

Diffrazione di Fresnel

10.1 - Generalità

Ci siamo finora occupati dello studio del campo diffratto “far field” o diffrazione di **Fraunhofer**.

Nello studio del campo diffratto da un’apertura radiante è utile distinguere tre regioni: regione reattiva o di onda evanescente, regione di Fresnel e regione far field o di Fraunhofer. Queste tre regioni sono indicate in figura.

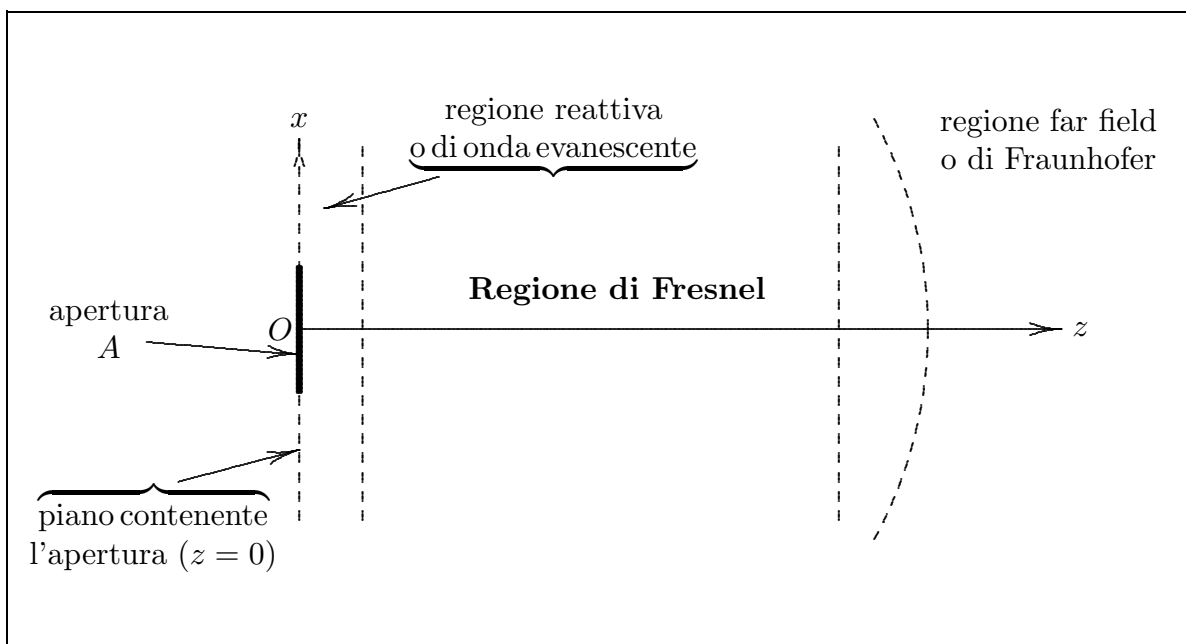


fig.10.1-1

Procedendo dal piano $z = 0$ nel semispazio $z \geq 0$, la prima regione che si incontra è la regione reattiva in cui le onde evanescenti e le onde che si propagano contribuiscono al campo nello spettro angolare delle onde piane. Come dimostrato precedentemente la regione reattiva è larga solo qualche lunghezza d’onda. Successivamente vi è la regione d’interesse più generale in cui tutte le onde che si propagano contribuiscono al campo nello spettro angolare. Questa è la regione di Fresnel che si estende per molte lunghezze d’onda. Infine abbiamo la regione di Fraunhofer dove il campo è essenzialmente determinato da una singola onda piana componente lo spettro angolare il cui valore è quello competente alla direzione del punto campo. La maggior parte della discussione sulla diffrazione di Fresnel verterà su campi bidimensionali di tipo TM, le cui componenti del campo sono E_x , E_z ed H_y . Infine estenderemo la discussione al caso tridimensionale in cui i principi sono gli stessi ma le formule corrispondenti sono più complicate.

Un'alternativa suddivisione del campo diffratto in due larghe categorie: campo vicino (near field) e campo lontano (far field), con il primo suddiviso in campo vicino reattivo e campo vicino irradiato (IEEE Standard Test Procedures for antennas) viene data dalla IEEE. Nella nostra trattazione il campo vicino irradiato corrisponde esattamente alla regione di Fresnel.

