

## Teoria di Sommerfeld sulla propagazione superficiale

### 2.1 - Vettori di Hertz, o potenziali di polarizzazione

Si è visto che l'integrazione delle equazioni di Maxwell si può ridurre alla determinazione di un potenziale vettore e di un potenziale scalare, i quali in un mezzo omogeneo soddisfano ad uno stesso tipo di equazione differenziale. È stato dimostrato da **Hertz** e da **Augusto Righi (1901)** che è possibile definire un campo elettromagnetico mediante una sola funzione vettoriale.

Ci si limiti per ora alle regioni interne ad un mezzo isotropo e omogeneo in cui non vi siano nè correnti di conduzione nè cariche libere.

Le equazioni del campo si riducono allora al sistema omogeneo:

$$\text{Ia)} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{IIIa)} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\text{IIa)} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \quad \text{IVa)} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

Si ponga  $\vec{A} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}$  e  $\Phi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}$ , dove  $\vec{\Pi}$  è un vettore da determinare che prende il nome di **vettore di Hertz**.

Di conseguenza:

$$\vec{B} = \mu\epsilon \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} \quad , \quad \vec{E} = \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} \right) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} \quad (2.1.1)$$

Sostituendo le (2.1.1) nella IIa) si ha:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} \right) + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} \right) = 0$$

che si può scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\Pi} - \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} \right) + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (2.1.2)$$

La Ia) e la IIIa) sono identicamente soddisfatte dalle (2.1.1).

Anche la IVa) è soddisfatta dalla 2<sup>a</sup> delle (2.1.1); infatti sostituendo si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} \right) - \mu\epsilon \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.3)$$

Ricordando che  $-\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = \Phi$ , la (2.1.3) diventa:

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Phi + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.4)$$

che è pienamente soddisfatta in quanto rappresenta l'equazione alla quale deve soddisfare il potenziale scalare.

**Pertanto ogni soluzione dell'equazione vettoriale (2.1.2) determina un campo elettromagnetico per mezzo delle relazioni (2.1.1)**, soddisfa cioè alle equazioni di Maxwell.

La (2.1.2) si può scrivere:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\Pi} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}) + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = \text{costante} \quad (2.1.5)$$

Il valore particolare della costante non influisce sulla determinazione del campo, e si è pertanto liberi di porla uguale a zero.

Ricordando che  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\Pi} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} - \nabla^2 \vec{\Pi}$  la (2.1.5) si scrive:

$$\nabla^2 \vec{\Pi} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.6)$$

Dato che i vettori  $\vec{D}$  e  $\vec{B}$  sono solenoidali in una regione senza cariche, si può costruire un'altra soluzione della forma:

$$\vec{A}^* = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{\Pi}^*}{\partial t} \quad \Phi^* = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}^* \quad (2.1.7)$$

$$\vec{D} = -\mu\epsilon \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{\Pi}^*}{\partial t} \quad \vec{H} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}^* - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^*}{\partial t^2} \quad (2.1.8)$$

dove  $\vec{\Pi}^*$  è una qualsiasi soluzione della (2.1.6).

Si può infatti verificare facilmente che le equazioni di Maxwell sono soddisfatte.

Da questi risultati si può concludere che il campo elettromagnetico nell'interno della regione in cui  $\epsilon$  e  $\mu$  siano costanti,  $\rho$  e  $\vec{J}$  eguali a zero, può essere risolto in due campi parziali, l'uno derivato dal vettore  $\vec{\Pi}$  e l'altro derivato dal vettore  $\vec{\Pi}^*$ . L'origine di questi campi giace all'esterno di questa regione.

## 2.2 - Sviluppo del campo irradiato in onde cilindriche elementari

Supponiamo di avere una sorgente monocromatica la cui dipendenza temporale è  $e^{-i\omega t}$  e scriviamo i campi in funzione del vettore di Hertz

$$\vec{E} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} + k^2 \vec{\Pi} \quad , \quad \vec{H} = \frac{k^2}{i\omega\mu} \vec{\nabla} \times \vec{\Pi} \quad (2.2.1)$$

dove  $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$ .

Scriviamo le (2.2.1) in coordinate cilindriche ricordando che:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Pi_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \quad (2.2.2)$$

Inoltre se  $\Phi$  è una qualunque funzione scalare si ha:

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat{e}_\phi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z} \quad (2.2.3)$$

Ne segue:

$$E_r = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Pi_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \right\} + k^2 \Pi_r \quad (2.2.4)$$

$$E_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Pi_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \right\} + k^2 \Pi_\phi \quad (2.2.5)$$

$$E_z = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Pi_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \right\} + k^2 \Pi_z \quad (2.2.6)$$

Analogamente per il campo magnetico si ha:

$$H_r = \frac{k^2}{i\omega\mu} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_z}{\partial \phi} - \frac{\partial \Pi_\phi}{\partial z} \right) \quad (2.2.7)$$

$$H_\phi = \frac{k^2}{i\omega\mu} \left( \frac{\partial \Pi_r}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \right) \quad (2.2.8)$$

$$H_z = \frac{k^2}{i\omega\mu} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r\Pi_\phi) - \frac{\partial \Pi_r}{\partial \phi} \right) \frac{1}{r} \quad (2.2.9)$$

Consideriamo l'equazione d'onda per il vettore  $\vec{\Pi}$

$$\nabla^2 \vec{\Pi} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2.10)$$

In coordinate cilindriche e nel caso che  $\vec{\Pi}$  abbia tutte e tre le componenti si ha:

$$\nabla^2 \vec{\Pi} = \left( \nabla^2 \Pi_r - \frac{\Pi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Pi_\phi}{\partial \phi} \right) \hat{e}_r + \left( \nabla^2 \Pi_\phi - \frac{\Pi_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Pi_r}{\partial \phi} \right) \hat{e}_\phi + (\nabla^2 \Pi_z) \hat{z} \quad (2.2.11)$$

essendo:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (2.2.12)$$

Supponiamo adesso che  $\vec{\Pi} = \Pi_z(r, \phi, z)\hat{z}$  cioè il potenziale di Hertz abbia soltanto la componente lungo l'asse  $z$ , in tal caso la (2.2.10) diventa:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2.13)$$

che nel caso di dipendenza temporale del tipo  $e^{-i\omega t}$  si riduce a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z = 0 \quad (2.2.14)$$

con  $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$  e che si separa facilmente imponendo:

$$\Pi_z(r, \phi, z) = f_1(r) f_2(\phi) f_3(z) \quad (2.2.15)$$

Sostituendo si ha:

$$f_2 f_3 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df_1}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} f_1 f_3 \frac{d^2 f_2}{d\phi^2} + f_1 f_2 \frac{d^2 f_3}{dz^2} + k^2 f_1 f_2 f_3 = 0 \quad (2.2.16)$$

Dividendo per  $f_1 f_2 f_3$  si ottiene

$$\frac{1}{f_1} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df_1}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{d\phi^2} + \frac{1}{f_3} \frac{d^2 f_3}{dz^2} + k^2 = 0 \quad (2.2.17)$$

Il primo, il secondo e il quarto termine non dipendono dalla variabile  $z$ , mentre il terzo termine dipende solo da  $z$  ed è indipendente da  $r$  e da  $\phi$ ; quindi una variazione di  $z$  non può influire sugli altri termini e pertanto il terzo termine deve essere costante se la (2.2.10) deve essere identicamente soddisfatta per qualsiasi valore di  $z$ . Ossia:

$$\frac{1}{f_3} \frac{d^2 f_3}{dz^2} = -h^2 \quad (2.2.18)$$

La costante arbitraria  $h^2$  è stata scelta negativa per comodità.

