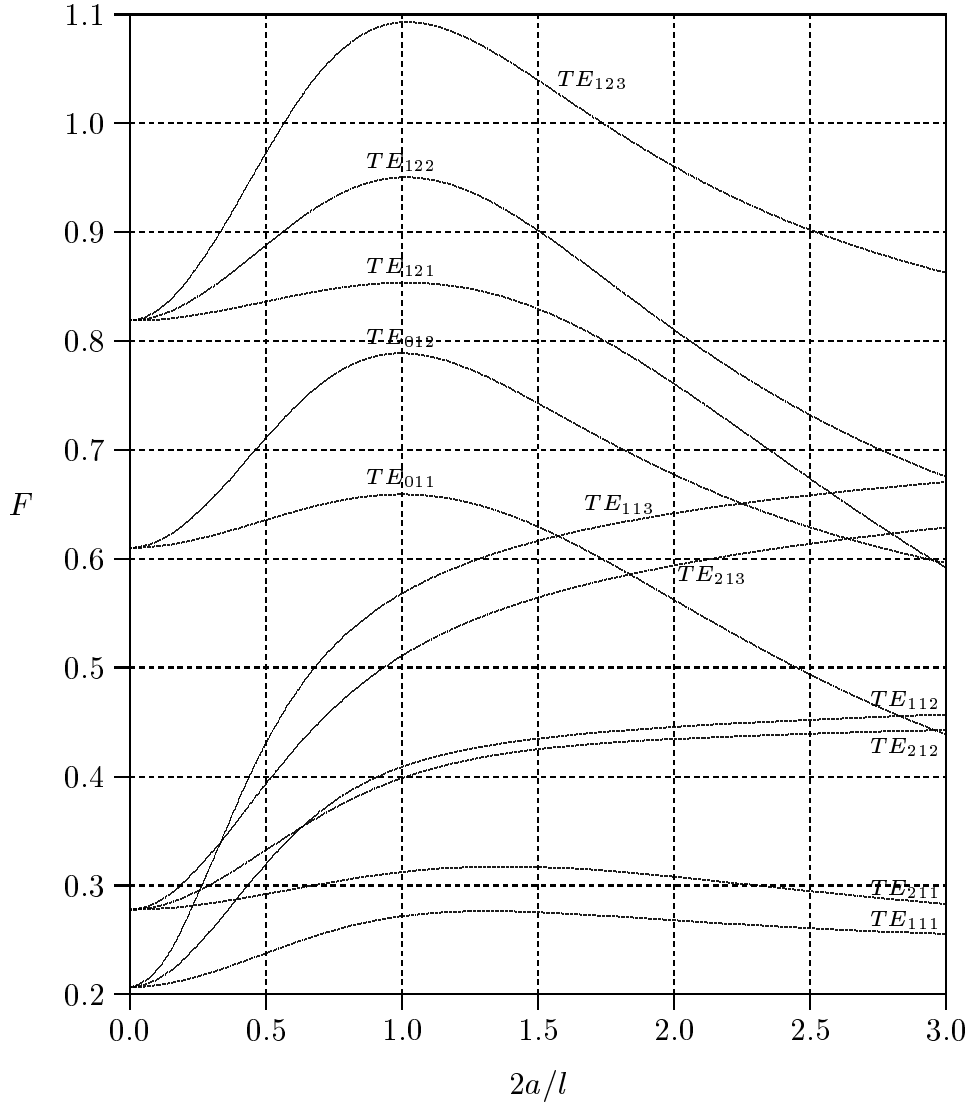


fig.20.8-2



## 20.9 - Calcolo analitico del numero dei modi di una cavità rettangolare

La frequenza di risonanza di una cavità rettangolare é, come sappiamo:

$$\nu_r = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2 + \left(\frac{r}{l}\right)^2} \quad (20.9.1)$$

con  $p, q$  ed  $r$  numeri interi positivi o non tutti nulli.

Fissata una frequenza di risonanza della cavità, esiste una (o piú) terna ordinata  $(p, q, r)$  che soddisfa all'equazione (20.9.1) e che individua il **modo** (i **modi**) del campo elettromagnetico all'interno della cavità.

Risulta, quindi, chiaro che per una frequenza di risonanza minore o maggiore di una prefissata frequenza anch'essa di risonanza esisteranno terne  $(p, q, r)$  che soddisferanno sempre all'equazione (20.9.1). Il problema che desideriamo studiare é quello di determinare il numero delle possibili terne o **modi** che determinano frequenze di risonanza inferiori ad una frequenza di risonanza già prefissata. Ossia determinare il numero delle terne ordinate  $(p, q, r)$  o **modi** che soddisfano alla disequazione:

$$\nu_r \geq \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2 + \left(\frac{r}{l}\right)^2} \quad (20.9.2)$$

essendo  $\nu_r$  la frequenza di risonanza prefissata che deve, quindi, essere considerata come termine noto.

L'equazione (20.9.2) si può scrivere:

$$\nu_r \geq \sqrt{\left(\frac{p}{\frac{2a}{c}}\right)^2 + \left(\frac{q}{\frac{2b}{c}}\right)^2 + \left(\frac{r}{\frac{2l}{c}}\right)^2} \quad (20.9.3)$$

Elevando al quadrato:

$$\nu_r^2 \geq \left(\frac{p}{\frac{2a}{c}}\right)^2 + \left(\frac{q}{\frac{2b}{c}}\right)^2 + \left(\frac{r}{\frac{2l}{c}}\right)^2 \quad (20.9.4)$$

Dividendo ambo i membri per  $\nu_r^2$ , si ha:

$$1 \geq \left(\frac{p}{\frac{2a}{c}\nu_r}\right)^2 + \left(\frac{q}{\frac{2b}{c}\nu_r}\right)^2 + \left(\frac{r}{\frac{2l}{c}\nu_r}\right)^2 \quad (20.9.5)$$

Si ponga:

$$A = \frac{2a}{c}\nu_r, \quad B = \frac{2b}{c}\nu_r, \quad C = \frac{2l}{c}\nu_r \quad (20.9.6)$$

Quindi:

$$1 \geq \left(\frac{p}{A}\right)^2 + \left(\frac{q}{B}\right)^2 + \left(\frac{r}{C}\right)^2 \quad (20.9.7)$$

Prendendo il segno di eguaglianza, l'equazione (20.9.7) rappresenta un ellissoide nello spazio  $p, q, r$  e precisamente, poiché  $p, q, r$  possono assumere valori positivi, rappresenta una porzione (un ottante) di ellissoide nel semispazio  $p > 0, q > 0$  e  $r > 0$ .

In una trattazione rigorosa il numero totale di modi possibili che danno luogo a frequenze di risonanza inferiori o eguali a  $\nu_r$  si ottiene effettuando la sommatoria sui tre indici  $p, q$  e  $r$ .

Tuttavia se  $\nu_r$  prefissato è sufficientemente grande le frequenze di risonanza inferiori ad essa sono molto vicine fra di loro da potersi configurare un **continuo di modi**, come è chiaramente illustrato in figura 20.9-1.

In tal caso il numero di modi ai quali corrispondono frequenze inferiori alla frequenza  $\nu_r$  è dato da:

$$\mathcal{N} = \int_{V_{p,q,r}} dpdqdr \quad (20.9.8)$$

ossia dal volume dell'ellissoide nello spazio  $p, q, r$  limitato dalla condizione  $p > 0, q > 0$  e  $r > 0$ .

Il volume di un ellissoide è:

$$V_{ellissoide} = \frac{4}{3}\pi ABC \quad (20.9.9)$$

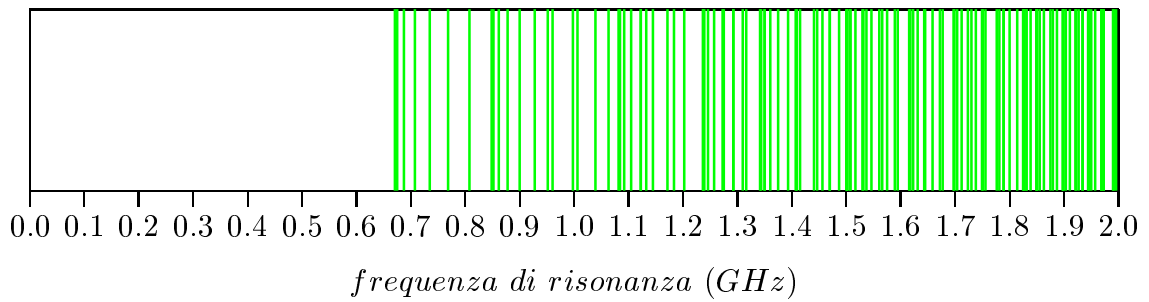
essendo  $A, B, C$  i semiassi lungo  $p, q, r$  rispettivamente.

