Cap. 15

Teoria rigorosa dello scattering da parte di una sfera.

15.1 - Generalità.

Procediamo alla ricerca della soluzione esatta dello scattering di un'onda elettromagnetica piana da parte di una sfera isotropa, omogenea e di dimensioni arbitrarie.

Poichè si tratta di un problema di condizioni al contorno con geometria sferica, il campo elettrico ed il campo magnetico devono soddisfare all'equazione d'onda vettoriale in coordinate sferiche. Per semplificare il problema assumiamo il mezzo circostante la sfera privo di perdite. Lo spazio sia privo di cariche libere.

L'equazione d'onda vettoriale omogenea per il campo elettrico monocromatico è:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \tag{15.1.1}$$

In coordinate sferiche il campo elettrico può essere scritto come :

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = \hat{e}_r E_r(r, \theta, \phi) + \hat{e}_\theta E_\theta(r, \theta, \phi) + \hat{e}_\phi E_\phi(r, \theta, \phi) \tag{15.1.2}$$

Sostituendo la (15.1.2) nella (15.1.1) si ottiene:

$$\nabla^2 \left(\hat{e}_r E_r + \hat{e}_\theta E_\theta + \hat{e}_\phi E_\phi\right) + k^2 \left(\hat{e}_r E_r + \hat{e}_\theta E_\theta + \hat{e}_\phi E_\phi\right) = 0 \tag{15.1.3}$$

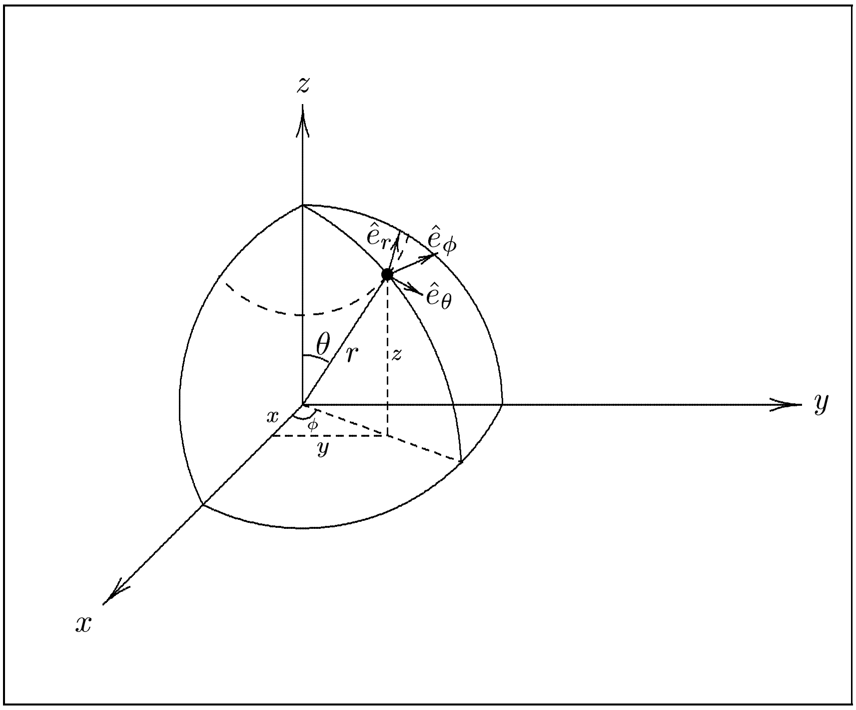

fig.15.1-1

Poichè:

$$\nabla^2\left(\hat{e}_r E_r\right) \neq \hat{e}_r \nabla^2 E_r$$
$$\nabla^2\left(\hat{e}_\theta E_\theta\right) \neq \hat{e}_\theta \nabla^2 E_\theta$$
$$\nabla^2\left(\hat{e}_\phi E_\phi\right) \neq \hat{e}_\phi \nabla^2 E_\phi$$

la (15.1.3) non si riduce a tre semplici equazioni scalari indipendenti come nel caso di coordinate cartesiane rettangolari e nemmeno al caso di coordinate cilindriche circolari in cui l'equazione in E_z era indipendente.

Infatti esplicitando $\nabla^2\vec{E}$ in coordinate sferiche, si ha:

$$\nabla^2 E_r - \frac{2}{r^2}\left(E_r + E_\theta \cot\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial E_\theta}{\partial\theta}\right) + k^2 E_r = 0 \tag{15.1.4}$$

$$\nabla^2 E_\theta - \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin^2\theta}E_\theta - 2\frac{\partial E_r}{\partial\theta} + \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi}\right) + k^2 E_\theta = 0 \tag{15.1.5}$$

$$\nabla^2 E_\phi - \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin^2\theta}E_\phi - \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\phi} - \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial E_\theta}{\partial\phi}\right) + k^2 E_\phi = 0 \tag{15.1.6}$$

15.2 - Equazione scalare di Helmholtz in coordinate sferiche.

Per trovare una soluzione delle equazioni (15.1.4), (15.1.5) e (15.1.6) cominciamo a risolvere l'equazione scalare di Helmholtz in coordinate sferiche. Sia $f(r,\theta,\phi)$ una funzione soddisfacente alla equazione di Helmholtz omogenea:

$$\nabla^2 f + k^2 f = 0 \tag{15.2.1}$$

che, in coordinate sferiche si esprime:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + k^2 f = 0 \tag{15.2.2}$$

L'espressione è separabile ponendo $f = f_1(r)f_2(\theta)f_3(\phi)$ e sostituendo nella (15.2.2).

Si ha:

$$f_2 f_3\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f_1}{\partial r}\right) + f_1 f_3\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f_2}{\partial\theta}\right) + f_1 f_2\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f_3}{\partial\phi^2} + k^2 f_1 f_2 f_3 = 0 \tag{15.2.3}$$

Dividendo entrambi i membri per $f_1 f_2 f_3$, moltiplicando per $r^2\sin^2\theta$ e sostituendo alle derivate parziali le derivate totali si ottiene:

$$\frac{\sin^2\theta}{f_1}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df_1}{dr}\right) + \frac{1}{f_2}\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{df_2}{d\theta}\right) + \frac{1}{f_3}\frac{d^2 f_3}{d\phi^2} + k^2 r^2\sin^2\theta = 0 \tag{15.2.4}$$

Poichè il terzo termine è soltanto funzione di ϕ e gli altri sono funzione di r e θ si deve necessariamente avere

$$\frac{1}{f_3}\frac{d^2 f_3}{d\phi^2} = -\mu^2 \tag{15.2.5}$$

dove μ è una costante. Sostituendo la (15.2.5) nella (15.2.4) e dividendo per $\sin^2\theta$, risulta:

$$\frac{1}{f_1}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df_1}{dr}\right)+\frac{1}{f_2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{df_2}{d\theta}\right)-\frac{\mu^2}{\sin^2\theta}+k^2r^2=0 \tag{15.2.6}$$

che è equivalente a:

$$\frac{1}{f_1}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df_1}{dr}\right)+k^2r^2=\nu^2 \tag{15.2.7}$$

$$\frac{1}{f_2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{df_2}{d\theta}\right)-\frac{\mu^2}{\sin^2\theta}=-\nu^2 \tag{15.2.8}$$

I parametri ν e μ sono costanti di separazione, la cui scelta deve soddisfare all'esigenza fisica che in un punto qualsiasi dello spazio l'espressione del campo sia una funzione ad un sol valore. Se le proprietà del mezzo sono indipendenti dall'anomalia ϕ, è necessario che $f_3(\phi)$ sia una funzione periodica di periodo 2π e perciò μ deve essere un numero intero $m=0,\pm1,\pm2,\cdots$; poniamo, perciò, $\mu=m$.

Consideriamo, ora, l'equazione (15.2.8):

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{df_2}{d\theta}\right)+\left(\nu^2-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)f_2=0$$

che si può scrivere:

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{df_2}{d\theta}+\frac{d^2f_2}{d\theta^2}+\left(\nu^2-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)f_2=0 \tag{15.2.9}$$

Poniamo $\eta=\cos\theta$ e, tenendo conto che:

$$\frac{df_2}{d\theta}=\frac{df_2}{d\eta}\frac{d\eta}{d\theta}=-\sin\theta\frac{df_2}{d\eta}$$

e che:

$$\begin{aligned}\frac{d^2f_2}{d\theta^2}&=\frac{d}{d\theta}\left(-\sin\theta\frac{df_2}{d\eta}\right)=\\&=-\cos\theta\frac{df_2}{d\eta}-\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\frac{df_2}{d\eta}\right)=\\&=-\cos\theta\frac{df_2}{d\eta}-\sin\theta\frac{d^2f_2}{d\eta^2}\frac{d\eta}{d\theta}=\\&=-\cos\theta\frac{df_2}{d\eta}+\sin^2\theta\frac{d^2f_2}{d\eta^2}\end{aligned}$$

l'equazione (15.2.9) diventa:

$$-\cos\theta\frac{df_2}{d\eta}-\cos\theta\frac{df_2}{d\eta}+\sin^2\theta\frac{d^2f_2}{d\eta^2}+\left(\nu^2-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)f_2=0$$

e, ancora:

$$(1-\eta^2)\frac{d^2 f_2}{d\eta^2} - 2\eta\frac{df_2}{d\eta} + \left(\nu^2 - \frac{m^2}{1-\eta^2}\right) f_2 = 0 \tag{15.2.10}$$

Prima di discutere la (15.2.10) consideriamo la soluzione dell'equazione di Legendre ordinaria che si ottiene dalla (15.2.10) ponendo $m = 0$. Posto per comodità $\nu^2 = l(l+1)$ (l, inizialmente, non necessariamente intero), si ha:

$$(1-\eta^2)\frac{d^2 v}{d\eta^2} - 2\eta\frac{dv}{d\eta} + l(l+1)v = 0 \tag{15.2.11}$$

La soluzione cercata deve essere univoca, finita e continua nell'intervallo $-1 \le \eta \le 1$ per potere essere fisicamente significante.

Rappresentiamo la soluzione mediante una serie di potenze della forma:

$$P(\eta) = \eta^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j \eta^j \tag{15.2.12}$$

dove α è un parametro da determinarsi.