10.2 - Formula di diffrazione di Fresnel.

Le tre componenti del campo dovunque nel semispazio $z \geq 0$ per un campo bidimensionale TM sono date in termini della funzione spettro angolare di onde piane $F(s)$ dall'equazione (7.1.12), (7.1.13) e (7.1.14). La componente lungo l'asse x per esempio è:

$$E_x(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) \exp \{ -ik(sx + cz) \} ds \quad (10.2.1)$$

in cui s e c sono i coseni direttori, $s = \sin \theta$ e $c = \cos \theta$, dell'onda piana componente di ampiezza complessa $F(s)ds$ viaggiante in una direzione formante un angolo θ con l'asse z . Quando $|s| > 1$, prendendo la radice immaginaria negativa di $\sqrt{1 - s^2}$, significa che le corrispondenti onde componenti lo spettro angolare sono evanescenti all'aumentare di z . Esse saranno ignorate nella discussione seguente.

La (10.2.1) si può scrivere:

$$E_x(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) \exp(-ikcz) \exp(-iksx) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s) \exp(-iksx) ds \quad (10.2.2)$$

dove

$$G(s) = F(s) \exp(-ikcz) \quad (10.2.3)$$

10.3 - Formula di diffrazione di Fresnel per spettri angolari stretti.

Accade spesso che lo spettro angolare $F(s)$ sia di ampiezza trascurabile al di fuori di un certo range angolare.

Questo è il caso di alcune antenne a microonde, di fasci laser ecc. . Assumendo che il range angolare sia centrato a $\theta = 0$, consideriamo il termine $\sqrt{1 - s^2}$ e lo sviluppiamo in serie arrestandoci a potenze di s non più alte della seconda, cioè $c = 1 - \frac{1}{2}s^2$.

La (10.2.3) quindi si scrive:

$$G(s) = F(s) \exp \left\{ -ikz \left(1 - \frac{1}{2}s^2 \right) \right\} \quad (10.3.1)$$

Ovviamente tanto più piccolo è s tanto più la (10.3.1) è accurata. Vale la pena osservare che per $\theta = 10^\circ$ $s \simeq \frac{1}{6}$ la formula approssimata per c è in errore di solo una parte su 10000.

Sostituendo la (10.3.1) nella (10.2.2) si ha:

$$E_x(x, z) = \exp(-ikz) \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) \exp\left(i\frac{1}{2}kzs^2\right) \exp(-ikxs) ds \quad (10.3.2)$$

Questa è la trasformata di Fourier del prodotto di due funzioni di s , le quali a loro volta hanno come trasformate di Fourier

$$\begin{aligned} F(s) &\longleftrightarrow f(x) \quad \text{campo sulla apertura} \\ \exp\left(i\frac{1}{2}kzs^2\right) &\longleftrightarrow \sqrt{i\frac{\lambda}{z}} \exp\left(-i\frac{1}{2}k\frac{x^2}{z}\right) \end{aligned} \quad (10.3.3)$$

Segue dal teorema di convoluzione delle trasformate di Fourier che:

$$E_x(x, z) = \sqrt{\frac{i}{\lambda z}} \exp(-ikz) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp\left\{-i\frac{k(x-\xi)^2}{2z}\right\} d\xi \quad (10.3.4)$$

La (10.3.4) è la formula di diffrazione di Fresnel.

Esercizio 10.1

Derivare la formula (10.3.3) e (10.3.4)

La sola approssimazione fatta nella derivazione della (10.3.4) è che lo spettro angolare sia trascurabile al di fuori di uno stretto range di angoli, diciamo $\pm 10^0$. Sarà dimostrato che questo corrisponde alla fondamentale approssimazione dell'equazione d'onda conosciuta come approssimazione parabolica. Ma prima è istruttivo ottenere lo stesso risultato con il metodo più tradizionale.

10.4 - Formula di diffrazione di Fresnel derivata dal principio di Huygens.