Sostituendo il terzo termine della (2.2.17) con  $-h^2$  e moltiplicando per  $r^2$  si ha:

$$\frac{1}{f_1} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df_1}{dr} \right) + \frac{1}{f_2} \frac{1}{r^2} \frac{d^2 f_2}{d\phi^2} - h^2 + k^2 = 0 \quad (2.2.19)$$

$$\frac{1}{f_1} r \frac{d}{dr} \left( r \frac{df_1}{dr} \right) + \frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{d\phi^2} + (k^2 - h^2) r^2 = 0 \quad (2.2.20)$$

che si separa in:

$$r \frac{d}{dr} \left( r \frac{df_1}{dr} \right) + [(k^2 - h^2) r^2 - \nu^2] f_1 = 0 \quad (2.2.21)$$

$$\frac{d^2 f_2}{d\phi^2} + \nu^2 f_2 = 0 \quad (2.2.22)$$

alla quale aggiungiamo la:

$$\frac{d^2 f_3}{dz^2} + h^2 f_3 = 0 \quad (2.2.23)$$

Si badi che nella (2.2.22)  $\nu^2$  deve essere scelto intero perchè la soluzione deve essere periodica in  $\phi$ .

La soluzione particolare della (2.2.23) è  $f_3 = e^{\pm ihz}$  dove  $h$  è, in generale, complessa.

Analogamente la soluzione della (2.2.22) è  $f_2 = e^{\pm i\nu\phi}$ . Se il campo deve essere necessariamente una funzione periodica di  $\phi$ ,  $\nu$  può assumere solo i valori interi  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , se d'altra parte si è interessati ad un settore dello spazio limitato, per esempio, dai piani  $\phi = \phi_1$  e  $\phi = \phi_2$ , allora, in generale, si dovranno assegnare a  $\nu$  valori non interi.

Nel nostro caso scegliamo  $f_2(\phi) = e^{i\nu\phi}$  con  $\nu$  intero positivo o negativo.

L'equazione (2.2.21) ammette come soluzioni le funzioni cilindriche circolari di argomento  $\sqrt{k^2 - h^2r}$ ; cioè:

$$f_1 = Z_\nu \left( \sqrt{k^2 - h^2r} \right)$$

dove  $\nu$  è l'ordine della funzione.

Per vedere che la (2.2.21) è effettivamente l'equazione di Bessel, effettuiamo un cambiamento di variabili ponendo:  $\rho = \sqrt{k^2 - h^2r}$  cioè

$$\frac{df_1}{dr} = \frac{df_1}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} = \sqrt{k^2 - h^2} \frac{df_1}{d\rho} \quad (2.2.24)$$

così la (2.2.21) diventa:

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{df_1}{d\rho} \right) + (\rho^2 - \nu^2) f_1 = 0 \quad (2.2.25)$$

che si può scrivere:

$$\rho^2 \frac{d^2 f_1}{d\rho^2} + \rho \frac{df_1}{d\rho} + (\rho^2 - \nu^2) f_1 = 0 \quad (2.2.26)$$

e, ancora, dividendo per  $\rho^2$

$$\frac{d^2 f_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df_1}{d\rho} + \left( 1 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) f_1 = 0 \quad (2.2.27)$$

che, come sappiamo, è la famosa equazione di Bessel di ordine  $\nu$ .

Quindi la soluzione del nostro problema è:

$$e^{\pm i\nu\phi} J_\nu \left( \sqrt{k^2 - h^2r} \right) e^{\pm ihz - i\omega t} \quad (2.2.28)$$

$$e^{\pm i\nu\phi} H_\nu^{(1)} \left( \sqrt{k^2 - h^2r} \right) e^{\pm ihz - i\omega t} \quad (2.2.29)$$

La (2.2.28) si applica a domini finiti includenti  $r = 0$ , mentre a grandi distanze dalla sorgente si deve utilizzare la (2.2.29).

Se  $\nu = 0$  il campo è simmetrico attorno all'asse  $z$  (non dipende da  $\phi$ ).

Se  $h = 0$  la propagazione è puramente radiale.

Nel nostro caso i campi sono simmetrici e per conseguenza  $\nu = 0$ .

### 2.3 - Effetto della terra sulla propagazione delle radio-onde

Le storiche esperienze di Guglielmo Marconi, del 1901, hanno provato la possibilità di comunicazione mediante le onde radio, fra due località qualsiasi della terra.

Cercheremo di renderci conto del meccanismo secondo il quale si attua la propagazione delle onde radio e, in particolare, come le onde elettromagnetiche possano seguire la curvatura terrestre.

Sulla propagazione delle onde radio, qualora si ammetta l'atmosfera omogenea, è fondamentale una memoria pubblicata nel 1909 da **A. Sommerfeld** il quale suppone la terra piana (cioè tale da occupare un semispazio, l'altro semispazio è occupato dall'atmosfera) con conducibilità finita (il caso di conducibilità infinita si tratta agevolmente col metodo delle immagini).

Il primo problema che Sommerfeld affrontò fu quello di un dipolo hertziano verticale collocato sulla superficie terrestre considerata, come abbiamo detto, come un piano di conducibilità finita.

L'asse del dipolo coincide con l'asse  $z$  di un sistema di coordinate ortogonali e il piano  $z = 0$  rappresenta la superficie della terra.

Tutti i punti per cui  $z < 0$  giacciono all'interno della terra, la cui costante di propagazione è  $k_1$ . La costante di propagazione dell'aria nella regione  $z > 0$  è  $k_2 = \frac{\omega}{c}$ . Un punto di osservazione è individuato dalle coordinate cilindriche  $r, \phi, z$  e la sua distanza radiale dall'origine è:  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$

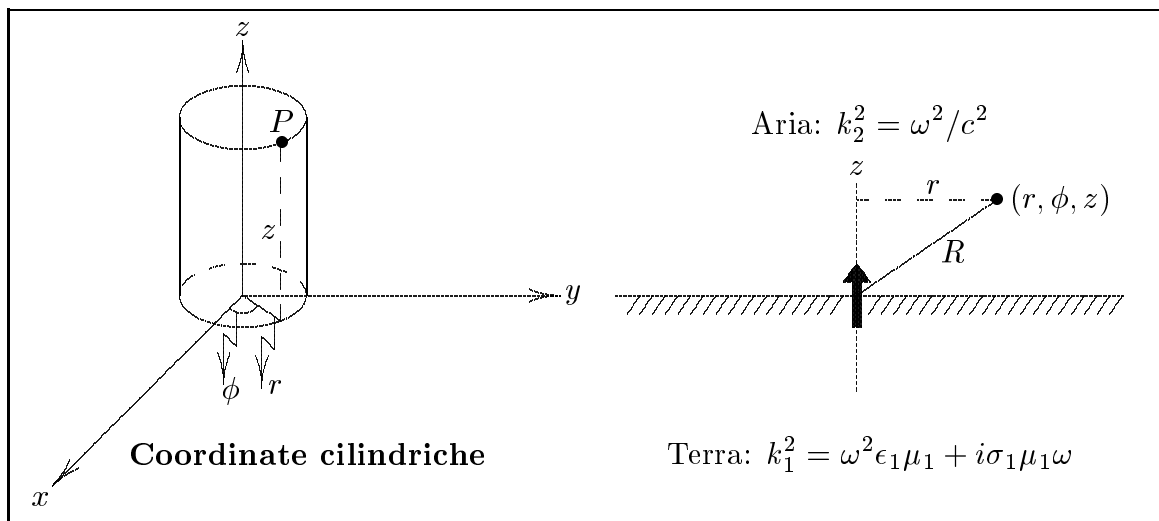


fig.2.3-1

Al dipolo elettrico verticale, così situato, associamo un vettore di Hertz per ciascun mezzo; siano essi  $\vec{\Pi}_1$  e  $\vec{\Pi}_2$  diretti, per quanto abbiamo visto, secondo l'asse del dipolo.

