

Modi TE e TM in cavi coassiali.

17.1 - Soluzioni dell'equazione di Helmholtz per modi TE e TM - Frequenza di cut-off.

Consideriamo un cavo coassiale: il conduttore interno di raggio a e quello esterno di raggio b .

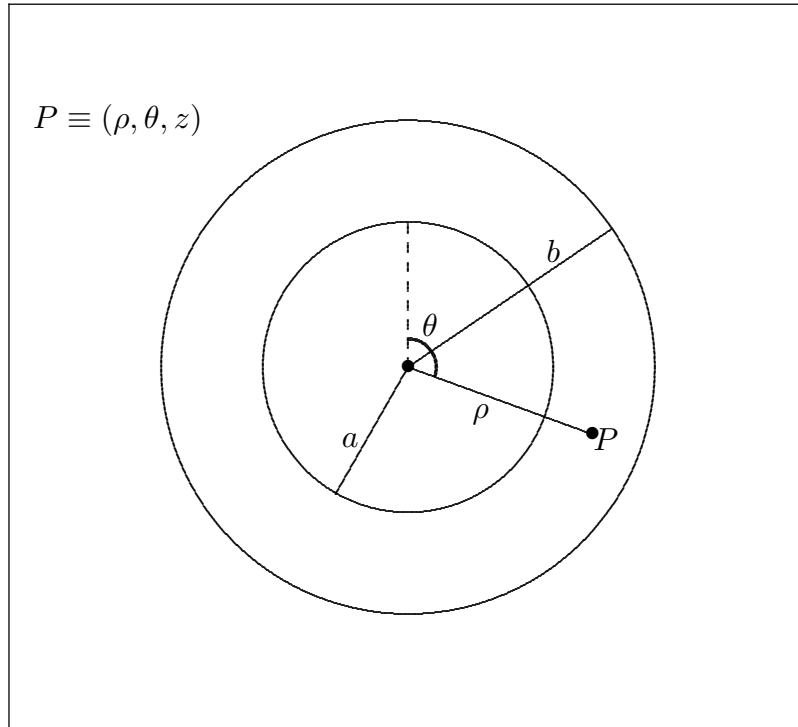


fig.17.1-1

Scriviamo l'equazione di Helmholtz in coordinate cilindriche, per esempio, consideriamo modi TM, quindi per E_z

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + h^2 E_z = 0 \quad (17.1.1)$$

Al solito, poichè alle coordinate ρ, θ, z e $\rho, \theta + 2\pi, z$ corrisponde lo stesso punto, E_z sarà funzione periodica di θ con periodo 2π ; la sviluppiamo quindi in serie di Fourier. Ovviamente il dominio che stiamo considerando è quello compreso fra i due conduttori.

$$E_z = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n(\rho) \cos n\theta + B_n(\rho) \sin n\theta \right] \quad (17.1.2)$$

dove $A_n(\rho)$ e $B_n(\rho)$ sono funzioni solo di ρ .

Sostituendo la (17.1.2) nella (17.1.1) avremo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{d^2 A_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA_n}{d\rho} - \frac{n^2 A_n}{\rho^2} + h^2 A_n \right) \cos n\theta + \left(\frac{d^2 B_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dB_n}{d\rho} - \frac{n^2 B_n}{\rho^2} + h^2 B_n \right) \sin n\theta \right] = 0 \quad (17.1.3)$$

Perchè questo sia vero occorre e basta:

$$\frac{d^2 A_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA_n}{d\rho} + \left(h^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) A_n = 0 \quad (17.1.4)$$

$$\frac{d^2 B_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dB_n}{d\rho} + \left(h^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) B_n = 0 \quad (17.1.5)$$

Ponendo $x = h\rho$ e dividendo per h^2 nelle (17.1.4) e (17.1.5) si ha:

$$\frac{d^2 A_n}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dA_n}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) A_n = 0 \quad (17.1.6)$$

$$\frac{d^2 B_n}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dB_n}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) B_n = 0 \quad (17.1.7)$$

Come sappiamo queste equazioni ammettono come soluzioni le funzioni di Bessel di 1^a e di 2^a specie, ciò è accettabile essendo il punto $\rho = 0$ escluso dalla nostra trattazione. Pertanto si ha:

$$A_n = C_n J_n(x) + D_n N_n(x) \quad (17.1.8)$$

$$B_n = E_n J_n(x) + F_n N_n(x) \quad (17.1.9)$$

Sostituendole nella (17.1.2) si ha:

$$E_z = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[C_n J_n(x) + D_n N_n(x) \right] \cos n\theta + \left[E_n J_n(x) + F_n N_n(x) \right] \sin n\theta \right\} \quad (17.1.10)$$

Le condizioni al contorno sono: $E_z = 0$ per $\rho = a$ e per $\rho = b$, quindi deve essere:

$$C_n J_n(ha) + D_n N_n(ha) = 0 \quad (17.1.11)$$

$$E_n J_n(ha) + F_n N_n(ha) = 0 \quad (17.1.12)$$

$$C_n J_n(hb) + D_n N_n(hb) = 0 \quad (17.1.13)$$

$$E_n J_n(hb) + F_n N_n(hb) = 0 \quad (17.1.14)$$

e, poichè sono, a due a due, l'una combinazione lineare dell'altra si riducono a:

$$C_n J_n(ha) + D_n N_n(ha) = 0 \quad (17.1.11)$$

$$C_n J_n(hb) + D_n N_n(hb) = 0 \quad (17.1.13)$$

si è cioè posto $E_n = C_n$ e $F_n = D_n$.

