

Diffrazione di un'onda piana da parte di una sfera.

16.1 - Sviluppo del campo diffratto.

Un'onda elettromagnetica che incide su un corpo materiale di forma qualsiasi dà origine ad oscillazioni forzate di cariche libere e legate in sincronismo al campo applicato. Questo movimento forzato di cariche provoca a sua volta un campo secondario sia all'interno che all'esterno del corpo. Il campo risultante in un punto è allora la somma vettoriale dei campi primario e secondario.

Il problema più semplice di questo genere e nello stesso tempo di grande interesse pratico è quello di un'onda piana che incide su una sfera.

Sia a il raggio della sfera, k_1 la costante di propagazione relativa al materiale di cui è costituita la sfera e k_2 quella relativa al mezzo omogeneo indefinito che circonda la sfera.

Consideriamo un'onda piana il cui vettore campo elettrico sia polarizzato linearmente nella direzione x e che si propaghi nella direzione positiva dell'asse z .

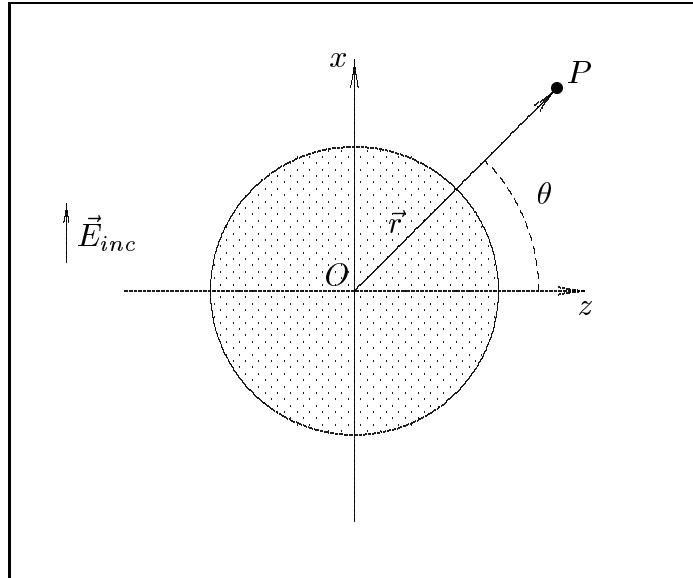


fig.16.1-1

Sviluppiamo il campo elettromagnetico incidente in funzioni d'onda vettoriali sferiche date dalle (15.7.33) e (15.7.38):

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= \hat{x}E_0e^{ik_2z - i\omega t} = E_0e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\vec{m}_{d1n}^{(1)} - i\vec{n}_{p1n}^{(1)} \right) \\ \vec{H}_i &= \hat{y} \frac{k_2}{\mu_2\omega} E_0e^{ik_2z - i\omega t} = -\frac{k_2E_0}{\mu_2\omega} e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\vec{n}_{p1n}^{(1)} + i\vec{m}_{d1n}^{(1)} \right) \end{aligned} \tag{16.1.1}$$

Il campo secondario indotto si compone di due parti: l'una valida all'interno della sfera, l'altra che soddisfa le condizioni di regolarità all'infinito e nei punti esterni. Per

analogia con i problemi relativi a superfici di separazione piane questi due campi parziali verranno indicati come onde trasmesse e riflesse, per quanto questi termini siano a rigore appropriati solo quando la lunghezza d'onda è molto minore del raggio della sfera.

Scriviamo:

$$\begin{aligned}\vec{E}_r &= E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(a_n^r \vec{m}_{d1n}^{(3)} - i b_n^r \vec{n}_{p1n}^{(3)} \right) \\ \vec{H}_r &= -\frac{k_2}{\mu_2 \omega} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(b_n^r \vec{m}_{p1n}^{(3)} + i a_n^r \vec{n}_{d1n}^{(3)} \right)\end{aligned}\tag{16.1.2}$$

che sono valide per $r > a$. Le funzioni $\vec{m}^{(3)}$ e $\vec{n}^{(3)}$ indicano la sostituzione delle funzioni di Bessel j_n con $h_n^{(1)}(k_2 r)$ nelle (15.6.16) e (15.6.17).

Analogamente:

$$\begin{aligned}\vec{E}_t &= E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(a_n^t \vec{m}_{d1n}^{(1)} - i b_n^t \vec{n}_{p1n}^{(1)} \right) \\ \vec{H}_t &= -\frac{k_1}{\mu_1 \omega} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(b_n^t \vec{m}_{p1n}^{(1)} + i a_n^t \vec{n}_{d1n}^{(1)} \right)\end{aligned}\tag{16.1.3}$$

che sono valide per $r < a$. È chiaro che l'argomento delle funzioni di Bessel j_n contenute nelle funzioni vettoriali $\vec{m}^{(1)}$ ed $\vec{n}^{(1)}$ è $k_1 r$.

Il calcolo dei coefficienti $a_n^r, b_n^r, a_n^t, b_n^t$ si effettua imponendo le condizioni al contorno, sulla superficie della sfera, dei vettori del campo.

Poichè non stiamo supponendo la sfera magnetizzata e siamo in assenza di correnti superficiali, le condizioni al contorno si riducono alla continuità delle componenti tangenziali dei vettori \vec{E} ed \vec{H} , cioè:

$$\begin{aligned}E_{\text{tang}}^{(I)} &= E_{\text{tang}}^{(II)} \\ H_{\text{tang}}^{(I)} &= H_{\text{tang}}^{(II)}\end{aligned}\quad \text{per } r = a\tag{16.1.4}$$

Esse si scrivono:

$$\begin{aligned}\hat{e}_r \times \left(\vec{E}_i + \vec{E}_r \right) &= \hat{e}_r \times \vec{E}_t \\ \hat{e}_r \times \left(\vec{H}_i + \vec{H}_r \right) &= \hat{e}_r \times \vec{H}_t\end{aligned}\quad \text{per } r = a\tag{16.1.5}$$

Si ha:

$$\hat{e}_r \times \vec{m}_{d1n}^{(3)} = \frac{1}{\sin \theta} h_n^{(1)}(k_2 r) P_n^1(\cos \theta) \cos \phi \hat{e}_\phi + h_n^{(1)}(k_2 r) \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta} \sin \phi \hat{e}_\theta\tag{16.1.6}$$

Si è tenuto conto che:

$$\begin{aligned}\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta &= \hat{e}_\phi \\ \hat{e}_r \times \hat{e}_\phi &= -\hat{e}_\theta\end{aligned}\tag{16.1.7}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}\hat{e}_r \times \vec{n}_{p1n}^{(3)} &= \frac{1}{k_2 r} \left[h_n^{(1)}(k_2 r) + r k_2 \frac{\partial h_n^{(1)}(k_2 r)}{\partial(k_2 r)} \right] \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta} \cos \phi \hat{e}_\phi + \\ &+ \frac{1}{k_2 r \sin \theta} \left[h_n^{(1)}(k_2 r) + r k_2 \frac{\partial h_n^{(1)}(k_2 r)}{\partial(k_2 r)} \right] P_n^1(\cos \theta) \sin \phi \hat{e}_\theta\end{aligned}\tag{16.1.8}$$

I prodotti $\hat{e}_r \times \vec{m}_{d1n}^{(1)}$ e $\hat{e}_r \times \vec{n}_{p1n}^{(1)}$ sono formalmente eguali alla (16.1.6) ed alla (16.1.8) pur di sostituire in esse le funzioni $h_n^{(1)}$ con le funzioni j_n e di considerare come costante di propagazione k_2 per quanto riguarda l'onda incidente e k_1 per quanto riguarda l'onda trasmessa.

16.2 - Calcolo dei coefficienti a_n^r e b_n^r

Sostituiamo la (16.1.1a), la (16.1.2a), la (16.1.3a) nella (16.1.5a) utilizzando la (16.1.6) e la (16.1.8) ed eguagliamo le componenti omologhe della parte reale e della parte immaginaria.

Si ha per ogni n :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} j_n(k_2 a) P_n^1(\cos \theta) \cos \phi + \frac{1}{\sin \theta} a_n^r h_n^{(1)}(k_2 a) P_n^1(\cos \theta) \cos \phi - \\ - \frac{1}{\sin \theta} a_n^t j_n(k_1 a) P_n^1(\cos \theta) \cos \phi = 0 \end{aligned} \quad (16.2.1)$$

$$j_n(k_2 a) \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta} \sin \phi + a_n^r h_n^{(1)}(k_2 a) \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta} \sin \phi - a_n^t j_n(k_1 a) \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta} \sin \phi = 0 \quad (16.2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_2 a} \left[\frac{\partial}{\partial(k_2 r)} (k_2 r j_n(k_2 r)) \right]_{r=a} \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta} \cos \phi + b_n^r \frac{1}{k_2 a} \left[\frac{\partial}{\partial(k_2 r)} (k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r)) \right]_{r=a} \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta} \cos \phi - \\ - b_n^t \frac{1}{k_1 a} \left[\frac{\partial}{\partial(k_1 r)} (k_1 r j_n(k_1 r)) \right]_{r=a} \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta} \cos \phi = 0 \end{aligned} \quad (16.2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_2 a \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial(k_2 r)} (k_2 r j_n(k_2 r)) \right]_{r=a} P_n^1(\cos \theta) \sin \phi + b_n^r \frac{1}{k_2 a \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial(k_2 r)} (k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r)) \right]_{r=a} \cdot \\ \cdot P_n^1(\cos \theta) \sin \phi - b_n^t \frac{1}{k_1 a \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial(k_1 r)} (k_1 r j_n(k_1 r)) \right]_{r=a} P_n^1(\cos \theta) \sin \phi = 0 \end{aligned} \quad (16.2.4)$$

La (16.2.1) e la (16.2.2) sono equivalenti a:

$$j_n(k_2 a) + a_n^r h_n^{(1)}(k_2 a) - a_n^t j_n(k_1 a) = 0 \quad (16.2.5)$$

La (16.2.3) e la (16.2.4) sono equivalenti a:

$$\frac{k_1}{k_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} [k_2 r j_n(k_2 r)] \right\}_{r=a} + b_n^r \frac{k_1}{k_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} [k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r)] \right\}_{r=a} - b_n^t \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_1 r)} [k_1 r j_n(k_1 r)] \right\}_{r=a} = 0 \quad (16.2.6)$$

Analogamente, rifacendo gli stessi calcoli relativamente alla (16.1.5b), si ottengono altre due equazioni simili alla (16.2.5) e (16.2.6). In definitiva le quattro equazioni che ci permettono di calcolare i quattro coefficienti sono:

$$a_n^t j_n(k_1 a) - a_n^r h_n^{(1)}(k_2 a) = j_n(k_2 a) \quad (16.2.7)$$

$$\mu_2 a_n^t \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_1 r)} [k_1 r j_n(k_1 r)] \right\}_{r=a} - \mu_1 a_n^r \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} [k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r)] \right\}_{r=a} = \mu_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} [k_2 r j_n(k_2 r)] \right\}_{r=a} \quad (16.2.8)$$

$$\mu_2 \frac{k_1}{k_2} b_n^t j_n(k_1 a) - \mu_1 b_n^r h_n^{(1)}(k_2 a) = \mu_1 j_n(k_2 a) \quad (16.2.9)$$

$$b_n^t \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_1 r)} [k_1 r j_n(k_1 r)] \right\}_{r=a} - \frac{k_1}{k_2} b_n^r \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} [k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r)] \right\}_{r=a} = \frac{k_1}{k_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} [k_2 r j_n(k_2 r)] \right\}_{r=a} \quad (16.2.10)$$

I coefficienti a_n^r e b_n^r competenti al campo esterno sono:

$$a_n^r = - \frac{\mu_1 j_n(k_1 a) \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} [k_2 r j_n(k_2 r)] \right\}_{r=a} - \mu_2 j_n(k_2 a) \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_1 r)} [k_1 r j_n(k_1 r)] \right\}_{r=a}}{\mu_1 j_n(k_1 a) \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} [k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r)] \right\}_{r=a} - \mu_2 h_n^{(1)}(k_2 a) \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_1 r)} [k_1 r j_n(k_1 r)] \right\}_{r=a}} \quad (16.2.11)$$

$$b_n^r = - \frac{\mu_1 j_n(k_2 a) \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_1 r)} [k_1 r j_n(k_1 r)] \right\}_{r=a} - \mu_2 \frac{k_1^2}{k_2^2} j_n(k_1 a) \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} [k_2 r j_n(k_2 r)] \right\}_{r=a}}{\mu_1 h_n^{(1)}(k_2 a) \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_1 r)} [k_1 r j_n(k_1 r)] \right\}_{r=a} - \mu_2 \frac{k_1^2}{k_2^2} j_n(k_1 a) \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} [k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r)] \right\}_{r=a}} \quad (16.2.12)$$

Se la conducibilità oppure la costante dielettrica della sfera sono grandi rispetto alla conducibilità del mezzo circostante e nello stesso tempo il raggio a della sfera non è troppo piccolo le (16.2.11) e (16.2.12) si possono semplificare con l'uso delle espressioni asintotiche, cioè se $k_1 a \gg 1$

$$j_n(k_1 a) \simeq \frac{1}{k_1 a} \cos \left(k_1 a - \frac{n+1}{2} \pi \right)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial k_1 r} [k_1 r j_n(k_1 r)] \right\}_{r=a} \simeq - \sin \left(k_1 a - \frac{n+1}{2} \pi \right)$$

e poichè $|k_1| \gg |k_2|$, nella (16.2.11) possiamo trascurare i primi termini del numeratore e del denominatore rispetto ai secondi termini e si avrà quindi:

$$a_n^r \simeq - \frac{j_n(k_2 a)}{h_n^{(1)}(k_2 a)} \quad \begin{array}{l} |k_1 a| \gg 1 \\ |k_1| \gg |k_2| \end{array} \quad (16.2.13)$$

Analogamente, poichè nella (16.2.12) prevalgono i termini contenenti $\frac{k_1^2}{k_2^2}$, si ha:

$$b_n^r \simeq - \frac{\left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} [k_2 r j_n(k_2 r)] \right\}_{r=a}}{\left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} [k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r)] \right\}_{r=a}} \quad (16.2.14)$$

Poichè $h_n^{(1)}(k_2 a) = j_n(k_2 a) + i n_n(k_2 a)$, questi coefficienti si possono anche mettere sotto la forma

$$a_n^r \simeq i e^{i\gamma_n} \sin \gamma_n, \quad b_n^r \simeq i e^{i\gamma'_n} \sin \gamma'_n \quad (16.2.15)$$

dove

$$\tan \gamma_n = \frac{j_n(k_2 a)}{n_n(k_2 a)}, \quad \tan \gamma'_n = \frac{\left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} [k_2 r j_n(k_2 r)] \right\}_{r=a}}{\left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} [k_2 r n_n(k_2 r)] \right\}_{r=a}} \quad (16.2.16)$$

È utile fare delle osservazioni sulla costituzione dei campi elettrici e magnetici relativi alla sfera.

Poichè la componente radiale di ogni funzione $\vec{m}_{d_{mn}^r}$ è nulla accade che: se i coefficienti a_n^r sono tutti nulli e sono eccitate solo le b_n^r , il campo ha una componente radiale di \vec{E} ma il vettore campo magnetico è sempre perpendicolare al raggio vettore. Ne segue quindi che il campo rappresentato dai coefficienti b_n^r è di tipo TM (trasverso magnetico). In questo caso si deve avere una distribuzione di cariche elettriche sulla superficie della sfera. Se invece sono eccitate solo le a_n^r , il campo elettrico è trasversale cioè il campo è di tipo TE.

Si può verificare facilmente che a distanze molto grandi dalla sfera, la componente radiale del campo secondario si annulla come $\frac{1}{r^2}$, mentre le componenti tangenziali $E_\theta^{(r)}$ e $E_\phi^{(r)}$ decrescono come $\frac{1}{r}$. In questa regione il campo è trasversale alla direzione di propagazione, e le componenti $E_\theta^{(r)}$ ed $E_\phi^{(r)}$ sono perpendicolari fra loro e in generale differiscono in fase. La radiazione secondaria irradiata dalla sfera è polarizzata ellitticamente. Vi sono due direzioni che fanno eccezione: infatti quando $\phi = 0$, $E_\phi^{(r)} = 0$ e quando $\phi = \frac{\pi}{2}$, $E_\theta^{(r)} = 0$. Per conseguenza la radiazione secondaria è polarizzata linearmente nella direzione dell'asse x e dell'asse y . Quanto detto sopra si riferisce alla situazione in cui l'onda incidente è polarizzata linearmente nella direzione dell'asse x . Se l'onda primaria non è polarizzata, come nel caso di luce naturale, la radiazione secondaria risulta parzialmente polarizzata e questa polarizzazione dipende dalla direzione di osservazione. Questo effetto è stato studiato a proposito della diffusione della luce da parte delle sospensioni di particelle colloidali.

Quanto sopra si evidenzia meglio esplicitando le espressioni dei campi (16.1.1), (16.1.2) e (16.1.3).