Ne segue per la (20.9.6) e dividendo per 8 la (20.9.9):

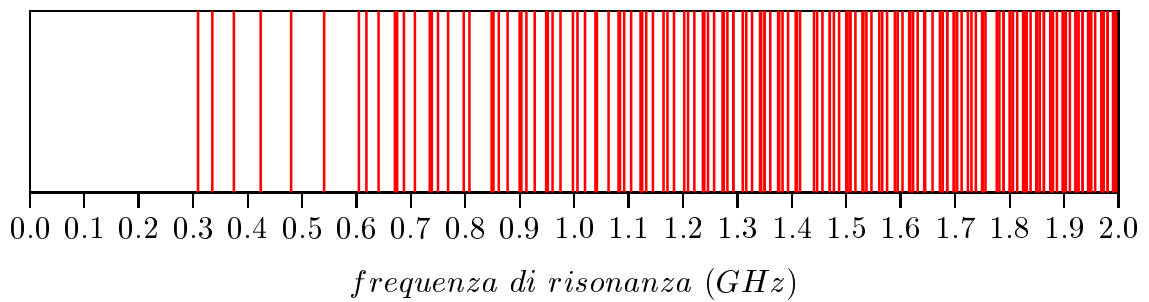
$$\mathcal{N} = \int_{V_{p,q,r}} dpdqdr = \frac{4}{3}\pi \frac{1}{c^3} abl\nu_r^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{\nu_r^3}{c^3} V \quad (20.9.10)$$

essendo  $V$  il volume della cavità risonante.

**Spettro dei modi in una cavità rettangolare:  $a = 0.5\text{ m}$ ,  $b = 0.25\text{ m}$ ,  $l = 2\text{ m}$**   
**Modi TM**



**Spettro dei modi in una cavità rettangolare:  $a = 0.5\text{ m}$ ,  $b = 0.25\text{ m}$ ,  $l = 2\text{ m}$**   
**Modi TE**



**Spettro dei modi in una cavità rettangolare:  $a = 0.5\text{ m}$ ,  $b = 0.25\text{ m}$ ,  $l = 2\text{ m}$**   
**Modi TM+TE**



fig.20.9-1

**20.10 - Cavità risonanti sferiche - Il sistema Terra-ionosfera come cavità risonante: risonanze di Schumann.**

Un esempio di cavità risonante non convenzionale é costituito dalla “cavità sferica” delimitata dalla superficie della Terra e dalla ionosfera. Sia la Terra che la ionosfera si comportano come conduttori di conducibilità finita. L’acqua di mare ha una conducibilità  $\sigma = 3 \div 5 \frac{\text{S}}{\text{m}}$  mentre la ionosfera ha una conducibilità variabile ma molto bassa.

Le pareti della cavità sono quindi ben lontane dalla situazione di conducibilità perfetta, specie la parte piú esterna (la ionosfera).

Ciononostante noi idealizzeremo la realtà fisica e considereremo come modello un sistema costituito da due sfere concentriche, perfettamente conduttrici di raggi  $a$  e  $b = a+h$ , dove  $a$  il raggio della Terra ( $a = 6400\text{Km}$ ) e  $h$  é l’altezza della ionosfera sopra il livello del mare ( $h = 100\text{Km}$ ).

Date le distanze in gioco ci aspettiamo che i modi risonanti risuonino a frequenza molto bassa.

Consideriamo i modi TM che hanno nella nostra geometria campi magnetici puramente tangenziali, questi campi presentano una componente radiale del campo elettrico e quindi come condizione al contorno dobbiamo imporre che la componente tangenziale del campo elettrico sia nulla per  $r = a$  e  $r = b$ .

Il problema generale delle risonanze in una geometria sferica é piuttosto complicato. Qui consideriamo solo i modi TM, assumendo inoltre che i campi siano indipendenti dall’angolo azimutale  $\phi$  che non é una limitazione importante.

Consideriamo l’equazione di Maxwell  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  espressa in coordinate sferiche

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 B_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta B_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} = 0 \quad (20.10.1)$$

Poiché  $B_r = 0$ , in quanto consideriamo modi TM, ed inoltre, per ipotesi il campo non dipende da  $\phi$ , si ha:

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta B_\theta) = 0 \quad (20.10.2)$$

che integrata dá

$$\sin \theta B_\theta = \text{costante} \quad (20.10.3)$$

La (20.10.3) non puó essere soddisfatta per ogni valore di  $\theta$  con valori finiti del campo, infatti per  $\theta = 0$   $B_\theta$  dovrebbe essere infinita, quindi  $B_\theta = 0$ .

Ne segue che l’unica componente di campo magnetico diversa da zero é  $B_\phi$ .

Consideriamo, adesso, l’equazione di Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

e la scriviamo in coordinate sferiche, ricordando che  $\vec{B} = B_\phi \hat{e}_\phi$  si ha:

$$\begin{aligned} \hat{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta E_\phi) - \frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} \right] + \hat{e}_\theta \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r E_\phi) \right] + \\ + \hat{e}_\phi \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] = -\frac{\partial B_\phi}{\partial t} \hat{e}_\phi \end{aligned} \quad (20.10.4)$$

Poiché abbiamo supposto la non dipendenza da  $\phi$  dei campi si ha ponendo uguale a zero le derivate rispetto a  $\phi$ :

$$\hat{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\phi) \right] + \hat{e}_\theta \left[ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) \right] + \hat{e}_\phi \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] = -\frac{\partial B_\phi}{\partial t} \hat{e}_\phi \quad (20.10.5)$$

Ne segue che:

$$\begin{cases} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\phi) = 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) = 0 \end{cases} \quad (20.10.6)$$

La (20.10.6) dá, come precedentemente visto,  $E_\phi = 0$  perché  $E_\phi$  divergerebbe per  $\theta = 0$ .

Dunque, dalle equazioni di Maxwell omogenee si deduce che i modi TM senza dipendenza da  $\phi$  hanno come uniche componenti non nulle  $E_r, E_\theta, B_\phi$ .

Scriviamo, ora, le equazioni di Maxwell, ammettendo una dipendenza temporale del tipo  $e^{-i\omega t}$ .

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad (20.10.7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} i\omega \vec{E} \quad (20.10.8)$$

Dalla (20.10.8) si ha:

$$\boxed{\vec{E} = i \frac{c^2}{\omega} \vec{\nabla} \times \vec{B}} \quad (20.10.9)$$

Sostituendo la (20.10.9) nella (20.10.7) si ha:

$$i \frac{c^2}{\omega} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = i\omega \vec{B}$$

cioé:

$$\boxed{\frac{\omega^2}{c^2} \vec{B} - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0} \quad (20.10.10)$$

Ma

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} - \nabla^2 \vec{B} = -\vec{\nabla}^2 \vec{B} \quad \text{in quanto } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

In coordinate sferiche si ha:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \vec{B} = & \left( \nabla^2 B_r - \frac{2B_r}{r^2} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} B_\theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} \right) \hat{e}_r + \\ & + \left( \nabla^2 B_\theta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} B_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} \right) \hat{e}_\theta + \\ & + \left( \nabla^2 B_\phi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial B_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} B_\phi + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{e}_\phi \end{aligned} \quad (20.10.11)$$

Nel nostro caso, ponendo  $B_r = B_\theta = 0$  e le derivate rispetto a  $\phi$  eguali a zero, si ha:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^2 \vec{B} &= \left( \nabla^2 B_\phi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} B_\phi \right) \hat{e}_\phi = \\ &= \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial B_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial B_\phi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} B_\phi \right] \hat{e}_\phi\end{aligned}\quad (20.10.12)$$