Consideriamo sempre il caso bidimensionale TM in cui il campo sull'apertura $f(x) = E_{ax}(x)$ è definito sul piano $z = 0$.

Considerando la geometria di figura, una tipica sorgente di Huygens può essere presa come giacente nel piano dell'apertura nel punto $x = \xi$ e di larghezza $d\xi$.

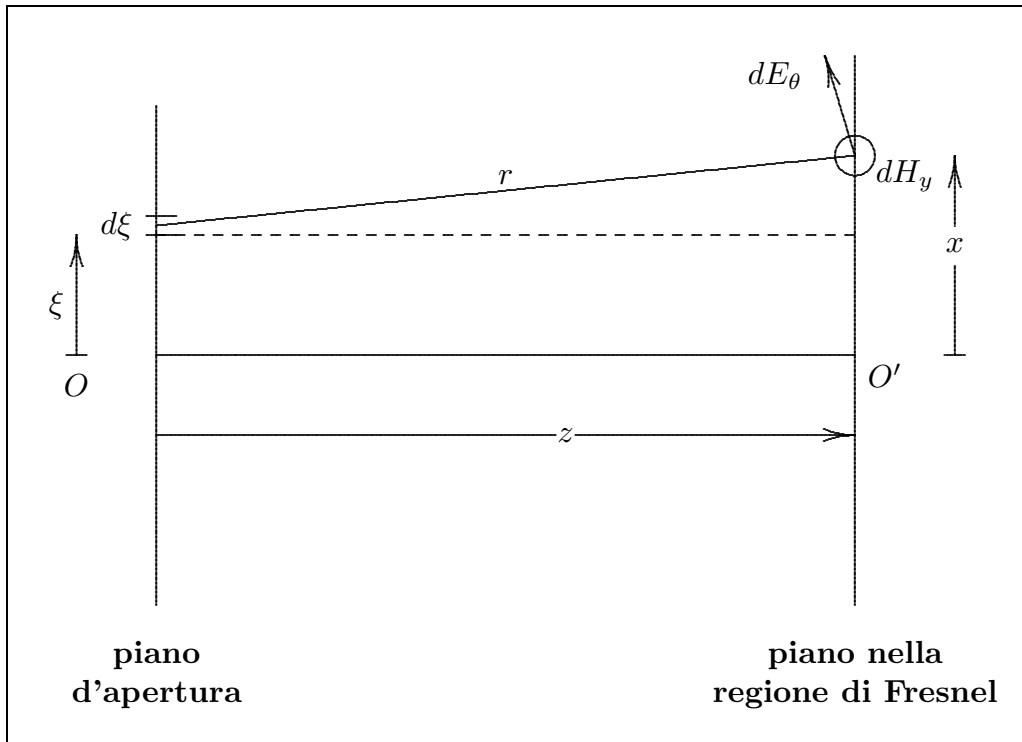


fig.10.4-1

L'onda cilindrica emessa da questo elemento del fronte d'onda è data dall'equazione

$$dE_{\theta} = Z dH_y = f(\xi) d\xi \sqrt{\frac{i}{\lambda r}} e^{-i k r} \quad (10.4.1)$$

Poichè $r = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2}$ e poichè, per le ipotesi fatte di fascio stretto, $\max|x - \xi| \ll z$, nell'equazione (10.4.1) possiamo effettuare le seguenti approssimazioni:

$$r = \sqrt{z^2 \left[1 + \frac{(x - \xi)^2}{z^2} \right]} = z \sqrt{1 + \frac{(x - \xi)^2}{z^2}} \simeq z \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(x - \xi)^2}{z^2} \right] \quad (10.4.2)$$

nel termine di fase e $r \simeq z$ nel termine di ampiezza.

Analogamente l'inclinazione del campo elettrico elementare dE_θ rispetto alla verticale si può ignorare e la componente lungo l'asse x del campo elettrico nel piano z della regione di Fresnel può essere scritta approssimativamente come:

$$E_x(x, z) = \sqrt{\frac{i}{\lambda z}} \exp(-ikz) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp\left\{-i\frac{k(x-\xi)^2}{2z}\right\} d\xi \quad (10.4.3)$$

Con questo grado di approssimazione la sola altra componente significativa del campo è:

$$H_y(x, z) = \frac{E_x(x, z)}{Z}$$

Abbiamo ritrovato così la formula (10.3.4).