Per C_n e D_n si assumono valori tutti nulli tranne per un particolare valore m per cui si ha:

$$C_m J_m(ha) + D_m N_m(ha) = 0 \quad (17.1.15)$$

$$C_m J_m(hb) + D_m N_m(hb) = 0 \quad (17.1.16)$$

Soluzione per C_m e D_m non nulli esiste solo se

$$J_m(ha)N_m(hb) - J_m(hb)N_m(ha) = 0 \quad (17.1.17)$$

Questa equazione è soddisfatta solo per un discreto set di valori di h .

Posto $u = ha$ e tenendo conto che $hb = \frac{b}{a}ha = \frac{b}{a}u = \alpha u$ si ha

$$J_m(u)N_m(\alpha u) - J_m(\alpha u)N_m(u) = 0 \quad (17.1.18)$$

Le radici di questa equazione sono date in alcuni testi contenenti tavole di funzioni, per esempio - Handbook of mathematical functions - edited by Abramowitz p.415 -

Questo contiene soltanto le soluzioni per $m = 0$ e $m = 1$ che comunque sono sufficienti per capire l'andamento delle frequenze di cut-off.

Per un dato valore di α il più piccolo valore di u_{mr} avviene per $m = 0$; questo dà la più piccola frequenza di cut-off per questi modi.

Per $\alpha \rightarrow \infty$ significa $b \rightarrow \infty$ quindi $u_{mr} \rightarrow 0$, cioè $h \rightarrow 0$, cioè la propagazione si comporta come se avvenisse nello spazio libero.

r^{ma} radice dell'equazione $J_0(u)N_0(\alpha u) - N_0(u)J_0(\alpha u) = 0$
dove $u = ha$ e $\alpha = b/a$ è un dato del problema.

α	α^{-1}	u_{01}	u_{02}	u_{03}	u_{04}	u_{05}
1.25	0.80	12.55847	25.12877	37.69646	50.26349	62.83026
$1.\bar{6}$	0.60	4.69706	9.41690	14.13189	18.84558	23.55876
2.5	0.40	2.07322	4.17730	6.27537	8.37167	10.46723
5	0.20	0.76319	1.55710	2.34641	3.13403	3.92084
10	0.1	0.33139	0.68576	1.03774	1.38864	1.73896
12.5	0.08	0.25732	0.53485	0.81055	1.08536	1.35969
$16.\bar{6}$	0.06	0.18699	0.39079	0.59334	0.79522	0.99673
25	0.04	0.12038	0.25340	0.38570	0.51759	0.64923
50	0.02	0.05768	0.12272	0.18751	0.25214	0.31666
∞	0	0	0	0	0	0

r^{ma} radice dell'equazione $J_1(u)N_1(\alpha u) - N_1(u)J_1(\alpha u) = 0$
dove $u = ha$ e $\alpha = b/a$ è un dato del problema.

α	α^{-1}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}
1.25	0.80	12.59004	25.14465	37.70706	50.27145	62.83662
1.6	0.60	4.75805	9.44837	14.15300	18.86146	23.57148
2.5	0.40	2.15647	4.22309	6.30658	8.39528	10.48619
5	0.20	0.84715	1.61108	2.38532	3.16421	3.94541
10	0.1	0.39409	0.73306	1.07483	1.41886	1.76433
12.5	0.08	0.31223	0.57816	0.84552	1.11441	1.38440
16.6	0.06	0.23235	0.42843	0.62483	0.82207	1.02001
25	0.04	0.15400	0.28296	0.41157	0.54044	0.66961
50	0.02	0.07672	0.14062	0.20409	0.26752	0.33097
∞	0	0	0	0	0	0

Vediamo, adesso, di trovare una formula analitica per i valori delle tabelle.