La (20.10.10) diventa:

$$\nabla^2 \vec{B} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{B} = 0 \quad (20.10.13)$$

la quale implica

$$\frac{\omega^2}{c^2} B_\phi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial B_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial B_\phi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} B_\phi = 0 \quad (20.10.14)$$

Tenendo conto che:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial B_\phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r B_\phi)$$

si ha:

$$\frac{\omega^2}{c^2} B_\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r B_\phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial B_\phi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} B_\phi = 0 \quad (20.10.15)$$

Moltiplichiamo la (20.10.15) per  $r$ , si ha:

$$\frac{\omega^2}{c^2} (r B_\phi) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r B_\phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial (r B_\phi)}{\partial \theta} \right] - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (r B_\phi) = 0 \quad (20.10.16)$$

Costruiamo una soluzione come prodotti

$$\boxed{B_\phi(r, \theta) = \frac{u(r)}{r} P(\theta)} \quad (20.10.17)$$

Sostituendo la (20.10.17) nella (20.10.16) si ha:

$$\frac{\omega^2}{c^2} u(r) P(\theta) + P(\theta) \frac{d^2}{dr^2} u(r) + \frac{u(r)}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right] - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u(r) P(\theta) = 0 \quad (20.10.18)$$

Dividendo la (20.10.18) per  $u(r)P(\theta)$  si ha:

$$\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{1}{u(r)} \frac{d^2}{dr^2} u(r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{1}{P(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right] - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} = 0 \quad (20.10.19)$$

Moltiplicando la (20.10.19) per  $r^2$  otteniamo:

$$\boxed{\frac{\omega^2}{c^2}r^2 + \frac{r^2}{u(r)}\frac{d^2}{dr^2}u(r) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{P(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right] - \frac{1}{\sin^2\theta} = 0} \quad (20.10.20)$$

che é equivalente a:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2}r^2 + \frac{r^2}{u(r)}\frac{d^2}{dr^2}u(r) &= h \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{P(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right] - \frac{1}{\sin^2\theta} &= -h \end{aligned}$$

che si può ancora scrivere

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dr^2}u(r) + \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{h}{r^2}\right]u(r) = 0 \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right] + \left[h - \frac{1}{\sin^2\theta}\right]P(\theta) = 0 \end{cases} \quad (20.10.21)$$

Una maniera equivalente di scrivere la prima delle (20.10.21) é quella di porre  $u(r) = rf(r)$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= f(r) + r\frac{df(r)}{dr} \\ \frac{d^2u}{dr^2} &= \frac{df(r)}{dr} + \frac{df(r)}{dr} + r\frac{d^2f(r)}{dr^2} \end{aligned}$$

Sostituendo si ha, dopo avere diviso per  $r$  la prima delle (20.10.21)

$$\begin{cases} \frac{d^2f(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df(r)}{dr} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{h}{r^2}\right]f(r) = 0 \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right] + \left[h - \frac{1}{\sin^2\theta}\right]P(\theta) = 0 \end{cases} \quad (20.10.22)$$

É chiaro che se si considera il sistema (20.10.22) la soluzione é:

$$\boxed{B_\phi(r, \theta) = f(r)P(\theta)} \quad (20.10.23)$$

Per risolvere il sistema (20.10.22) cominciamo col dire che la seconda equazione appartiene alla classe:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right] + \left[h - \frac{m}{\sin^2\theta}\right]P(\theta) = 0 \quad (20.10.24)$$

Il parametro  $h$  é una costante di separazione ed  $m$  é intero positivo o negativo (nel nostro caso 1).

Posto  $\eta = \cos \theta$  l'equazione diventa:

$$(1 - \eta^2) \frac{d^2 P(\eta)}{d\eta^2} - 2\eta \frac{dP(\eta)}{d\eta} + \left[ h - \frac{m}{1 - \eta^2} \right] P(\eta) = 0 \quad (20.10.25)$$

Questa é una equazione differenziale, avente tre singolaritá regolari nei punti  $\eta = -1, \eta = +1, \eta = \infty$ . Per  $m = 0$  essa si riduce alla equazione di Legendre.

Si puó dimostrare che soluzioni finite nei poli  $\eta = \pm 1$  si hanno se si sceglie  $h = l(l+1)$  dove  $l = 0, 1, 2, \dots$  e che esse sono i polinomi associati di Legendre definiti da:

$$P_l^m(\eta) = (1 - \eta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_l(\eta)}{d\eta^m} \quad m \leq l \quad (20.10.26)$$

dove  $P_l(\eta)$  sono i polinomi di Legendre:

$P_0(\cos \theta) = 1, P_1(\cos \theta) = \cos \theta, P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \dots$ , e per  $m = 1$  i polinomi associati sono:

$P_1^1(\cos \theta) = \sin \theta, P_2^1(\cos \theta) = 3 \cos \theta \sin \theta, P_2^2(\cos \theta) = 3 \sin^2 \theta$ .

Per ogni  $m > l$  risulta  $P_l^m(\cos \theta) = 0$ .

Trovato cos l'autovalore, esso deve essere uguale anche nella prima equazione delle (20.10.22) che, pertanto si scrive:

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df(r)}{dr} + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] f(r) = 0 \quad (20.10.27)$$

Essa ammette come soluzioni le funzioni sferiche di Bessel  $j_l(kr)$  e  $n_l(kr)$  con  $k = \frac{\omega}{c}$  cosí definite:

$$j_l(kr) = (-kr)^l \left( \frac{1}{kr} \frac{d}{dkr} \right)^l \left[ \frac{\sin(kr)}{kr} \right] \quad (20.10.28)$$

$$n_l(kr) = -(-kr)^l \left( \frac{1}{kr} \frac{d}{dkr} \right)^l \left[ \frac{\cos(kr)}{kr} \right] \quad (20.10.29)$$

Per i primi valori dell'indice  $l$  le formule esplicite (vedi pag.15-13) sono:

$$j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr}, \quad n_0(kr) = -\frac{\cos kr}{kr}$$

$$j_1(kr) = \frac{\sin kr}{(kr)^2} - \frac{\cos kr}{kr}, \quad n_1(kr) = -\frac{\cos kr}{(kr)^2} - \frac{\sin kr}{kr}$$

$$j_2(kr) = \left[ \frac{3}{(kr)^3} - \frac{1}{kr} \right] \sin kr - \frac{3 \cos kr}{(kr)^2}, \quad n_2(kr) = -\left[ \frac{3}{(kr)^3} - \frac{1}{kr} \right] \cos kr - \frac{3 \sin kr}{(kr)^2}$$



Cominciamo a calcolare il campo elettrico

$$E_r = \frac{ic^2}{\omega r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta B_\phi) \quad (20.10.30)$$

$$E_\theta = -\frac{ic^2}{\omega r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) \quad (20.10.31)$$

$$E_r = \frac{ic^2}{\omega r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin \theta f(r) P(\theta)] \quad (20.10.32)$$

$$E_\theta = -\frac{ic^2}{r\omega} \frac{\partial}{\partial r} [r f(r) P(\theta)] \quad (20.10.33)$$

Dobbiamo imporre che per  $r = a$  e  $r = b$  sia  $E_\theta = 0$  cioè deve essere:

$$\frac{d}{dr} [r f(r)] = 0 \quad \text{per } r = a \quad \text{e } r = b \quad (20.10.34)$$