Si ha, cioè:

$$\vec{\Pi}_1 = \Pi_{1z} \hat{z} \quad \text{per } -\infty < z \leq 0 \quad (2.3.1)$$

$$\vec{\Pi}_2 = \Pi_{2z} \hat{z} \quad \text{per } 0 \leq z < +\infty \quad (2.3.2)$$

Essi, nei loro corrispondenti semispazi soddisfano all'equazione di Helmholtz scalare non omogenea

$$(\nabla^2 + k_1^2) \Pi_{1z} = - \left( \frac{ip}{k_1 \eta_1} \right) \delta(x) \delta(y) \delta(z) \quad \text{per } z \leq 0 \quad (2.3.3)$$

$$(\nabla^2 + k_2^2) \Pi_{2z} = - \left( \frac{ip}{k_2 \eta_2} \right) \delta(x) \delta(y) \delta(z) \quad \text{per } z \geq 0 \quad (2.3.4)$$

essendo  $p = Il$ .

Le due soluzioni devono soddisfare alle condizioni al contorno per  $z = 0$ . Ricordiamo che

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\epsilon'_1}{\mu_1}} \quad \text{e} \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \quad (2.3.5)$$

La soluzione delle equazioni differenziali di cui sopra si può esprimere nella seguente maniera:

$$\Pi_{1z} = \Pi_{1z}^0 + \Pi_{1z}^1 \quad (2.3.6)$$

$$\Pi_{2z} = \Pi_{2z}^0 + \Pi_{2z}^1 \quad (2.3.7)$$

dove  $\Pi_{1z}^0$  è un integrale particolare della prima equazione e  $\Pi_{1z}^1$  è una soluzione della corrispondente equazione omogenea:  $(\nabla^2 + k_1^2) \Pi_{1z} = 0$ ,  $\Pi_{2z}^0$  è un integrale particolare della seconda equazione e  $\Pi_{2z}^1$  è una soluzione della corrispondente equazione omogenea.

Le funzioni  $\Pi_{1z}^0$  e  $\Pi_{2z}^0$  sono scelte in modo che esse rappresentino i potenziali di Hertz relativi ad un dipolo elettrico verticale immerso in un mezzo omogeneo illimitato.

Si ha cioè:

$$\Pi_{1z}^0 = \frac{ip}{4\pi k_1 \eta_1} \frac{e^{ik_1 R_1}}{R_1} = \frac{i\omega p \mu_1}{4\pi k_1^2} \frac{e^{ik_1 R_1}}{R_1} \quad (2.3.8)$$

$$\Pi_{2z}^0 = \frac{ip}{4\pi k_2 \eta_2} \frac{e^{ik_2 R_2}}{R_2} = \frac{i\omega p \mu_2}{4\pi k_2^2} \frac{e^{ik_2 R_2}}{R_2} \quad (2.3.9)$$

Calcoliamo, ora, l'integrale generale della omogenea associata. Abbiamo visto che, nel caso di simmetria attorno all'asse  $z$ , la soluzione è:

$$\Pi_z^1 = J_0 \left( \sqrt{k^2 - h^2} r \right) e^{\pm ihz} e^{-i\omega t} \quad (2.3.10)$$

dove  $h$  è un parametro da determinare.

Conviene scegliere come parametro

$$\lambda^2 = k^2 - h^2 \quad (2.3.11)$$

piuttosto che  $h$ , quindi:

$$\Pi_z^1 = J_0(\lambda r) e^{\pm i \sqrt{k^2 - \lambda^2} z} e^{-i\omega t} \quad (2.3.12)$$

Il segno della radice  $ih = i\sqrt{k^2 - \lambda^2}$  va scelto in modo che i campi si annullino per  $z = \pm\infty$ , cioè si può ottenere imponendo che la parte reale di  $i\sqrt{k^2 - \lambda^2}$  sia sempre positiva.

Naturalmente, data la linearità della equazione di Helmholtz, la soluzione generale della omogenea associata è:

$$\Pi_z^1 = \int_0^\infty f(\lambda) J_0(\lambda r) e^{\pm i\sqrt{k^2 - \lambda^2} z} d\lambda \quad (2.3.13)$$

Allora le condizioni all'origine e all'infinito sono soddisfatte da un vettore di Hertz discontinuo, le cui componenti radiali e azimutali sono nulle e la cui componente secondo l'asse  $z$  è:

$$\Pi_{1z} = \frac{i\omega p \mu_1}{4\pi k_1^2} \frac{1}{R_1} e^{ik_1 R_1} + \int_0^\infty f_1(\lambda) J_0(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} d\lambda \quad z < 0 \quad (2.3.14)$$

$$\Pi_{2z} = \frac{i\omega p \mu_2}{4\pi k_2^2} \frac{1}{R_2} e^{ik_2 R_2} + \int_0^\infty f_2(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z} d\lambda \quad z > 0 \quad (2.3.15)$$

Vediamo, adesso, di trovare quali devono essere le condizioni al contorno sul piano  $z = 0$ .

Riscriviamo le componenti del campo elettrico e del campo magnetico nel caso in cui il vettore di Hertz è puramente assiale ( $\Pi_z$ )

$$E_r = \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial r \partial z} \quad ; \quad E_\phi = 0 \quad ; \quad E_z = \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z \quad (2.3.16)$$

$$H_r = 0 \quad ; \quad H_\phi = -\frac{k^2}{i\omega\mu} \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \quad ; \quad H_z = 0 \quad (2.3.17)$$

Supponendo che  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ , si ha, nel piano  $z = 0$ , **la continuità delle componenti tangenziali dei campi:**

$$\frac{\partial^2 \Pi_{1z}}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 \Pi_{2z}}{\partial r \partial z} \quad e \quad k_1^2 \frac{\partial \Pi_{1z}}{\partial r} = k_2^2 \frac{\partial \Pi_{2z}}{\partial r} \quad (z = 0) \quad (2.3.18)$$

Poichè queste relazioni valgono per tutti i valori di  $r$ , possono essere integrate rispetto ad  $r$ .

Le funzioni e le loro derivate si annullano per  $r \rightarrow \infty$  cosicchè la costante di integrazione deve essere nulla.