Campo elettrico incidente

$$\begin{aligned}
 E_r^{(i)} &= -E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[\vec{n}_{p1n}^{(1)} \right]_r = \\
 &= -E_0 e^{-i\omega t} \frac{\cos \phi}{k_2 r} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} (2n+1) j_n(k_2 r) P_n^1(\cos \theta) \quad (16.2.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_\theta^{(i)} &= E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[\vec{m}_{d1n}^{(1)} \right]_\theta - E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[\vec{n}_{p1n}^{(1)} \right]_\theta = \\
 &= \frac{\cos \phi}{\sin \theta} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} j_n(k_2 r) P_n^1(\cos \theta) - \\
 &\quad - \frac{\cos \phi}{k_2 r} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} \left[k_2 r j_n(k_2 r) \right] \right\} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[P_n^1(\cos \theta) \right] \quad (16.2.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_\phi^{(i)} &= E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[\vec{m}_{d1n}^{(1)} \right]_\phi - E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[\vec{n}_{p1n}^{(1)} \right]_\phi = \\
 &= -\sin \phi E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} j_n(k_2 r) \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta} + \\
 &\quad + \frac{\sin \phi}{k_2 r \sin \theta} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} \left[k_2 r j_n(k_2 r) \right] \right\} P_n^1(\cos \theta) \quad (16.2.19)
 \end{aligned}$$

Campo magnetico incidente

$$\begin{aligned}
 H_r^{(i)} &= -\frac{k_2 E_0}{\mu_2 \omega} e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[\vec{n}_{d1n}^{(1)} \right]_r = \\
 &= -\frac{E_0 \sin \phi}{\mu_2 \omega r} e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} (2n+1) j_n(k_2 r) P_n^1(\cos \theta) \quad (16.2.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_\theta^{(i)} &= -\frac{k_2 E_0}{\mu_2 \omega} e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[\vec{m}_{p1n}^{(1)} \right]_\theta - \frac{k_2 E_0}{\mu_2 \omega} e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[\vec{n}_{d1n}^{(1)} \right]_\theta = \\
 &= \frac{k_2 \sin \phi E_0}{\mu_2 \omega \sin \theta} e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} j_n(k_2 r) P_n^1(\cos \theta) - \\
 &\quad - \frac{E_0 \sin \phi}{\mu_2 \omega r} e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} \left[k_2 r j_n(k_2 r) \right] \right\} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[P_n^1(\cos \theta) \right] \quad (16.2.21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_\phi^{(i)} &= -\frac{k_2 E_0}{\mu_2 \omega} e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [\vec{m}_{p1n}^{(1)}]_\phi - \frac{k_2 E_0}{\mu_2 \omega} e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} [\vec{n}_{d1n}^{(1)}]_\phi = \\
 &= \frac{k_2 \cos \phi E_0}{\mu_2 \omega} e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} j_n(k_2 r) \frac{\partial}{\partial \theta} [P_n^1(\cos \theta)] - \\
 &\quad - \frac{E_0 \cos \phi}{\mu_2 \omega r \sin \theta} e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ \frac{\partial}{\partial (k_2 r)} [k_2 r j_n(k_2 r)] \right\} P_n^1(\cos \theta) \quad (16.2.22)
 \end{aligned}$$

Campo elettrico diffuso

$$\begin{aligned}
 E_r^{(r)} &= -E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n^r [\vec{n}_{p1n}^{(3)}]_r = \\
 &= -\frac{E_0 \cos \phi}{k_2 r} e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} (2n+1) b_n^r h_n^{(1)}(k_2 r) P_n^1(\cos \theta) \quad (16.2.23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_\theta^{(r)} &= E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n^r [\vec{m}_{d1n}^{(3)}]_\theta - E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n^r [\vec{n}_{p1n}^{(3)}]_\theta = \\
 &= \frac{\cos \phi}{\sin \theta} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n^r h_n^{(1)}(k_2 r) P_n^1(\cos \theta) - \\
 &\quad - \frac{\cos \phi}{k_2 r} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n^r \left\{ \frac{\partial}{\partial (k_2 r)} [k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r)] \right\} \frac{\partial}{\partial \theta} [P_n^1(\cos \theta)] \quad (16.2.24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_\phi^{(r)} &= E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n^r [\vec{m}_{d1n}^{(3)}]_\phi - E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n^r [\vec{n}_{p1n}^{(3)}]_\phi = \\
 &= -\sin \phi E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n^r h_n^{(1)}(k_2 r) \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta} + \\
 &\quad + \frac{\sin \phi}{k_2 r \sin \theta} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n^r \left\{ \frac{\partial}{\partial (k_2 r)} [k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r)] \right\} P_n^1(\cos \theta) \quad (16.2.25)
 \end{aligned}$$

Campo magnetico diffuso

$$\begin{aligned}
 H_r^{(r)} &= -\frac{k_2}{\omega \mu_2} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n^r [\vec{n}_{d1n}^{(3)}]_r = \\
 &= -\frac{\sin \phi}{\mu_2 \omega r} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} (2n+1) a_n^r h_n^{(1)}(k_2 r) P_n^1(\cos \theta) \quad (16.2.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{\theta}^{(r)} &= -\frac{k_2}{\omega\mu_2} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n^r \left[\vec{m}_{p1n}^{(3)} \right]_{\theta} - \frac{k_2}{\omega\mu_2} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n^r \left[\vec{n}_{d1n}^{(3)} \right]_{\theta} = \\
 &= \frac{k_2 \sin \phi}{\mu_2 \omega \sin \theta} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n^r h_n^{(1)}(k_2 r) P_n^1(\cos \theta) - \\
 &\quad - \frac{\sin \phi}{\mu_2 \omega r} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n^r \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} \left[k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r) \right] \right\} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[P_n^1(\cos \theta) \right] \quad (16.2.27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{\phi}^{(r)} &= -\frac{k_2}{\omega\mu_2} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n^r \left[\vec{m}_{p1n}^{(3)} \right]_{\phi} - \frac{k_2}{\omega\mu_2} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n^r \left[\vec{n}_{d1n}^{(3)} \right]_{\phi} = \\
 &= \frac{k_2 \cos \phi}{\mu_2 \omega} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n^r h_n^{(1)}(k_2 r) \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta} - \\
 &\quad - \frac{\cos \phi}{\mu_2 \omega r \sin \theta} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n^r \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} \left[k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r) \right] \right\} P_n^1(\cos \theta) \quad (16.2.28)
 \end{aligned}$$

Dalla discussione di pagina 16-6 e dalle formule esplicite dei campi diffusi si deduce che il campo elettromagnetico diffuso da una sfera di raggio a si può considerare come sovrapposizione di un campo elettromagnetico TE e di un campo elettromagnetico TM. Le espressioni di tali campi separati sono riportati di seguito.

Campi diffusi tipo "TE" (o magnetiche)

$$E_r^{(r)} = 0$$

$$E_{\theta}^{(r)} = \frac{\cos \phi}{\sin \theta} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n^r h_n^{(1)}(k_2 r) P_n^1(\cos \theta)$$

$$E_{\phi}^{(r)} = -\sin \phi E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n^r h_n^{(1)}(k_2 r) \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta}$$

$$H_r^{(r)} = -\frac{\sin \phi}{\mu_2 \omega r} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} (2n+1) a_n^r h_n^{(1)}(k_2 r) P_n^1(\cos \theta)$$

$$H_{\theta}^{(r)} = -\frac{\sin \phi}{\mu_2 \omega r} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n^r \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} \left[k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r) \right] \right\} \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta}$$

$$H_{\phi}^{(r)} = -\frac{\cos \phi}{\mu_2 \omega r \sin \theta} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n^r \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} \left[k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r) \right] \right\} P_n^1(\cos \theta)$$

Campi diffusi tipo “TM” (o elettriche)

$$\begin{aligned}
 E_r^{(r)} &= -\frac{\cos \phi}{k_2 r} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} (2n+1) b_n^r h_n^{(1)}(k_2 r) P_n^1(\cos \theta) \\
 E_\theta^{(r)} &= -\frac{\cos \phi}{k_2 r} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n^r \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} [k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r)] \right\} \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta} \\
 E_\phi^{(r)} &= \frac{\sin \phi}{k_2 r \sin \theta} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n^r \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} [k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r)] \right\} P_n^1(\cos \theta) \\
 H_r^{(r)} &= 0 \\
 H_\theta^{(r)} &= \frac{k_2 \sin \phi}{\mu_2 \omega \sin \theta} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n^r h_n^{(1)}(k_2 r) P_n^1(\cos \theta) \\
 H_\phi^{(r)} &= \frac{k_2 \cos \phi}{\mu_2 \omega} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n^r h_n^{(1)}(k_2 r) \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta}
 \end{aligned}$$

16.3 - Radiazione totale esterna.

Il campo risultante in un punto qualsiasi esterno alla sfera è la somma dei campi primario e secondario

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r, \quad \vec{H} = \vec{H}_i + \vec{H}_r \quad (16.3.1)$$

Consideriamo una superficie sferica di raggio r concentrica alla sfera diffrangente. La normale a tale superficie coincide con il versore \hat{e}_r . Indichiamo con $\vec{S}^{(c)}$ il vettore di Poynting complesso, si ha:

$$\vec{S}^{(c)} \cdot \hat{n} = \vec{S}^{(c)} \cdot \hat{e}_r = S_r^{(c)} = \frac{1}{2} (E_\theta H_\phi^* - E_\phi H_\theta^*) \quad (16.3.2)$$

S_r indica la componente radiale del vettore di Poynting complesso; naturalmente le componenti dei campi che figurano nella (16.3.2) contengono sia quelle relative al campo incidente che quelle relative al campo diffuso (o riflesso) dalla sfera. Pertanto, la (16.3.2) si può esplicitare:

$$\begin{aligned}
 S_r^{(c)} &= \frac{1}{2} \left\{ (E_{i\theta} + E_{r\theta}) (H_{i\phi}^* + H_{r\phi}^*) - (E_{i\phi} + E_{r\phi}) (H_{i\theta}^* + H_{r\theta}^*) \right\} = \\
 &= \frac{1}{2} (E_{i\theta} H_{i\phi}^* - E_{i\phi} H_{i\theta}^*) + \frac{1}{2} (E_{r\theta} H_{r\phi}^* - E_{r\phi} H_{r\theta}^*) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} (E_{i\theta} H_{r\phi}^* + E_{r\theta} H_{i\phi}^* - E_{i\phi} H_{r\theta}^* - E_{r\phi} H_{i\theta}^*)
 \end{aligned} \quad (16.3.3)$$

La parte reale di $S_r^{(c)}$ integrata sulla superficie della sfera ci fornisce la potenza netta che la attraversa. Essa è, quindi, costituita dai seguenti tre integrali:

$$\text{I) } \operatorname{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (E_{i\theta} H_{i\phi}^* - E_{i\phi} H_{i\theta}^*) r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (16.3.4)$$

$$\text{II) } \operatorname{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (E_{r\theta} H_{r\phi}^* - E_{r\phi} H_{r\theta}^*) r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (16.3.5)$$

$$\text{III) } \operatorname{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (E_{i\theta} H_{r\phi}^* + E_{r\theta} H_{i\phi}^* - E_{i\phi} H_{r\theta}^* - E_{r\phi} H_{i\theta}^*) r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (16.3.6)$$

Il primo integrale rappresenta la potenza netta associata all'onda incidente **imperturbata** e quindi è nullo se il mezzo è un dielettrico perfetto ($\sigma_2 = 0$).

Il secondo integrale misura la potenza verso l'esterno associata all'onda secondaria o diffusa dalla sfera.

Il significato del III) integrale si evince dall'applicazione del teorema di Poynting il quale afferma che la potenza che attraversa una superficie chiusa deve essere eguale, in condizioni stazionarie, alla potenza dissipata (P_a) all'interno del volume, cioè:

$$P_{\text{II}} + P_{\text{III}} = -P_a \quad (16.3.7)$$

da cui

$$P_{\text{III}} = -P_{\text{II}} - P_a \quad (16.3.8)$$

P_{III} rappresenta, quindi, la potenza totale sottratta all'onda primaria e dissipata come calore ed energia irradiata. Nel nostro caso P_a rappresenta la potenza assorbita dalla sfera (e trasformata in calore) a causa della sua conducibilità non nulla.

Per calcolare P_{III} e P_{II} che chiameremo rispettivamente P_t (potenza totale) e P_d (potenza diffusa) consideriamo "far field" in modo da potere introdurre nelle espressioni dei campi le espressioni asintotiche delle funzioni di Bessel.

16.4 - Calcolo della potenza diffusa e totale

Per il calcolo della potenza diffusa, per mezzo della (16.3.5), occorre, come si vede dalle formule per i campi (16.2.24) e (16.2.28), (16.2.25) e (16.2.27), la valutazione dei seguenti integrali di cui diamo il risultato:

$$\text{a) } \int_0^\pi \frac{1}{\sin \theta} P_n^1(\cos \theta) \frac{\partial P_m^1}{\partial \theta} \sin \theta d\theta = 0 \quad \forall n, m \quad (16.4.1)$$

$$\text{b) } \int_0^\pi \frac{1}{\sin^2 \theta} P_n^1(\cos \theta) P_m^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{(n+1)!}{(n-1)!} & m = n \end{cases} \quad (16.4.2)$$

$$\text{c) } \int_0^\pi \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta} \frac{\partial P_m^1}{\partial \theta} \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{n(n+1)}{2n+1} (2n^2 - 1) & m = n \end{cases} \quad (16.4.3)$$

Pertanto procediamo alla valutazione dell'integrale (16.3.5) per il calcolo della potenza diffusa.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (E_{r\theta} H_{r\phi}^* - E_{r\phi} H_{r\theta}^*) r^2 \sin \theta d\theta d\phi = -\frac{\pi}{2\mu_2\omega r} E_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} i^{2n+1} \left[\frac{2n+1}{n(n+1)} \right]^2 \cdot \\
 & \cdot |a_n^r|^2 h_n^{(1)}(k_2 r) \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} \left(k_2 r h_n^{(1)*}(k_2 r) \right) \right\} r^2 \frac{(n+1)!}{(n-1)!} - \frac{\pi}{2\mu_2\omega r} E_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n i^{2n+1} \cdot \\
 & \cdot \left[\frac{2n+1}{n(n+1)} \right]^2 |b_n^r|^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} \left(k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r) \right) \right\} h_n^{(1)*}(k_2 r) r^2 \frac{n(n+1)}{2n+1} (2n^2 - 1) - \frac{\pi}{2\mu_2\omega r} \cdot \\
 & \cdot E_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} i^{2n+1} \left[\frac{2n+1}{n(n+1)} \right]^2 |a_n^r|^2 h_n^{(1)}(k_2 r) \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} \left(k_2 r h_n^{(1)*}(k_2 r) \right) \right\} r^2 \frac{n(n+1)}{2n+1} \cdot \\
 & \cdot (2n^2 - 1) - \frac{\pi}{2\mu_2\omega r} E_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n i^{2n+1} \left[\frac{2n+1}{n(n+1)} \right]^2 |b_n^r|^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} \left(k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r) \right) \right\} \cdot \\
 & \cdot h_n^{(1)*}(k_2 r) r^2 \frac{(n+1)!}{(n-1)!}
 \end{aligned} \tag{16.4.4}$$

che si può ancora scrivere:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (E_{r\theta} H_{r\phi}^* - E_{r\phi} H_{r\theta}^*) r^2 \sin \theta d\theta d\phi = -\frac{\pi}{2\mu_2\omega r} E_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} i^{2n+1} \left[\frac{2n+1}{n(n+1)} \right]^2 \cdot \\
 & \cdot |a_n^r|^2 h_n^{(1)}(k_2 r) \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} \left(k_2 r h_n^{(1)*}(k_2 r) \right) \right\} r^2 \left[n(n+1) + \frac{n(n+1)}{2n+1} (2n^2 - 1) \right] - \\
 & - \frac{\pi}{2\mu_2\omega r} \cdot E_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n i^{2n+1} \left[\frac{2n+1}{n(n+1)} \right]^2 |b_n^r|^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} \left(k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r) \right) \right\} h_n^{(1)*}(k_2 r) r^2 \cdot \\
 & \cdot \left[\frac{n(n+1)}{2n+1} (2n^2 - 1) + n(n+1) \right] = \frac{\pi r}{\mu_2\omega} E_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n i^{2n+1} (2n+1) \left\{ |a_n^r|^2 h_n^{(1)}(k_2 r) \cdot \right. \\
 & \cdot \left. \left[\frac{\partial}{\partial(k_2 r)} \left(k_2 r h_n^{(1)*}(k_2 r) \right) \right] - |b_n^r|^2 \left[\frac{\partial}{\partial(k_2 r)} \left(k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r) \right) \right] h_n^{(1)*}(k_2 r) \right\}
 \end{aligned} \tag{16.4.5}$$

La parte reale della (16.4.5) ci fornisce la potenza diffusa dalla sfera.

Una formula più semplice e molto utile si ottiene considerando la (16.4.5) nella "far zone" introducendo le espressioni asintotiche delle funzioni di Bessel.