Consideriamo  $l = 1$  ( $l = 0$  vuol dire spazio libero)

$$f(r) = A j_1(kr) + B n_1(kr) \quad (20.10.35)$$

Sostituendo le espressioni di  $j_1(kr)$  e  $n_1(kr)$  e moltiplicando per  $r$  si ha:

$$r f(r) = \frac{A}{k} \left[ \frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right] + \frac{B}{k} \left[ -\frac{\cos kr}{kr} - \sin kr \right] \quad (20.10.36)$$

$$\frac{d}{dr} [r f(r)] = \frac{A}{k} \left[ \frac{k^2 r \cos kr - k \sin kr}{k^2 r^2} + k \sin kr \right] + \frac{B}{k} \left[ \frac{k^2 r \sin kr + k \cos kr}{k^2 r^2} - k \cos kr \right] \quad (20.10.37)$$

$$\frac{A}{k} \left[ \frac{k^2 a \cos ka - k \sin ka}{k^2 a^2} + k \sin ka \right] + \frac{B}{k} \left[ \frac{k^2 a \sin ka + k \cos ka}{k^2 a^2} - k \cos ka \right] = 0$$

$$\frac{A}{k} \left[ \frac{k^2 b \cos kb - k \sin kb}{k^2 b^2} + k \sin kb \right] + \frac{B}{k} \left[ \frac{k^2 b \sin kb + k \cos kb}{k^2 b^2} - k \cos kb \right] = 0$$

$$(20.10.38)$$

che ammette soluzioni non banali per

$$\left[ \frac{ka \cos ka - \sin ka}{(ka)^2} + \sin ka \right] \left[ \frac{kb \sin kb + \cos kb}{(kb)^2} - \cos kb \right] -$$

$$- \left[ \frac{ka \sin ka + \cos ka}{(ka)^2} - \cos ka \right] \left[ \frac{kb \cos kb - \sin kb}{(kb)^2} + \sin kb \right] = 0$$

$$\left[ ka \cos ka - \sin ka(1 - k^2 a^2) \right] \left[ kb \sin kb + \cos kb(1 - k^2 b^2) \right] -$$

$$- \left[ ka \sin ka + \cos ka(1 - k^2 a^2) \right] \left[ kb \cos kb - \sin kb(1 - k^2 b^2) \right] = 0$$

$$\begin{aligned}
 & k^2 ab \sin kb \cos ka + ka(1 - k^2 b^2) \cos ka \cos kb - kb(1 - k^2 a^2) \sin ka \sin kb + \\
 & - (1 - k^2 a^2)(1 - k^2 b^2) \sin ka \cos kb - k^2 ab \sin ka \cos kb + \\
 & + ka(1 - k^2 b^2) \sin ka \sin kb - kb(1 - k^2 a^2) \cos ka \cos kb + \\
 & + (1 - k^2 a^2)(1 - k^2 b^2) \cos ka \sin kb = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ k^2 ab + (1 - k^2 a^2)(1 - k^2 b^2) \right] \cos ka \sin kb + \left[ ka(1 - k^2 b^2) - kb(1 - k^2 a^2) \right] \cos ka \cos kb - \\
 & \left[ kb(1 - k^2 a^2) - ka(1 - k^2 b^2) \right] \sin ka \sin kb - \left[ (1 - k^2 a^2)(1 - k^2 b^2) + k^2 ab \right] \sin ka \cos kb = 0
 \end{aligned}$$

$$\left[ k^2 ab + (1 - k^2 a^2)(1 - k^2 b^2) \right] \sin k(b-a) - \left[ kb(1 - k^2 a^2) - ka(1 - k^2 b^2) \right] \cos k(b-a) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \tan k(b-a) &= \frac{kb - k^3 a^2 b - ka + k^3 ab^2}{k^2 ab + (1 - k^2 a^2)(1 - k^2 b^2)} = \frac{k(b-a) + k^3 ab(b-a)}{k^2 ab + (1 - k^2 a^2)(1 - k^2 b^2)} = \\
 &= \frac{k(b-a) [1 + k^2 ab]}{k^2 ab + (1 - k^2 a^2)(1 - k^2 b^2)}
 \end{aligned} \tag{20.10.39}$$

$$\frac{\tan k(b-a)}{k(b-a)} = \frac{\left[ k^2 + \frac{1}{ab} \right]}{k^2 + \frac{1}{ab} (1 - k^2 a^2)(1 - k^2 b^2)} = \frac{\left[ k^2 + \frac{1}{ab} \right]}{k^2 + ab \left( k^2 - \frac{1}{a^2} \right) \left( k^2 - \frac{1}{b^2} \right)} \tag{20.10.40}$$

Questa é una equazione trascendente difficile da risolvere.

Si puó facilmente risolvere nella ipotesi che  $h \ll a$  dove  $h = b - a$ ; in questa ipotesi  $\tan k(b-a) \simeq kh$ , quindi:

$$1 = \frac{k^2 + \frac{1}{a^2 \left( 1 + \frac{h}{a} \right)}}{k^2 + a^2 \left( 1 + \frac{h}{a} \right) \left( k^2 - \frac{1}{a^2} \right) \left[ k^2 - \frac{1}{a^2 \left( 1 + \frac{h}{a} \right)^2} \right]} \tag{20.10.41}$$

trascurando  $\frac{h}{a}$  rispetto a 1 si ha:

$$1 = \frac{k^2 + \frac{1}{a^2}}{k^2 + a^2 \left( k^2 - \frac{1}{a^2} \right)^2} \tag{20.10.42}$$

$$a^2 \left( k^2 - \frac{1}{a^2} \right)^2 = \frac{1}{a^2} \implies k^4 - \frac{2}{a^2} k^2 + \frac{1}{a^4} = \frac{1}{a^4}$$

$$k^2 = \frac{2}{a^2} \implies \boxed{\omega_1 = \sqrt{2} \frac{c}{a}} \simeq 66.29 \quad (*)$$

$$\nu_1 = \frac{66.29}{2\pi} = 10.55 \text{ Hz} \quad a = 6400(\text{Km})$$

Si poteva arrivare allo stesso risultato tenendo presente che nell'equazione radiale i termini  $\frac{l(l+1)}{r^2}$  possono essere approssimati con il loro valore per  $r = a$  in quanto possiamo ritenere  $\frac{h}{a} \ll 1$ .

Allora la prima delle (20.10.21) si scrive:

$$\frac{d^2}{dr^2} u(r) + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{a^2} \right] u(r) = 0 \quad (20.10.43)$$

Posto  $q = \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{a^2} \right)^{1/2}$  le soluzioni sono

$$\begin{aligned} u(r) &= A \cos qr + B \sin qr \\ \frac{du(r)}{dr} &= -qA \sin qr + qB \cos qr \end{aligned} \quad (20.10.44)$$

Poiché, stavolta,  $B_\phi = \frac{u(r)}{r} P(\theta)$ , deve essere

$$\frac{du(r)}{dr} = 0 \quad \text{per } r = a \quad \text{e } r = b$$

cioé:

$$\begin{aligned} -qA \sin qa + qB \cos qa &= 0 \\ -qA \sin qb + qB \cos qb &= 0 \end{aligned}$$

vale a dire:

$$\begin{aligned} -\sin qa \cos qb + \cos qa \sin qb &= 0 \\ \sin q(b-a) &= 0 \\ qh &= r\pi \end{aligned}$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{a^2} = \frac{r^2 \pi^2}{h^2} \quad \text{con } r = 0, 1, 2, \dots$$

Prendiamo  $r = 0$ , si ha:

$$\omega^2 = \frac{c^2}{a^2} l(l+1)$$

Per  $l = 1$  segue:

$$\boxed{\omega = \sqrt{2} \frac{c}{a}} \quad (*)$$

Queste risonanze si chiamano **risonanze di Schumann**. Si tratta di frequenze molto basse. Con  $a = 6400\text{Km}$ , le prime cinque frequenze di risonanza sono:

$$\frac{\omega_l}{2\pi} = 10.6; 18.3; 25.8; 33.4; 40.9\text{Hz}.$$

Le risonanze di Schumann si manifestano come picchi nello spettro del rumore radio a bassissima frequenza che si propaga attorno alla Terra. I fulmini temporaleschi, che contengono un ampio spettro di frequenze, agiscono come sorgenti di campi elettrici radiali e le componenti con frequenze prossime alle risonanze di Schumann si propagano piú agevolmente perché corrispondono a modi normali della cavità Terra-ionosfera. Le prime osservazioni conclusive di questi picchi nello spettro di potenza del rumore furono eseguite nel 1960 (**M. Balse** e **C.A. Wagner** Nature 188, 638 (1960)), benché esistano indizi che **Nikola Tesla** possa averli osservati prima del 1900.

I risultati sperimentali mostrano che le frequenze dei picchi sono di 8, 14, 20, 26, 32, 37, 43... *Hertz*. Tali frequenze sono rappresentate abbastanza bene dalla formula  $5.8\sqrt{l(l+1)}$ . L'assenza di un accordo preciso non stupisce in quanto abbiamo supposto le pareti perfettamente conduttrici.