Le condizioni al contorno si riducono alle:

$$\frac{\partial \Pi_{1z}}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_{2z}}{\partial z} \quad ; \quad k_1^2 \Pi_{1z} = k_2^2 \Pi_{2z} \quad (z = 0) \quad (2.3.19)$$

Per imporre le condizioni al contorno (2.3.19) è conveniente esprimere "l'onda primaria  $\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right)$ " in un integrale di Fourier.

Per questo facciamo uso del **teorema di Fourier-Bessel**:



Se  $f(r)$  è una funzione tale che per  $r \rightarrow \infty$  essa tende a zero in modo che l'integrale di  $f(r)\sqrt{r}$  converga assolutamente, si ha:

$$f(r) = \int_0^\infty \lambda d\lambda \int_0^\infty \rho d\rho f(\rho) J_0(\lambda\rho) J_0(\lambda r) \quad (2.3.20)$$

Per  $f(r)$  prendiamo la funzione  $\frac{e^{ikr}}{r}$ , la (2.3.20) si scrive, quindi:

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \int_0^\infty \lambda d\lambda J_0(\lambda r) \int_0^\infty d\rho e^{ik\rho} J_0(\lambda\rho) \quad (2.3.21)$$

Sostituiamo alla funzione di Bessel  $J_0(\lambda\rho)$  la sua rappresentazione integrale data da:

$$J_n(\lambda\rho) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\lambda\rho \cos\phi + in\phi} d\phi \quad (2.3.22)$$

Nel nostro caso si ha:

$$J_0(\lambda\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\lambda\rho \cos\phi} d\phi \quad (2.3.23)$$

Ne segue, quindi:

$$\int_0^\infty d\rho e^{ik\rho} J_0(\lambda\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\beta \int_0^\infty d\rho e^{i(k+\lambda \cos\beta)\rho} \quad (2.3.24)$$

D'altra parte si ha:

$$\int d\rho e^{i(k+\lambda \cos\beta)\rho} = \frac{1}{i(k+\lambda \cos\beta)} e^{i(k+\lambda \cos\beta)\rho} + c \quad (2.3.25)$$

Per valutare l'integrale (2.3.25) fra i limiti di integrazione assegnati  $(0, \infty)$  occorre analizzare il parametro  $k$  osservando che, nel caso di un mezzo dielettrico perfetto, esso è reale.

Perchè l'integrale (2.3.25) si annulli al limite superiore occorre che  $k$  sia complesso e la sua parte immaginaria sia positiva.

In realtà nel nostro caso abbiamo due situazioni diverse:  $k_1$ , che è la costante di propagazione del mezzo 1 che è la terra, è complesso;  $k_2$ , che è la costante di propagazione del mezzo 2 che è l'aria, è reale, in quanto la supponiamo dielettrico perfetto.

Allo scopo di eseguire l'integrazione, si può assegnare all'atmosfera una piccolissima conduttività, che si può poi, dopo aver calcolato l'integrale, porre uguale a zero.

Ne segue, quindi, che:

$$\int_0^\infty d\rho e^{i(k+\lambda \cos\beta)\rho} = -\frac{1}{i(k+\lambda \cos\beta)} \quad (2.3.26)$$

Pertanto, l'integrale (2.3.24) si scrive:

$$\int_0^{\infty} d\rho e^{ik\rho} J_0(\lambda\rho) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{(k + \lambda \cos \beta)} d\beta \quad (2.3.27)$$

L'integrale al secondo membro della (2.3.27) equivale ad una integrazione lungo un circuito chiuso.

Poniamo  $u = e^{i\beta} \implies du = ie^{i\beta} d\beta = iud\beta$ ;  $d\beta = \frac{du}{iu}$ . Si ha:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\beta}{k + \lambda \cos \beta} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\beta}{k + \lambda \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2}} = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{du}{iu \left[ k + \lambda \frac{(1+u^2)}{2u} \right]} = \frac{1}{\pi} \oint \frac{du}{2ku + \lambda(1+u^2)} \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

Considerando che:  $2ku + \lambda(1+u^2) = \lambda u^2 + 2ku + \lambda = \lambda(u-u_1)(u-u_2)$  dove  $u_1$  e  $u_2$  sono le radici dell'equazione  $\lambda u^2 + 2ku + \lambda = 0$ , possiamo scrivere:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\beta}{k + \lambda \cos \beta} = \frac{1}{\pi\lambda} \oint \frac{du}{(u-u_1)(u-u_2)} \quad (2.3.29)$$

Poichè il modulo di  $u$  è uguale a 1, il cammino di integrazione è la circonferenza di raggio 1 con centro nell'origine del piano complesso  $u$ .

Le radici  $u_1$  e  $u_2$  sono:

$$u_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - \lambda^2}}{\lambda} \quad u_2 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - \lambda^2}}{\lambda} \quad (2.3.30)$$

e, poichè il loro prodotto è l'unità  $\left(\frac{\lambda}{\lambda}\right)$ ,  $u_1$  cade all'interno del cerchio ed  $u_2$  all'esterno.

Ne segue, quindi, che per il teorema dei residui di Cauchy:

$$\oint \frac{du}{(u-u_1)(u-u_2)} = \frac{2\pi i}{u_1 - u_2} \quad (2.3.31)$$

Si ha quindi che:

$$\int_0^{\infty} d\rho e^{ik\rho} J_0(\lambda\rho) = \frac{2i}{\lambda(u_1 - u_2)} \quad (2.3.32)$$

che per le (2.3.30) si può scrivere:

$$\int_0^{\infty} d\rho e^{ik\rho} J_0(\lambda\rho) = \frac{2i}{\lambda \left[ 2 \frac{\sqrt{k^2 - \lambda^2}}{\lambda} \right]} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \quad (2.3.33)$$

Per conseguenza:

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \lambda d\lambda \quad (2.3.34)$$

La (2.3.34) rappresenta l'eccitazione primaria  $\frac{e^{ikR}}{R}$  su tutto il piano  $z = 0$  come somma di onde cilindriche elementari, le cui ampiezze sono espresse dalla funzione  $\lambda(\lambda^2 - k^2)^{-1/2}$ .

Dalla (2.3.12) si deduce immediatamente una rappresentazione in un punto qualsiasi:

$$\frac{e^{ik_1 R_1}}{R_1} = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r) e^{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \lambda d\lambda \quad z < 0 \quad (2.3.35)$$

$$\frac{e^{ik_2 R_2}}{R_2} = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z}}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \lambda d\lambda \quad z > 0 \quad (2.3.36)$$

Pertanto, il vettore di Hertz del campo risultante è, dalla (2.3.14) e (2.3.15):

$$\Pi_{1z} = \int_0^\infty \left\{ \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi k_1^2} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} + f_1(\lambda) \right\} J_0(\lambda r) e^{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} d\lambda \quad z < 0 \quad (2.3.37)$$

$$\Pi_{2z} = \int_0^\infty \left\{ \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi k_2^2} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} + f_2(\lambda) \right\} J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z} d\lambda \quad z > 0 \quad (2.3.38)$$

dove le funzioni  $f_1(\lambda)$  e  $f_2(\lambda)$  devono essere determinate dalle condizioni al contorno (2.3.19) che qui riscriviamo:

$$\frac{\partial \Pi_{1z}}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_{2z}}{\partial z} \quad ; \quad k_1^2 \Pi_{1z} = k_2^2 \Pi_{2z} \quad (z = 0) \quad (2.3.19)$$

Perchè sia verificata la prima delle (2.3.19) dobbiamo effettuare la derivata parziale rispetto a  $z$  delle (2.3.37) e (2.3.38).