Si ha per $\rho \gg 1$

$$h_n^{(1)}(\rho) \simeq \frac{1}{\rho} (-i)^{n+1} e^{i\rho} \tag{16.4.6}$$

Dalla (16.4.6) segue che:

$$\begin{aligned} h_n^{(1)*}(\rho) &\simeq \frac{1}{\rho} i^{n+1} e^{-i\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho h_n^{(1)}(\rho)] &\simeq -(-1)^n i^{n+2} e^{i\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho h_n^{(1)*}(\rho)] &\simeq -i^{n+2} e^{-i\rho} \end{aligned}$$

Quindi per $k_2 r \gg 1$

$$\begin{aligned} h_n^{(1)}(k_2 r) \left[\frac{\partial}{\partial (k_2 r)} \left(k_2 r h_n^{(1)*}(k_2 r) \right) \right] &= -\frac{i}{k_2 r} \\ \left[\frac{\partial}{\partial (k_2 r)} \left(k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r) \right) \right] h_n^{(1)*}(k_2 r) &= \frac{i}{k_2 r} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (E_{r\theta} H_{r\phi}^* - E_{r\phi} H_{r\theta}^*) r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{\pi}{k_2 \mu_2 \omega} E_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left\{ |a_n^r|^2 + |b_n^r|^2 \right\}$$

In definitiva, quindi:

$$\boxed{P_d = \pi \frac{E_0^2}{k_2^2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left\{ |a_n^r|^2 + |b_n^r|^2 \right\}} \quad (16.4.7)$$

Con analoghi calcoli si può trovare la potenza totale sottratta all'onda primaria data dalla (16.3.6)

$$\boxed{P_t = \pi \frac{E_0^2}{k_2^2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (a_n^r + b_n^r)} \quad (16.4.8)$$

Se, al solito, indichiamo con \mathcal{P} la densità di potenza associata all'onda incidente, cioè $\mathcal{P} = \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}$, si definisce sezione di diffusione della sfera il rapporto fra la potenza diffusa e la densità di potenza incidente. Essa, se calcolata con la teoria rigorosa, si suole indicare con Q_d e si ha:

$$\boxed{Q_d = \frac{2\pi}{k_2^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left\{ |a_n^r|^2 + |b_n^r|^2 \right\}} \quad (16.4.9)$$

Analogamente si definisce la sezione di potenza sottratta all'onda incidente, ottenendo:

$$Q_t = \frac{2\pi}{k_2^2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (a_n^r + b_n^r) \quad (16.4.10)$$

Se la conducibilità o la costante dielettrica della sfera è così grande da essere $|k_1 a| \gg 1$, nella (16.4.9) e (16.4.10) si possono introdurre le approssimazioni (16.2.15) e (16.2.16) ottenendo:

$$Q_d = \frac{2\pi}{k_2^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left(\sin^2 \gamma_n + \sin^2 \gamma'_n \right) \quad (16.4.11)$$

$$Q_t = \frac{2\pi}{k_2^2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} i(2n+1) \left(e^{i\gamma_n} \sin \gamma_n + e^{i\gamma'_n} \sin \gamma'_n \right) \quad (16.4.12)$$

Se la sfera non assorbe, γ_n e γ'_n sono reali, nel qual caso è evidente che $Q_d = -Q_t$.

16.5 - Casi limite.

Le formule precedenti (16.4.9) e (16.4.10) valgono nella "far zone" cioè per $k_2 r \gg 1$ ossia a distanze molto grandi rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione incidente; la loro validità è, però, generale per quanto riguarda le dimensioni della sfera in relazione alla lunghezza d'onda della radiazione incidente. È chiaro, quindi che, per quanto apparentemente le formule precedenti siano molto semplici in forma, il calcolo numerico dei coefficienti presenta di solito notevoli difficoltà.

Vi sono due casi limite che si possono trattare con una certa facilità e forniscono importanti informazioni fisiche.

Caso I: $|k_2 a| \gg 1$ ($a \gg \lambda$)

Questo rappresenta il caso di una sfera (comunque siano i suoi parametri costitutivi) **il cui raggio a è molto maggiore della lunghezza d'onda della radiazione incidente.** Questa approssimazione si può utilizzare per spiegare quantitativamente l'arcobaleno.

In tal caso si possono avere delle formule semplificate per i coefficienti a_n^r e b_n^r introducendo le espressioni asintotiche al posto delle funzioni di Bessel di argomento $k_2 a$ nella (16.2.11) e nella (16.2.12).

Poniamo, quindi:

$$\begin{aligned}
 j_n(k_2 a) &\simeq \frac{1}{k_2 a} \cos \left(k_2 a - \frac{n+1}{2} \pi \right) \\
 \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} \left[k_2 r j_n(k_2 r) \right] \right\}_{r=a} &\simeq -\sin \left(k_2 a - \frac{n+1}{2} \pi \right) \\
 h_n^{(1)}(k_2 a) &\simeq \frac{1}{k_2 a} (-i)^{n+1} e^{i k_2 a} \\
 \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} \left[k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r) \right] \right\}_{r=a} &\simeq -(-1)^n i^{n+2} e^{i k_2 a}
 \end{aligned} \tag{16.5.1}$$

Osserviamo, subito, che $|k_1| \geq |k_2|$ sempre; pertanto anche $|k_1 a| \geq |k_2 a|$, **quindi gli sviluppi (16.5.1) valgono anche per le funzioni di Bessel di argomento $k_1 a$ che figurano nella (16.2.11) e nella (16.2.12).**

Effettuando tali sostituzioni nella (16.2.11) si ha:

$$\begin{aligned}
 a_n^r = - &\left[-\mu_1 \frac{1}{k_1 a} \cos \left(k_1 a - \frac{n+1}{2} \pi \right) \sin \left(k_2 a - \frac{n+1}{2} \pi \right) + \mu_2 \frac{1}{k_2 a} \cos \left(k_2 a - \frac{n+1}{2} \pi \right) \cdot \right. \\
 &\left. \sin \left(k_1 a - \frac{n+1}{2} \pi \right) \right] / \left[\mu_1 \frac{1}{k_1 a} \cos \left(k_1 a - \frac{n+1}{2} \pi \right) \left[-(-1)^n i^{n+2} e^{i k_2 a} \right] + \right. \\
 &\left. + \mu_2 \frac{1}{k_2 a} (-i)^{n+1} e^{i k_2 a} \sin \left(k_1 a - \frac{n+1}{2} \pi \right) \right]
 \end{aligned}$$

Poniamo:

$$\boxed{x = k_2 a - \frac{n+1}{2} \pi} \qquad \boxed{y = k_1 a - \frac{n+1}{2} \pi} \tag{16.5.2}$$

$$a_n^r = - \frac{-\mu_1 \frac{1}{k_1 a} \cos y \sin x + \mu_2 \frac{1}{k_2 a} \cos x \sin y}{\mu_1 \frac{1}{k_1 a} \cos y \left[(-i)^n e^{i k_2 a} \right] + \mu_2 \frac{1}{k_2 a} (-i) (-i)^n e^{i k_2 a} \sin y}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $k_1 a$, dividendo numeratore e denominatore per $\cos y$ e raggruppando si ottiene:

$$\boxed{a_n^r = i^n e^{-i k_2 a} \frac{\mu_1 \sin x - \mu_2 \frac{k_1}{k_2} \cos x \tan y}{\mu_1 - i \mu_2 \frac{k_1}{k_2} \tan y} \quad (a \gg \lambda)} \tag{16.5.3}$$

Analogamente effettuando le sostituzioni (16.5.1) nella (16.2.12) si ottiene:

$$b_n^r = - \left[-\mu_1 \frac{1}{k_2 a} \cos \left(k_2 a - \frac{n+1}{2} \pi \right) \sin \left(k_1 a - \frac{n+1}{2} \pi \right) + \mu_2 \frac{k_1^2}{k_2^2 k_1 a} \cos \left(k_1 a - \frac{n+1}{2} \pi \right) \cdot \sin \left(k_2 a - \frac{n+1}{2} \pi \right) \right] / \left[-\mu_1 \frac{1}{k_2 a} (-i)^{n+1} e^{ik_2 a} \sin \left(k_1 a - \frac{n+1}{2} \pi \right) - \mu_2 \frac{k_1^2}{k_2^2 k_1 a} \cos \left(k_1 a - \frac{n+1}{2} \pi \right) [-(-1)^n i^{n+2} e^{ik_2 a}] \right]$$

Effettuando le sostituzioni (16.5.2), moltiplicando numeratore e denominatore per $k_2 a$, dividendo numeratore e denominatore per $\cos y$ e tenendo presente che:

$$-(-1)^n i^{n+2} = i(-1)^{n+1} i^{n+1} = i(-i)^{n+1}$$

si ottiene:

$$b_n^r = - \frac{-\mu_1 \cos x \tan y + \mu_2 \frac{k_1}{k_2} \sin x}{-\mu_1 \tan y - i\mu_2 \frac{k_1}{k_2}} i^{n+1} e^{-ik_2 a}$$

cioè:

$$b_n^r = -i^{n+1} e^{-ik_2 a} \frac{\mu_1 \cos x \tan y - \mu_2 \frac{k_1}{k_2} \sin x}{\mu_1 \tan y + i\mu_2 \frac{k_1}{k_2}} \quad (a \gg \lambda)$$

(16.5.4)

I coefficienti sono funzioni oscillanti di a e dell'ordine n . Piccole variazioni di a (o di k_1 , o di k_2) e di n possono provocare grandi variazioni nel valore dei coefficienti. **Il valore assoluto dei coefficienti oscilla fra i limiti 0 e 1.**

Se nella (16.5.3) si sostituisce n con $n+1$, si osserverà che $a_{n+1}^r \simeq -b_n^r$ cioè: l'ampiezza di una oscillazione elettrica di ordine n ha approssimativamente lo stesso valore della ampiezza dell'oscillazione magnetica dell'ordine successivo.

È da notare che le espressioni asintotiche delle funzioni di Bessel sono valide finché l'ordine n è molto minore degli argomenti di $|k_1 a|$ e $|k_2 a|$.

Caso II: $|k_2 a| \ll 1$ ($a \ll \lambda$)

Nel caso in cui $|k_2 a| \ll 1$, sostituiamo nella (16.2.11) e nella (16.2.12) i primi termini dello sviluppo in serie delle funzioni di Bessel sia per quelle di argomento $k_2 a$ che per quelle di argomento $k_1 a$.

Si ha:

$$j_n(\rho) \simeq 2^n \frac{n!}{(2n+1)!} \rho^n \left(1 - \frac{n+1}{(2n+2)(2n+3)} \rho^2 \right) \quad (16.5.5)$$

$$h_n^{(1)}(\rho) \simeq \frac{i}{2^n} \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{\rho^{n+1}} \quad (16.5.6)$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}
 \frac{d[\rho j_n(\rho)]}{d\rho} &\simeq \frac{d}{d\rho} \left[2^n \frac{n!}{(2n+1)!} \rho^{n+1} \left(1 - \frac{n+1}{(2n+2)(2n+3)} \rho^2 \right) \right] = \\
 &= 2^n \frac{n!(n+1)}{(2n+1)!} \rho^n \left(1 - \frac{n+1}{(2n+2)(2n+3)} \rho^2 \right) + 2^n \frac{n!}{(2n+1)!} \rho^{n+1} \left(-\frac{2(n+1)}{(2n+2)(2n+3)} \rho \right) = \\
 &= 2^n \frac{n!(n+1)}{(2n+1)!} \rho^n \left(1 - \frac{n+3}{(2n+2)(2n+3)} \rho^2 \right) \tag{16.5.7}
 \end{aligned}$$

$$\frac{d[\rho h_n^{(1)}(\rho)]}{d\rho} \simeq \frac{d}{d\rho} \left[\frac{i}{2^n} \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{\rho^n} \right] = -\frac{i}{2^n} \frac{(2n)!}{n!} \frac{n\rho^{n-1}}{\rho^{2n}} = -\frac{i}{2^n} \frac{(2n)!}{n!} \frac{n}{\rho^{n+1}} \tag{16.5.8}$$

Calcoliamo, ora, i prodotti parziali che compaiono nella (16.2.11):

$$\begin{aligned}
 &\mu_1 j_n(k_1 a) \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} [k_2 r j_n(k_2 r)] \right\}_{r=a} = \\
 &= \mu_1 (n+1) \left[\frac{2^n n!}{(2n+1)!} \right]^2 (k_1 a)^n (k_2 a)^n \left(1 - \frac{(n+1)(k_1 a)^2}{(2n+2)(2n+3)} \right) \left(1 - \frac{(n+3)(k_2 a)^2}{(2n+2)(2n+3)} \right) = \\
 &= \mu_1 (n+1) \left[\frac{2^n n!}{(2n+1)!} \right]^2 (k_1 a)^n (k_2 a)^n \left(1 - \frac{(n+1)(k_1 a)^2}{(2n+2)(2n+3)} - \frac{(n+3)(k_2 a)^2}{(2n+2)(2n+3)} \right) \tag{16.5.9}
 \end{aligned}$$

avendo trascurato il termine contenente il prodotto $(k_1 a)^2 (k_2 a)^2$.

$$\begin{aligned}
 &\mu_2 j_n(k_2 a) \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_1 r)} [k_1 r j_n(k_1 r)] \right\}_{r=a} = \\
 &= \mu_2 (n+1) \left[\frac{2^n n!}{(2n+1)!} \right]^2 (k_1 a)^n (k_2 a)^n \left(1 - \frac{(n+1)(k_2 a)^2}{(2n+2)(2n+3)} \right) \left(1 - \frac{(n+3)(k_1 a)^2}{(2n+2)(2n+3)} \right) = \\
 &= \mu_2 (n+1) \left[\frac{2^n n!}{(2n+1)!} \right]^2 (k_1 a)^n (k_2 a)^n \left(1 - \frac{(n+1)(k_2 a)^2}{(2n+2)(2n+3)} - \frac{(n+3)(k_1 a)^2}{(2n+2)(2n+3)} \right) \tag{16.5.10}
 \end{aligned}$$

avendo trascurato il termine contenente il prodotto $(k_1 a)^2 (k_2 a)^2$.

Analogamente si ha:

$$\begin{aligned}
 &\mu_1 j_n(k_1 a) \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} [k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r)] \right\}_{r=a} = \\
 &= \mu_1 \frac{2^n n!}{(2n+1)!} (k_1 a)^n \left(1 - \frac{(n+1)(k_1 a)^2}{(2n+2)(2n+3)} \right) \left(-\frac{i}{2^n} \frac{(2n)!}{n!} \frac{n}{(k_2 a)^{n+1}} \right) \tag{16.5.11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\mu_2 h_n^{(1)}(k_2 a) \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_1 r)} [k_1 r j_n(k_1 r)] \right\}_{r=a} = \\
 &= \mu_2 \frac{i}{2^n} \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{(k_2 a)^{n+1}} 2^n \frac{n!(n+1)}{(2n+1)!} (k_1 a)^n \left(1 - \frac{(n+3)(k_1 a)^2}{(2n+2)(2n+3)} \right) \tag{16.5.12}
 \end{aligned}$$

Il numeratore della (16.2.11) si può, allora, scrivere:

$$\begin{aligned}
 & \mu_1 j_n(k_1 a) \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} [k_2 r j_n(k_2 r)] \right\}_{r=a} - \mu_2 j_n(k_2 a) \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_1 r)} [k_1 r j_n(k_1 r)] \right\}_{r=a} = \\
 & = (n+1) \left[\frac{2^n n!}{(2n+1)!} \right]^2 (k_1 a)^n (k_2 a)^n \left\{ \mu_1 - \mu_1 \frac{(n+1)(k_1 a)^2}{(2n+2)(2n+3)} - \mu_1 \frac{(n+3)(k_2 a)^2}{(2n+2)(2n+3)} - \right. \\
 & \left. - \mu_2 + \mu_2 \frac{(n+1)(k_2 a)^2}{(2n+2)(2n+3)} + \mu_2 \frac{(n+3)(k_1 a)^2}{(2n+2)(2n+3)} \right\} = \\
 & = (n+1) \left[\frac{2^n n!}{(2n+1)!} \right]^2 (k_1 a)^n (k_2 a)^n \left\{ \mu_1 - \mu_2 - \frac{\mu_1 (k_2 a)^2}{(2n+2)(2n+3)} \left[(n+1) \frac{k_1^2}{k_2^2} + (n+3) \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{\mu_2 (k_2 a)^2}{(2n+2)(2n+3)} \left[(n+1) + (n+3) \frac{k_1^2}{k_2^2} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{16.5.13}$$

Il denominatore della (16.2.11) si può, allora, scrivere:

$$\begin{aligned}
 & \mu_1 j_n(k_1 a) \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} [k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r)] \right\}_{r=a} - \mu_2 h_n^{(1)}(k_2 a) \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_1 r)} [k_1 r j_n(k_1 r)] \right\}_{r=a} = \\
 & = -\frac{2^n n!}{(2n+1)!} (k_1 a)^n \binom{i}{2^n} \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{(k_2 a)^{n+1}} \left\{ \mu_1 n \left(1 - \frac{(n+1)(k_1 a)^2}{(2n+2)(2n+3)} \right) + \right. \\
 & \left. + \mu_2 (n+1) \left(1 - \frac{(n+3)(k_1 a)^2}{(2n+2)(2n+3)} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{16.5.14}$$