Sostituendo la (15.2.12) nella (15.2.11), tenendo conto che

$$\begin{aligned}
P(\eta) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \eta^{(\alpha+j)} \\
\frac{dP(\eta)}{d\eta} &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\alpha+j)\eta^{(\alpha+j-1)} \\
\frac{d^2P(\eta)}{d\eta^2} &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\alpha+j)(\alpha+j-1)\eta^{(\alpha+j-2)}
\end{aligned}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\infty} a_j(\alpha+j)(\alpha+j-1)\eta^{(\alpha+j-2)} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\alpha+j)(\alpha+j-1)\eta^{(\alpha+j)} + \\
&\quad - 2\sum_{j=0}^{\infty} a_j(\alpha+j)\eta^{(\alpha+j)} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j l(l+1)\eta^{(\alpha+j)} = 0
\end{aligned} \tag{15.2.13}$$

che possiamo scrivere:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\Big\{(\alpha+j)(\alpha+j-1)a_j\eta^{(\alpha+j-2)} - \big[(\alpha+j)(\alpha+j-1) + 2(\alpha+j) - l(l+1)\big]a_j\eta^{(\alpha+j)}\Big\} = 0$$

e, ancora:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\Big\{(\alpha+j)(\alpha+j-1)a_j\eta^{(\alpha+j-2)} - \big[(\alpha+j)(\alpha+j+1) - l(l+1)\big]a_j\eta^{(\alpha+j)}\Big\} = 0 \tag{15.2.14}$$

Perchè la (15.2.14) sia verificata il coefficiente di ciascuna potenza di η deve annullarsi separatamente.

Sviluppando la serie (15.2.14) si ha:

$$\begin{gathered}\alpha(\alpha-1)a_0\eta^{(\alpha-2)}-[\alpha(\alpha+1)-l(l+1)]a_0\eta^{\alpha}+\alpha(\alpha+1)a_1\eta^{(\alpha-1)}-\\-[(\alpha+1)(\alpha+2)-l(l+1)]a_1\eta^{(\alpha+1)}+(\alpha+1)(\alpha+2)a_2\eta^{\alpha}-\\-[(\alpha+2)(\alpha+3)-l(l+1)]a_2\eta^{(\alpha+2)}+(\alpha+2)(\alpha+3)a_3\eta^{(\alpha+1)}-\\-[(\alpha+3)(\alpha+4)-l(l+1)]a_3\eta^{(\alpha+3)}+\cdots\cdots+\cdots\cdots=0\end{gathered}$$

Deve essere pertanto:

$$\begin{aligned}\alpha(\alpha-1)a_0&=0 &&[\text{coefficiente di } \eta^{(\alpha-2)}]\\ \alpha(\alpha+1)a_1&=0 &&[\text{coefficiente di } \eta^{(\alpha-1)}]\\ [\alpha(\alpha+1)-l(l+1)]a_0&=(\alpha+1)(\alpha+2)a_2 &&[\text{coefficiente di } \eta^{\alpha}]\\ [(\alpha+1)(\alpha+2)-l(l+1)]a_1&=(\alpha+2)(\alpha+3)a_3 &&[\text{coefficiente di } \eta^{(\alpha+1)}]\\ [(\alpha+2)(\alpha+3)-l(l+1)]a_2&=(\alpha+3)(\alpha+4)a_4 &&[\text{coefficiente di } \eta^{(\alpha+2)}]\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

che in forma compatta si scrivono:

$$\alpha(\alpha-1)a_0=0 \tag{15.2.15}$$

$$\alpha(\alpha+1)a_1=0 \tag{15.2.16}$$

$$a_{j+2}=\frac{[(\alpha+j)(\alpha+j+1)-l(l+1)]}{(\alpha+j+1)(\alpha+j+2)}a_j \quad [j=0,1,2,3\cdots] \tag{15.2.17}$$

Poichè α deve essere non negativo per evitare la divergenza per $\eta=0$, la (15.2.15) e la (15.2.16) sono soddisfatte se $\alpha=0$ ($a_0\neq 0$, $a_1\neq 0$) oppure $\alpha=1$, $a_1=0$ e $a_0\neq 0$.

Nel caso di $\alpha=0$ si può scegliere $a_1=0$ e in questo caso la serie contiene potenze pari di η; nel caso di $\alpha=1$ la serie contiene potenze dispari di η. La soluzione generale è la somma di questi due casi.

$$\begin{matrix}\alpha=0\\ a_1=0\end{matrix}\Longrightarrow P(\eta)=a_0+a_2\eta^2+a_4\eta^4+\cdots \tag{15.2.18}$$

$$\alpha=1\Longrightarrow P(\eta)=a_0\eta+a_2\eta^3+a_4\eta^5+\cdots \tag{15.2.19}$$

Per entrambi i casi si possono dimostrare le seguenti proprietà:

a) la relativa serie converge per $\eta^2<1$, per qualunque valore di l.

b) la serie diverge per $\eta=\pm 1$, a meno che non sia troncata ad un numero finito di termini.

Poichè vogliamo una soluzione che sia finita anche per $\eta=\pm 1$ oltre che per $\eta^2<1$, occorre che la serie sia troncata, cioè che, per un particolare valore di j, dovrà risultare $a_j=0$ e quindi, per la (15.2.17), anche i coefficienti successivi sono nulli. Poichè α e j sono interi positivi o nulli, la serie potrà essere troncata solo se l è zero o un intero positivo.

Consideriamo le seguenti tabelle:

$$I) \quad \boxed{\alpha = 0} \Longrightarrow a_{j+2} = \frac{j(j+1) - l(l+1)}{(j+1)(j+2)} a_j$$

j	a_{j+2}	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$
0	a_2	0	$-a_0$	$-3a_0$	$-6a_0$	$-10a_0$
2	a_4	0	$\frac{1}{3}a_2 = -\frac{1}{3}a_0$	0	$-\frac{1}{2}a_2 = 3a_0$	$-\frac{7}{6}a_2 = \frac{35}{3}a_0$
4	a_6	0	$\frac{3}{5}a_4 = -\frac{1}{5}a_0$	0	$\frac{4}{15}a_4 = \frac{4}{5}a_0$	0
6	a_8	0	$\frac{5}{7}a_6 = -\frac{1}{7}a_0$	0	$\frac{15}{28}a_6 = \frac{3}{7}a_0$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$II) \quad \boxed{\alpha = 1} \Longrightarrow a_{j+2} = \frac{(j+1)(j+2) - l(l+1)}{(j+2)(j+3)} a_j$$

j	a_{j+2}	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$
0	a_2	$\frac{1}{3}a_0$	0	$-\frac{2}{3}a_0$	$-\frac{5}{3}a_0$	$-3a_0$
2	a_4	$\frac{3}{5}a_2 = \frac{1}{5}a_0$	0	$\frac{3}{10}a_2 = -\frac{1}{5}a_0$	0	$-\frac{2}{5}a_2 = \frac{6}{5}a_0$
4	a_6	$\frac{5}{7}a_4 = \frac{1}{7}a_0$	0	$\frac{4}{7}a_4 = -\frac{4}{35}a_0$	0	$\frac{5}{21}a_4 = \frac{2}{7}a_0$
6	a_8	$\frac{7}{9}a_6 = \frac{1}{9}a_0$	0	$\frac{25}{36}a_6 = -\frac{5}{63}a_0$	0	$\frac{1}{2}a_6 = \frac{1}{7}a_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Come si vede dalle precedenti tabelle, se l è pari risulta troncata solo la serie con $\alpha = 0$; se l è dispari solo la serie con $\alpha = 1$. Per altri valori di l le serie divergono per $\eta = \pm 1$.

Pertanto, per valori pari di l, le soluzioni sono date dalla (15.2.18); per valori dispari di l, le soluzioni sono date dalla (15.2.19). Esse sono:

$$P_0(\eta) = a_0$$
$$P_2(\eta) = a_0 - 3a_0\eta^2$$
$$P_4(\eta) = a_0 - 10a_0\eta^2 + \frac{35}{3}a_0\eta^4$$
$$\vdots$$
$$P_1(\eta) = a_0\eta$$
$$P_3(\eta) = a_0\eta - \frac{5}{3}a_0\eta^3$$
$$\vdots$$

L'indice nelle $P(\eta)$ rappresenta il valore di l.

Per convenzione questi polinomi sono normalizzati in modo da avere valore 1 per $\eta = +1$ e prendono il nome di **polinomi di Legendre di ordine** l. Essi si scrivono:

$$\begin{aligned} P_0(\eta) &= 1 \\ P_1(\eta) &= \cos\theta \\ P_2(\eta) &= \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) \\ P_3(\eta) &= \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) \\ P_4(\eta) &= \frac{1}{8}(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{15.2.20}$$

I polinomi di Legendre costituiscono un insieme completo di funzioni ortogonali nello intervallo $-1 < x < 1$ (per la dimostrazione vedi Jackson pag. 80), pertanto qualsiasi funzione $f(x)$ definita nell'intervallo $-1 < x < 1$ può essere espressa mediante essi. Precisamente la rappresentazione di $f(x)$ in serie di Legendre è:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x) \tag{15.2.21}$$

dove

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_l(x) dx \tag{15.2.22}$$

Ritorniamo, ora, alla ricerca delle soluzioni dell'equazione (15.2.10).

Per questo deriviamo la (15.2.11) m volte rispetto ad η dopo avere sostituito l con n (numero naturale).

Si ha:

$$\frac{d^m}{d\eta^m}\left\{(1-\eta^2)\frac{d^2v}{d\eta^2} - 2\eta\frac{dv}{d\eta}\right\} + n(n+1)\frac{d^m}{d\eta^m}v = 0 \tag{15.2.23}$$

Ricordiamo che:

$$\frac{d^m g\cdot h}{dx^m} = h\frac{d^m g}{dx^m} + m\frac{dh}{dx}\frac{d^{m-1}g}{dx^{m-1}} + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{d^2h}{dx^2}\frac{d^{m-2}g}{dx^{m-2}} + \cdots + \\ + \frac{m!}{(m-k)!k!}\frac{d^kh}{dx^k}\frac{d^{m-k}g}{dx^{m-k}} + \cdots + g\frac{d^mh}{dx^m}$$

Ponendo $g = \dfrac{d^2v}{d\eta^2}$, $h = (1-\eta^2)$, $x = \eta$ e fermandoci al termine di indice $k = 2$ perchè $\dfrac{d^3h}{dx^3} = 0$, si ha:

$$\frac{d^m}{d\eta^m}\left\{(1-\eta^2)\frac{d^2v}{d\eta^2}\right\} = (1-\eta^2)\frac{d^m}{d\eta^m}\left(\frac{d^2v}{d\eta^2}\right) - 2m\eta\frac{d^{m-1}}{d\eta^{m-1}}\left(\frac{d^2v}{d\eta^2}\right) - m(m-1)\frac{d^{m-2}}{d\eta^{m-2}}\left(\frac{d^2v}{d\eta^2}\right) = \\ = (1-\eta^2)\frac{d^2}{d\eta^2}\left(\frac{d^mv}{d\eta^m}\right) - 2m\eta\frac{d}{d\eta}\left(\frac{d^mv}{d\eta^m}\right) - m(m-1)\frac{d^mv}{d\eta^m}$$