Per semplificare i calcoli osserviamo che la prima parte dell'integrale (2.3.37) e (2.3.38) altro non è che il campo primario  $\frac{e^{ikR}}{R}$  e per esso si può facilmente verificare che:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikR}}{R} \right]_{z=0} = 0 \quad \text{dove} \quad R = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (2.3.39)$$

La prima delle (2.3.19) si scrive, quindi:

$$\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} f_1(\lambda) + \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} f_2(\lambda) = 0 \quad (2.3.40)$$

La seconda delle (2.3.19) dà come risultato:

$$\frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} + k_1^2 f_1(\lambda) = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} + k_2^2 f_2(\lambda) \quad (2.3.41)$$

che si può scrivere:

$$k_1^2 f_1(\lambda) - k_2^2 f_2(\lambda) = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} - \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \quad (2.3.42)$$

Risolvendo il sistema dato dalla (2.3.40) e dalla (2.3.42) si ha:

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} \\ \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} - \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} & -k_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} & \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} \\ k_1^2 & -k_2^2 \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{-\frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \lambda + \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \frac{\lambda \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}}{- \left[ k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} \right]} = \frac{\frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \lambda \left( -1 + \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \right)}{- \left[ k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} \right]} = \\ &= \lambda \left( \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \right) \left( \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \right) \cdot \left\{ \frac{1}{- \left[ k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} \right]} \right\} \quad (2.3.43) \end{aligned}$$

Analogamente

$$f_2(\lambda) = \lambda \left( \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \right) \left( \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \right) \cdot \left\{ \frac{1}{- \left[ k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} \right]} \right\} \quad (2.3.44)$$

Sostituendo le espressioni (2.3.43) e (2.3.44) nella (2.3.37) e (2.3.38) si trova:

$$\begin{aligned} \Pi_{1z} &= \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \left[ \frac{1}{k_1^2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \right] J_0(\lambda r) e^{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} d\lambda = \\ &= \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \frac{k_2^2 + k_1^2}{k_1^2} \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r) e^{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z}}{N} \lambda d\lambda \quad (z < 0) \quad (2.3.45) \end{aligned}$$

$$\Pi_{2z} = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_2^2} \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z}}{N} \lambda d\lambda \quad (z > 0) \quad (2.3.46)$$

dove  $N = k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$  è il famoso “**denominatore di Sommerfeld**”.

In questo modo si ottiene una soluzione formale in funzione di integrali definiti esprimendo il vettore di Hertz del campo risultante in tutti i punti sopra e sotto la superficie.

## 2.4 - Dipolo verticale ad un'altezza $h$ dal suolo

Supponiamo adesso che l'antenna dipolare verticale si trovi ad un'altezza  $h$  dal suolo

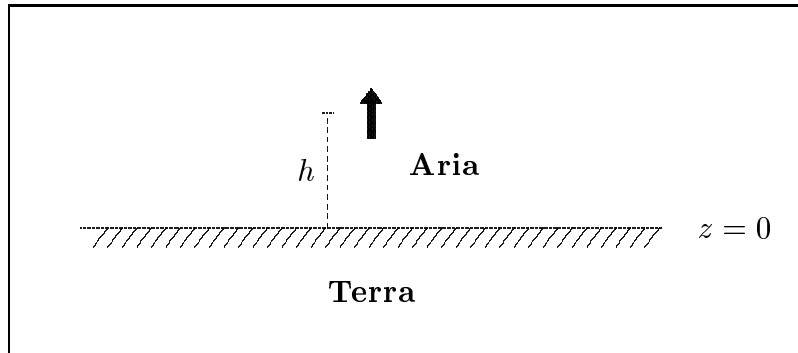


fig.2.4-1

Distinguiamo tre regioni:

- Aria  $z > h$ : in questa regione, la soluzione dell'equazione di Helmholtz è data ancora dalla somma di un integrale particolare e dell'integrale generale dell'omogenea associata.

Abbiamo, cioè, il campo primario che diventa singolare per  $z = h$ ,  $r = 0$  (la posizione del dipolo) e il campo secondario che è dovuto alle correnti indotte nel suolo ed è regolare dappertutto.

In analogia con la formula (2.3.36) possiamo scrivere:

$$\Pi_{\text{primario}} = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi k_2^2} \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}(z-h)}}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \lambda d\lambda \quad (z > h) \quad (2.4.1)$$

ed in analogia con la (2.3.15):

$$\Pi_{\text{secondario}} = \int_0^\infty f_2(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}(z+h)} d\lambda \quad (z > h) \quad (2.4.2)$$

Per convenienza, abbiamo moltiplicato la funzione integranda della (2.4.2) per il fattore  $e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}h}$ ; ciò è stato possibile perchè è una funzione di  $\lambda$  e quindi verrà tenuto conto di questo nella valutazione di  $f_2(\lambda)$ .

- Strato d'aria compreso fra  $0 < z < h$ : anche qui abbiamo un campo primario ed un campo secondario. Poichè è  $z < h$  si ha:

$$\Pi_{\text{primario}} = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi k_2^2} \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}(z-h)}}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \lambda d\lambda \quad (0 < z < h) \quad (2.4.3)$$

Per il campo secondario resta valida la (2.4.2) cioè:

$$\Pi_{\text{secondario}} = \int_0^\infty f_2(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}(z+h)} d\lambda \quad (0 < z < h) \quad (2.4.4)$$

- Terra  $-\infty < z < 0$ : qui ovviamente non vi è eccitazione primaria in quanto il dipolo si trova fuori dalla regione in considerazione quindi il vettore di Hertz deve soddisfare alla equazione di Helmholtz omogenea.

Esso si scrive:

$$\Pi_E = \int_0^\infty f_E(\lambda) J_0(\lambda r) e^{\sqrt{\lambda^2 - k_E^2} z} e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} h} d\lambda \quad (-\infty < z < 0) \quad [E : \text{Earth}] \quad (2.4.5)$$

dove, come per la (2.4.2) e la (2.4.4), abbiamo moltiplicato per il fattore  $e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} h}$ .

Si tratta, adesso, di determinare le funzioni  $f_2(\lambda)$  ed  $f_E(\lambda)$  perchè siano soddisfatte le condizioni al contorno sulla superficie della Terra.

Esse sono sempre le (2.3.19) che riscriviamo:

$$\frac{\partial \Pi_E}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_2}{\partial z} \quad ; \quad k_E^2 \Pi_E = k_2^2 \Pi_2 \quad (z = 0) \quad (2.4.6)$$

dove  $\Pi_2$  è la somma della (2.4.3) e (2.4.4).