Trascurando i termini contenenti $(k_1 a)^2$, la (16.5.14) diventa

$$\begin{aligned}
 & \mu_1 j_n(k_1 a) \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_2 r)} [k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r)] \right\}_{r=a} - \mu_2 h_n^{(1)}(k_2 a) \left\{ \frac{\partial}{\partial(k_1 r)} [k_1 r j_n(k_1 r)] \right\}_{r=a} = \\
 & = -\frac{2^n n!}{(2n+1)!} (k_1 a)^n \binom{i}{2^n} \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{(k_2 a)^{n+1}} (\mu_1 n + \mu_2 (n+1))
 \end{aligned} \tag{16.5.15}$$

Pertanto la (16.2.11) diventa:

$$\begin{aligned}
 a_n^r \simeq & -i \frac{2^{2n} n! (n+1)!}{(2n)! (2n+1)!} \frac{(k_2 a)^{2n+1}}{[\mu_1 n + \mu_2 (n+1)]} \left\{ \mu_1 - \mu_2 - \right. \\
 & \left. - \frac{\mu_1 \left[(n+1) \frac{k_1^2}{k_2^2} + (n+3) \right] - \mu_2 \left[(n+1) + (n+3) \frac{k_1^2}{k_2^2} \right]}{(2n+2)(2n+3)} (k_2 a)^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{16.5.16}$$

Con lo stesso procedimento, si ha:

$$b_n^r \simeq i \frac{2^{2n} n! (n+1)!}{(2n)! (2n+1)!} \frac{(k_2 a)^{2n+1}}{\mu_1 (n+1) + \mu_2 \frac{k_1^2}{k_2^2} n} \left\{ \mu_1 - \mu_2 \frac{k_1^2}{k_2^2} - \right.$$

$$\left. \frac{\mu_1 \left[(n+1) + (n+3) \frac{k_1^2}{k_2^2} \right] - \mu_2 \frac{k_1^2}{k_2^2} \left[(n+3) + (n+1) \frac{k_1^2}{k_2^2} \right]}{(2n+2)(2n+3)} (k_2 a)^2 \right\} \quad (16.5.17)$$

Se $k_2 a$ è tanto piccolo da potere trascurare tutte le potenze superiori alla quinta, basta considerare solo i coefficienti fino all'ordine $n = 2$.

$$a_1^r \simeq -\frac{2i}{3} \frac{(k_2 a)^3}{\mu_1 + 2\mu_2} \left\{ \mu_1 - \mu_2 - \frac{1}{10} \left[\mu_1 \left(2 + \frac{k_1^2}{k_2^2} \right) - \mu_2 \left(1 + 2 \frac{k_1^2}{k_2^2} \right) \right] (k_2 a)^2 \right\}$$

$$a_2^r \simeq -\frac{i}{15} \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_1 + 3\mu_2} (k_2 a)^5$$

$$b_1^r \simeq \frac{2i}{3} \frac{(k_2 a)^3}{2\mu_1 + \mu_2 \frac{k_1^2}{k_2^2}} \left\{ \mu_1 - \mu_2 \frac{k_1^2}{k_2^2} - \frac{1}{10} \left[\mu_1 \left(1 + 2 \frac{k_1^2}{k_2^2} \right) - \mu_2 \frac{k_1^2}{k_2^2} \left(2 + \frac{k_1^2}{k_2^2} \right) \right] (k_2 a)^2 \right\}$$

$$b_2^r \simeq \frac{i}{15} \frac{\mu_1 - \mu_2 \frac{k_1^2}{k_2^2}}{3\mu_1 + 2\mu_2 \frac{k_1^2}{k_2^2}} (k_2 a)^5$$

Se ammettiamo inoltre che $\mu_1 = \mu_2$, queste espressioni si riducono alle:

$$a_1^r \simeq -\frac{i}{45} \left(\frac{k_1^2}{k_2^2} - 1 \right) (k_2 a)^5 \quad (16.5.18)$$

$$a_2^r = 0 \quad (16.5.19)$$

$$b_1^r \simeq -\frac{2i}{3} \left[\frac{\frac{k_1^2}{k_2^2} - 1}{\frac{k_1^2}{k_2^2} + 2} (k_2 a)^3 - \frac{1}{10} \frac{\frac{k_1^4}{k_2^4} - 1}{\frac{k_1^2}{k_2^2} + 2} (k_2 a)^5 \right] \quad (16.5.20)$$

$$b_2^r \simeq -\frac{i}{15} \frac{\frac{k_1^2}{k_2^2} - 1}{2 \frac{k_1^2}{k_2^2} + 3} (k_2 a)^5 \quad (16.5.21)$$

Quando il rapporto fra il raggio a della sfera e la lunghezza d'onda della radiazione incidente è tanto piccolo da poter trascurare i termini contenenti $(k_2 a)^5$ rispetto a quelli contenenti $(k_2 a)^3$, l'unico coefficiente diverso da zero è:

$$b_1^r \simeq -\frac{2i}{3} \frac{\frac{k_1^2}{k_2^2} - 1}{\frac{k_1^2}{k_2^2} + 2} (k_2 a)^3$$

(16.5.22)

che ci riporta al caso dello **scattering di Rayleigh**.

Infatti sostituendo la (16.5.22) nella (16.4.9), per la sezione di diffusione si ottiene:

$$Q_d \simeq \frac{2\pi}{k_2^2} 3 \frac{4}{9} k_2^2 a^2 (k_2 a)^4 \left| \frac{\frac{k_1^2}{k_2^2} - 1}{\frac{k_1^2}{k_2^2} + 2} \right|^2 \quad (a \ll \lambda) \quad (16.5.23)$$

Ora, poichè $k_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu + i\mu\sigma\omega$ e $k_2^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu$, si ha: $k_1^2 = k_2^2 k$ con $k = \epsilon_{r_1} + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}$, ne segue che:

$$Q_d \simeq \frac{8}{3} \pi a^2 (k_2 a)^4 \left| \frac{k - 1}{k + 2} \right|^2 \quad (16.5.24)$$

che coincide con la formula (14.2.7) che ci fornisce la sezione di scattering di Rayleigh. È evidente che k_2 è la costante di propagazione dell'onda incidente così come lo è k_0 nella (14.2.7).

Questa è la celebre legge di Rayleigh per la diffusione, applicata per spiegare l'azzurro del cielo.

La luce che ci arriva dal cielo, a meno che l'osservatore guardi direttamente il sole, è diffusa dalle particelle di polvere o dalle molecole dell'atmosfera; poichè la lunghezza d'onda della luce visibile è molto maggiore del raggio di queste particelle submicroscopiche vale la (16.5.24) cioè la legge dell'inverso della quarta potenza della lunghezza d'onda da cui discende che le lunghezze d'onda più corte della luce naturale emessa dal sole sono più diffuse rispetto a quelle più prossime all'estremità rossa dello spettro.

Se si guarda direttamente il sole, si vede l'effetto opposto, perchè essendo più diffuso l'azzurro, la sua intensità nel fascio diretto è indebolita e quindi predomina il rosso. Questo effetto si accentua quando il sole è vicino all'orizzonte, perché allora la luce attraversa una regione atmosferica ricca di particelle di polvere. Le varie sfumature della nebbia e del fumo si possono spiegare nello stesso modo, ed è noto che i colori di sospensioni colloidali di particelle metalliche in liquidi o gas spesso sono completamente differenti dal colore del metallo stesso. Tuttavia, al crescere del raggio delle particelle, i termini di ordine più elevato dello sviluppo dei coefficienti a_n^r e b_n^r influiscono sempre maggiormente. In questo ultimo caso il carattere selettivo della diffusione di Rayleigh scompare e diventa impossibile prevedere in modo semplice la configurazione della radiazione diffusa. Poichè la radiazione diffusa che segue la legge di Rayleigh è di tipo dipolare cioè la particella si comporta come un dipolo elettrico oscillante, i campi associati a termini più elevati di $n = 1$ si interpretano come generati da multipoli elettrici e magnetici.

16.6 - Campi diffusi far field

È interessante graficare i campi diffusi far field; per questo riscriviamo le espressioni di tali campi dati nel paragrafo 16.2 sostituendo in esse le espressioni asintotiche delle

funzioni di Bessel e, precisamente:

$$h_n^{(1)}(k_2 r) \simeq \frac{1}{k_2 r} (-i)^{n+1} e^{ik_2 r}$$

$$\frac{\partial}{\partial(k_2 r)} \left[k_2 r h_n^{(1)}(k_2 r) \right] \simeq -(-1)^n (i^{n+2}) e^{ik_2 r} \quad (16.6.1)$$

Campo elettrico diffuso far field

$$E_r^{(r)} = -\frac{E_0 \cos \phi}{k_2 r} e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} (2n+1) b_n^r \frac{1}{k_2 r} (-i)^{n+1} e^{ik_2 r} P_n^1(\cos \theta) \quad (16.6.2)$$

$$E_\theta^{(r)} = \frac{\cos \phi}{\sin \theta} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n^r \frac{1}{k_2 r} (-i)^{n+1} e^{ik_2 r} P_n^1(\cos \theta) -$$

$$- \frac{\cos \phi}{k_2 r} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n^r \left[-(-1)^n (i^{(n+2)}) \right] e^{ik_2 r} \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta} \quad (16.6.3)$$

$$E_\phi^{(r)} = -\sin \phi E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n^r \frac{1}{k_2 r} (-i)^{n+1} e^{ik_2 r} \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta} +$$

$$+ \frac{\sin \phi}{k_2 r \sin \theta} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n^r \left[-(-1)^n (i^{(n+2)}) \right] e^{ik_2 r} P_n^1(\cos \theta) \quad (16.6.4)$$

Campo magnetico diffuso far field

$$H_r^{(r)} = -\frac{\sin \phi}{\mu_2 \omega r} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} (2n+1) a_n^r \frac{1}{k_2 r} (-i)^{n+1} e^{ik_2 r} P_n^1(\cos \theta) \quad (16.6.5)$$

$$H_\theta^{(r)} = \frac{k_2 \sin \phi}{\mu_2 \omega \sin \theta} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n^r \frac{1}{k_2 r} (-i)^{n+1} e^{ik_2 r} P_n^1(\cos \theta) -$$

$$- \frac{\sin \phi}{\mu_2 \omega r} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n^r \left[-(-1)^n (i^{(n+2)}) \right] e^{ik_2 r} \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta} \quad (16.6.6)$$

$$H_\phi^{(r)} = \frac{k_2 \cos \phi}{\mu_2 \omega} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n^r \frac{1}{k_2 r} (-i)^{n+1} e^{ik_2 r} \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta} -$$

$$- \frac{\cos \phi}{\mu_2 \omega r \sin \theta} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n^r \left[-(-1)^n i^{(n+2)} \right] e^{ik_2 r} P_n^1(\cos \theta) \quad (16.6.7)$$

Tenendo conto che sussistono le seguenti relazioni:

$$i^n \cdot (-i)^{n+1} = -i$$

$$i^{n+1} \cdot (-i)^{(n+1)} = 1$$

$$i^{n+1} \cdot \left[-(-1)^n \left(i^{(n+2)} \right) \right] = i$$

i campi far field si possono scrivere:

Campo elettrico diffuso far field

$$E_r^{(r)} = -\frac{1}{k_2 r} e^{ik_2 r} \frac{E_0 \cos \phi}{k_2 r} e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) b_n^r P_n^1(\cos \theta) \quad (16.6.8)$$

$$E_\theta^{(r)} = -\frac{i}{k_2 r} e^{ik_2 r} \cos \phi E_0 e^{-i\omega t} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[a_n^r \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} + b_n^r \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta} \right] \right\} \quad (16.6.9)$$

$$E_\phi^{(r)} = \sin \phi \frac{i}{k_2 r} e^{ik_2 r} E_0 e^{-i\omega t} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[a_n^r \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta} + b_n^r \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right] \right\} \quad (16.6.10)$$

Campo magnetico diffuso far field

$$H_r^{(r)} = -\frac{\sin \phi}{\mu_2 \omega r} E_0 e^{-i\omega t} \frac{1}{k_2 r} e^{ik_2 r} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) a_n^r P_n^1(\cos \theta) \quad (16.6.11)$$

$$H_\theta^{(r)} = -\frac{k_2 \sin \phi}{\mu_2 \omega} E_0 e^{-i\omega t} \frac{i}{k_2 r} e^{ik_2 r} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[b_n^r \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} + a_n^r \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta} \right] \right\} \quad (16.6.12)$$

$$H_\phi^{(r)} = -\frac{k_2 \cos \phi}{\mu_2 \omega} E_0 e^{-i\omega t} \frac{i}{k_2 r} e^{ik_2 r} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[b_n^r \frac{\partial P_n^1}{\partial \theta} + a_n^r \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right] \right\} \quad (16.6.13)$$

Scriviamo, ora, la prima armonica dei campi:

Prima armonica del campo diffuso far field

$$E_r^{(r)} = -\frac{1}{k_2 r} e^{ik_2 r} \frac{E_0 \cos \phi}{k_2 r} e^{-i\omega t} 3b_1^r \sin \theta \quad (16.6.14)$$

$$E_{\theta}^{(r)} = -\frac{i}{k_2 r} e^{ik_2 r} \cos \phi E_0 e^{-i\omega t} \frac{3}{2} [a_1^r + b_1^r \cos \theta] \quad (16.6.15)$$

$$E_{\phi}^{(r)} = \sin \phi \frac{i}{k_2 r} e^{ik_2 r} E_0 e^{-i\omega t} \frac{3}{2} [a_1^r \cos \theta + b_1^r] \quad (16.6.16)$$

$$H_r^{(r)} = -\frac{\sin \phi}{\mu_2 \omega r} E_0 e^{-i\omega t} \frac{1}{k_2 r} e^{ik_2 r} 3a_1^r \sin \theta \quad (16.6.17)$$

$$H_{\theta}^{(r)} = -\frac{k_2 \sin \phi}{\mu_2 \omega} E_0 e^{-i\omega t} \frac{i}{k_2 r} e^{ik_2 r} \frac{3}{2} [b_1^r + a_1^r \cos \theta] \quad (16.6.18)$$

$$H_{\phi}^{(r)} = -\frac{k_2 \cos \phi}{\mu_2 \omega} E_0 e^{-i\omega t} \frac{i}{k_2 r} e^{ik_2 r} \frac{3}{2} [b_1^r \cos \theta + a_1^r] \quad (16.6.19)$$

16.7 - Diagrammi delle funzioni di Legendre e di Bessel

Prima di valutare il diagramma di radiazione del campo diffratto é utile fare una analisi dettagliata delle funzioni di Legendre e di Bessel che figurano nelle formule dei coefficienti a_n^r e b_n^r nonché nelle formule dei campi. Per questo grafichiamo in figura 16.7-1 i polinomi associati di Legendre $P_n^1(\cos \theta)$ per $n = 1 \div 6$; poiché nelle espressioni dei campi figurano i termini $\frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta}$ e $\frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta}$ riportiamo i grafici di tali funzioni nelle figure 16.7-2 e 16.7-3. Infine nelle figure 16.7-4, 16.7-5 e 16.7-6 riportiamo le funzioni sferiche di Bessel $j_n(x)$, le relative derivate per $n = 0 \div 3$ e le derivate delle funzioni $xj_n(x)$ per $n = 1 \div 3$.