Analogamente ponendo $g = \dfrac{dv}{d\eta}$, $h = \eta$, $x = \eta$ e fermandoci al termine di indice $k = 1$ perchè $\dfrac{d^2h}{dx^2} = 0$, si ha:

$$\frac{d^m}{d\eta^m}\left\{\eta\frac{dv}{d\eta}\right\} = \eta\frac{d^m}{d\eta^m}\left(\frac{dv}{d\eta}\right) + m\frac{d^{m-1}}{d\eta^{m-1}}\left(\frac{dv}{d\eta}\right) = \eta\frac{d}{d\eta}\left(\frac{d^m v}{d\eta^m}\right) + m\frac{d^m v}{d\eta^m}$$

La (15.2.23), quindi, diventa, dopo aver posto $w = \dfrac{d^m v}{d\eta^m}$:

$$(1-\eta^2)\frac{d^2w}{d\eta^2} - 2m\eta\frac{dw}{d\eta} - m(m-1)w - 2\eta\frac{dw}{d\eta} - 2mw + n(n+1)w = 0$$

che si può scrivere:

$$(1-\eta^2)\frac{d^2w}{d\eta^2} - 2(m+1)\eta\frac{dw}{d\eta} + \big[n(n+1) - m(m+1)\big]w = 0 \tag{15.2.24}$$

Poniamo, ora, nella (15.2.24)

$$w = (1-\eta^2)^{-m/2}f_2(\eta) \tag{15.2.25}$$

Si ha:

$$\frac{dw}{d\eta} = m\eta(1-\eta^2)^{-m/2-1}f_2 + (1-\eta^2)^{-m/2}\frac{df_2}{d\eta}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = m(1-\eta^2)^{-m/2-1}f_2 - 2m\eta^2\left(-\frac{m}{2}-1\right)(1-\eta^2)^{-m/2-2}f_2 + 2m\eta(1-\eta^2)^{-m/2-1}\frac{df_2}{d\eta} + \\ + (1-\eta^2)^{-m/2}\frac{d^2f_2}{d\eta^2}$$

Pertanto l'equazione (15.2.24) diventa:

$$\big(1-\eta^2\big)^{-m/2+1}\ \frac{d^2f_2}{d\eta^2} + 2m\eta(1-\eta^2)^{-m/2}\ \frac{df_2}{d\eta} + m(1-\eta^2)^{-m/2}f_2 - \\ - 2m\eta^2\left(-\frac{m}{2}-1\right)(1-\eta^2)^{-m/2-1}f_2 - 2(m+1)m\eta^2(1-\eta^2)^{-m/2-1}f_2 - \\ - 2(m+1)\eta(1-\eta^2)^{-m/2}\ \frac{df_2}{d\eta} + n(n+1)(1-\eta^2)^{-m/2}f_2 - m(m+1)(1-\eta^2)^{-m/2}f_2 = 0$$

Dividendo per $\Big(1-\eta^2\Big)^{-m/2}$ e raggruppando, si ha:

$$(1-\eta^2)\frac{d^2f_2}{d\eta^2} - 2\eta\frac{df_2}{d\eta} + n(n+1)f_2 - m^2f_2 - m^2\eta^2(1-\eta^2)^{-1}f_2 = 0$$

che si può scrivere:

$$(1-\eta^2)\frac{d^2 f_2}{d\eta^2} - 2\eta\frac{df_2}{d\eta} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\eta^2}\right] f_2 = 0 \tag{15.2.26}$$

La (15.2.26) è formalmente identica alla (15.2.10) che, pertanto, ammette come soluzioni, finite nei poli $\eta = \pm 1$, le funzioni:

$$f_2(\eta) = (1-\eta^2)^{m/2} w = (1-\eta^2)^{m/2}\frac{d^m P_n(\eta)}{d\eta^m} \tag{15.2.27}$$

che prendono il nome di polinomi associati di Legendre.

Essi si indicano col simbolo $P_n^m(\eta)$ e si annullano quando $m > n$, poichè $P_n(\eta)$ è un polinomio di grado n.

Calcoliamone alcuni tenendo conto delle (15.2.20):

$$\begin{aligned}
P_0(\eta) &= 1\\
P_1(\eta) &= \eta = \cos\theta\\
*P_1^1(\eta) &= (1-\eta^2)^{\frac{1}{2}} = \sin\theta\\
P_2(\eta) &= \frac{1}{2}(3\eta^2-1) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)\\
*P_2^1(\eta) &= 3\eta(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sin 2\theta\\
*P_2^2(\eta) &= 3(1-\eta^2) = \frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)\\
P_3(\eta) &= \frac{1}{2}(5\eta^3 - 3\eta) = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)\\
*P_3^1(\eta) &= (1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{15}{2}\eta^2 - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}(15\cos^2\theta - 3)\sin\theta\\
*P_3^2(\eta) &= (1-\eta^2)15\eta = 15\sin^2\theta\cos\theta\\
*P_3^3(\eta) &= (1-\eta^2)^{3/2}15 = 15\sin^3\theta\\
P_4(\eta) &= \frac{1}{8}(35\eta^4 - 30\eta^2 + 3) = \frac{1}{8}(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3)\\
*P_4^1(\eta) &= (1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(35\eta^3 - 15\eta) = \frac{1}{4}\sin 2\theta(35\cos^2\theta - 15)\\
*P_4^2(\eta) &= (1-\eta^2)\frac{15}{2}(7\eta^2 - 1) = \frac{15}{2}\sin^2\theta(7\cos^2\theta - 1)\\
*P_4^3(\eta) &= (1-\eta^2)^{3/2}105\eta = 105\sin^3\theta\cos\theta\\
*P_4^4(\eta) &= (1-\eta^2)^2 105 = 105\sin^4\theta
\end{aligned}$$

Gli $*$ indicano i polinomi associati di Legendre.

É bene osservare che la (15.2.26) ammette come soluzioni indipendenti dei polinomi che si indicano con $Q_n^m(\eta)$, m ed n interi, e prendono il nome di polinomi associati di

Legendre di seconda specie; essi però diventano infiniti per $\eta = \pm 1$ e pertanto <u>non hanno</u> applicazione nella ricerca di campi fisici in un dominio sferico completo.

Consideriamo, adesso, l'equazione (15.2.5) con $\mu = m$ (nullo o intero positivo come abbiamo già visto)

$$\frac{d^2 f_3}{d\phi^2} + m^2 f_3 = 0 \tag{15.2.28}$$

e scegliamo come soluzioni particolari della (15.2.28) le funzioni reali $\cos m\phi$ e $\sin m\phi$.

La parte angolare della soluzione dell'equazione di Helmholtz in coordinate sferiche è rappresentata dalle funzioni

$$\cos(m\phi)P_n^m(\cos\theta) \qquad \text{e} \qquad \sin(m\phi)P_n^m(\cos\theta) \tag{15.2.29}$$

Tali funzioni sono periodiche sulla superficie di una sfera e gli indici m ed n determinano il numero delle linee nodali. Infatti, per $m = 0$ il campo non dipende dall'anomalia ϕ. Se anche $n = 0$, il valore della funzione è ovunque costante sulla superficie della sfera.

Se $m = 0$ ed $n = 1$ vi è una unica linea nodale per $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ lungo la quale la funzione è nulla.

Se $m = 0$ ed $n = 2$, vi sono due linee nodali lungo i paralleli di latitudine a circa $\theta = 55^0$ e $\theta = 125^0$; la sfera risulta così divisa in tre zone: la funzione è positiva nelle zone polari e negativa nella zona equatoriale. Si vede, quindi, che in generale per $m = 0$ si hanno n linee nodali ed $n+1$ zone nelle quali la funzione è alternativamente positiva e negativa. Per questa ragione i polinomi $P_n(\cos\theta)$ sono spesso chiamati **armoniche zonali**. Se $m \neq 0$ si osserverà dallo studio dei vari polinomi che la funzione $P_n^m(\cos\theta)$ si annulla sempre ai poli ($\theta = 0$ e $\theta = \pi$) per effetto del fattore $(1-\eta^2)^{\frac{m}{2}}$, e che il numero di linee nodali parallele all'equatore è $n-m$ per effetto della $\dfrac{d^m P_n(\eta)}{d\eta^m}$ che è un polinomio di grado $n-m$. Inoltre, la funzione si annulla lungo meridiani definiti dalle radici di $\cos m\phi$ e $\sin m\phi$. Vi sono quindi m meridiani nodali che intersecano ortogonalmente i paralleli nodali, dividendo così la superficie della sfera in domini rettangolari o tessere, nelle quali la funzione è alternativamente positiva o negativa. Per questa ragione le funzioni $\cos(m\phi)P_n^m(\cos\theta)$ e $\sin(m\phi)P_n^m(\cos\theta)$ sono talvolta denominate **armoniche tesserali di grado n-esimo e di ordine m-esimo**.

Se le armoniche tesserali si moltiplicano ciascuna per una costante arbitraria e poi si sommano, si ottengono le **armoniche sferiche** di superficie di grado n:

$$Y_n(\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{n} \left(a_{nm}\cos m\phi + b_{nm}\sin m\phi\right) P_n^m(\cos\theta) \tag{15.2.30}$$

Le armoniche tesserali formano un sistema completo di funzioni ortogonali sulla superficie di una sfera. Si può dimostrare, infatti, che:

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} P_n^m(\eta)P_l^m(\eta)d\eta = 0 \qquad n \neq l \\ &\int_{-1}^{+1} \left[P_n^m(\eta)\right]^2 d\eta = \frac{2}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \end{aligned} \tag{15.2.31}$$

Pertanto se $g(\theta, \phi)$ è una funzione arbitraria sulla superficie di una sfera, continua insieme alle sue derivate prime e seconde, essa può essere rappresentata da una serie assolutamente convergente di armoniche di superficie,

$$g(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_{n0} P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} \left(a_{nm} \cos m\phi + b_{nm} \sin m\phi\right) P_n^m(\cos\theta) \right\} \qquad (15.2.32)$$

i cui coefficienti sono determinati dalle:

$$\begin{aligned} a_{n0} &= \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} g(\theta, \phi) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\phi \\ a_{nm} &= \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} g(\theta, \phi) P_n^m(\cos\theta) \cos m\phi \sin\theta d\theta d\phi \\ b_{nm} &= \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} g(\theta, \phi) P_n^m(\cos\theta) \sin m\phi \sin\theta d\theta d\phi \end{aligned} \qquad (15.2.33)$$

15.3 - Funzione radiale soluzione dell'equazione (15.2.7).