La prima delle (2.4.6) si traduce in:

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} h} \left[ \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi k_2^2} \lambda - \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} f_2(\lambda) - \sqrt{\lambda^2 - k_E^2} f_E(\lambda) \right] d\lambda = 0 \quad (2.4.7)$$

La seconda delle (2.4.6) si scrive:

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} h} \left[ \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi k_2^2} \frac{\lambda k_2^2}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} + k_2^2 f_2(\lambda) - k_E^2 f_E(\lambda) \right] d\lambda = 0 \quad (2.4.8)$$

Esse sono soddisfatte se:

$$\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} f_2(\lambda) + \sqrt{\lambda^2 - k_E^2} f_E(\lambda) = \lambda \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi k_2^2} \quad (2.4.9)$$

$$k_2^2 f_2(\lambda) - k_E^2 f_E(\lambda) = -\frac{i\omega p \mu_0}{4\pi k_2^2} \frac{\lambda k_2^2}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \quad (2.4.10)$$

Risolvendo il sistema (2.4.9) e (2.4.10), si ha:

$$f_2(\lambda) = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi k_2^2} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \frac{k_E^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} - k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_E^2}}{k_E^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_E^2}} \quad (2.4.11)$$

$$f_E(\lambda) = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi k_2^2} \frac{2\lambda k_2^2}{k_E^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_E^2}} \quad (2.4.12)$$

Per studiare meglio il significato fisico delle espressioni trovate per i campi, scriviamo la (2.4.11) nella seguente forma:

$$f_2(\lambda) = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi k_2^2} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \left( 1 - \frac{2k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_E^2}}{k_E^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_E^2}} \right) \quad (2.4.13)$$

che è stata derivata dalla (2.4.11) dopo avere aggiunto e sottratto al numeratore il termine  $k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_E^2}$ .

Sostituendo la (2.4.13), i campi secondari (2.4.2) e (2.4.4) in aria si possono scrivere:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{secondario}} = & \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi k_2^2} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}(z+h)} d\lambda \\ & - \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi k_2^2} \int_0^\infty \frac{2k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_E^2} J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}(z+h)}}{\left(k_E^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_E^2}\right) \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \lambda d\lambda \quad \begin{array}{l} (z > h) \\ (0 < z < h) \end{array} \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

**Si evince immediatamente che il primo termine della (2.4.14) rappresenta un campo primario irradiato da un dipolo verticale che dista  $R' = \sqrt{r^2 + (z+h)^2}$  da un punto  $P$  in aria.** Il dipolo "virtuale" si trova, cioè, nella posizione immagine del dipolo reale.

Scrivendo, quindi, nella forma originale i campi primari, possiamo dedurre che la soluzione generale del nostro problema sia per  $z > 0$  che per  $z < 0$  è:

$$\Pi = \frac{e^{ik_2 R}}{R} + \frac{e^{ik_2 R'}}{R'} - 2 \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi k_2^2} \int_0^\infty J_0(\lambda r) d\lambda \frac{k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_E^2} \lambda e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}(z+h)}}{\left(k_E^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_E^2}\right) \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}$$

$(z > 0)$  dove  $R = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}$  e  $R' = \sqrt{r^2 + (z+h)^2}$

(2.4.15)

e, sostituendo la (2.4.12) nella (2.4.5)

$$\Pi_E = 2 \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi k_2^2} \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{\sqrt{\lambda^2 - k_E^2} z} e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} h} \frac{k_2^2 \lambda d\lambda}{\left(k_E^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_E^2}\right)} \quad (z < 0)$$

(2.4.16)

È immediato verificare che per  $h = 0$ , risultano verificate le formule (2.3.45) e (2.3.46) ed inoltre nell'ipotesi di unico mezzo omogeneo ( $k_2 = k_E$ ) si ha  $\Pi_{z>0} = \frac{e^{ik_2 R}}{R}$ .

Consideriamo, adesso, il caso speciale che la terra sia perfettamente conduttrice.

In questo caso si ha, dunque:  $|k_E^2| \rightarrow \infty$ . Ricordando che  $k_E^2 = \omega^2 \epsilon \mu + i \mu \sigma \omega = (\beta + i\alpha)^2$  ne segue immediatamente che l'esponenziale della (2.4.16) tende a zero ( $z < 0$ ) così come la frazione della funzione integranda. Analogamente la funzione integranda della (2.4.15) tende a zero al tendere di  $|k_E^2| \rightarrow \infty$ .

Si ha pertanto che nel caso di terra perfettamente conduttrice:

$$\Pi = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR'}}{R'} \quad , \quad \Pi_E = 0 \quad (2.4.17)$$

Resta così confermata rigorosamente la validità della teoria delle immagini per terra infinitamente conduttrice.

Vediamo adesso come si approssima la (2.4.15) nell'ipotesi in cui pur non essendo  $|k_E^2| \rightarrow \infty$ , esso risulti abbastanza grande.

Segue immediatamente che nel denominatore della funzione integranda si può trascurare il termine  $k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_E^2}$  rispetto al termine  $k_E^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$  e nel numeratore possiamo scrivere (per tutti i valori di  $\lambda$  non troppo grandi)

$$\sqrt{\lambda^2 - k_E^2} = k_E \sqrt{-1 + \frac{\lambda^2}{k_E^2}} \simeq +ik_E \quad (2.4.18)$$

Si ottiene così la seguente formula:

$$\Pi = \frac{e^{ik_2 R}}{R} + \frac{e^{ik_2 R'}}{R'} + 2i \frac{k_2^2}{k_E} \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi k_2^2} \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}(z+h)} \frac{\lambda d\lambda}{\left(\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}\right)^2} \quad (z > 0) \quad (2.4.19)$$

Una intuitiva interpretazione dell'ultimo integrale può essere ottenuta come segue: Definiamo una distanza  $R'' = \sqrt{r^2 + (z+h')^2}$ , per essa si ha:

$$\frac{e^{ik_2 R''}}{R''} = \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}(z+h')} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \int_h^\infty \frac{e^{ik_2 R''}}{R''} dh' &= \int_h^\infty dh' \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}(z+h')} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} = \\ &= \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}z} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \int_h^\infty e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}h'} dh' \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

Tenendo conto che:  $\int_h^\infty e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}h'} dh' = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}h}$  si ha:

$$\int_h^\infty \frac{e^{ik_2 R''}}{R''} dh' = \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}(z+h)} \frac{\lambda d\lambda}{\left(\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}\right)^2} \quad (2.4.21)$$

che è identico all'integrale della (2.4.19) che, quindi, si può scrivere:

$$\Pi = \frac{e^{ik_2 R}}{R} + \frac{e^{ik_2 R'}}{R'} + 2i \frac{k_2^2}{k_E} \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi k_2^2} \int_h^\infty \frac{e^{ik_2 R''}}{R''} dh' \quad (z > 0) \quad (2.4.22)$$

L'integrale della (2.4.22) [e della (2.4.19)] rappresenta il campo generato da un continuo di dipoli "immagine" situati sulla semiretta che contiene i punti da  $z = -h$  ed  $r = 0$  a  $z = -\infty$  ed  $r = 0$ .



Dalle formule sopra ricavate (2.4.15) e (2.4.16) noi possiamo dedurre i campi  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$  per differenziazione.

Gli integrali nella (2.4.15) e (2.4.16) non sono ancora univocamente determinati a causa delle radici quadrate

$$\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} \quad \text{e} \quad \sqrt{\lambda^2 - k_E^2} \quad (2.4.23)$$

che compaiono in essi. Scegliamo il segno per cui la parte reale è positiva, in modo da assicurare la convergenza dell'integrale a zero per  $z \rightarrow \pm\infty$ .