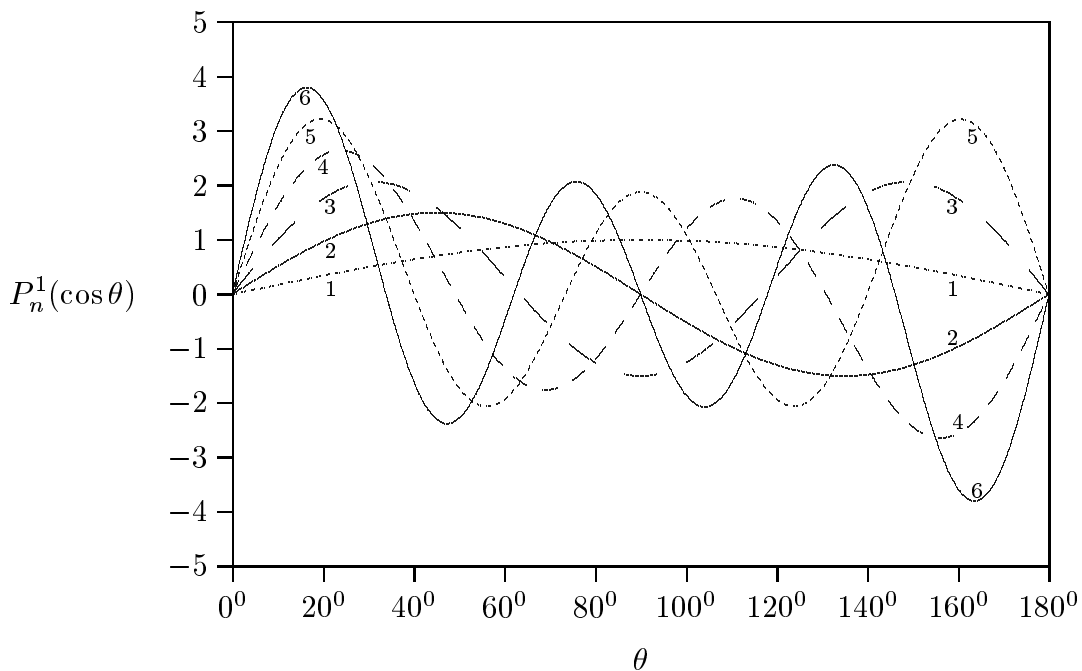


fig.16.7-1

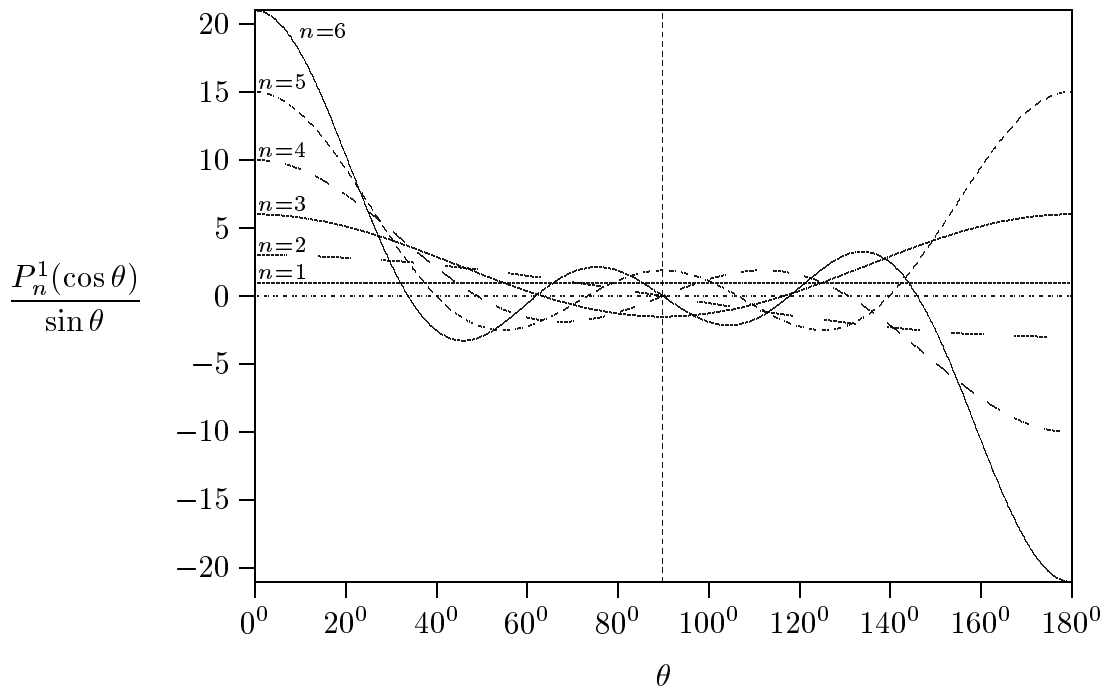


fig.16.7-2

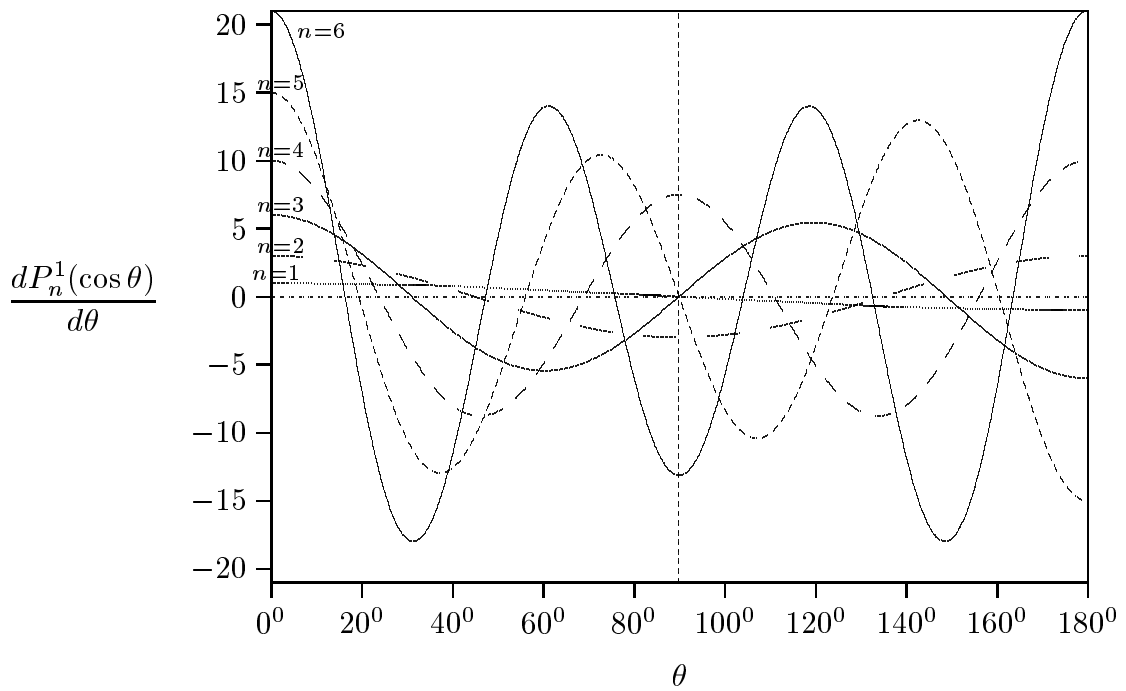


fig.16.7-3

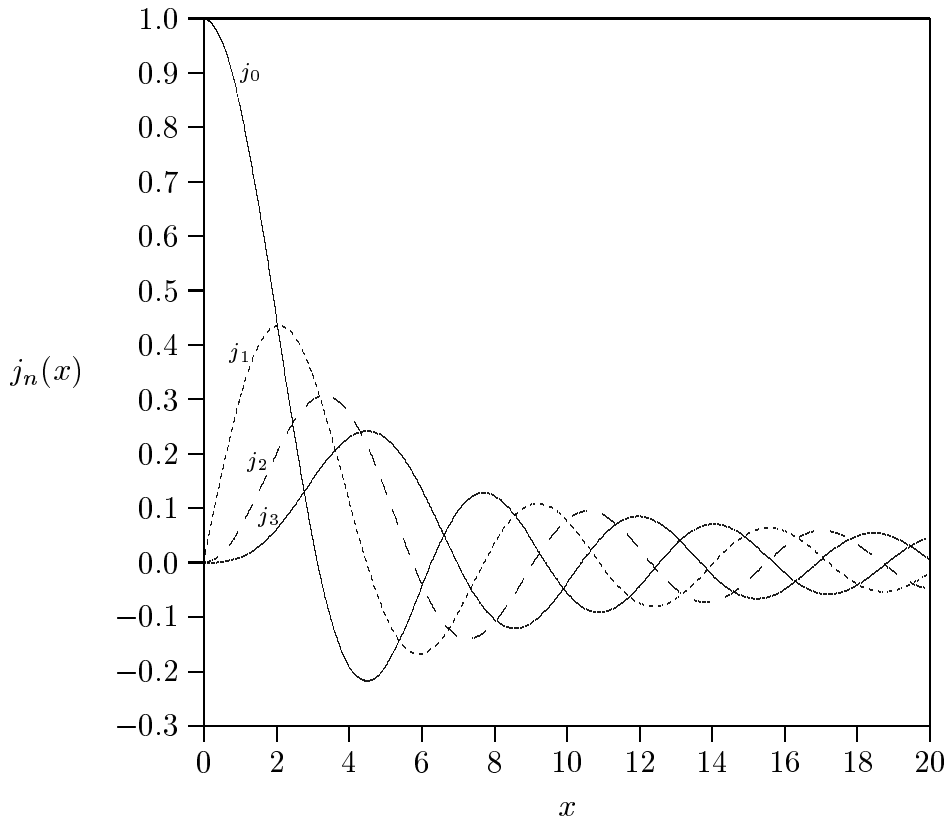


fig.16.7-4

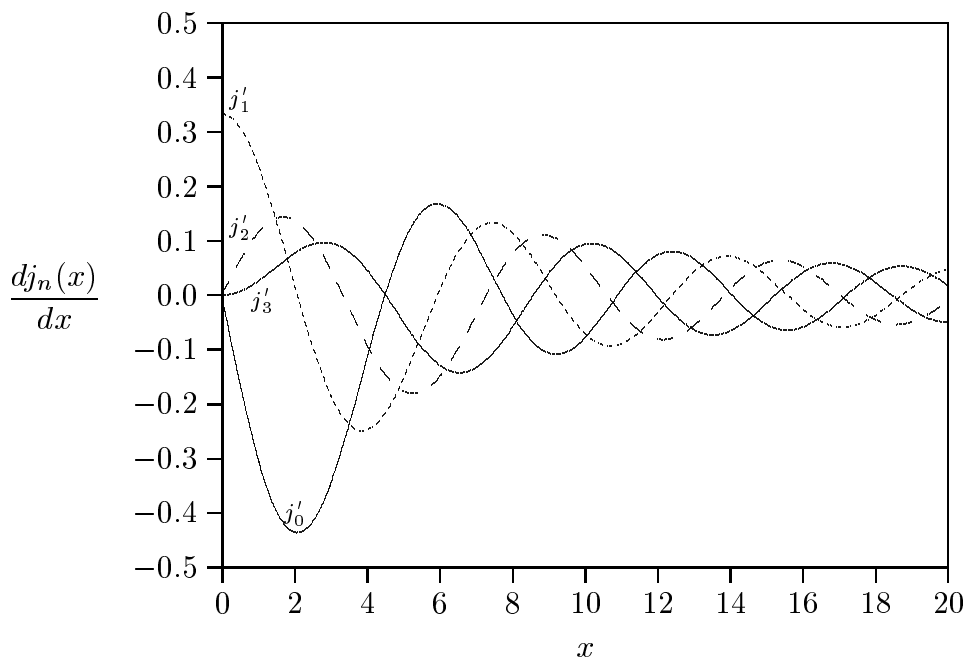


fig.16.7-5

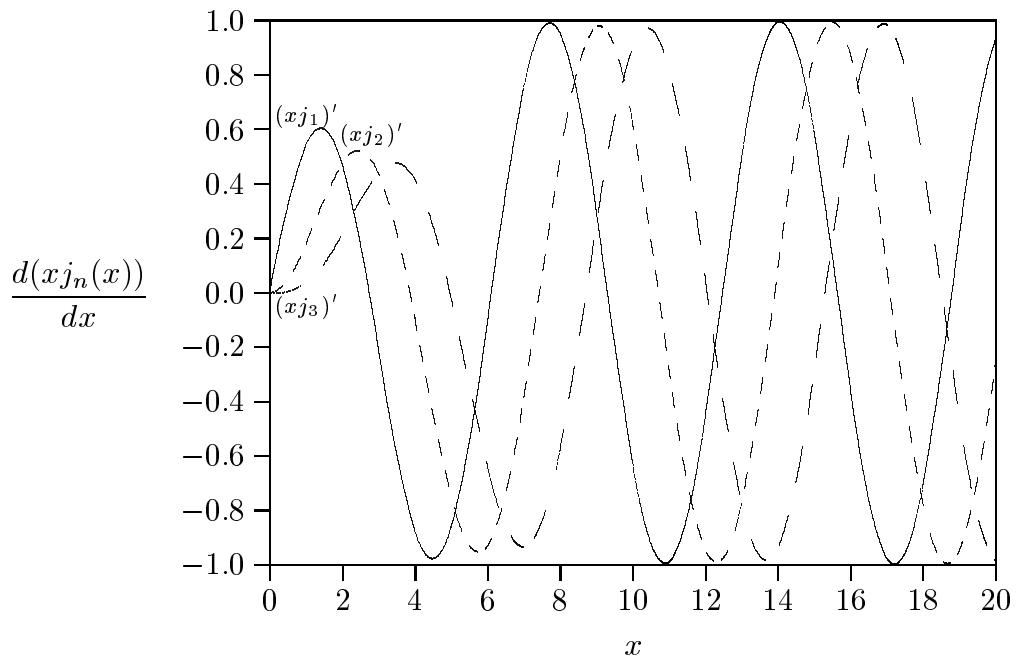


fig.16.7-6

16.8 - Grafici della sezione di diffusione $\left(Q = \frac{Q_d}{\pi a^2}\right)$