Riscriviamo l'equazione (15.2.7)

$$\frac{1}{f_1} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df_1}{dr} \right) + k^2 r^2 = n(n+1) \qquad (15.3.1)$$

che si può scrivere:

$$r^2 \frac{d^2 f_1}{dr^2} + 2r \frac{df_1}{dr} + \left[k^2 r^2 - n(n+1)\right] f_1 = 0 \qquad (15.3.2)$$

Poniamo $f_1 = (kr)^{-\frac{1}{2}} v(r)$; si ha:

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dr} &= -\frac{k}{2} (kr)^{-\frac{3}{2}} v + (kr)^{-\frac{1}{2}} \frac{dv}{dr} \\ \frac{d^2 f_1}{dr^2} &= (kr)^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2 v}{dr^2} - k (kr)^{-\frac{3}{2}} \frac{dv}{dr} + \frac{3}{4} k^2 (kr)^{-\frac{5}{2}} v \end{aligned}$$

Sostituendo nella (15.3.2), otteniamo:

$$\begin{aligned} & r^2 (kr)^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2 v}{dr^2} - k r^2 (kr)^{-\frac{3}{2}} \frac{dv}{dr} + \frac{3}{4} k^2 r^2 (kr)^{-\frac{5}{2}} v - kr (kr)^{-\frac{3}{2}} v + 2r (kr)^{-\frac{1}{2}} \frac{dv}{dr} + \\ & + \left[k^2 r^2 - n(n+1)\right] (kr)^{-\frac{1}{2}} v = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & r^2 (kr)^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2 v}{dr^2} - r (kr)^{-\frac{1}{2}} \frac{dv}{dr} + \frac{3}{4} (kr)^{-\frac{1}{2}} v - (kr)^{-\frac{1}{2}} v + 2r (kr)^{-\frac{1}{2}} \frac{dv}{dr} + \\ & + \left[k^2 r^2 - n(n+1)\right] (kr)^{-\frac{1}{2}} v = 0 \end{aligned}$$

Dividendo per $(kr)^{-\frac{1}{2}}$ si ha:

$$r^2\frac{d^2v}{dr^2}+r\frac{dv}{dr}-\frac{1}{4}v+k^2r^2v-n^2v-nv=0$$

tenendo conto che $-\frac{1}{4}v-n^2v-nv=-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 v$, si ha :

$$r^2\frac{d^2v}{dr^2}+r\frac{dv}{dr}+\left[k^2r^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]v=0 \tag{15.3.3}$$

Posto $\rho=kr$ l'equazione (15.3.3) diventa:

$$\frac{d^2v}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dv}{d\rho}+\left[1-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\rho^2}\right]v=0 \tag{15.3.4}$$

che è l'equazione di Bessel di ordine semintero che ammette come soluzioni le funzioni cilindriche di ordine semintero $Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)$.

Pertanto la soluzione dell'equazione (15.2.7) è:

$$f_1(r)=\frac{1}{\sqrt{kr}}Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) \tag{15.3.5}$$

É invalso l'uso di definire le funzioni sferiche di Bessel e di Hankel nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
j_n(\rho)&=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}J_{n+\frac{1}{2}}(\rho)\\
n_n(\rho)&=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}N_{n+\frac{1}{2}}(\rho)\\
h_n^{(1)}(\rho)&=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\left[J_{n+\frac{1}{2}}(\rho)+iN_{n+\frac{1}{2}}(\rho)\right]\\
h_n^{(2)}(\rho)&=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\left[J_{n+\frac{1}{2}}(\rho)-iN_{n+\frac{1}{2}}(\rho)\right]
\end{aligned} \tag{15.3.6}$$

É importante osservare che, come nel caso cilindrico, nella (15.3.5) si sceglie per $Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ una funzione di Bessel di prima specie nei domini che contengono l'origine, oppure una funzione di terza specie ogni qualvolta il campo deve essere rappresentato come un'onda progressiva.

La formula esplicita per $j_n(\rho)$ è:

$$j_n(\rho)=2^n\rho^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(n+m)!}{m!(2n+2m+1)!}\rho^{2m} \tag{15.3.7}$$

Dalla (15.3.7) si può facilmente verificare che le funzioni sferiche di Bessel si possono scrivere:

$$j_n(\rho) = (-\rho)^n \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^n \left(\frac{\sin\rho}{\rho}\right) \tag{15.3.8}$$

$$n_n(\rho) = -(-\rho)^n \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^n \left(\frac{\cos\rho}{\rho}\right) \tag{15.3.9}$$

Per i primi valori dell'indice n le forme esplicite della (15.3.8) e (15.3.9) sono:

$$j_0(\rho) = \frac{\sin\rho}{\rho} \qquad j_1(\rho) = \frac{\sin\rho}{\rho^2} - \frac{\cos\rho}{\rho} \qquad j_2(\rho) = \left(\frac{3}{\rho^3} - \frac{1}{\rho}\right)\sin\rho - 3\frac{\cos\rho}{\rho^2}$$

$$j_3(\rho) = \left[\frac{15}{\rho^4} - \frac{6}{\rho^2}\right]\sin\rho + \left[-\frac{15}{\rho^3} - \frac{1}{\rho}\right]\cos\rho$$

$$n_0(\rho) = -\frac{\cos\rho}{\rho} \qquad n_1(\rho) = -\frac{\cos\rho}{\rho^2} - \frac{\sin\rho}{\rho} \qquad n_2(\rho) = -\left(\frac{3}{\rho^3} - \frac{1}{\rho}\right)\cos\rho - 3\frac{\sin\rho}{\rho^2}$$

$$h_0^{(1)}(\rho) = \frac{e^{i\rho}}{i\rho} \qquad h_1^{(1)}(\rho) = -\frac{e^{i\rho}}{\rho}\left(1 + \frac{i}{\rho}\right) \qquad h_2^{(1)}(\rho) = \frac{ie^{i\rho}}{\rho}\left(1 + \frac{3i}{\rho} - \frac{3}{\rho^2}\right)$$

Verifichiamo che $j_0(\rho) = \dfrac{\sin\rho}{\rho}$. Dalla (15.3.7) si ha:

$$j_0(\rho) = 1 - \frac{1}{3!}\rho^2 + \frac{1}{5!}\rho^4 - \frac{1}{7!}\rho^6 \cdots$$

Sappiamo, d'altra parte, che:

$$\sin\rho = \rho - \frac{1}{3!}\rho^3 + \frac{1}{5!}\rho^5 - \frac{1}{7!}\rho^7 \cdots$$

Pertanto $\dfrac{\sin\rho}{\rho} = j_0(\rho)$.

Alla luce di quanto sopra, le funzioni d'onda caratteristiche che sono finite e ad un sol valore in tutti i punti della superficie di una sfera sono perciò le

$$f_{mn} = \frac{1}{\sqrt{kr}} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\phi \tag{15.3.10}$$

Le soluzioni generali dell'equazione di Helmholtz si possono scrivere come somma di funzioni d'onda sferiche elementari.

Nel caso in cui $f(r,\theta,\phi)$ deve essere finita nell'origine, si ha:

$$f^{(1)}(r,\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} j_n(kr)\left[a_{n0}P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n}\Big(a_{nm}\cos m\phi + b_{nm}\sin m\phi\Big)P_n^m(\cos\theta)\right] \tag{15.3.11}$$

Nel caso in cui $f(r,\theta,\phi)$ deve rappresentare un campo che si propaga radialmente essa, che si indicherà con $f^{(3)}(r,\theta,\phi)$, si ottiene sostituendo nella (15.3.11) $h_n^{(1)}(kr)$ al posto di $j_n(kr)$. Una soluzione particolare della (15.3.11) è quella a simmetria sferica che si ottiene quando tutti i coefficienti tranne a_{00} sono nulli.

Allora, a meno di un fattore arbitrario, si ha:

$$f_0^{(1)} = \frac{\sin kr}{kr} \qquad f_0^{(2)} = \frac{\cos kr}{kr}$$
$$f_0^{(3)} = \frac{e^{ikr}}{kr} \qquad f_0^{(4)} = \frac{e^{-ikr}}{kr}$$

15.4 - Sviluppo di onde piane scalari in onde sferiche elementari.

Supponiamo di avere un'onda piana che si propaga nello spazio in una direzione arbitraria; è facile dimostrare che essa può essere rappresentata in funzione di onde sferiche elementari intorno ad un centro fisso.

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio. La direzione e la natura dell'onda piana sono determinate dal suo vettore di propagazione $\vec{k}$ le cui componenti cartesiane sono (vedi figura 15.4-1):

$$\begin{aligned} k_x &= k\sin\alpha\cos\beta \\ k_y &= k\sin\alpha\sin\beta \\ k_z &= k\cos\alpha \end{aligned} \tag{15.4.1}$$

mentre le coordinate di un punto di osservazione qualsiasi, sono:

$$x = r\sin\theta\cos\phi\ ,\ y = r\sin\theta\sin\phi\ ,\ z = r\cos\theta \tag{15.4.2}$$

N.B.: I due vettori $\vec{r}$ e $\vec{k}$ sono stati tracciati nella medesima sfera di raggio r ; è ovvio che essi devono essere disegnati in due sfere diverse di raggio r e k rispettivamente.

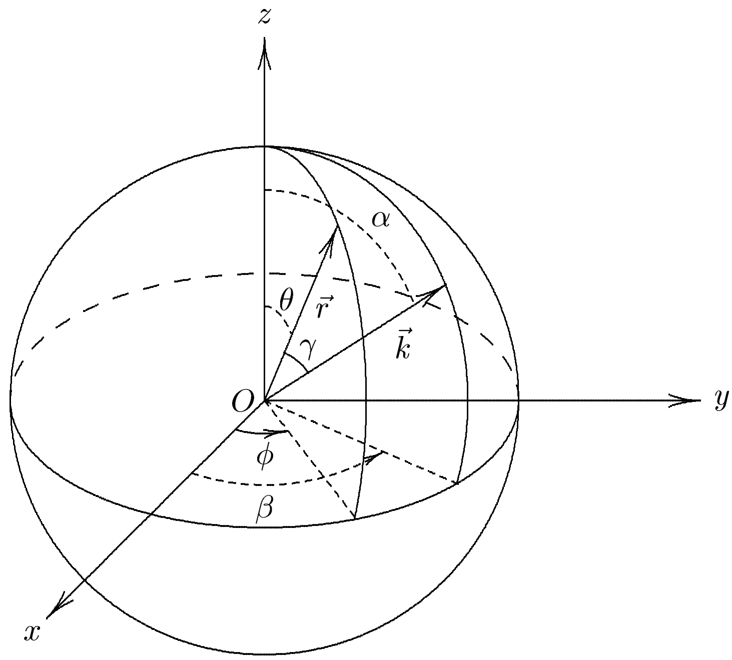

fig.15.4-1

Si ha, allora:

$$\begin{aligned}\vec{k}\cdot\vec{r} &= kr\Big[\sin\alpha\sin\theta\cos\beta\cos\phi + \sin\alpha\sin\theta\sin\beta\sin\phi + \cos\alpha\cos\theta\Big] = \\ &= kr\Big[\sin\alpha\sin\theta\cos(\phi-\beta) + \cos\alpha\cos\theta\Big] = \\ &= kr\cos\gamma\end{aligned} \tag{15.4.3}$$

La funzione che esprime l'onda piana è $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$; essa è continua ed ha derivate continue in tutto lo spazio compresa l'origine $r = 0$. Essa perciò si può sviluppare, per quanto abbiamo detto, in armoniche sferiche, secondo la (15.3.11).