Nell'effettuare l'integrazione dobbiamo evitare i punti di diramazione  $\lambda = k_2$  e  $\lambda = k_E$

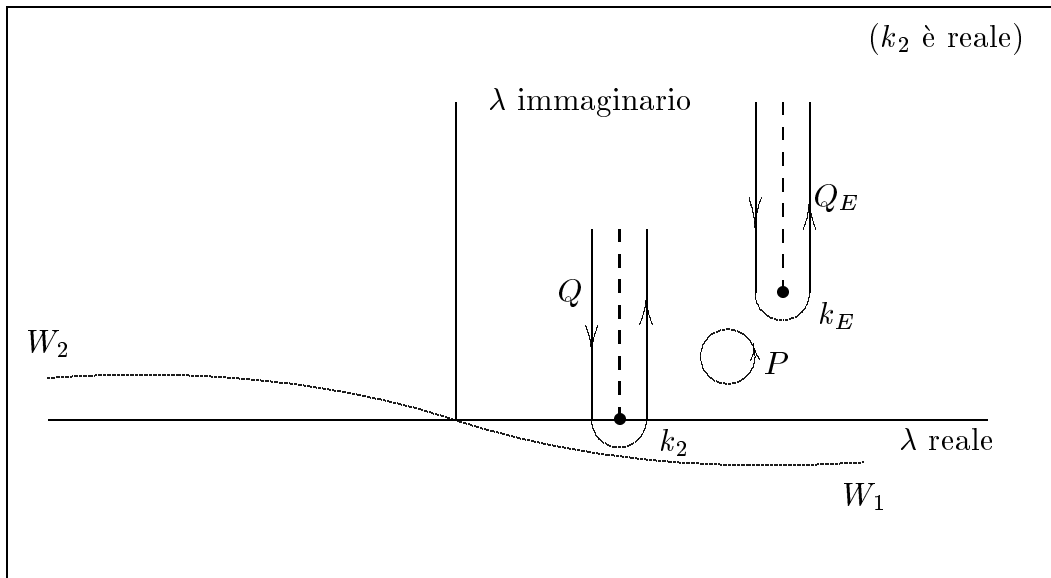


fig.2.4-2

Per risolvere gli integrali utilizziamo l'identità:

$$J_0(x) = \frac{1}{2} [H_0^{(1)}(x) + H_0^{(2)}(x)] \quad (2.4.24)$$

e la proprietà che  $H_0^{(2)}(x) = -H_0^{(1)}(-x)$ .

In particolare vediamo di risolvere gli integrali (2.3.45) e (2.3.46) quando, cioè  $h = 0$ . Consideriamo la (2.3.46), si ha:

$$\Pi = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \frac{k_E^2 + k_2^2}{k_2^2} \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z}}{k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_E^2} + k_E^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \lambda d\lambda \quad (z > 0) \quad (2.4.25)$$

Sostituendo la (2.4.24) nella (2.4.25) si ottiene:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \frac{k_E^2 + k_2^2}{k_2^2} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{H_0^{(1)}(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z}}{k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_E^2} + k_E^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \lambda d\lambda + \\ & + \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \frac{k_E^2 + k_2^2}{k_2^2} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{H_0^{(2)}(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z}}{k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_E^2} + k_E^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \lambda d\lambda \end{aligned}$$

Consideriamo il secondo integrale e poniamo  $\lambda = -\xi \implies d\lambda = -d\xi$ ; si ha:

$$\int_0^{\infty} \frac{H_0^{(2)}(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z}}{k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_E^2} + k_E^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \lambda d\lambda = \int_0^{-\infty} \frac{H_0^{(2)}(-\xi r) e^{-\sqrt{\xi^2 - k_2^2} z}}{k_2^2 \sqrt{\xi^2 - k_E^2} + k_E^2 \sqrt{\xi^2 - k_2^2}} \xi d\xi$$

Essendo  $H_0^{(2)}(-\xi r) = -H_0^{(1)}(\xi r)$  e chiamando  $\xi$  con  $\lambda$ , si ha:

$$\int_0^{-\infty} \frac{H_0^{(2)}(-\xi r) e^{-\sqrt{\xi^2 - k_2^2} z}}{k_2^2 \sqrt{\xi^2 - k_E^2} + k_E^2 \sqrt{\xi^2 - k_2^2}} \xi d\xi = \int_{-\infty}^0 \frac{H_0^{(1)}(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z}}{k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_E^2} + k_E^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \lambda d\lambda$$

Pertanto:

$$\Pi = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi k_2^2} \frac{k_E^2 + k_2^2}{k_2^2} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_0^{(1)}(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z}}{k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_E^2} + k_E^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \lambda d\lambda \quad (z > 0) \quad (2.4.26)$$

Osserviamo anzitutto che la (2.4.26) soddisfa la condizione di radiazione all'infinito perchè sia in essa che nella funzione che descrive l'onda primaria entra in gioco solo la funzione di Hankel di ordine (1). Oltre alle singolarità  $k_2$  e  $k_E$ , nella (2.4.26) vi è una ulteriore singolarità nella funzione integranda data dal valore di  $\lambda$  per cui si annulla il denominatore tutto.

Questo valore di  $\lambda$  è denotato da

$$\lambda = p_0$$

Questo corrisponde a un polo della funzione integranda e deve essere evitato effettuando l'integrazione in un circuito  $P$ . Non abbiamo disegnato i percorsi che congiungono  $P$  all'infinito perchè nell'integrazione essi si cancellano l'un l'altro.

Delle tre componenti dell'integrale  $Q, Q_E, P$  possiamo ignorare il contributo di  $Q_E$  per grandi valori di  $|k_E|$ , poichè  $H'(\lambda r)$  tende a zero esponenzialmente per grandi distanze dall'asse reale. Consideriamo prima  $P$  separatamente.

Dalla definizione di  $p_0$  si ha:

$$k_2^2 \sqrt{p_0^2 - k_E^2} + k_E^2 \sqrt{p_0^2 - k_2^2} = 0$$

che si può scrivere  $\sqrt{\frac{p_0^2 - k_2^2}{p_0^2 - k_E^2}} = -\frac{k_2^2}{k_E^2}$ .

Quadrando e isolando  $p_0^2$  si ha:

$$p_0^2 = \frac{k_2^2 k_E^2}{k_2^2 + k_E^2} \quad (2.4.27)$$

che si può anche scrivere come

$$\frac{1}{p_0^2} = \frac{1}{k_2^2} + \frac{1}{k_E^2}$$

Nel caso in cui  $|k_E| \gg k_2$  si ha:

$$p_0 = \frac{k_2 k_E}{k_E \sqrt{1 + \frac{k_2^2}{k_E^2}}} \simeq k_2 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{k_2^2}{k_E^2} \right) \quad (2.4.28)$$

avendo utilizzato lo sviluppo in serie  $(1 + \delta)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 + \dots$ .

Osserviamo, comunque, che il preciso valore di  $p_0$  è simmetrico sia rispetto a  $k_2$  che rispetto a  $k_E$ .