Per valori di u sufficientemente grandi (e nel nostro caso va abbastanza bene essendo α certamente non grande ma maggiore di 1) possiamo esprimere le funzioni $J_m(u)$, $J_m(\alpha u)$, $N_m(u)$, $N_m(\alpha u)$ con le loro forme asintotiche

$$\begin{aligned}
 J_m(u) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos\left(u - \frac{2m+1}{4}\pi\right) \\
 N_m(u) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \sin\left(u - \frac{2m+1}{4}\pi\right)
 \end{aligned}
 \quad |u| \gg 1, |u| \gg m \quad (17.1.19)$$

$$\begin{aligned}
 J_m(\alpha u) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha u}} \cos\left(\alpha u - \frac{2m+1}{4}\pi\right) \\
 N_m(\alpha u) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha u}} \sin\left(\alpha u - \frac{2m+1}{4}\pi\right)
 \end{aligned}
 \quad |\alpha u| \gg 1, |\alpha u| \gg m \quad (17.1.20)$$

Riscriviamo l'equazione da risolvere

$$J_m(u)N_m(\alpha u) - J_m(\alpha u)N_m(u) = 0 \quad (17.1.18)$$

sostituendo le (17.1.19) e (17.1.20) si ha:

$$\cos\left(u - \frac{2m+1}{4}\pi\right) \sin\left(\alpha u - \frac{2m+1}{4}\pi\right) = \sin\left(u - \frac{2m+1}{4}\pi\right) \cos\left(\alpha u - \frac{2m+1}{4}\pi\right) \quad (17.1.21)$$

Posto $\beta = u - \frac{2m+1}{4}\pi$ e $\gamma = \alpha u - \frac{2m+1}{4}\pi$ la (17.1.21) ci restituisce

$$\cos\beta \sin\gamma - \sin\beta \cos\gamma = 0 \quad (17.1.22)$$

o ciò che è lo stesso:

$$\sin(\gamma - \beta) = 0$$

cioè

$$\sin(\alpha u - u) = 0 \implies \alpha u - u = r\pi \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (17.1.23)$$

Posto $u = ha$ e $\alpha = b/a$ nella (17.1.23), si ha:

$$hb - ha = r\pi$$

e finalmente

$$\boxed{h = \frac{r\pi}{b-a}} \quad (17.1.24)$$

La frequenza di cut-off, quindi è:

$$\boxed{\nu_c = \frac{hc}{2\pi} = \frac{c}{2\pi} \frac{r\pi}{b-a} = \frac{c}{2} \frac{r}{b-a}} \quad (17.1.25)$$

La lunghezza d'onda di cut-off è

$$\boxed{\lambda_c = \frac{2(b-a)}{r}} \quad (17.1.26)$$

N.B. Le formule valgono anche per modi alti ($m > 1$) purchè siano valide le approssimazioni.

La prima cosa importante è che se applichiamo le formule analitiche così approssimate, osserviamo che i valori sono molto simili a quelli delle tabelle; questo perchè pur essendo u piccolo per α grande αu è grande e quindi la $J(\alpha u)$ e la $N(\alpha u)$ approssima bene anche se la $J(u)$ e la $N(u)$ approssima male. Si badi che la frequenza di cut-off analitica è indipendente dall'indice m cioè dall'ordine delle funzioni di Bessel. È chiaro quindi che hanno una validità più forte per $m = 0$.

Esempio

$$\begin{aligned} a &= 0.5 \text{ cm} \\ b &= 0.8\bar{3} \text{ cm} \end{aligned} \implies b - a = 0.\bar{3} \text{ cm} \quad \frac{b}{a} = \alpha = 1.\bar{6}$$

MODO TM₀₁

$$h_{(\text{analitico})} = \frac{\pi}{0.\bar{3} \cdot 10^{-2}} = 9.4247 \cdot 10^2 \implies \nu_{c(\text{analitica})} = 45 \text{ GHz}$$

$$ha_{(\text{tabella})} = 4.69706 \implies h_{(\text{tabella})} = \frac{4.69706}{a} = 9.39412 \cdot 10^2 \implies \nu_{c(\text{tabella})} = 44.854 \text{ GHz}$$

Da ciò si vede che, dimensionando opportunamente il cavo, tenendo anche conto dell'attenuazione, si possono sopprimere i modi TM.

Modi TE.

Per i modi TE si considera l'equazione (17.1.1) riferita ad H_z con le condizioni al contorno

$$\frac{\partial H_z}{\partial \rho} = 0 \quad \text{per } \rho = a \text{ e } \rho = b \tag{17.1.27}$$

questo porta al sistema:

$$C_m J'_m(ha) + D_m N'_m(ha) = 0 \tag{17.1.28}$$

$$C_m J'_m(hb) + D_m N'_m(hb) = 0 \tag{17.1.29}$$

Posto al solito $u = ha$ e $hb = \alpha u$ con $\alpha = b/a$ il sistema ammette soluzioni se

$$J'_m(u)N'_m(\alpha u) - J'_m(\alpha u)N'_m(u) = 0 \tag{17.1.30}$$

Per $m = 0$ si ha la relazione $J'_0(u) = -J_1(u)$ e lo stesso per la funzione di Neumann quindi i modi TE_{0r} si ottengono risolvendo la

$$J_1(u)N_1(\alpha u) - J_1(\alpha u)N_1(u) = 0 \tag{17.1.31}$$

Da quanto detto prima e dalla tabella questi modi hanno frequenza di cut-off maggiore dei modi TM_{0r} quindi possono più facilmente essere soppressi.