Senza ledere le generalità, supponiamo che la direzione di propagazione coincida con l'asse z cioè $\vec{k} = k\hat{z}$; poichè l'onda è simmetrica rispetto a quest'asse, il suo sviluppo non dipende da ϕ e si può esprimere secondo la (15.2.21) e la (15.2.22).

Si ha, cioè:

$$e^{ikr\cos\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(kr) P_n(\cos\gamma) \tag{15.4.4}$$

con

$$a_n j_n(kr) = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} e^{ikr\cos\gamma} P_n(\cos\gamma)\sin\gamma d\gamma \tag{15.4.5}$$

Derivando la (15.4.5) n volte rispetto a $\rho = kr$, si ha:

$$a_n \frac{d^n j_n(\rho)}{d\rho^n} = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi i^n \cos^n \gamma e^{i\rho\cos\gamma} P_n(\cos\gamma) \sin\gamma d\gamma$$

che per $\rho = 0$ diventa:

$$a_n \left[\frac{d^n j_n(\rho)}{d\rho^n} \right]_{\rho=0} = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi i^n \cos^n \gamma P_n(\cos\gamma) \sin\gamma d\gamma \tag{15.4.6}$$

D'altra parte sappiamo che:

$$j_n(\rho) = 2^n \rho^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (n+m)!}{m!(2n+2m+1)!} \rho^{2m}$$

che derivata n volte rispetto a ρ conduce alla (vedi pag. 15-7):

$$\begin{aligned} \frac{d^n j_n(\rho)}{d\rho^n} = 2^n \left(\frac{d^n}{d\rho^n} \rho^n \right) \left[\frac{n!}{(2n+1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (n+m)!}{m!(2n+2m+1)!} \rho^{2m} \right] + \\ + \cdots + 2^n \rho^n \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (n+m)!}{m!(2n+2m+1)!} \frac{d^n}{d\rho^n} \rho^{2m} \right] \end{aligned} \tag{15.4.7}$$

Tenendo conto che $\frac{d^n}{d\rho^n} \rho^n = n!$ e che $\frac{d^n}{d\rho^n} \rho^m = 0$ per $m < n$, si ha che per $\rho = 0$ la (15.4.7) diventa:

$$\left[\frac{d^n j_n(\rho)}{d\rho^n} \right]_{\rho=0} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \tag{15.4.8}$$

La (15.4.6) diventa, allora:

$$\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} a_n = \frac{2n+1}{2} i^n \int_0^\pi \cos^n \gamma P_n(\cos\gamma) \sin\gamma d\gamma \tag{15.4.9}$$

Per risolvere l'integrale del secondo membro della (15.4.9) esprimiamo i polinomi associati di Legendre per mezzo della formula di Rodriguez:

$$\boxed{P_n^m(\eta) = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}(\eta^2-1)^n}{d\eta^{n+m}}} \tag{15.4.10}$$

da cui:

$$P_n(\eta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (\eta^2-1)^n}{d\eta^n} \tag{15.4.11}$$

Si ha, intanto:

$$\int_0^{\pi} \cos^n \gamma P_n(\cos\gamma) \sin\gamma d\gamma = \int_{-1}^{+1} \eta^n P_n(\eta) d\eta \qquad (15.4.12)$$

L'integrale a secondo membro della (15.4.12) si risolve sostituendo a $P_n(\eta)$ la (15.4.11) ed integrando per parti ripetutamente, assumendo sempre η^n come fattore finito u e $\frac{d^n(\eta^2-1)^n}{d\eta^n} d\eta$ come fattore differenziale dv.

Quindi:

$$\int_{-1}^{+1} \eta^n P_n(\eta) d\eta = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} \eta^n \frac{d^n(\eta^2-1)^n}{d\eta^n} d\eta$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} \eta^n \frac{d^n(\eta^2-1)^n}{d\eta^n} d\eta &= \left[\eta^n \frac{d^{n-1}(\eta^2-1)^n}{d\eta^{n-1}}\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} n\eta^{n-1} \frac{d^{n-1}(\eta^2-1)^n}{d\eta^{n-1}} d\eta = \\ &= \left[\eta^n \frac{d^{n-1}(\eta^2-1)^n}{d\eta^{n-1}}\right]_{-1}^{+1} - \left[n\eta^{n-1} \frac{d^{n-2}(\eta^2-1)^n}{d\eta^{n-2}}\right]_{-1}^{+1} + \\ &\quad + \int_{-1}^{+1} n(n-1)\eta^{n-2} \frac{d^{n-2}(\eta^2-1)^n}{d\eta^{n-2}} d\eta = \\ &= \left[\eta^n \frac{d^{n-1}(\eta^2-1)^n}{d\eta^{n-1}}\right]_{-1}^{+1} - \left[n\eta^{n-1} \frac{d^{n-2}(\eta^2-1)^n}{d\eta^{n-2}}\right]_{-1}^{+1} + \\ &\quad + \cdots \mp \Big[n!\eta(\eta^2-1)^n\Big]_{-1}^{+1} \pm \int_{-1}^{+1} n!(\eta^2-1)^n d\eta\end{aligned} \qquad (15.4.13)$$

Il segno superiore vale per n pari, quello inferiore per n dispari.

Poichè il termine $\frac{d^r(\eta^2-1)^n}{d\eta^r}$ contiene sempre il fattore $(\eta^2-1)^{n-r}$, l'espressione fra parentesi quadra valutata nei limiti +1 e -1 sarà sempre nulla.

Pertanto

$$\int_0^{\pi} \cos^n \gamma P_n(\cos\gamma) \sin\gamma d\gamma = \frac{(-1)^n}{2^n} \int_{-1}^{+1} (\eta^2-1)^n d\eta \qquad (15.4.14)$$

Poichè $\eta = \cos\gamma$ e $d\eta = -\sin\gamma d\gamma$, l'integrale a secondo membro della (15.4.14) diventa:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} (\eta^2-1)^n d\eta &= \int_0^{\pi} (-1)^n \sin^{2n+1}\gamma d\gamma \\ \int_0^{\pi} \sin^{2n+1}\gamma d\gamma &= 2\,\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\end{aligned} \qquad (15.4.15)$$

essendo:

$$(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\cdots 2 = 2^n n!$$
$$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 3$$

Pertanto $\int_0^{\pi} \cos^n \gamma P_n(\cos\gamma) \sin\gamma d\gamma = \frac{2n!}{(2n+1)!!}$ che sostituito nella (15.4.9) comporta:

$$\frac{2^n (n!)^2 a_n}{(2n+1)!} = \frac{2n+1}{2} i^n \frac{2n!}{(2n+1)!!} \tag{15.4.16}$$

D'altra parte:

$$(2n+1)! = 2n(2n+1)(2n-1)! = 2n(2n+1)!!(2n-2)!! = 2^n(2n+1)!!n!$$

che sostituito nella (15.4.16) restituisce:

$$a_n = i^n (2n+1) \tag{15.4.17}$$

Pertanto lo sviluppo dell'onda piana scalare in armoniche sferiche è:

$$\boxed{e^{ikr\cos\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(kr) P_n(\cos\gamma)} \tag{15.4.18}$$

15.5 - Equazione vettoriale delle onde.

Consideriamo l'equazione vettoriale (15.1.1) esprimibile in qualunque sistema di coordinate. Se indichiamo con $\vec{C}$ uno qualunque dei vettori del campo $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$, o il potenziale vettore o i vettori di Hertz, si ha:

$$\nabla^2 \vec{C} + k^2 \vec{C} = 0 \tag{15.5.1}$$

che, tenendo conto della identità $\nabla^2 \vec{C} = \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{C} - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{C}$, si può scrivere

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{C} - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{C} + k^2 \vec{C} = 0 \tag{15.5.2}$$

Vogliamo trovare delle soluzioni indipendenti della (15.5.2).

Sia ψ una funzione scalare soluzione dell'equazione di Helmholtz $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$ e sia $\vec{a}$ un vettore costante di lunghezza unitaria.

I vettori:

$$\vec{L} = \vec{\nabla}\psi \ , \quad \vec{M} = \vec{\nabla} \times \vec{a}\psi \quad \text{e} \quad \vec{N} = \frac{1}{k}\vec{\nabla} \times \vec{M} \tag{15.5.3}$$

sono tre soluzioni vettoriali indipendenti della (15.5.2).

Infatti:

• Si ponga $\vec{C} = \vec{L}$, la (15.5.2) diventa:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\psi) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\psi) + k^2 \vec{\nabla}\psi = \vec{\nabla}(\nabla^2\psi + k^2\psi) = 0 \tag{15.5.4}$$

in quanto $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\psi$ è identicamente nullo e $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$; ne segue che la (15.5.2) è soddisfatta.

• Si ponga $\vec{C} = \vec{M}$, il primo membro dell'equazione (15.5.2) diventa:

$$\vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\psi\right)\right] - \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\psi\right) + k^2\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\psi\right) \tag{15.5.5}$$

Il primo termine della (15.5.5) è nullo in quanto $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\psi\right) = 0$ identicamente.

Si ha inoltre:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\psi\right) = \vec{\nabla}\psi\times\vec{\nabla}\times\vec{a} - \vec{a}\nabla^2\psi + \left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{a} + \vec{\nabla}\psi\vec{\nabla}\cdot\vec{a} - \left(\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a} =$$
$$= -\vec{a}\nabla^2\psi + \left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\nabla}\psi$$

essendo nulli tutti i termini in cui gli operatori differenziali operano direttamente e solo su $\vec{a}$ che è un vettore costante.