### Appendice al Cap. 20

**20A.1 - Elenco in ordine crescente delle frequenze dei modi in una cavità rettangolare:  $a = 0.5\text{ m}$ ,  $b = 0.25\text{ m}$ ,  $l = 2\text{ m}$**

<i>numero ordine</i>	<i>frequenza in GHz</i>	<i>modo</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>
1	0.30923	TE	1	0	1
2	0.33541	TE	1	0	2
3	0.375	TE	1	0	3
4	0.42426	TE	1	0	4
5	0.48023	TE	1	0	5
6	0.54083	TE	1	0	6
7	0.60467	TE	1	0	7
8	0.60467	TE	0	1	1
9	0.60467	TE	2	0	1
10	0.61847	TE	0	1	2
11	0.61847	TE	2	0	2
12	0.6408	TE	0	1	3
13	0.6408	TE	2	0	3
14	0.67082	TM	1	1	0
15	0.67082	TE	0	1	4
16	0.67082	TE	1	0	8
17	0.67082	TE	2	0	4
18	0.675	TM	1	1	1
19	0.675	TE	1	1	1
20	0.68739	TM	1	1	2
21	0.68739	TE	1	1	2
22	0.70755	TM	1	1	3
23	0.70755	TE	0	1	5
24	0.70755	TE	1	1	3
25	0.70755	TE	2	0	5
26	0.73485	TM	1	1	4
27	0.73485	TE	1	1	4
28	0.73866	TE	1	0	9
29	0.75	TE	0	1	6
30	0.75	TE	2	0	6
31	0.76852	TM	1	1	5
32	0.76852	TE	1	1	5
33	0.79726	TE	0	1	7
34	0.79726	TE	2	0	7
35	0.80777	TM	1	1	6
36	0.80777	TE	1	0	10
37	0.80777	TE	1	1	6
38	0.84853	TM	2	1	0

39	0.84853	<i>TE</i>	0	1	8
40	0.84853	<i>TE</i>	2	0	8
41	0.85184	<i>TM</i>	1	1	7
42	0.85184	<i>TM</i>	2	1	1
43	0.85184	<i>TE</i>	1	1	7
44	0.85184	<i>TE</i>	2	1	1
45	0.86168	<i>TM</i>	2	1	2
46	0.86168	<i>TE</i>	2	1	2
47	0.87785	<i>TE</i>	1	0	11
48	0.87785	<i>TM</i>	2	1	3
49	0.87785	<i>TE</i>	2	1	3
50	0.9	<i>TM</i>	1	1	8
51	0.9	<i>TM</i>	2	1	4
52	0.9	<i>TE</i>	1	1	8
53	0.9	<i>TE</i>	2	1	4
54	0.90312	<i>TE</i>	3	0	1
55	0.90312	<i>TE</i>	0	1	9
56	0.90312	<i>TE</i>	2	0	9
57	0.91241	<i>TE</i>	3	0	2
58	0.9277	<i>TE</i>	3	0	3
59	0.9277	<i>TM</i>	2	1	5
60	0.9277	<i>TE</i>	2	1	5
61	0.94868	<i>TE</i>	1	0	12
62	0.94868	<i>TE</i>	3	0	4
63	0.95164	<i>TM</i>	1	1	9
64	0.95164	<i>TE</i>	1	1	9
65	0.96047	<i>TM</i>	2	1	6
66	0.96047	<i>TE</i>	0	1	10
67	0.96047	<i>TE</i>	2	0	10
68	0.96047	<i>TE</i>	2	1	6
69	0.975	<i>TE</i>	3	0	5
70	0.99781	<i>TM</i>	2	1	7
71	0.99781	<i>TE</i>	2	1	7
72	1.0062	<i>TE</i>	3	0	6
73	1.0062	<i>TM</i>	1	1	10
74	1.0062	<i>TE</i>	1	1	10
75	1.0201	<i>TE</i>	0	1	11
76	1.0201	<i>TE</i>	1	0	13
77	1.0201	<i>TE</i>	2	0	11
78	1.0392	<i>TM</i>	2	1	8
79	1.0392	<i>TE</i>	2	1	8
80	1.0419	<i>TE</i>	3	0	7
81	1.0633	<i>TM</i>	1	1	11
82	1.0633	<i>TE</i>	1	1	11

83	1.0817	<i>TM</i>	3	1	0
84	1.0817	<i>TE</i>	0	1	12
85	1.0817	<i>TE</i>	2	0	12
86	1.0817	<i>TE</i>	3	0	8
87	1.0843	<i>TM</i>	3	1	1
88	1.0843	<i>TE</i>	3	1	1
89	1.0843	<i>TM</i>	2	1	9
90	1.0843	<i>TE</i>	2	1	9
91	1.092	<i>TM</i>	3	1	2
92	1.092	<i>TE</i>	1	0	14
93	1.092	<i>TE</i>	3	1	2
94	1.1048	<i>TM</i>	3	1	3
95	1.1048	<i>TE</i>	3	1	3
96	1.1225	<i>TM</i>	1	1	12
97	1.1225	<i>TM</i>	3	1	4
98	1.1225	<i>TE</i>	1	1	12
99	1.1225	<i>TE</i>	3	1	4
100	1.125	<i>TE</i>	3	0	9
101	1.1325	<i>TM</i>	2	1	10
102	1.1325	<i>TE</i>	2	1	10
103	1.1448	<i>TM</i>	3	1	5
104	1.1448	<i>TE</i>	0	1	13
105	1.1448	<i>TE</i>	2	0	13
106	1.1448	<i>TE</i>	3	1	5
107	1.1643	<i>TE</i>	1	0	15
108	1.1715	<i>TM</i>	3	1	6
109	1.1715	<i>TE</i>	3	0	10
110	1.1715	<i>TE</i>	3	1	6
111	1.1835	<i>TM</i>	1	1	13
112	1.1835	<i>TM</i>	2	1	11
113	1.1835	<i>TE</i>	1	1	13
114	1.1835	<i>TE</i>	2	1	11
115	1.2023	<i>TM</i>	3	1	7
116	1.2023	<i>TE</i>	0	2	1
117	1.2023	<i>TE</i>	3	1	7
118	1.2023	<i>TE</i>	4	0	1
119	1.2093	<i>TE</i>	0	1	14
120	1.2093	<i>TE</i>	0	2	2
121	1.2093	<i>TE</i>	2	0	14
122	1.2093	<i>TE</i>	4	0	2
123	1.2209	<i>TE</i>	3	0	11
124	1.2209	<i>TE</i>	0	2	3
125	1.2209	<i>TE</i>	4	0	3
126	1.2369	<i>TM</i>	2	1	12

127	1.2369	<i>TM</i>	3	1	8
128	1.2369	<i>TE</i>	2	1	12
129	1.2369	<i>TE</i>	3	1	8
130	1.2369	<i>TM</i>	1	2	0
131	1.2369	<i>TE</i>	0	2	4
132	1.2369	<i>TE</i>	1	0	16
133	1.2369	<i>TE</i>	4	0	4
134	1.2392	<i>TM</i>	1	2	1
135	1.2392	<i>TE</i>	1	2	1
136	1.246	<i>TM</i>	1	1	14
137	1.246	<i>TM</i>	1	2	2
138	1.246	<i>TE</i>	1	1	14
139	1.246	<i>TE</i>	1	2	2
140	1.2572	<i>TM</i>	1	2	3
141	1.2572	<i>TE</i>	0	2	5
142	1.2572	<i>TE</i>	1	2	3
143	1.2572	<i>TE</i>	4	0	5
144	1.2728	<i>TE</i>	3	0	12
145	1.2728	<i>TM</i>	1	2	4
146	1.2728	<i>TE</i>	1	2	4
147	1.275	<i>TM</i>	3	1	9
148	1.275	<i>TE</i>	0	1	15
149	1.275	<i>TE</i>	2	0	15
150	1.275	<i>TE</i>	3	1	9
151	1.2816	<i>TE</i>	0	2	6
152	1.2816	<i>TE</i>	4	0	6
153	1.2925	<i>TM</i>	2	1	13
154	1.2925	<i>TE</i>	2	1	13
155	1.2925	<i>TM</i>	1	2	5
156	1.2925	<i>TE</i>	1	2	5
157	1.3098	<i>TM</i>	1	1	15
158	1.3098	<i>TE</i>	0	2	7
159	1.3098	<i>TE</i>	1	0	17
160	1.3098	<i>TE</i>	1	1	15
161	1.3098	<i>TE</i>	4	0	7
162	1.3162	<i>TM</i>	1	2	6
163	1.3162	<i>TM</i>	3	1	10
164	1.3162	<i>TE</i>	1	2	6
165	1.3162	<i>TE</i>	3	1	10
166	1.3269	<i>TE</i>	3	0	13
167	1.3416	<i>TM</i>	2	2	0
168	1.3416	<i>TM</i>	4	1	0
169	1.3416	<i>TE</i>	0	1	16
170	1.3416	<i>TE</i>	0	2	8