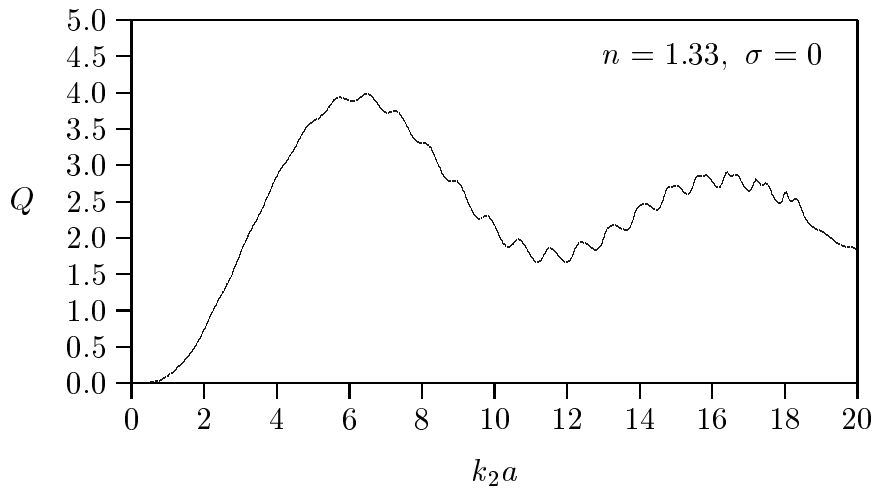


fig.16.8-1

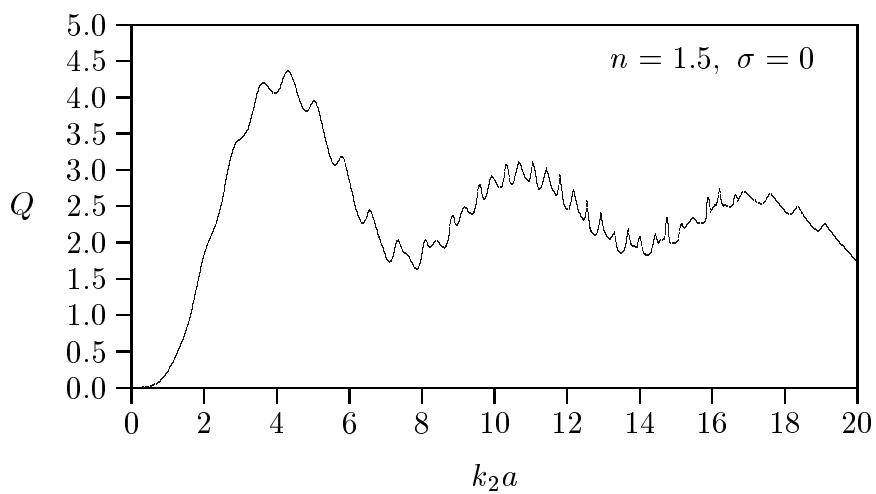


fig.16.8-2

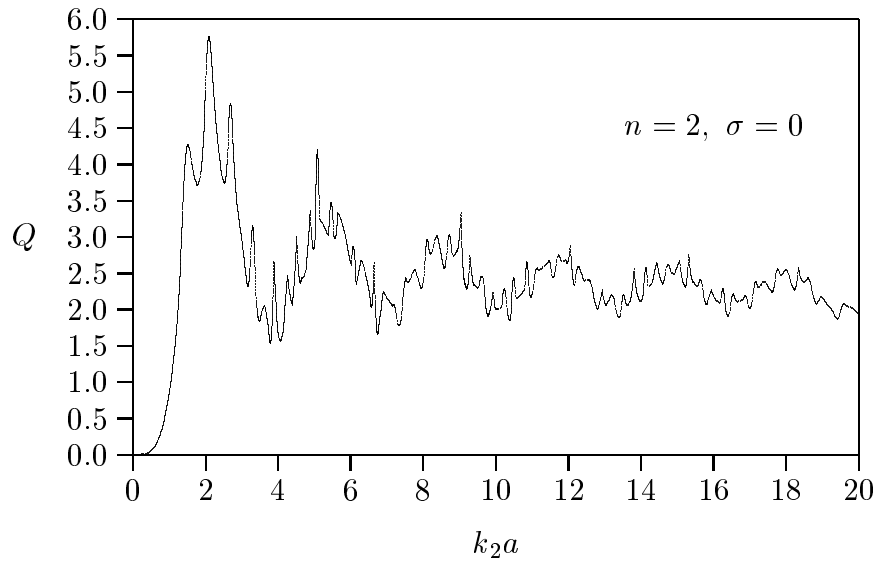


fig.16.8-3

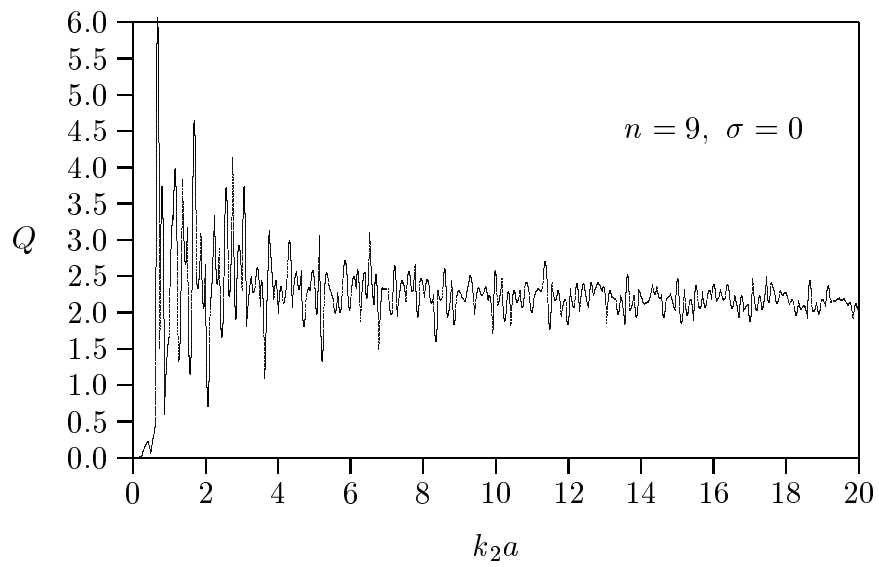


fig.16.8-4

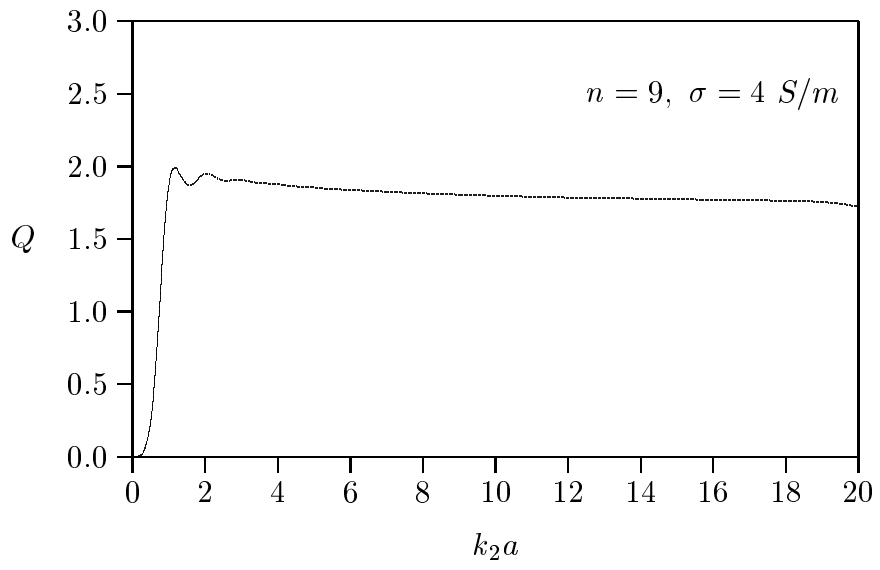


fig.16.8-5

16.9 - Diagrammi di radiazione far-field della radiazione diffusa

$$\frac{|S(\theta, \phi)|}{|S(\theta, \phi)|_{max}} \quad (\phi = 0^{\circ}, a = 0.01\lambda, r = 100\lambda, n_{max} = 20, ind. \text{ rifr.} = 1.33, \sigma = 0)$$

Scattering di Rayleigh (omnidirezionale)

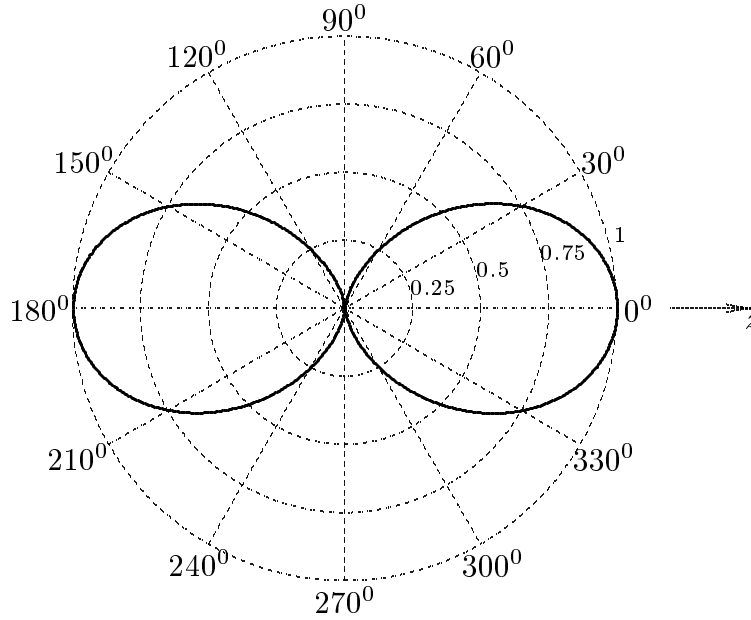


fig.16.9-1

$$\frac{|S(\theta, \phi)|}{|S(\theta, \phi)|_{max}} \quad (\phi = 90^{\circ}, a = 0.01\lambda, r = 100\lambda, n_{max} = 20, ind. \text{ rifr.} = 1.33, \sigma = 0)$$

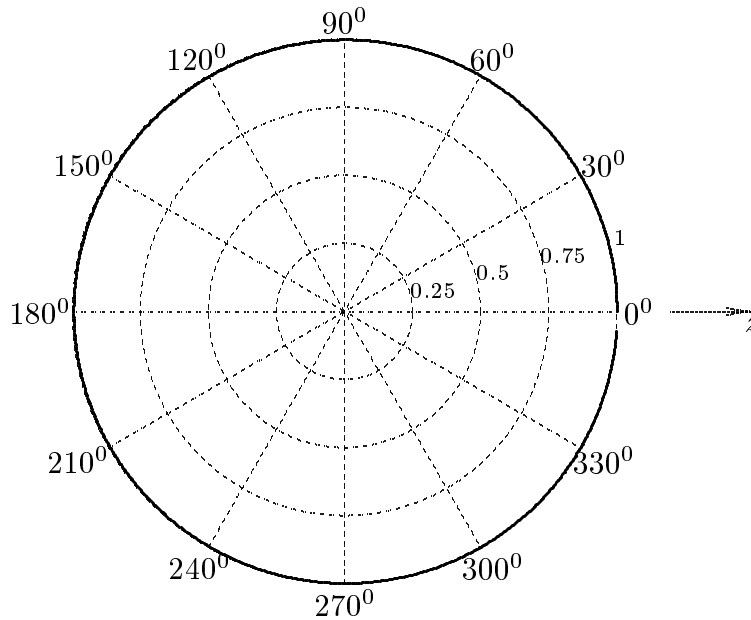


fig.16.9-2

$$\frac{|S(\theta, \phi)|}{|S(\theta, \phi)|_{max}} \quad (\phi = 0^0, a = 0.1\lambda, r = 100\lambda, n_{max} = 20, \text{ind. rifr.} = 1.33, \sigma = 0)$$

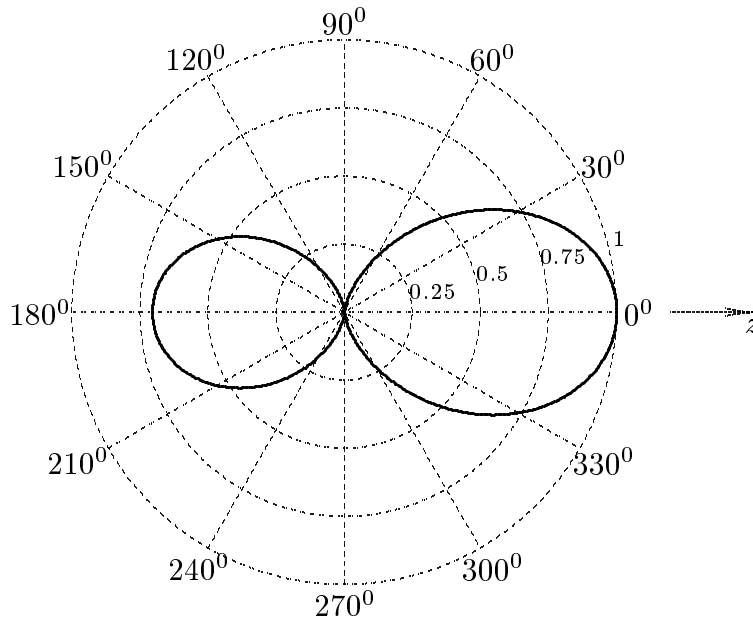


fig.16.9-3

$$\frac{|S(\theta, \phi)|}{|S(\theta, \phi)|_{max}} \quad (\phi = 90^0, a = 0.1\lambda, r = 100\lambda, n_{max} = 20, \text{ind. rifr.} = 1.33, \sigma = 0)$$

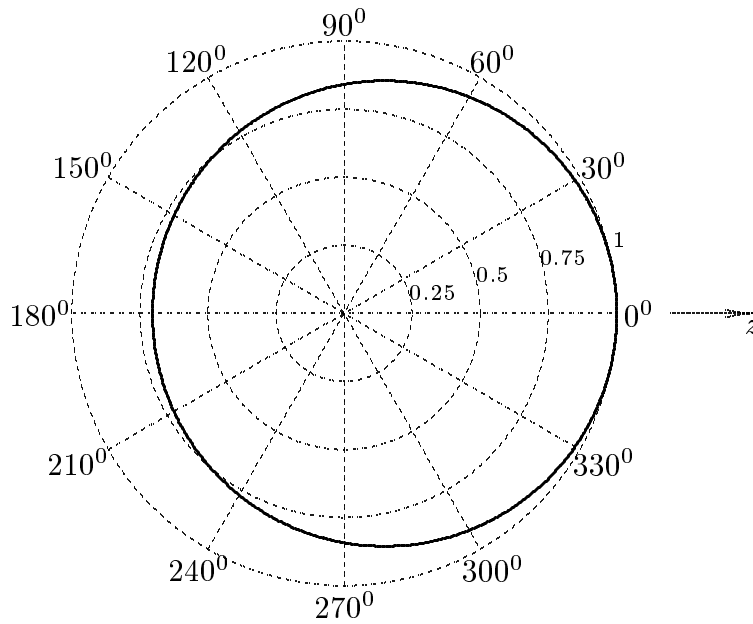


fig.16.9-4

$$\frac{|S(\theta, \phi)|}{|S(\theta, \phi)|_{max}} \quad (\phi = 0^{\circ}, a = 0.2\lambda, r = 100\lambda, n_{max} = 20, \text{ind. rifr.} = 1.33, \sigma = 0)$$

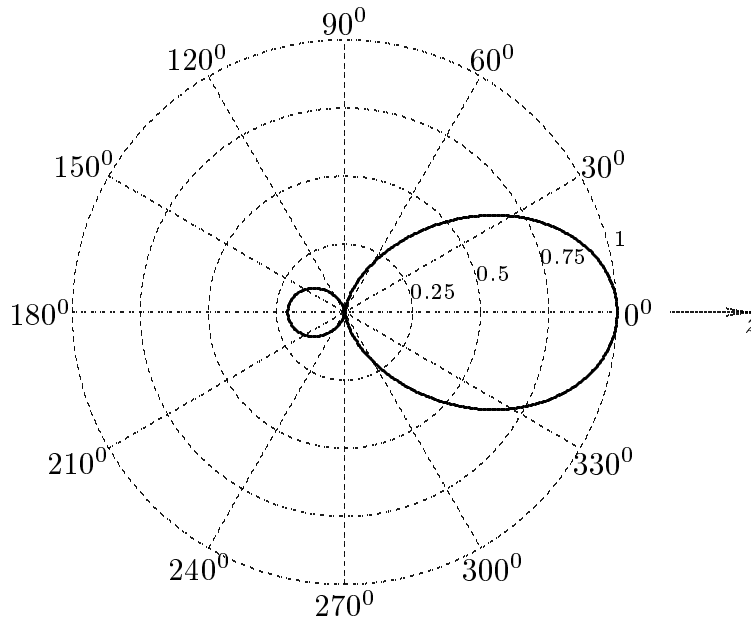


fig.16.9-5

$$\frac{|S(\theta, \phi)|}{|S(\theta, \phi)|_{max}} \quad (\phi = 90^{\circ}, a = 0.2\lambda, r = 100\lambda, n_{max} = 20, \text{ind. rifr.} = 1.33, \sigma = 0)$$

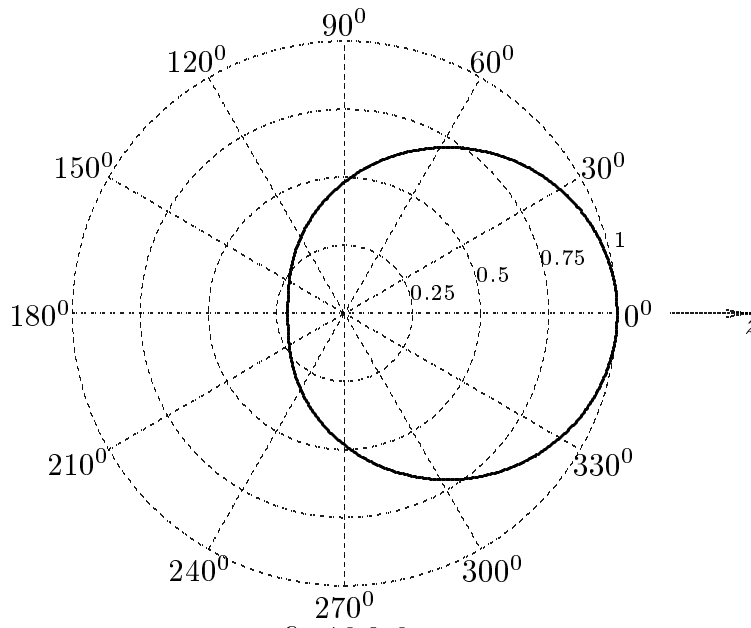


fig.16.9-6

$$\frac{|S(\theta, \phi)|}{|S(\theta, \phi)|_{max}} \quad (\phi = 0^0, a = 0.3\lambda, r = 100\lambda, n_{max} = 20, ind. \text{ rifr.} = 1.33, \sigma = 0)$$

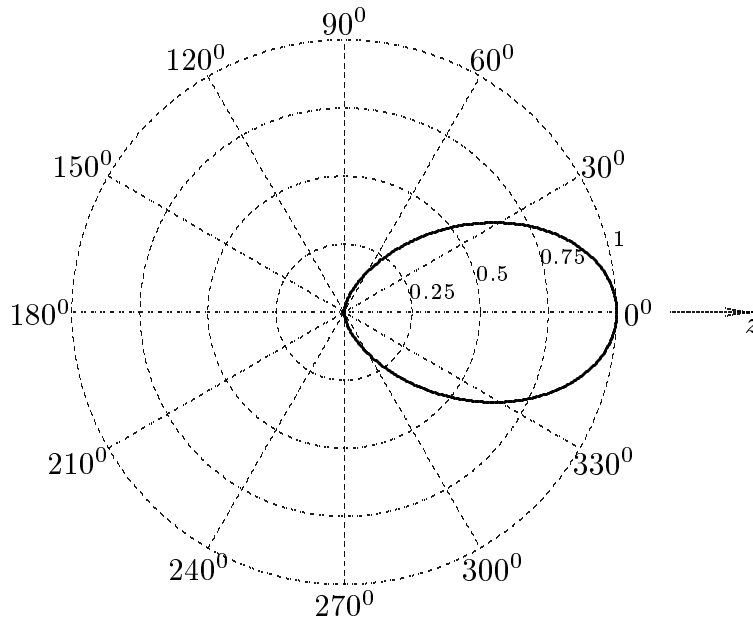


fig.16.9-7a

Ingrandimento del lobo backscattered

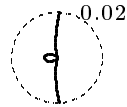


fig.16.9-7b

Diagramma in scala semilogaritmica

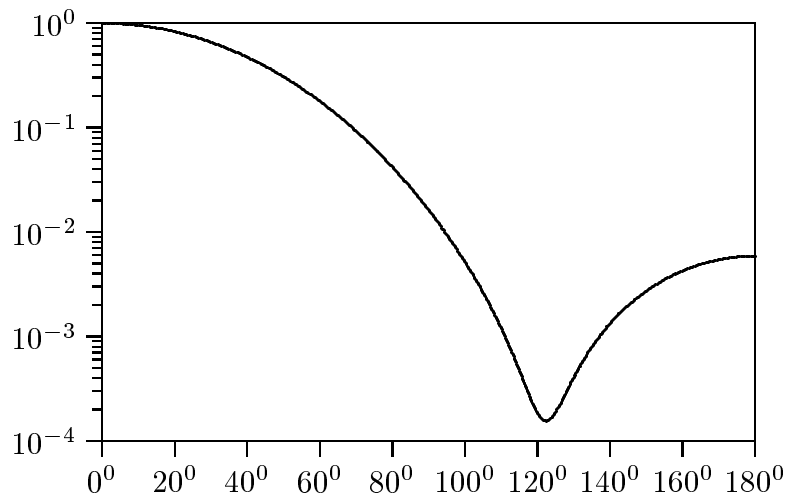


fig.16.9-8

$$\frac{|S(\theta, \phi)|}{|S(\theta, \phi)|_{max}} \quad (\phi = 90^\circ, a = 0.3\lambda, r = 100\lambda, n_{max} = 20, \text{ind. rifr.} = 1.33, \sigma = 0)$$