Consideriamo, ora, l'identità vettoriale:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = \vec{A}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} + \vec{B}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} + \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}$$

Da essa si ha:

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B} = \vec{\nabla}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) - \vec{A}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} - \vec{B}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} - \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}$$

Poniamo: $\vec{A} = \vec{a}$ e $\vec{B} = \vec{\nabla}\psi$, si ha:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\nabla}\psi = \vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\psi\right) - \vec{a}\times\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi - \vec{\nabla}\psi\times\vec{\nabla}\times\vec{a} - \left(\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a} = \vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\psi\right)$$

in quanto $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi = 0$ ed i rimanenti termini sono nulli perchè gli operatori differenziali operano sul vettore costante $\vec{a}$.

Ne segue:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\psi\right) = -\vec{a}\nabla^2\psi + \vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\psi\right) \tag{15.5.6}$$

che sostituita nella (15.5.5) conduce a:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{a}\nabla^2\psi\right) - \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\psi\right) + k^2\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\psi\right) \tag{15.5.7}$$

Poichè $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\psi\right) = 0$ identicamente e $\nabla^2\psi = -k^2\psi$ la (15.5.7) diventa:

$$-k^2\vec{\nabla}\times\vec{a}\psi + k^2\vec{\nabla}\times\vec{a}\psi = 0$$

ne segue che la (15.5.2) è pienamente soddisfatta.

É utile ricordare che k^2 può portarsi fuori da operazioni coinvolgenti l'operatore $\vec{\nabla}$ in quanto, per ipotesi, il mezzo è isotropo e omogeneo.

• Si ponga $\vec{C} = \vec{N} = \frac{1}{k}\vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{1}{k}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}\psi)$, l'equazione (15.5.2) diventa:

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{1}{k}\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\psi\right)\right] - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{k}\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\psi\right)\right] + k\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\psi\right) = 0 \quad (15.5.8)$$

Il primo termine del primo membro è identicamente nullo; sostituendo al secondo termine la (15.5.6), la (15.5.8) si scrive:

$$-\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \frac{1}{k}\left(-\vec{a}\nabla^2\psi\right) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \frac{1}{k}\vec{\nabla}\left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\psi\right) + k\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\psi\right) = 0 \qquad (15.5.9)$$

Il secondo termine è identicamente nullo; sostituendo $\nabla^2\psi$ con $-k^2\psi$, si ha:

$$-k\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\psi\right) + k\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\psi\right) = 0$$

e la (15.5.2) è pienamente soddisfatta.

Vediamo, adesso, alcune considerazioni sui vettori $\vec{L}$, $\vec{M}$ e $\vec{N}$.

$$\vec{M} = \vec{\nabla} \times \vec{a}\psi = \vec{\nabla}\psi \times \vec{a} + \psi\vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{\nabla}\psi \times \vec{a}$$

essendo $\psi\vec{\nabla} \times \vec{a} = 0$ perchè $\vec{a}$ è un vettore costante; tenendo conto che $\vec{L} = \vec{\nabla}\psi$, si ha:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{L} \times \vec{a}} \qquad (15.5.10)$$

Calcoliamo $\vec{\nabla} \times \vec{N}$, si ha:

$$\vec{\nabla} \times \vec{N} = \frac{1}{k}\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{1}{k}\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\psi\right)$$

che per la (15.5.6) è uguale a:

$$\frac{1}{k}\vec{\nabla} \times \left(-\vec{a}\nabla^2\psi\right) = k\vec{\nabla} \times \vec{a}\psi = k\vec{M}$$

per cui:

$$\boxed{\vec{M} = \frac{1}{k}\vec{\nabla} \times \vec{N}} \qquad (15.5.11)$$

Dalla (15.5.10) segue:

$$\boxed{\vec{L} \cdot \vec{M} = 0}$$

Dalle definizioni dei vettori $\vec{L}$, $\vec{M}$ ed $\vec{N}$ segue immediatamente:

$$\vec{\nabla} \times \vec{L} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{L} = \nabla^2\psi = -k^2\psi$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{N} = 0$$

Come abbiamo già visto le soluzioni particolari dell'equazione di Helmholtz che sono finite, continue e ad un sol valore in un dato dominio, formano una serie discreta. Per il momento indicheremo una qualsiasi di esse con ψ_n. Ad ogni funzione caratteristica ψ_n corrispondono tre soluzioni vettoriali $\vec{L}_n$, $\vec{M}_n$, $\vec{N}_n$ dell'equazione d'onda vettoriale, linearmente indipendenti. Ne segue che la soluzione dell'equazione d'onda può rappresentarsi come una combinazione lineare delle funzioni vettoriali caratteristiche.

15.6 - Funzioni d'onda vettoriali sferiche.

Vediamo, ora, di ricavare delle soluzioni dell'equazione vettoriale delle onde in coordinate sferiche partendo dalle funzioni caratteristiche della corrispondente equazione scalare.

Poniamo

$$\psi_{\substack{p\\d}mn} = f_{\substack{p\\d}mn} e^{-i\omega t} \qquad (p = \text{pari} \; , \; d = \text{dispari}) \tag{15.6.1}$$

dove $f_{\substack{p\\d}mn}$ è la soluzione caratteristica (15.3.10)

$$f_{\substack{p\\d}mn} = \frac{\cos}{\sin} m\phi \, P_n^m(\cos\theta) \, z_n(kr) \tag{15.6.2}$$

dove z_n è l'opportuna funzione di Bessel.

Per quanto abbiamo detto, una soluzione dell'equazione vettoriale delle onde si può ricavare semplicemente calcolando il gradiente della (15.6.2).

Per definizione $\vec{L} = \vec{\nabla}\psi$. Posto $\vec{L} = \vec{l} e^{-i\omega t}$ si ha $\vec{l}_{\substack{p\\d}mn} = \vec{\nabla} f_{\substack{p\\d}mn}$ cioè:

$$\begin{aligned}\vec{l}_{\substack{p\\d}mn} = & \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(z_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \frac{\cos}{\sin} m\phi\right)\right]\hat{e}_r + \left[\frac{1}{r} z_n(kr) \frac{\partial}{\partial\theta}\left(P_n^m(\cos\theta)\right) \frac{\cos}{\sin} m\phi\right]\hat{e}_\theta \\ & \mp \left[\frac{m}{r\sin\theta} z_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \frac{\sin}{\cos} m\phi\right]\hat{e}_\phi\end{aligned} \tag{15.6.3}$$

Per ottenere le soluzioni indipendenti $\vec{M}$ ed $\vec{N}$ si dovrebbe introdurre un vettore fisso $\vec{a}$. Questo procedimento, nel caso di coordinate sferiche, porterebbe all'inconveniente che i vettori $\vec{M}$ ed $\vec{N}$ non risultano nè normali nè puramente tangenziali su tutta la superficie della sfera. Se, viceversa, al posto di $\vec{a}$ introducessimo il vettore radiale $\hat{e}_r$, la funzione $\vec{M} = \vec{L} \times \hat{e}_r$ risulterebbe tangente alla sfera; ma $\hat{e}_r$ non è un vettore costante e di conseguenza non si può dire a priori che esso possa venire usato per generare una soluzione indipendente. Dimostreremo che, per le coordinate sferiche, si può effettivamente costruire una soluzione tangenziale $\vec{M}$ mediante un vettore radiale. Nei sistemi di coordinate più generali questo procedimento cessa di valere.

Poniamo

$$\vec{M} = \vec{\nabla} \times (\hat{e}_r u(r)\psi) = \vec{L} \times \hat{e}_r u(r) \tag{15.6.4}$$

Si ha:

$$M_r = 0 \quad ; \quad M_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(u\psi) \quad ; \quad M_\phi = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(u\psi) \tag{15.6.5}$$

dove $u(r)$ è una funzione scalare di r da determinarsi.

Sostituiamo la (15.6.4) nella (15.5.1) e tenendo conto che $\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0$, si ha:

$$\nabla^2 \vec{M} + k^2 \vec{M} = 0 \tag{15.6.6}$$

che è equivalente alle:

$$-\frac{2}{r^2}\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - \frac{2\cot\theta}{r^2} M_\theta - \frac{2}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} = 0 \tag{15.6.6a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 M_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial M_\theta}{\partial r} - \frac{M_\theta}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \quad + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \phi^2} - \frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} + k^2 M_\theta = 0\end{aligned} \tag{15.6.6b}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 M_\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial M_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}M_\phi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 M_\phi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial M_\phi}{\partial \theta} \quad + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 M_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial M_\theta}{\partial \phi} + k^2 M_\phi = 0\end{aligned} \tag{15.6.6c}$$

avendo posto $M_r = 0$ ed esplicitando i ∇^2 in coordinate sferiche.

La (15.6.6a) risulta identicamente nulla qualunque sia la funzione $u(r)$, infatti sostituendo in essa le espressioni di M_θ ed M_ϕ date dalle (15.6.5) si ha:

$$-\frac{2}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(u\psi)\right] + \cot\theta\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(u\psi) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(u\psi)\right]\right\} = 0$$

che si può scrivere:

$$-\frac{2}{r^2}\left\{-\frac{\cos\theta}{r\sin^2\cancel{\theta}}\frac{\partial}{\partial\phi}(u\psi) + \frac{1}{r\sin\cancel{\theta}}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi}(u\psi) + \frac{\cot\theta}{r\sin\cancel{\theta}}\frac{\partial}{\partial\phi}(u\psi) - \frac{1}{r\sin\cancel{\theta}}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta}(u\psi)\right\} = 0$$

Vediamo, ora, a quali condizioni deve soddisfare la funzione $u(r)$ perchè la (15.6.6b) sia soddisfatta.