171	1.3416	<i>TE</i>	2	0	16
172	1.3416	<i>TE</i>	4	0	8
173	1.3437	<i>TM</i>	2	2	1
174	1.3437	<i>TM</i>	4	1	1
175	1.3437	<i>TE</i>	2	2	1
176	1.3437	<i>TE</i>	4	1	1
177	1.3437	<i>TM</i>	1	2	7
178	1.3437	<i>TE</i>	1	2	7
179	1.35	<i>TM</i>	2	2	2
180	1.35	<i>TM</i>	4	1	2
181	1.35	<i>TE</i>	2	2	2
182	1.35	<i>TE</i>	4	1	2
183	1.35	<i>TM</i>	2	1	14
184	1.35	<i>TE</i>	2	1	14
185	1.3604	<i>TM</i>	2	2	3
186	1.3604	<i>TM</i>	4	1	3
187	1.3604	<i>TE</i>	2	2	3
188	1.3604	<i>TE</i>	4	1	3
189	1.3604	<i>TM</i>	3	1	11
190	1.3604	<i>TE</i>	3	1	11
191	1.3748	<i>TM</i>	1	1	16
192	1.3748	<i>TM</i>	2	2	4
193	1.3748	<i>TM</i>	4	1	4
194	1.3748	<i>TE</i>	1	1	16
195	1.3748	<i>TE</i>	2	2	4
196	1.3748	<i>TE</i>	4	1	4
197	1.3748	<i>TM</i>	1	2	8
198	1.3748	<i>TE</i>	1	2	8
199	1.3768	<i>TE</i>	0	2	9
200	1.3768	<i>TE</i>	4	0	9
201	1.3829	<i>TE</i>	1	0	18
202	1.3829	<i>TE</i>	3	0	14
203	1.3931	<i>TM</i>	2	2	5
204	1.3931	<i>TM</i>	4	1	5
205	1.3931	<i>TE</i>	2	2	5
206	1.3931	<i>TE</i>	4	1	5
207	1.4071	<i>TM</i>	3	1	12
208	1.4071	<i>TE</i>	3	1	12
209	1.4091	<i>TE</i>	0	1	17
210	1.4091	<i>TE</i>	2	0	17
211	1.4091	<i>TM</i>	1	2	9
212	1.4091	<i>TM</i>	2	1	15
213	1.4091	<i>TE</i>	1	2	9
214	1.4091	<i>TE</i>	2	1	15

215	1.4151	<i>TM</i>	2	2	6
216	1.4151	<i>TM</i>	4	1	6
217	1.4151	<i>TE</i>	0	2	10
218	1.4151	<i>TE</i>	2	2	6
219	1.4151	<i>TE</i>	4	0	10
220	1.4151	<i>TE</i>	4	1	6
221	1.4407	<i>TM</i>	1	1	17
222	1.4407	<i>TM</i>	2	2	7
223	1.4407	<i>TM</i>	4	1	7
224	1.4407	<i>TE</i>	1	1	17
225	1.4407	<i>TE</i>	2	2	7
226	1.4407	<i>TE</i>	3	0	15
227	1.4407	<i>TE</i>	4	1	7
228	1.4465	<i>TM</i>	1	2	10
229	1.4465	<i>TE</i>	1	2	10
230	1.4562	<i>TM</i>	3	1	13
231	1.4562	<i>TE</i>	0	2	11
232	1.4562	<i>TE</i>	1	0	19
233	1.4562	<i>TE</i>	3	1	13
234	1.4562	<i>TE</i>	4	0	11
235	1.4697	<i>TM</i>	2	2	8
236	1.4697	<i>TM</i>	4	1	8
237	1.4697	<i>TE</i>	2	2	8
238	1.4697	<i>TE</i>	4	1	8
239	1.4697	<i>TM</i>	2	1	16
240	1.4697	<i>TE</i>	2	1	16
241	1.4773	<i>TE</i>	0	1	18
242	1.4773	<i>TE</i>	2	0	18
243	1.4868	<i>TM</i>	1	2	11
244	1.4868	<i>TE</i>	1	2	11
245	1.5	<i>TM</i>	3	2	0
246	1.5	<i>TE</i>	0	2	12
247	1.5	<i>TE</i>	3	0	16
248	1.5	<i>TE</i>	4	0	12
249	1.5019	<i>TM</i>	2	2	9
250	1.5019	<i>TM</i>	4	1	9
251	1.5019	<i>TE</i>	2	2	9
252	1.5019	<i>TE</i>	4	1	9
253	1.5019	<i>TM</i>	3	2	1
254	1.5019	<i>TE</i>	3	2	1
255	1.5019	<i>TE</i>	5	0	1
256	1.5075	<i>TM</i>	1	1	18
257	1.5075	<i>TE</i>	1	1	18
258	1.5075	<i>TM</i>	3	1	14

259	1.5075	<i>TM</i>	3	2	2
260	1.5075	<i>TE</i>	3	1	14
261	1.5075	<i>TE</i>	3	2	2
262	1.5075	<i>TE</i>	5	0	2
263	1.5168	<i>TM</i>	3	2	3
264	1.5168	<i>TE</i>	3	2	3
265	1.5168	<i>TE</i>	5	0	3
266	1.5297	<i>TM</i>	1	2	12
267	1.5297	<i>TM</i>	3	2	4
268	1.5297	<i>TE</i>	1	0	20
269	1.5297	<i>TE</i>	1	2	12
270	1.5297	<i>TE</i>	3	2	4
271	1.5297	<i>TE</i>	5	0	4
272	1.5315	<i>TM</i>	2	1	17
273	1.5315	<i>TE</i>	2	1	17
274	1.537	<i>TM</i>	2	2	10
275	1.537	<i>TM</i>	4	1	10
276	1.537	<i>TE</i>	2	2	10
277	1.537	<i>TE</i>	4	1	10
278	1.5462	<i>TM</i>	3	2	5
279	1.5462	<i>TE</i>	0	1	19
280	1.5462	<i>TE</i>	0	2	13
281	1.5462	<i>TE</i>	2	0	19
282	1.5462	<i>TE</i>	3	2	5
283	1.5462	<i>TE</i>	4	0	13
284	1.5462	<i>TE</i>	5	0	5
285	1.5606	<i>TM</i>	3	1	15
286	1.5606	<i>TE</i>	3	0	17
287	1.5606	<i>TE</i>	3	1	15
288	1.566	<i>TM</i>	3	2	6
289	1.566	<i>TE</i>	3	2	6
290	1.566	<i>TE</i>	5	0	6
291	1.575	<i>TM</i>	1	1	19
292	1.575	<i>TM</i>	1	2	13
293	1.575	<i>TM</i>	2	2	11
294	1.575	<i>TM</i>	4	1	11
295	1.575	<i>TE</i>	1	1	19
296	1.575	<i>TE</i>	1	2	13
297	1.575	<i>TE</i>	2	2	11
298	1.575	<i>TE</i>	4	1	11
299	1.5892	<i>TM</i>	3	2	7
300	1.5892	<i>TE</i>	3	2	7
301	1.5892	<i>TE</i>	5	0	7
302	1.5945	<i>TM</i>	2	1	18