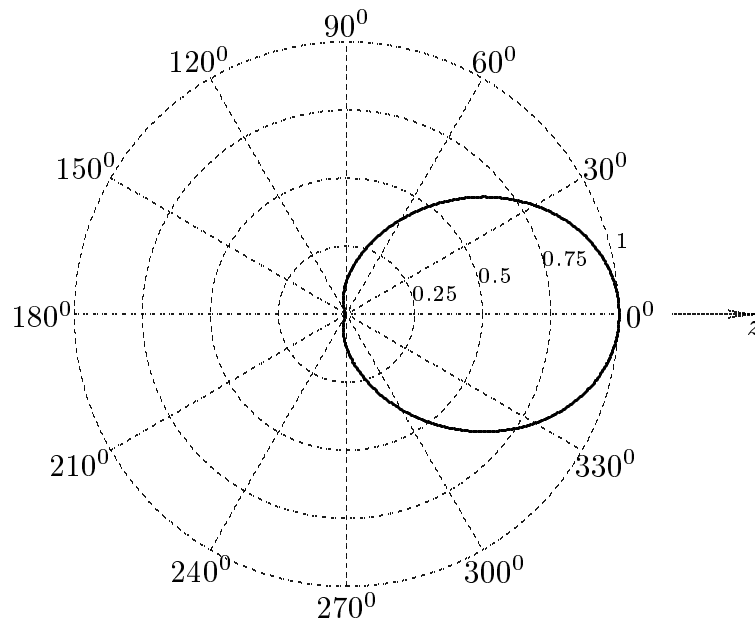


fig.16.9-9

Diagramma in scala semilogaritmica

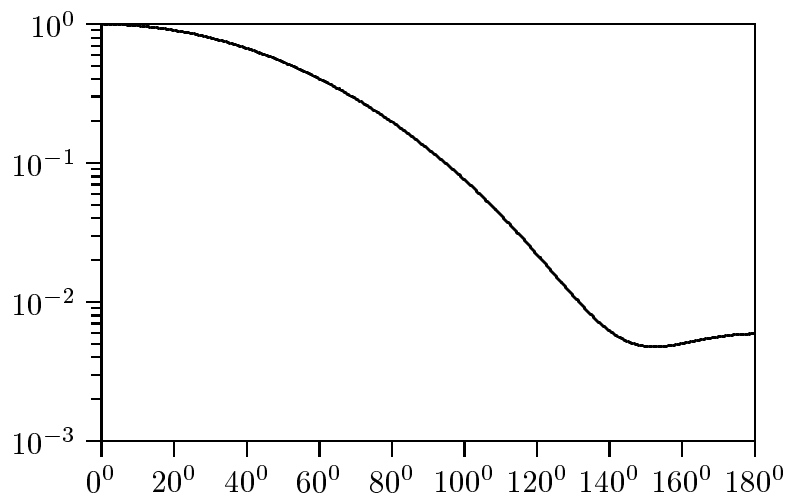


fig.16.9-10

$$\frac{|S(\theta, \phi)|}{|S(\theta, \phi)|_{max}} \quad (\phi = 0^\circ, a = 1\lambda, r = 100\lambda, n_{max} = 20, ind. \text{ rifr.} = 1.33, \sigma = 0)$$

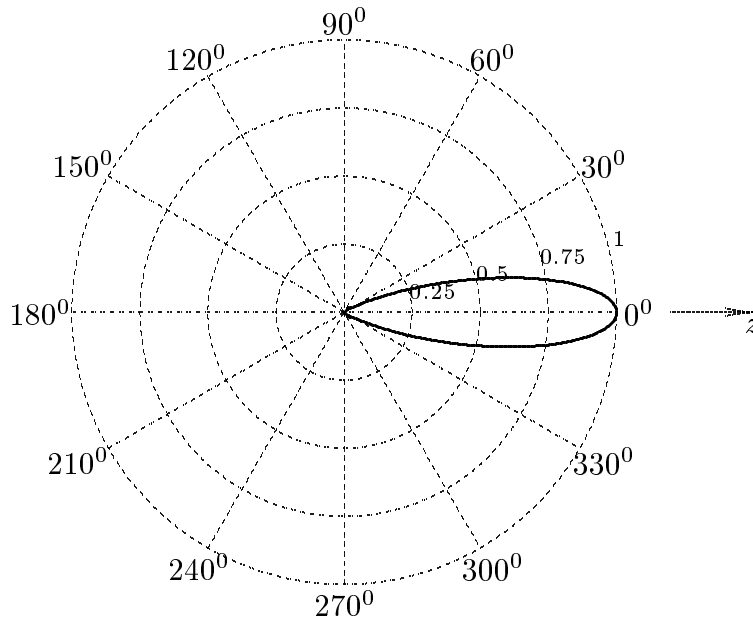


fig.16.9-11

Diagramma in scala semilogaritmica

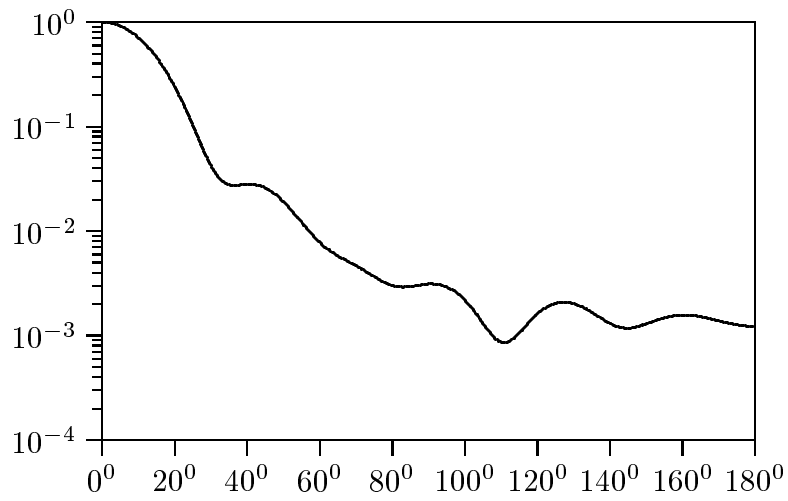


fig.16.9-12

$$\frac{|S(\theta, \phi)|}{|S(\theta, \phi)|_{max}} \quad (\phi = 90^\circ, a = 1\lambda, r = 100\lambda, n_{max} = 20, \text{ind. rifr.} = 1.33, \sigma = 0)$$

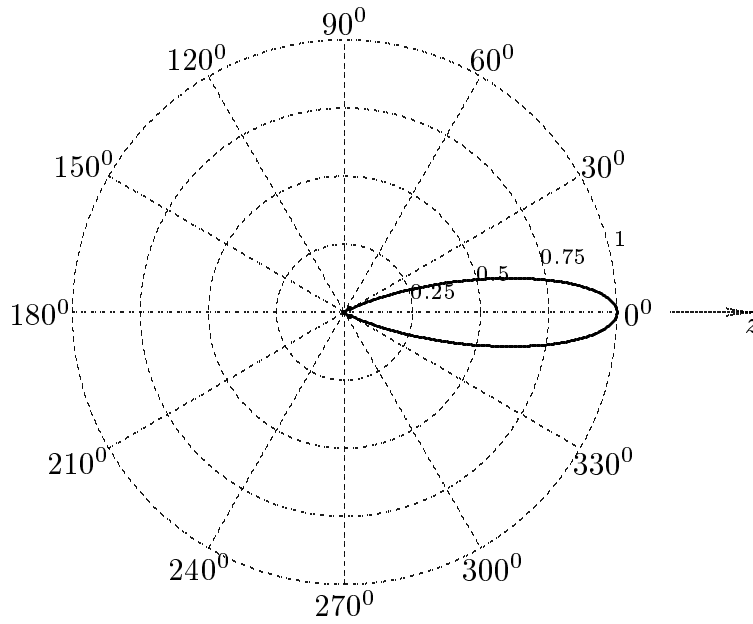


fig.16.9-13

Diagramma in scala semilogaritmica

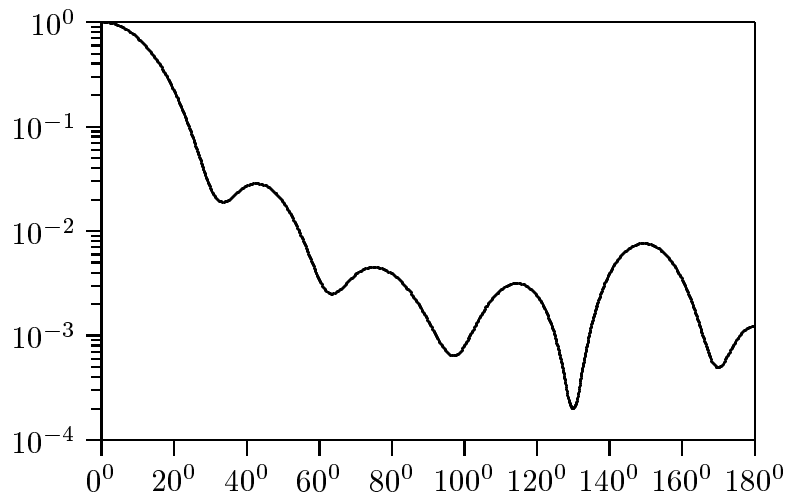


fig.16.9-14

$$\frac{|S(\theta, \phi)|}{|S(\theta, \phi)|_{max}} \quad (\phi = 0^0, a = 10\lambda, r = 100\lambda, n_{max} = 20, ind.refr. = 1.33, \sigma = 0)$$

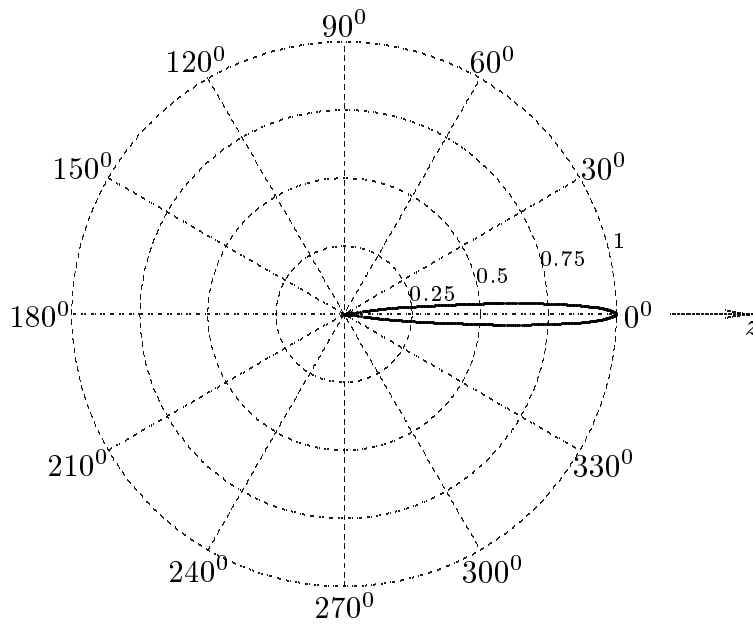


fig.16.9-15

Diagramma in scala semilogaritmica

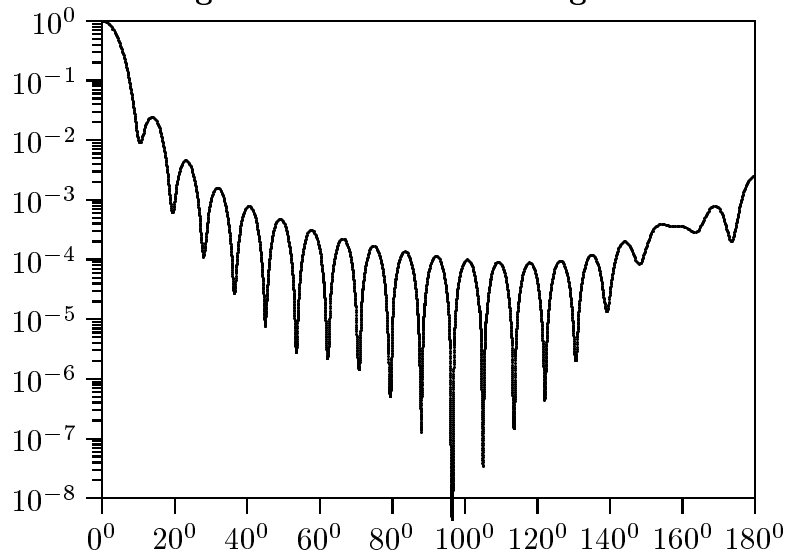


fig.16.9-16

$$\frac{|S(\theta, \phi)|}{|S(\theta, \phi)|_{max}} \quad (\phi = 90^\circ, a = 10\lambda, r = 100\lambda, n_{max} = 20, \text{ind. rifr.} = 1.33, \sigma = 0)$$

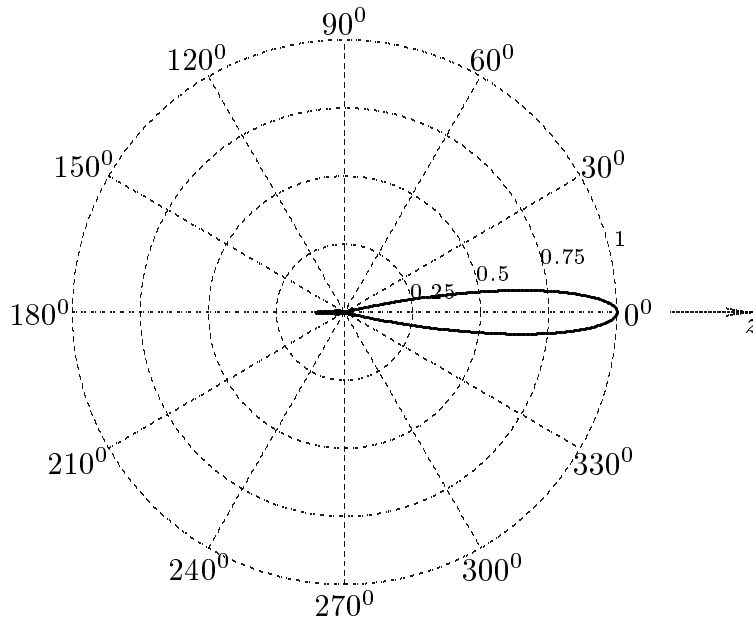


fig.16.9-17

Diagramma in scala semilogaritmica

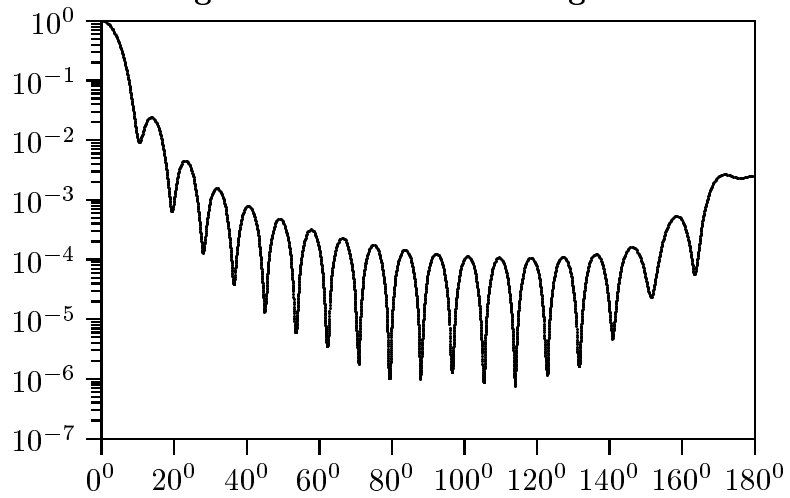


fig.16.9-18

$$\frac{|S(\theta, \phi)|}{|S(\theta, \phi)|_{max}} \quad (\phi = 0^{\circ}, a = 0.01\lambda, r = 100\lambda, n_{max} = 20, \epsilon_r = 81, \sigma = 0)$$