Vogliamo valutare l'integrale su  $P$  applicando il teorema dei residui. Il risultato è:

$$\begin{aligned} & \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \frac{k_E^2 + k_2^2}{2k_2^2} 2\pi i \lim_{\lambda \rightarrow p_0} \left\{ (\lambda - p_0) \frac{[H_0^{(1)}(\lambda r)] e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z}}{k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + k_E^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \lambda \right\} = \\ & = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \frac{k_E^2 + k_2^2}{2k_2^2} 2\pi i p_0 [H_0^{(1)}(p_0 r)] e^{-\sqrt{p_0^2 - k_2^2} z} \lim_{\lambda \rightarrow p_0} \left[ \frac{(\lambda - p_0)}{k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + k_E^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \right] \end{aligned}$$

il limite della funzione fra parentesi quadre è una forma indeterminata  $\frac{0}{0}$ . Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow p_0} \left[ \frac{(\lambda - p_0)}{k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + k_E^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \right] &= \lim_{\lambda \rightarrow p_0} \frac{\frac{d}{d\lambda}(\lambda - p_0)}{\frac{d}{d\lambda} (k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + k_E^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2})} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow p_0} \frac{1}{k_2^2 \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} + k_E^2 \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}} = \\ &= \frac{1}{p_0 \frac{k_2^2}{\sqrt{p_0^2 - k_2^2}} + \frac{k_E^2}{\sqrt{p_0^2 - k_2^2}}} \end{aligned}$$

Ne segue quindi che il contributo di  $p_0$  alla (2.4.25) è:

$$\Pi^{(p_0)} = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \frac{k_E^2 + k_2^2}{k_2^2} \frac{1}{2} \frac{2\pi i}{\frac{k_2^2}{\sqrt{p_0^2 - k_2^2}} + \frac{k_E^2}{\sqrt{p_0^2 - k_2^2}}} [H_0^{(1)}(p_0 r)] e^{-\sqrt{p_0^2 - k_2^2} z} \quad (2.4.29)$$

Analogamente per  $z < 0$  (terra) basta cambiare  $k_2$  con  $k_E$  e viceversa ed il segno di  $z$ . Si ha:

$$\Pi_E^{(p_0)} = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \frac{k_E^2 + k_2^2}{k_E^2} \frac{1}{2} \frac{2\pi i}{\frac{k_E^2}{\sqrt{p_0^2 - k_2^2}} + \frac{k_2^2}{\sqrt{p_0^2 - k_2^2}}} [H_0^{(1)}(p_0 r)] e^{+\sqrt{p_0^2 - k_2^2} z} \quad (2.4.30)$$

Tranne che per l'immediato intorno della trasmittente, diciamo che per tutte le distanze  $|p_0 r| \gg 1$  possiamo sostituire  $H_0^{(1)}$  con il suo valore asintotico:

$$H_\nu^{(1)}(\xi) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi \xi}} e^{i(\xi - \nu\pi/2 - \pi/4)}$$

Per  $\nu = 0$  si ottiene  $H_0^{(1)}(\xi) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi \xi}} e^{i(\xi - \pi/4)}$  e sostituendo nella (2.4.29) si ha:

$$\Pi^{(p_0)} = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \frac{k_E^2 + k_2^2}{k_2^2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{p_0 r}} \frac{2i}{\frac{k_2^2}{\sqrt{p_0^2 - k_E^2}} + \frac{k_E^2}{\sqrt{p_0^2 - k_2^2}}} e^{ip_0 r - \sqrt{p_0^2 - k_2^2} z} e^{-i\pi/4} \quad (z > 0) \quad (2.4.31)$$

Ma:

$$e^{-i\pi/4} = \left(e^{-i\pi/2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-i} = \pm i\sqrt{i} \quad (2.4.32)$$

Scegliendo il segno meno nella (2.4.32) si ha:

$$\Pi^{(p_0)} = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \frac{k_E^2 + k_2^2}{k_2^2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi i}{p_0 r}} \frac{2}{\frac{k_2^2}{\sqrt{p_0^2 - k_E^2}} + \frac{k_E^2}{\sqrt{p_0^2 - k_2^2}}} e^{ip_0 r - \sqrt{p_0^2 - k_2^2} z} \quad (z \geq 0) \quad (2.4.33)$$

e analogamente:

$$\Pi_E^{(p_0)} = \frac{i\omega p \mu_0}{4\pi} \frac{k_E^2 + k_2^2}{k_2^E} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi i}{p_0 r}} \frac{2}{\frac{k_2^2}{\sqrt{p_0^2 - k_E^2}} + \frac{k_E^2}{\sqrt{p_0^2 - k_2^2}}} e^{ip_0 r + \sqrt{p_0^2 - k_E^2} z} \quad (z \leq 0) \quad (2.4.34)$$

Queste formule contengono tutte le caratteristiche delle "onde superficiali" ed hanno le seguenti proprietà:

1. Esse viaggiano sulla superficie  $z = 0$  e decrescono in entrambe le direzioni dalla superficie; nella direzione della terra esse decrescono rapidamente a causa del coefficiente  $\sqrt{p_0^2 - k_E^2}$ ; nella direzione dell'aria esse decrescono lentamente all'inizio ma esponenzialmente per larghi valori di  $z$ .
2. La propagazione lungo la superficie  $z = 0$  è data da:  $\frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{p_0}$  e quindi dipende in modo simmetrico dalle costanti del materiale, aria e terra nel nostro caso.
3. Se trascuriamo l'assorbimento nella direzione radiale, l'ampiezza della (2.4.33) e della (2.4.34) decresce come  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  all'aumentare della distanza dalla trasmittente, dove la intensità decresce come  $\frac{1}{r}$ .

A scopo di completezza vediamo di calcolare l'assorbimento esponenziale nella direzione radiale; esso è dato dalla parte reale di  $ipr$  cioè da:

$$-\frac{1}{2}k_2 r \Re \left( i \frac{k_2^2}{k_E^2} \right) \quad |k_E| \gg k_2 \quad (2.4.35)$$

D'altra parte, (vedi pagina 1-34), si ha:

$$\frac{k_2^2}{k_E^2} = \frac{-i\omega\epsilon_0}{\sigma - i\omega\epsilon} = \frac{-i\omega\epsilon_0\sigma + \omega^2\epsilon_0\epsilon}{\sigma^2 + \omega^2\epsilon^2}$$

Quindi:

$$\Re \left( i \frac{k_2^2}{k_E^2} \right) = \frac{\omega\epsilon_0\sigma}{\omega^2 \left( \epsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2} \right)} = \frac{\epsilon_0\sigma}{\omega} \frac{1}{\epsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}} \quad (2.4.36)$$

Quindi il coefficiente di assorbimento in direzione radiale è:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0\sigma}{c} \left[ \frac{1}{\epsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}} \right] \quad (2.4.37)$$

che è valido sia per  $z > 0$  che per  $z < 0$ .

Per sufficientemente alti valori di  $r$  dove la variazione relativa di  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  è piccola possiamo considerare la (2.4.33) e (2.4.34) come onde la cui origine è all'infinito nella direzione negativa dell'asse  $x$ .

Queste equazioni allora diventano:

$$\begin{aligned} \Pi &= A k_E^2 e^{ip_0x - \sqrt{p_0^2 - k_2^2} z} \\ \Pi_E &= A k_2^2 e^{ip_0x + \sqrt{p_0^2 - k_E^2} z} \end{aligned} \quad (2.4.38)$$

dove  $A$  è un fattore d'ampiezza lentamente variabile.

Queste rappresentano le cosiddette **“onde di Zenneck”** il quale nel 1907 derivò in altro modo dette onde e a quel tempo sembrò concepibile spiegare la propagazione lungo la curvatura terrestre per mezzo di tali onde; oggi sappiamo che tale propagazione è dovuta alla ionosfera.