303	1.5945	<i>TE</i>	2	1	18
304	1.5945	<i>TE</i>	0	2	14
305	1.5945	<i>TE</i>	4	0	14
306	1.6033	<i>TE</i>	1	0	21
307	1.6155	<i>TM</i>	2	2	12
308	1.6155	<i>TM</i>	4	1	12
309	1.6155	<i>TE</i>	2	2	12
310	1.6155	<i>TE</i>	4	1	12
311	1.6155	<i>TM</i>	3	1	16
312	1.6155	<i>TM</i>	3	2	8
313	1.6155	<i>TM</i>	5	1	0
314	1.6155	<i>TE</i>	0	1	20
315	1.6155	<i>TE</i>	2	0	20
316	1.6155	<i>TE</i>	3	1	16
317	1.6155	<i>TE</i>	3	2	8
318	1.6155	<i>TE</i>	5	0	8
319	1.6173	<i>TM</i>	5	1	1
320	1.6173	<i>TE</i>	5	1	1
321	1.6225	<i>TE</i>	3	0	18
322	1.6225	<i>TM</i>	5	1	2
323	1.6225	<i>TE</i>	5	1	2
324	1.6225	<i>TM</i>	1	2	14
325	1.6225	<i>TE</i>	1	2	14
326	1.6311	<i>TM</i>	5	1	3
327	1.6311	<i>TE</i>	5	1	3
328	1.6432	<i>TM</i>	5	1	4
329	1.6432	<i>TE</i>	5	1	4
330	1.6432	<i>TM</i>	1	1	20
331	1.6432	<i>TE</i>	1	1	20
332	1.6449	<i>TM</i>	3	2	9
333	1.6449	<i>TE</i>	0	2	15
334	1.6449	<i>TE</i>	3	2	9
335	1.6449	<i>TE</i>	4	0	15
336	1.6449	<i>TE</i>	5	0	9
337	1.6585	<i>TM</i>	2	2	13
338	1.6585	<i>TM</i>	4	1	13
339	1.6585	<i>TM</i>	5	1	5
340	1.6585	<i>TE</i>	2	2	13
341	1.6585	<i>TE</i>	4	1	13
342	1.6585	<i>TE</i>	5	1	5
343	1.6585	<i>TM</i>	2	1	19
344	1.6585	<i>TE</i>	2	1	19
345	1.672	<i>TM</i>	3	1	17
346	1.672	<i>TE</i>	3	1	17

347	1.672	<i>TM</i>	1	2	15
348	1.672	<i>TE</i>	1	2	15
349	1.6771	<i>TE</i>	1	0	22
350	1.6771	<i>TM</i>	3	2	10
351	1.6771	<i>TM</i>	5	1	6
352	1.6771	<i>TE</i>	3	2	10
353	1.6771	<i>TE</i>	5	0	10
354	1.6771	<i>TE</i>	5	1	6
355	1.6854	<i>TE</i>	0	1	21
356	1.6854	<i>TE</i>	2	0	21
357	1.6854	<i>TE</i>	3	0	19
358	1.6971	<i>TM</i>	4	2	0
359	1.6971	<i>TE</i>	0	2	16
360	1.6971	<i>TE</i>	4	0	16
361	1.6987	<i>TM</i>	4	2	1
362	1.6987	<i>TM</i>	5	1	7
363	1.6987	<i>TE</i>	4	2	1
364	1.6987	<i>TE</i>	5	1	7
365	1.7037	<i>TM</i>	2	2	14
366	1.7037	<i>TM</i>	4	1	14
367	1.7037	<i>TM</i>	4	2	2
368	1.7037	<i>TE</i>	2	2	14
369	1.7037	<i>TE</i>	4	1	14
370	1.7037	<i>TE</i>	4	2	2
371	1.7119	<i>TM</i>	1	1	21
372	1.7119	<i>TM</i>	3	2	11
373	1.7119	<i>TM</i>	4	2	3
374	1.7119	<i>TE</i>	1	1	21
375	1.7119	<i>TE</i>	3	2	11
376	1.7119	<i>TE</i>	4	2	3
377	1.7119	<i>TE</i>	5	0	11
378	1.7234	<i>TM</i>	1	2	16
379	1.7234	<i>TM</i>	2	1	20
380	1.7234	<i>TM</i>	4	2	4
381	1.7234	<i>TM</i>	5	1	8
382	1.7234	<i>TE</i>	1	2	16
383	1.7234	<i>TE</i>	2	1	20
384	1.7234	<i>TE</i>	4	2	4
385	1.7234	<i>TE</i>	5	1	8
386	1.7299	<i>TM</i>	3	1	18
387	1.7299	<i>TE</i>	3	1	18
388	1.738	<i>TM</i>	4	2	5
389	1.738	<i>TE</i>	4	2	5
390	1.7493	<i>TM</i>	3	2	12

391	1.7493	<i>TE</i>	3	0	20
392	1.7493	<i>TE</i>	3	2	12
393	1.7493	<i>TE</i>	5	0	12
394	1.7509	<i>TE</i>	1	0	23
395	1.7509	<i>TM</i>	2	2	15
396	1.7509	<i>TM</i>	4	1	15
397	1.7509	<i>TM</i>	5	1	9
398	1.7509	<i>TE</i>	0	2	17
399	1.7509	<i>TE</i>	2	2	15
400	1.7509	<i>TE</i>	4	0	17
401	1.7509	<i>TE</i>	4	1	15
402	1.7509	<i>TE</i>	5	1	9
403	1.7557	<i>TE</i>	0	1	22
404	1.7557	<i>TE</i>	2	0	22
405	1.7557	<i>TM</i>	4	2	6
406	1.7557	<i>TE</i>	4	2	6
407	1.7764	<i>TM</i>	1	2	17
408	1.7764	<i>TM</i>	4	2	7
409	1.7764	<i>TE</i>	1	2	17
410	1.7764	<i>TE</i>	4	2	7
411	1.7812	<i>TM</i>	1	1	22
412	1.7812	<i>TE</i>	1	1	22
413	1.7812	<i>TM</i>	5	1	10
414	1.7812	<i>TE</i>	5	1	10
415	1.789	<i>TM</i>	2	1	21
416	1.789	<i>TE</i>	2	1	21
417	1.789	<i>TM</i>	3	1	19
418	1.789	<i>TM</i>	3	2	13
419	1.789	<i>TE</i>	3	1	19
420	1.789	<i>TE</i>	3	2	13
421	1.789	<i>TE</i>	5	0	13
422	1.8	<i>TM</i>	2	2	16
423	1.8	<i>TM</i>	4	1	16
424	1.8	<i>TM</i>	4	2	8
425	1.8	<i>TE</i>	2	2	16
426	1.8	<i>TE</i>	4	1	16
427	1.8	<i>TE</i>	4	2	8
428	1.8016	<i>TE</i>	0	3	1
429	1.8016	<i>TE</i>	6	0	1
430	1.8062	<i>TE</i>	0	2	18
431	1.8062	<i>TE</i>	0	3	2
432	1.8062	<i>TE</i>	4	0	18
433	1.8062	<i>TE</i>	6	0	2
434	1.814	<i>TE</i>	0	3	3

435	1.814	<i>TE</i>	3	0	21
436	1.814	<i>TE</i>	6	0	3
437	1.814	<i>TM</i>	5	1	11
438	1.814	<i>TE</i>	5	1	11
439	1.8248	<i>TM</i>	1	3	0
440	1.8248	<i>TE</i>	0	3	4
441	1.8248	<i>TE</i>	1	0	24
442	1.8248	<i>TE</i>	6	0	4
443	1.8264	<i>TM</i>	1	3	1
444	1.8264	<i>TE</i>	0	1	23
445	1.8264	<i>TE</i>	1	3	1
446	1.8264	<i>TE</i>	2	0	23
447	1.8264	<i>TM</i>	4	2	9
448	1.8264	<i>TE</i>	4	2	9
449	1.831	<i>TM</i>	1	3	2
450	1.831	<i>TE</i>	1	3	2
451	1.831	<i>TM</i>	1	2	18
452	1.831	<i>TE</i>	1	2	18
453	1.831	<i>TM</i>	3	2	14
454	1.831	<i>TE</i>	3	2	14
455	1.831	<i>TE</i>	5	0	14
456	1.8386	<i>TM</i>	1	3	3
457	1.8386	<i>TE</i>	0	3	5
458	1.8386	<i>TE</i>	1	3	3
459	1.8386	<i>TE</i>	6	0	5
460	1.8493	<i>TM</i>	1	3	4
461	1.8493	<i>TE</i>	1	3	4
462	1.8493	<i>TM</i>	3	1	20
463	1.8493	<i>TM</i>	5	1	12
464	1.8493	<i>TE</i>	3	1	20
465	1.8493	<i>TE</i>	5	1	12
466	1.8508	<i>TM</i>	1	1	23
467	1.8508	<i>TE</i>	1	1	23
468	1.8508	<i>TM</i>	2	2	17
469	1.8508	<i>TM</i>	4	1	17
470	1.8508	<i>TE</i>	2	2	17
471	1.8508	<i>TE</i>	4	1	17
472	1.8554	<i>TE</i>	0	3	6
473	1.8554	<i>TE</i>	6	0	6
474	1.8554	<i>TM</i>	2	1	22
475	1.8554	<i>TM</i>	4	2	10
476	1.8554	<i>TE</i>	2	1	22
477	1.8554	<i>TE</i>	4	2	10
478	1.863	<i>TM</i>	1	3	5