10.5 Approssimazione dell'equazione parabolica.

È utile mostrare che la formula di diffrazione di Fresnel è soluzione dell'equazione d'onda in approssimazione parabolica. Il significato fisico è che la diffrazione di Fresnel comporta campi che si propagano essenzialmente in una direzione singola. Assumendo che la direzione principale di propagazione sia la direzione z , possiamo scrivere ciascuna componente del campo (problema bidimensionale) come:

$$f(x, z) = u(x, z) \exp(-ikz) \quad (10.5.1)$$

in cui $u(x, z)$ è una funzione lentamente variabile in z , in contrasto con $\exp(-ikz)$ che è rapidamente variabile.

Tutte le componenti del campo devono soddisfare all'equazione d'onda che in una regione libera da sorgenti e per campi monocromatici è:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (10.5.2)$$

Sostituendo la (10.5.1) nella (10.5.2) si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + k^2 f = 0 \quad (10.5.3)$$

che è una equazione differenziale di tipo ellittico.

Segue:

$$\begin{aligned} & [\exp(-ikz)] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + [\exp(-ikz)] \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2ik [\exp(-ikz)] \frac{\partial u}{\partial z} - \\ & - k^2 u [\exp(-ikz)] + k^2 u [\exp(-ikz)] = 0 \end{aligned}$$

cioè:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (10.5.4)$$

Poichè u è una funzione lentamente variabile in z , possiamo scrivere:

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \ll 2k \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \quad (10.5.5)$$

ciò implica che u varia poco lungo una distanza $\frac{1}{2k} = \frac{\lambda}{4\pi}$.

Con l'approssimazione (10.5.5) la (10.5.4) diventa:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (10.5.6)$$

Questa è una equazione di tipo parabolico ed ecco il motivo del nome dato alla approssimazione fatta.

È facile verificare che la formula di diffrazione di Fresnel soddisfa l'equazione (10.5.6).

Possiamo, dunque, affermare che l'approssimazione parabolica si applica ai campi i cui spettri angolari sono strettamente confinati in una singola direzione, il range di θ in cui lo spettro è significativo non è più largo di 20° .

10.6 - Diffrazione da un semipiano conduttore.

Consideriamo il problema bidimensionale, illustrato in figura, di un'onda piana di ampiezza E_0 polarizzata lungo l'asse x , incidente normalmente su un sottile semipiano perfettamente conduttore. Questo classico problema di ottica fu per primo risolto da Fresnel, e condusse alla definitiva affermazione della teoria ondulatoria della luce.

La sua soluzione è stata usata dagli ingegneri come modello per la propagazione di onde radio attraverso ostacoli come cime di montagne e spigoli di edifici.