Si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_\theta}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(u\psi)\right] = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[-\frac{1}{r}(u\psi) + \frac{\partial}{\partial r}(u\psi)\right]\\
\frac{\partial^2 M_\theta}{\partial r^2} &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{2}{r^2}(u\psi) - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}(u\psi) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(u\psi)\right]\\
\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(u\psi)\right] = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(u\psi) + \frac{\partial}{\partial\theta}(u\psi)\right]\\
\frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left\{(u\psi) + 2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}(u\psi) + \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u\psi) - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u\psi) + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(u\psi)\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{M_\theta}{r^2\sin^2\theta} &= -\frac{1}{r^3\sin^3\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(u\psi)\\
-2\frac{\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial M_\phi}{\partial\phi} &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{2\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u\psi)\right)\\
\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 M_\theta}{\partial\phi^2} &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}(u\psi)\right)
\end{aligned}
$$

Sostituendo le espressioni sopra trovate nella (15.6.6b) si ha:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Bigg\{&\frac{\partial^2}{\partial r^2}(u\psi)-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}(u\psi)+\frac{(u\psi)}{r^2}+\underbrace{\frac{2\cos^2\theta}{r^2\sin^2\theta}(u\psi)}-\\
&-\frac{2\cos\theta}{r^2\cancel{\sin\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta}(u\psi)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(u\psi)+\underbrace{\frac{\cot\theta(-\cos\theta)}{r^2\sin\theta}(u\psi)}+\\
&+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(u\psi)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}(u\psi)+\frac{2\cos\theta}{r^2\cancel{\sin\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta}(u\psi)+k^2(u\psi)\Bigg\}=0
\end{aligned}
$$

Semplificando risulta:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Bigg\{&\frac{\partial^2}{\partial r^2}(u\psi)-\cancel{\frac{1}{r^2\sin^2\theta}(u\psi)}+\cancel{\frac{(u\psi)}{r^2}}+\cancel{\frac{\cos^2\theta}{r^2\sin^2\theta}(u\psi)}+\\
&+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u\psi)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(u\psi)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}(u\psi)+k^2(u\psi)\Bigg\}=0
\end{aligned}
$$

Ancora:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Bigg\{&\frac{\partial^2}{\partial r^2}(u\psi)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(u\psi)\right]+\\
&+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}(u\psi)+k^2(u\psi)\Bigg\}=0
\end{aligned}
$$

Ne segue che la (15.6.6b) è soddisfatta se $u(r)$ è tale che:

$$
\frac{\partial^2}{\partial r^2}(u\psi)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(u\psi)\right]+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}(u\psi)+k^2(u\psi)=0 \qquad (15.6.7)
$$

L'equazione (15.6.7) diventa l'equazione di Helmholtz come da noi richiesta se si sceglie $u(r)=r$, infatti essa si riduce a:

$$
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+k^2\psi=0 \qquad (15.6.8)
$$

che è $\nabla^2\psi+k^2\psi=0$.

Si può, con lo stesso procedimento, dimostrare che la (15.6.6c) è soddisfatta per $u(r) = r$ e ψ soddisfacente alla (15.6.8).

Quindi in coordinate sferiche l'equazione delle onde è soddisfatta dal vettore:

$$\vec{M} = \vec{\nabla} \times \vec{r}\psi = \vec{\nabla}\psi \times \vec{r} + \psi\vec{\nabla} \times \vec{r}$$

ma $\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$ quindi $\vec{M} = \vec{\nabla}\psi \times \vec{r} = \vec{L} \times \vec{r}$.

le componenti di $\vec{M}$ si ricavano dalle (15.6.5):

$$M_r = 0 \quad ; \quad M_\theta = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \quad ; \quad M_\phi = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{15.6.9}$$

Dalla relazione $\vec{N} = \dfrac{1}{k}\vec{\nabla} \times \vec{M}$ si possono trovare le componenti della terza soluzione.

$$N_r = -\frac{1}{k}\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right] \tag{15.6.10}$$

$$N_\theta = +\frac{1}{k}\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r\partial\theta} \tag{15.6.11}$$

$$N_\phi = \frac{1}{kr\sin\theta}\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r\partial\phi} \tag{15.6.12}$$

Per la (15.6.8) la componente N_r si può scrivere:

$$N_r = \frac{1}{k}\left[\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} + k^2 r\psi\right] \tag{15.6.13}$$

che si può scrivere:

$$N_r = \frac{1}{k}\left[\frac{r\partial^2\psi}{\partial r^2} + 2\frac{\partial\psi}{\partial r} + k^2 r\psi\right]$$

che per la (15.3.2) è uguale a:

$$N_r = \frac{1}{k}\frac{n(n+1)}{r}\psi \tag{15.6.14}$$

Ne segue, quindi, che le espressioni di $\vec{N}$ sono:

$$\begin{aligned} N_r &= \frac{1}{k}\frac{n(n+1)}{r}\psi \\ N_\theta &= \frac{1}{k}\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r\partial\theta} \\ N_\phi &= \frac{1}{kr\sin\theta}\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r\partial\phi} \end{aligned} \tag{15.6.15}$$

Per ottenere le espressioni esplicite delle funzioni vettoriali $\vec{M}$ ed $\vec{N}$ poniamo $\vec{M} = \vec{m}e^{-i\omega t}$, $\vec{N} = \vec{n}e^{-i\omega t}$ e $\psi_{{}^p_d mn} = f_{{}^p_d mn}e^{-i\omega t}$ ed applichiamo le (15.6.9), le (15.6.15) e la (15.6.2).

Si ha:

$$\vec{m}_{\substack{p\\d}mn} = \mp \frac{m}{\sin\theta}\, z_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\phi \hat{e}_\theta - z_n(kr)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}P_n^m(\cos\theta)\right) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\phi \hat{e}_\phi \tag{15.6.16}$$

$$\begin{aligned}\vec{n}_{\substack{p\\d}mn} = &\frac{n(n+1)}{kr} z_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\phi \hat{e}_r + \\ &+ \frac{1}{kr}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\big[r\, z_n(kr)\big]\right\}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}P_n^m(\cos\theta)\right) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\phi \hat{e}_\theta \mp \\ &\mp \frac{m}{kr\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\big[r\, z_n(kr)\big]\right\}\Big[P_n^m(\cos\theta)\Big] \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\phi \hat{e}_\phi\end{aligned} \tag{15.6.17}$$

15.7 - Sviluppo di un'onda vettoriale piana.

Per studiare la diffrazione di un'onda piana polarizzata in modo specifico da parte di un oggetto sferico si deve prima trovare uno sviluppo dell'onda vettoriale incidente, in serie delle funzioni d'onda $\vec{l}_{\substack{p\\d}mn}$, $\vec{m}_{\substack{p\\d}mn}$, $\vec{n}_{\substack{p\\d}mn}$.

Si consideri la funzione vettoriale:

$$\vec{f}(z) = \hat{a}e^{ikz} = \hat{a}e^{ikr\cos\theta} \tag{15.7.1}$$

dove $\hat{a}$ è un vettore unitario orientato arbitrariamente rispetto ad un sistema di riferimento ortogonale cartesiano. Si ha:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \sin\theta\cos\phi\hat{e}_r + \cos\theta\cos\phi\hat{e}_\theta - \sin\phi\hat{e}_\phi\\ \hat{y} &= \sin\theta\sin\phi\hat{e}_r + \cos\theta\sin\phi\hat{e}_\theta + \cos\phi\hat{e}_\phi\\ \hat{z} &= \cos\theta\hat{e}_r - \sin\theta\hat{e}_\theta\end{aligned} \tag{15.7.2}$$

dove $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$, $\hat{e}_\phi$ sono i versori relativi ad un sistema di coordinate sferiche.

Consideriamo separatamente lo sviluppo delle funzioni:

$$\hat{x}\, e^{ikr\cos\theta} \quad , \quad \hat{y}\, e^{ikr\cos\theta} \quad , \quad \hat{z}\, e^{ikr\cos\theta} \tag{15.7.3}$$

É chiaro che le (15.7.3) moltiplicate rispettivamente per E_{0x},E_{0y}, E_{0z} rappresentano le componenti (per esempio) del vettore campo elettrico, dato dalla (15.7.1) moltiplicata per E_0, che si propaga lungo l'asse z.

Cominciamo con l'osservare che:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\hat{x}e^{ikz} &= \hat{x}\cdot\vec{\nabla}e^{ikz} + e^{ikz}\vec{\nabla}\cdot\hat{x} = 0\\ \vec{\nabla}\cdot\hat{y}e^{ikz} &= \hat{y}\cdot\vec{\nabla}e^{ikz} + e^{ikz}\vec{\nabla}\cdot\hat{y} = 0\\ \vec{\nabla}\cdot\hat{z}e^{ikz} &= \hat{z}\cdot\vec{\nabla}e^{ikz} + e^{ikz}\vec{\nabla}\cdot\hat{z} = ike^{ikz}\end{aligned}$$

Ora, poichè i vettori $\vec{m}$ ed $\vec{n}$ hanno entrambi divergenza nulla, risulta chiaro che le funzioni $\hat{x}e^{ikz}$ e $\hat{y}e^{ikz}$ si possono sviluppare in serie delle sole funzioni caratteristiche $\vec{m}$ ed

$\vec{n}$ mentre invece lo sviluppo della funzione d'onda longitudinale $\hat{z}e^{ikz}$ che ha divergenza non nulla, richiede l'uso della sola funzione $\vec{l}$.

É chiaro inoltre che, per quanto riguarda il campo incidente, poichè $r = 0$ farà parte del nostro dominio, ivi il campo deve essere finito, e perciò verranno impiegate funzioni di Bessel di prima specie.

Ne segue quindi che, considerando un campo incidente polarizzato lungo l'asse x, si ha:

$$\widehat{x}e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\vec{m}^{(1)}_{\substack{p\\d}mn} + b_n\vec{n}^{(1)}_{\substack{p\\d}mn}\right) \tag{15.7.4}$$

L'esponente (1) indica la scelta di funzioni di Bessel di prima specie.

I coefficienti a_n e b_n si possono ricavare sfruttando certe proprietà di ortogonalità delle funzioni caratteristiche vettoriali.

Esprimendo $\widehat{x}$ in coordinate sferiche secondo la prima delle (15.7.2) e sostituendo alle funzioni $\vec{m}^{(1)}_{\substack{p\\d}mn}$ e $\vec{n}^{(1)}_{\substack{p\\d}mn}$ le relative espressioni date dalle (15.6.16) e (15.6.17), la (15.7.4) si scrive:

$$\begin{aligned}
&(\sin\theta\cos\phi\widehat{e}_r + \cos\theta\cos\phi\widehat{e}_\theta - \sin\phi\widehat{e}_\phi)\, e^{ikr\cos\theta} = \\
&\sum_{n=0}^{\infty}\left\{a_n\left[\mp\widehat{e}_\theta\frac{m}{\sin\theta}j_n(kr)P_n^m(\cos\theta)\frac{\sin}{\cos}m\phi - \widehat{e}_\phi j_n(kr)\frac{\partial P_n^m}{\partial\theta}\frac{\cos}{\sin}m\phi\right]\right\} + \\
&+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{b_n\left[\widehat{e}_r\frac{n(n+1)}{kr}j_n(kr)P_n^m(\cos\theta)\frac{\cos}{\sin}m\phi + \widehat{e}_\theta\frac{1}{kr}\left\{\frac{\partial}{\partial r}[rj_n(kr)]\right\}\frac{\partial P_n^m}{\partial\theta}\frac{\cos}{\sin}m\phi\ \mp\right.\right. \\
&\left.\left.\mp\ \widehat{e}_\phi\frac{m}{kr\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}[rj_n(kr)]\right\}P_n^m(\cos\theta)\frac{\sin}{\cos}m\phi\right]\right\}
\end{aligned} \tag{15.7.5}$$

Uguagliando le componenti, si ha:

$$\sin\theta\cos\phi e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[b_n\frac{n(n+1)}{kr}j_n(kr)P_n^m(\cos\theta)\frac{\cos}{\sin}m\phi\right] \tag{15.7.6}$$

$$\begin{aligned}
\cos\theta\cos\phi e^{ikr\cos\theta} =& \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\left(\mp\frac{m}{\sin\theta}j_n(kr)P_n^m(\cos\theta)\frac{\sin}{\cos}m\phi\right)\right] + \\
&+\sum_{n=0}^{\infty}\left[b_n\frac{1}{kr}\left\{\frac{\partial}{\partial r}[rj_n(kr)]\right\}\frac{\partial P_n^m}{\partial\theta}\frac{\cos}{\sin}m\phi\right]
\end{aligned} \tag{15.7.7}$$

$$\begin{aligned}
-\sin\phi e^{ikr\cos\theta} =& \sum_{n=0}^{\infty}\left\{a_n\left[-j_n(kr)\frac{\partial P_n^m}{\partial\theta}\frac{\cos}{\sin}m\phi\right]\right\} + \\
&+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\mp b_n\frac{m}{kr\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}[rj_n(kr)]\right\}P_n^m(\cos\theta)\frac{\sin}{\cos}m\phi\right]
\end{aligned} \tag{15.7.8}$$

Si evince immediatamente che affinché le eguaglianze siano soddisfatte l'indice m deve essere eguale a 1 ed inoltre per la funzione $\vec{m}$ dobbiamo prendere quella con l'indice d mentre per la funzione $\vec{n}$ quella con l'indice p.