479	1.863	<i>TE</i>	1	3	5
480	1.863	<i>TE</i>	0	2	19
481	1.863	<i>TE</i>	4	0	19
482	1.875	<i>TE</i>	0	3	7
483	1.875	<i>TE</i>	6	0	7
484	1.875	<i>TM</i>	3	2	15
485	1.875	<i>TE</i>	3	2	15
486	1.875	<i>TE</i>	5	0	15
487	1.8795	<i>TM</i>	1	3	6
488	1.8795	<i>TE</i>	1	3	6
489	1.8795	<i>TE</i>	3	0	22
490	1.887	<i>TM</i>	1	2	19
491	1.887	<i>TM</i>	4	2	11
492	1.887	<i>TM</i>	5	1	13
493	1.887	<i>TE</i>	1	2	19
494	1.887	<i>TE</i>	4	2	11
495	1.887	<i>TE</i>	5	1	13
496	1.8974	<i>TM</i>	2	3	0
497	1.8974	<i>TM</i>	6	1	0
498	1.8974	<i>TE</i>	0	1	24
499	1.8974	<i>TE</i>	0	3	8
500	1.8974	<i>TE</i>	2	0	24
501	1.8974	<i>TE</i>	6	0	8
502	1.8988	<i>TM</i>	1	3	7
503	1.8988	<i>TE</i>	1	3	7
504	1.8988	<i>TM</i>	2	3	1
505	1.8988	<i>TM</i>	6	1	1
506	1.8988	<i>TE</i>	2	3	1
507	1.8988	<i>TE</i>	6	1	1
508	1.8988	<i>TE</i>	1	0	25
509	1.9033	<i>TM</i>	2	3	2
510	1.9033	<i>TM</i>	6	1	2
511	1.9033	<i>TE</i>	2	3	2
512	1.9033	<i>TE</i>	6	1	2
513	1.9033	<i>TM</i>	2	2	18
514	1.9033	<i>TM</i>	4	1	18
515	1.9033	<i>TE</i>	2	2	18
516	1.9033	<i>TE</i>	4	1	18
517	1.9107	<i>TM</i>	2	3	3
518	1.9107	<i>TM</i>	6	1	3
519	1.9107	<i>TE</i>	2	3	3
520	1.9107	<i>TE</i>	6	1	3
521	1.9107	<i>TM</i>	3	1	21
522	1.9107	<i>TE</i>	3	1	21



523	1.9209	<i>TM</i>	1	3	8
524	1.9209	<i>TM</i>	2	3	4
525	1.9209	<i>TM</i>	6	1	4
526	1.9209	<i>TE</i>	1	3	8
527	1.9209	<i>TE</i>	2	3	4
528	1.9209	<i>TE</i>	6	1	4
529	1.9209	<i>TM</i>	1	1	24
530	1.9209	<i>TM</i>	4	2	12
531	1.9209	<i>TE</i>	1	1	24
532	1.9209	<i>TE</i>	4	2	12
533	1.9209	<i>TM</i>	3	2	16
534	1.9209	<i>TM</i>	5	2	0
535	1.9209	<i>TE</i>	0	2	20
536	1.9209	<i>TE</i>	3	2	16
537	1.9209	<i>TE</i>	4	0	20
538	1.9209	<i>TE</i>	5	0	16
539	1.9224	<i>TE</i>	0	3	9
540	1.9224	<i>TE</i>	6	0	9
541	1.9224	<i>TM</i>	2	1	23
542	1.9224	<i>TE</i>	2	1	23
543	1.9224	<i>TM</i>	5	2	1
544	1.9224	<i>TE</i>	5	2	1
545	1.9268	<i>TM</i>	5	1	14
546	1.9268	<i>TM</i>	5	2	2
547	1.9268	<i>TE</i>	5	1	14
548	1.9268	<i>TE</i>	5	2	2
549	1.9341	<i>TM</i>	2	3	5
550	1.9341	<i>TM</i>	6	1	5
551	1.9341	<i>TE</i>	2	3	5
552	1.9341	<i>TE</i>	6	1	5
553	1.9341	<i>TM</i>	5	2	3
554	1.9341	<i>TE</i>	5	2	3
555	1.9442	<i>TM</i>	5	2	4
556	1.9442	<i>TE</i>	5	2	4
557	1.9442	<i>TM</i>	1	2	20
558	1.9442	<i>TE</i>	1	2	20
559	1.9457	<i>TM</i>	1	3	9
560	1.9457	<i>TE</i>	1	3	9
561	1.9457	<i>TE</i>	3	0	23
562	1.95	<i>TM</i>	2	3	6
563	1.95	<i>TM</i>	6	1	6
564	1.95	<i>TE</i>	0	3	10
565	1.95	<i>TE</i>	2	3	6
566	1.95	<i>TE</i>	6	0	10

567	1.95	<i>TE</i>	6	1	6
568	1.9572	<i>TM</i>	2	2	19
569	1.9572	<i>TM</i>	4	1	19
570	1.9572	<i>TM</i>	4	2	13
571	1.9572	<i>TM</i>	5	2	5
572	1.9572	<i>TE</i>	2	2	19
573	1.9572	<i>TE</i>	4	1	19
574	1.9572	<i>TE</i>	4	2	13
575	1.9572	<i>TE</i>	5	2	5
576	1.9687	<i>TM</i>	2	3	7
577	1.9687	<i>TM</i>	6	1	7
578	1.9687	<i>TE</i>	2	3	7
579	1.9687	<i>TE</i>	6	1	7
580	1.9687	<i>TM</i>	3	2	17
581	1.9687	<i>TM</i>	5	1	15
582	1.9687	<i>TE</i>	0	1	25
583	1.9687	<i>TE</i>	2	0	25
584	1.9687	<i>TE</i>	3	2	17
585	1.9687	<i>TE</i>	5	0	17
586	1.9687	<i>TE</i>	5	1	15
587	1.9729	<i>TM</i>	1	3	10
588	1.9729	<i>TE</i>	1	3	10
589	1.9729	<i>TM</i>	3	1	22
590	1.9729	<i>TE</i>	1	0	26
591	1.9729	<i>TE</i>	3	1	22
592	1.9729	<i>TM</i>	5	2	6
593	1.9729	<i>TE</i>	5	2	6
594	1.9801	<i>TE</i>	0	3	11
595	1.9801	<i>TE</i>	6	0	11
596	1.9801	<i>TE</i>	0	2	21
597	1.9801	<i>TE</i>	4	0	21
598	1.99	<i>TM</i>	2	1	24
599	1.99	<i>TM</i>	2	3	8
600	1.99	<i>TM</i>	6	1	8
601	1.99	<i>TE</i>	2	1	24
602	1.99	<i>TE</i>	2	3	8
603	1.99	<i>TE</i>	6	1	8
604	1.9914	<i>TM</i>	1	1	25
605	1.9914	<i>TM</i>	5	2	7
606	1.9914	<i>TE</i>	1	1	25
607	1.9914	<i>TE</i>	5	2	7
608	1.9956	<i>TM</i>	4	2	14
609	1.9956	<i>TE</i>	4	2	14

---

Fine del Cap.20