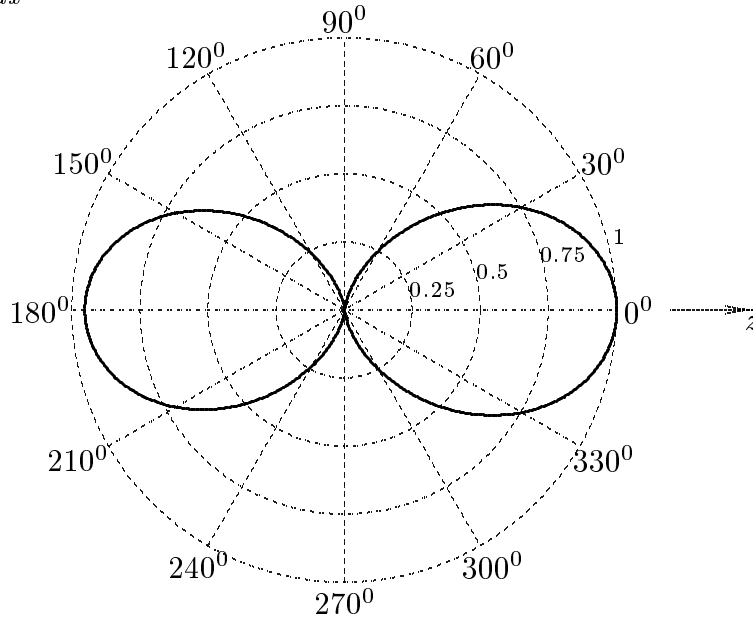


fig.16.9-19

$$\frac{|S(\theta, \phi)|}{|S(\theta, \phi)|_{max}} \quad (\phi = 90^{\circ}, a = 0.01\lambda, r = 100\lambda, n_{max} = 20, \epsilon_r = 81, \sigma = 0)$$

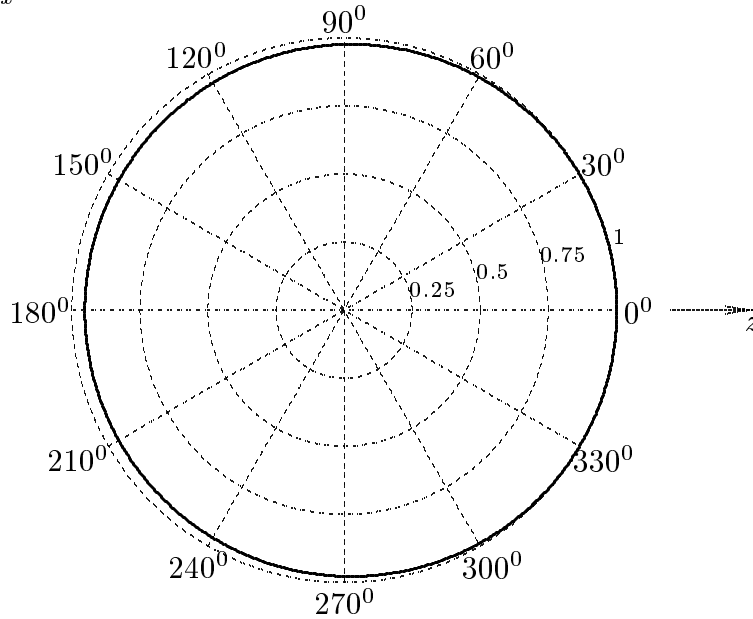


fig.16.9-20

$$\frac{|S(\theta, \phi)|}{|S(\theta, \phi)|_{max}} \quad (\phi = 0^{\circ}, a = 0.1\lambda, r = 100\lambda, n_{max} = 20, \epsilon_r = 81, \sigma = 0)$$

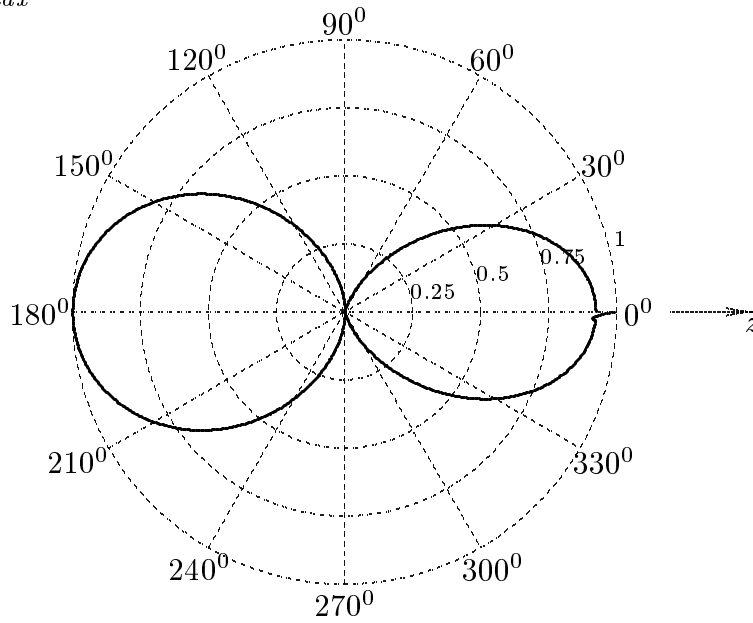


fig.16.9-21

$$\frac{|S(\theta, \phi)|}{|S(\theta, \phi)|_{max}} \quad (\phi = 90^{\circ}, a = 0.1\lambda, r = 100\lambda, n_{max} = 20, \epsilon_r = 81, \sigma = 0)$$

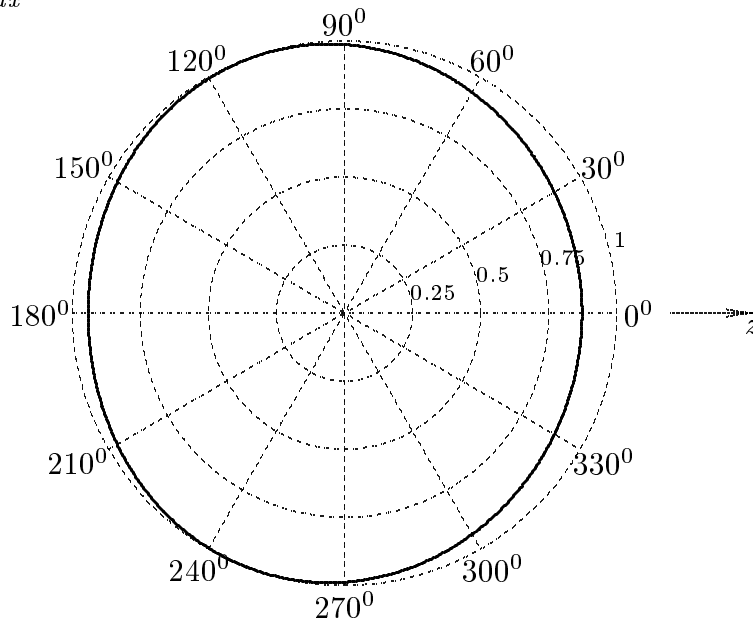


fig.16.9-22

16.10 - Programmi Matlab per i grafici dei paragrafi precedenti

Presentiamo i programmi Matlab per i grafici di Q (denominato 'Qsfera.m') e per i diagrammi di radiazione (denominato 'Diffusf.m').

Programma Matlab 'Qsfera.m'

```

delete(get(0,'children'))
clear all
%k2 e' la costante di propagazione in aria
%k1 e' la costante di propagazione complessa della sfera
%f e' la frequenza della radiazione incidente
%a e' il raggio della sfera
%rap e' il rapporto a/lambda
rap=0.0010:0.01:3.5;
for n=1:1:20;
eps0=8.854e-12;
indrifr=1.5;
epsr=indrifr.^2;
eps=eps0.*epsr;
mu0=4.*pi.*1e-7;
mur=1;
mu=mu0.*mur;
sigma=0;
c=3e8;
f=1e9;
lambda=c./f;
omega=2.*pi.*f;
a=rap.*lambda;
k2=omega./c;
k1=sqrt(omega.^2.*eps.*mu+i.*mu.*sigma.*omega);
x2=k2.*a;
x1=k1.*a;
bes1J(n,:)=sqrt(pi./2./x1).*besselJ(n+0.5,x1);
bes2J(n,:)=sqrt(pi./2./x2).*besselJ(n+0.5,x2);
bes1Y(n,:)=sqrt(pi./2./x1).*besselY(n+0.5,x1);
bes2Y(n,:)=sqrt(pi./2./x2).*besselY(n+0.5,x2);
bes1H1(n,:)=sqrt(pi./2./x1).*besselH(n+0.5,x1);
bes2H1(n,:)=sqrt(pi./2./x2).*besselH(n+0.5,x2);
dbes1J(n,:)=(n.*sqrt(pi./2./x1).*besselJ(n-1+0.5,x1)-(n+1).*...
sqrt(pi./2./x1).*besselJ(n+1+0.5,x1))./(2.*n+1);
dbes2J(n,:)=(n.*sqrt(pi./2./x2).*besselJ(n-1+0.5,x2)-(n+1).*...
sqrt(pi./2./x2).*besselJ(n+1+0.5,x2))./(2.*n+1);
dbes1Y(n,:)=(n.*sqrt(pi./2./x1).*besselY(n-1+0.5,x1)-(n+1).*...

```

```

sqrt(pi./2./x1).*besselY(n+1+0.5,x1))./(2.*n+1);
dbes2Y(n,:)=(n.*sqrt(pi./2./x2).*besselY(n-1+0.5,x2)-(n+1).*...
sqrt(pi./2./x2).*besselY(n+1+0.5,x2))./(2.*n+1);
dbes1H1(n,:)=(n.*sqrt(pi./2./x1).*besselH(n-1+0.5,x1)-(n+1).*...
sqrt(pi./2./x1).*besselH(n+1+0.5,x1))./(2.*n+1);
dbes2H1(n,:)=(n.*sqrt(pi./2./x2).*besselH(n-1+0.5,x2)-(n+1).*...
sqrt(pi./2./x2).*besselH(n+1+0.5,x2))./(2.*n+1);
anum(n,:)=bes1J(n,:).*(bes2J(n,:)+x2.*dbes2J(n,:))-bes2J(n,:).*...
(bes1J(n,:)+x1.*dbes1J(n,:));
aden(n,:)=bes1J(n,:).*(bes2H1(n,:)+x2.*dbes2H1(n,:))-bes2H1(n,:).*...
(bes1J(n,:)+x1.*dbes1J(n,:));
bnum(n,:)=bes2J(n,:).*(bes1J(n,:)+x1.*dbes1J(n,:))-(k1.^2./k2.^2).*bes1J(n,:).*...
(bes2J(n,:)+x2.*dbes2J(n,:));
bden(n,:)=bes2H1(n,:).*(bes1J(n,:)+x1.*dbes1J(n,:))-(k1.^2./k2.^2).*bes1J(n,:).*...
(bes2H1(n,:)+x2.*dbes2H1(n,:));
ARN(n,:)=-(anum(n,:)./aden(n,:));
BRN(n,:)=-(bnum(n,:)./bden(n,:));
PARZ(n,:)=(2.*n+1).*((abs(ARN(n,:))).^2+(abs(BRN(n,:))).^2);
end
AN=sum(PARZ);
Q=(2./x2.^2).*AN;
plot(x2,Q)

```

Programma Matlab 'Diffusf.m'

```
delete(get(0,'children'))
clear all
%k2 e' la costante di propagazione in aria
%k1 e' la costante di propagazione complessa della sfera
%f e' la frequenza della radiazione incidente
%a e' il raggio della sfera
%rap e' il rapporto a/lambda
%rap1 e' il rapporto r/lambda
eps0=8.854e-12;
nrifr=9;
epsr=(nrifr).^2;
eps=eps0.*epsr;
mu0=4.*pi.*1e-7;
mur=1;
mu=mu0.*mur;
sigma=0;
c=3e8;
f=1e9;
rap=0.1
rap1=100;
phig=0;
phi=phig.*pi./180;
lambda=c./f;
omega=2.*pi.*f;
a=rap.*lambda;
k2=omega./c;
k1=sqrt(omega.^2.*eps.*mu+i.*mu.*sigma.*omega);
x2=k2.*a;
x1=k1.*a;
thetag=0.01:1:359.99;
theta=thetag.*pi./180;
for n=1:1:20;
bes1J(n)=sqrt(pi./2./x1).*besselJ(n+0.5,x1);
bes2J(n)=sqrt(pi./2./x2).*besselJ(n+0.5,x2);
bes1Y(n)=sqrt(pi./2./x1).*besselY(n+0.5,x1);
bes2Y(n)=sqrt(pi./2./x2).*besselY(n+0.5,x2);
bes1H1(n)=sqrt(pi./2./x1).*besselH(n+0.5,x1);
bes2H1(n)=sqrt(pi./2./x2).*besselH(n+0.5,x2);
dbes1J(n)=(n.*sqrt(pi./2./x1).*besselJ(n-1+0.5,x1)-(n+1).*...
sqrt(pi./2./x1).*besselJ(n+1+0.5,x1))./(2.*n+1);
dbes2J(n)=(n.*sqrt(pi./2./x2).*besselJ(n-1+0.5,x2)-(n+1).*...
sqrt(pi./2./x2).*besselJ(n+1+0.5,x2))./(2.*n+1);
```

```

dbes1Y(n)=(n.*sqrt(pi./2./x1).*besselY(n-1+0.5,x1)-(n+1).*...
sqrt(pi./2./x1).*besselY(n+1+0.5,x1))./(2.*n+1);
dbes2Y(n)=(n.*sqrt(pi./2./x2).*besselY(n-1+0.5,x2)-(n+1).*...
sqrt(pi./2./x2).*besselY(n+1+0.5,x2))./(2.*n+1);
dbes1H1(n)=(n.*sqrt(pi./2./x1).*besselH(n-1+0.5,x1)-(n+1).*...
sqrt(pi./2./x1).*besselH(n+1+0.5,x1))./(2.*n+1);
dbes2H1(n)=(n.*sqrt(pi./2./x2).*besselH(n-1+0.5,x2)-(n+1).*...
sqrt(pi./2./x2).*besselH(n+1+0.5,x2))./(2.*n+1);
anum(n)=bes1J(n).*(bes2J(n)+x2.*dbes2J(n))-bes2J(n).*...
(bes1J(n)+x1.*dbes1J(n));
aden(n)=bes1J(n).*(bes2H1(n)+x2.*dbes2H1(n))-bes2H1(n).*...
(bes1J(n)+x1.*dbes1J(n));
bnum(n)=bes2J(n).*(bes1J(n)+x1.*dbes1J(n))-(k1.^2./k2.^2).*...
bes1J(n).*(bes2J(n)+x2.*dbes2J(n));
bden(n)=bes2H1(n).*(bes1J(n)+x1.*dbes1J(n))-(k1.^2./k2.^2).*...
bes1J(n).*(bes2H1(n)+x2.*dbes2H1(n));
ARN(n)=-(anum(n)./aden(n));
BRN(n)=-(bnum(n)./bden(n));
ARNPRO=-(bes2J./bes2H1);
BRNPRO=-(bes2J+x2.*dbes2J)./(bes2H1+x2.*dbes2H1);
r=rap1.*lambda;
xp2=k2.*r;
PL=-Legendre(n,cos(theta));
PLH=-Legendre(n,cos(theta+0.0000001));
DPH=(PLH(2,:)-PL(2,:))./0.0000001;
%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
%valutazione del campo elettrico e del campo magnetico diffuso
%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
Erdif(n,:)=(1./xp2).*exp(i.*xp2).*(cos(phi)./xp2).*...
(2.*n+1).*BRN(n).*PL(2,:);
Etdif(n,:)=(i./xp2).*exp(i.*xp2).*cos(phi).*...
((2.*n+1)./(n.*(n+1))).*(ARN(n).*PL(2,:)./sin(theta)+BRN(n).*DPH);
Efdif(n,:)=(i./xp2).*exp(i.*xp2).*sin(phi).*((2.*n+1)./...
(n.*(n+1))).*(ARN(n).*DPH+BRN(n).*PL(2,:)./sin(theta));
Hrdif(n,:)=(1./xp2).*exp(i.*xp2).*(sin(phi)./(mu.*omega.*r)).*...
(2.*n+1).*ARN(n).*PL(2,:);
Htdif(n,:)=(i./xp2).*exp(i.*xp2).*(k2.*sin(phi)./(mu.*omega))...
.*((2.*n+1)./(n.*(n+1))).*(BRN(n).*PL(2,:)./sin(theta)+ARN(n).*DPH);
Hfdif(n,:)=(i./xp2).*exp(i.*xp2).*(k2.*cos(phi)./(mu.*omega)).*...
((2.*n+1)./(n.*(n+1))).*(BRN(n).*DPH+ARN(n).*PL(2,:)./sin(theta));
end
Erdiftot=(sum(Erdif));
Etdiftot=(sum(Etdif));
Efdiftot=(sum(Efdif));

```

```
Hrdiftot=(sum(Hrdif));
Htdiftot=(sum(Htdif));
Hfdiftot=(sum(Hfdif));
%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
%Calcolo del vettore di Poynting
%XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
Sdif=(1./2).*(Etdiftot.*conj(Hfdiftot)-Efdiftot.*conj(Htdiftot));
DDDD=max(abs(real(Sdif)));
polar(theta,abs(real(Sdif))./DDDD);
semilogy(theta,abs(real(Sdif))./DDDD);
zoom
```

Fine del Cap.16