Pertanto le equazioni (15.7.6), (15.7.7) e (15.7.8) diventano:

$$\sin\theta\cos\phi e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[b_n\frac{n(n+1)}{kr}j_n(kr)P_n^1(\cos\theta)\cos\phi\right] \tag{15.7.9}$$

$$\begin{aligned}\cos\theta\cos\phi e^{ikr\cos\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{1}{\sin\theta}j_n(kr)P_n^1(\cos\theta)\cos\phi\right)\right]+\\ &+\sum_{n=0}^{\infty}\left[b_n\frac{1}{kr}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[rj_n(kr)\right]\right\}\frac{\partial P_n^1}{\partial\theta}\cos\phi\right]\end{aligned} \tag{15.7.10}$$

$$\begin{aligned}-\sin\phi e^{ikr\cos\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{a_n\left[-j_n(kr)\frac{\partial P_n^1}{\partial\theta}\sin\phi\right]\right\}+\\ &+\sum_{n=0}^{\infty}\left[-b_n\frac{1}{kr\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[rj_n(kr)\right]\right\}P_n^1(\cos\theta)\sin\phi\right]\end{aligned} \tag{15.7.11}$$

Quindi lo sviluppo di un campo polarizzato lungo l'asse x é:

$$\widehat{x}e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\vec{m}_{d1n}^{(1)} + b_n\vec{n}_{p1n}^{(1)}\right) \tag{15.7.12}$$

Calcoliamo, allora, i coefficienti a_n e b_n.

Consideriamo l'eguaglianza (15.7.9) in cui compare solo l'incognita b_n. A secondo membro compare il polinomio associato di Legendre $P_n^1(\cos\theta)$. Applicando la formula (15.2.27), si ha:

$$P_n^1(\cos\theta) = \left(1-\cos^2\theta\right)^{1/2}\frac{dP_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)} = \sin\theta\frac{dP_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)}$$

Tenendo conto che:

$$\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} = \frac{dP_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)}\frac{d(\cos\theta)}{d\theta} = -\sin\theta\frac{dP_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)}$$

ossia:

$$\frac{dP_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}$$

si ha:

$$P_n^1(\cos\theta) = -\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} \tag{15.7.13}$$

Sostituendo la (15.7.13) nella (15.7.9), si ha:

$$\sin\theta\cos\phi e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[b_n\frac{n(n+1)}{kr}j_n(kr)\left(-\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right)\cos\phi\right] \tag{15.7.14}$$

Moltiplicando entrambi i membri per $-ikr$ e dividendo per $\cos\phi$, otteniamo:

$$-ikr\sin\theta e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[ib_n n(n+1)j_n(kr)\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right] \tag{15.7.15}$$

Sfruttiamo, adesso, lo sviluppo dell'onda piana scalare dato dalla (15.4.18) che riscriviamo:

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[i^n(2n+1)j_n(kr)P_n(\cos\theta)\right] \tag{15.7.16}$$

Derivando rispetto a θ entrambi i membri, si ha:

$$-ikr\sin\theta e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[i^n(2n+1)j_n(kr)\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right] \tag{15.7.17}$$

Eguagliando il secondo membro della (15.7.17) con il secondo membro della (15.7.15) si deduce che, per l'unicitá dello sviluppo, deve essere:

$$\begin{cases} ib_n n(n+1) = i^n(2n+1) & \text{per } n>0 \\ b_n = 0 & \text{per } n=0 \end{cases} \tag{15.7.18}$$

ossia:

$$\begin{cases} b_n = -i^{n+1}\dfrac{(2n+1)}{n(n+1)} & \text{per } n>0 \\ b_n = 0 & \text{per } n=0 \end{cases} \tag{15.7.19}$$

Determiniamo, adesso, l'altro coefficiente a_n. Per questo riscriviamo l'equazione (15.7.12).

$$\widehat{x}e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\vec{m}^{(1)}_{d1n} + b_n\vec{n}^{(1)}_{p1n}\right) \tag{15.7.20}$$

Applichiamo vettorialmente l'operatore $\vec{\nabla}$ ad entrambi i membri dell'eguaglianza.

$$\vec{\nabla}\times\left(\widehat{x}e^{ikr\cos\theta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\vec{\nabla}\times\vec{m}^{(1)}_{d1n} + b_n\vec{\nabla}\times\vec{n}^{(1)}_{p1n}\right) \tag{15.7.21}$$

Il primo membro si puó scrivere:

$$\vec{\nabla}\times\left(\widehat{x}e^{ikr\cos\theta}\right) = \vec{\nabla}\times\left(\widehat{x}e^{ikz}\right) = ike^{ikz}\widehat{y} = ike^{ikrcos\theta}\widehat{y} \tag{15.7.22}$$

Ricordando che $\vec{M} = \frac{1}{k}\vec{\nabla} \times \vec{N}$, come si evince dalla (15.5.11), e che $\vec{N} = \frac{1}{k}\vec{\nabla} \times \vec{M}$, come si evince dalla terza delle (15.5.3), il secondo membro della (15.7.21) si scrive:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\vec{\nabla} \times \vec{m}^{(1)}_{d1n} + b_n\vec{\nabla} \times \vec{n}^{(1)}_{p1n}\right) = k\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\vec{n}^{(1)}_{d1n} + b_n\vec{m}^{(1)}_{p1n}\right) \tag{15.7.23}$$

Quindi:

$$ike^{ikr\cos\theta}\widehat{y} = k\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\vec{n}^{(1)}_{d1n} + b_n\vec{m}^{(1)}_{p1n}\right) \tag{15.7.24}$$

Procedendo come abbiamo fatto per il calcolo del coefficiente b_n, esplicitiamo $\widehat{y}$ in coordinate sferiche secondo la (15.7.2); si ha, allora:

$$\widehat{y} = \sin\theta\sin\phi\widehat{e}_r + \cos\theta\sin\phi\widehat{e}_\theta + \cos\phi\widehat{e}_\phi \tag{15.7.25}$$

Quindi la (15.7.24) diventa:

$$ike^{ikr\cos\theta}\left(\sin\theta\sin\phi\widehat{e}_r + \cos\theta\sin\phi\widehat{e}_\theta + \cos\phi\widehat{e}_\phi\right) = k\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\vec{n}^{(1)}_{d1n} + b_n\vec{m}^{(1)}_{p1n}\right) \tag{15.7.26}$$

Eguagliando le componenti radiali di ambo i membri della (15.7.26), si ha:

$$ik\sin\theta\sin\phi e^{ikr\cos\theta} = k\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\frac{n(n+1)}{kr}j_n(kr)P^1_n(\cos\theta)\sin\phi\right] \tag{15.7.27}$$

Moltiplicando ambo i membri per $\frac{1}{k\sin\phi}$, otteniamo:

$$i\sin\theta e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\frac{n(n+1)}{kr}j_n(kr)P^1_n(\cos\theta)\right] \tag{15.7.28}$$

che per la (15.7.13) si puó scrivere:

$$i\sin\theta e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\frac{n(n+1)}{kr}j_n(kr)\left(-\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right)\right] \tag{15.7.29}$$

Riscriviamo la (15.7.14) dopo aver moltiplicato ambo i membri per i e diviso per $\cos\phi$:

$$i\sin\theta e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[ib_n\frac{n(n+1)}{kr}j_n(kr)\left(-\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right)\right] \tag{15.7.30}$$

Confrontando la (15.7.29) con la (15.7.30) si ha:

$$ib_n = a_n \tag{15.7.31}$$

ossia:

$$\begin{cases} a_n = i^n \dfrac{(2n+1)}{n(n+1)} & \text{per } n > 0 \\ a_n = 0 & \text{per } n = 0 \end{cases} \tag{15.7.32}$$

Conseguentemente l'espressione del campo elettrico polarizzato lungo l'asse x é:

$$\vec{E} = \widehat{x} E_0 e^{i(kz - \omega t)} = E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\vec{m}_{d1n}^{(1)} - i\vec{n}_{p1n}^{(1)} \right) \tag{15.7.33}$$

Determiniamo, adesso, il vettore campo magnetico. Consideriamo la prima equazione di Maxwell nel dominio della frequenza:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega\mu \vec{H} \tag{15.7.34}$$

da cui:

$$\vec{H} = \frac{1}{i\omega\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E} \tag{15.7.35}$$

Dall'eguaglianza del primo membro della (15.7.21) con il secondo membro della (15.7.23), si ha:

$$\vec{\nabla} \times \left(\widehat{x} e^{ikr\cos\theta} \right) = k \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \vec{n}_{d1n}^{(1)} + b_n \vec{m}_{p1n}^{(1)} \right) \tag{15.7.36}$$

Ne segue, quindi:

$$\vec{H} = -\frac{i}{\omega\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{i}{\omega\mu} k E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \vec{n}_{d1n}^{(1)} + b_n \vec{m}_{p1n}^{(1)} \right) \tag{15.7.37}$$

Sostituendo in essa le espressioni dei coefficienti a_n e b_n, si ha in definitiva:

$$\vec{H} = -\frac{k}{\omega\mu} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \left[i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\vec{m}_{p1n}^{(1)} + i\vec{n}_{d1n}^{(1)} \right) \right] \tag{15.7.38}$$

Fine del Cap.15