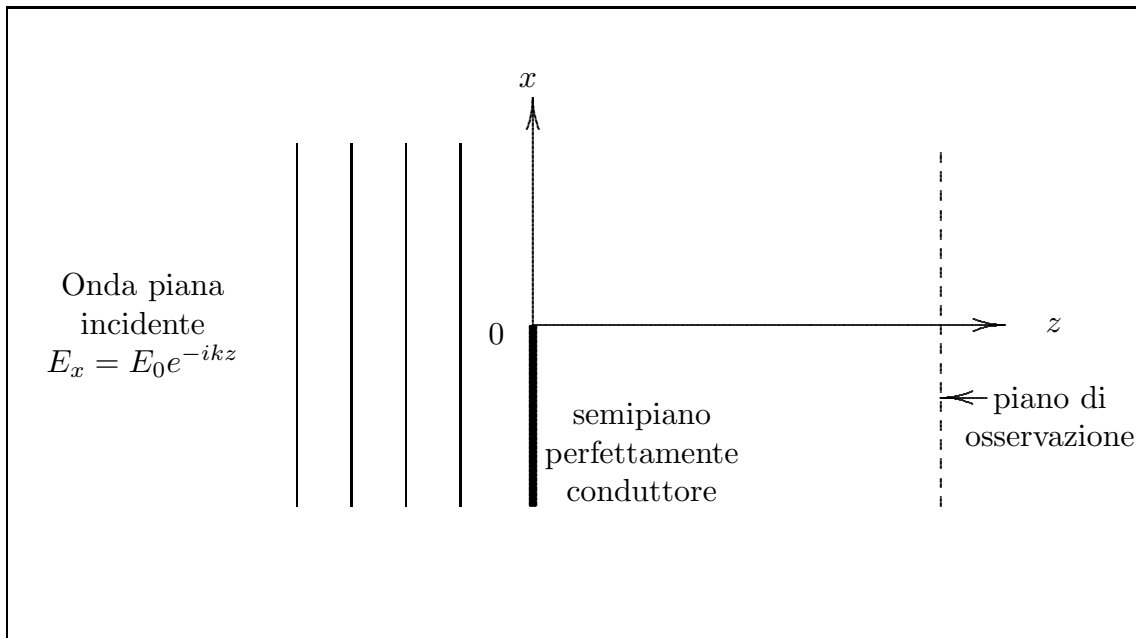


fig.10.6-1

Sia $z = 0^+$ il “piano d’apertura”. Assumiamo in prima approssimazione che il campo sul piano d’apertura sia descritto da:

$$E_{ax}(x) = E_0 U(x) \quad (10.6.1)$$

dove $U(x)$ è la funzione a gradino di Heaviside definita come:

$$U(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \geq 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases} \quad (10.6.2)$$

Il corrispondente spettro angolare $F(s)$ è dato da:

$$F(s) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{ax}(x) \exp(iksx) dx \quad (10.6.3)$$

Nel nostro caso:

$$F(s) = \frac{1}{\lambda} E_0 \int_0^{+\infty} \exp(iksx) dx \quad (10.6.4)$$

Osserviamo subito che per $s \rightarrow 0$ l’integrale (10.6.4) diverge a $+\infty$; pertanto non possiamo applicare la formula relativa al “far field” poichè essa è basata sull’assunzione che $F(s)$ è continua, così come non può essere soddisfatto il criterio di Rayleigh in quanto l’apertura è infinitamente larga. Poichè però lo spettro è fortemente “piccato” per $s = 0$, la condizione per la validità della formula di diffrazione di Fresnel è soddisfatta.

Sostituendo, quindi, la (10.6.1) nella (10.4.3) si ha:

$$E_x(x, z) = E_0 e^{-ikz} \sqrt{\frac{i}{\lambda z}} \int_0^{+\infty} \exp \left\{ -i \frac{k(x - \xi)^2}{2z} \right\} d\xi \quad (10.6.5)$$

che può essere valutata in termini di integrali di Fresnel attraverso la sostituzione:

$$u = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (\xi - x) \implies d\xi = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} du \quad (10.6.6)$$

per cui:

$$\begin{aligned} E_x(x, z) &= E_0 e^{-ikz} \sqrt{\frac{i}{2}} \int_{-x\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}}^{+\infty} \exp \left\{ -i \frac{\pi u^2}{2} \right\} du = \\ &= E_0 e^{-ikz} \sqrt{\frac{i}{2}} \left[\int_0^{+\infty} \exp \left\{ -i \frac{\pi u^2}{2} \right\} du + \int_0^{x\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}} \exp \left\{ -i \frac{\pi u^2}{2} \right\} du \right] \end{aligned} \quad (10.6.7)$$

che simbolicamente si scrive:

$$E_x(x, z) = E_0 e^{-ikz} \sqrt{\frac{i}{2}} \left[\mathcal{F}(\infty) + \mathcal{F} \left(x \sqrt{\frac{2}{\lambda z}} \right) \right] \quad (10.6.8)$$

10.7 - L'integrale di Fresnel.

In forma complessa, l'integrale di Fresnel è:

$$\mathcal{F}(\nu) = \int_0^\nu \exp\left\{-i\frac{\pi u^2}{2}\right\} du = \mathcal{C}(\nu) - i\mathcal{S}(\nu) \quad (10.7.1)$$

dove

$$\mathcal{C}(\nu) = \int_0^\nu \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \quad (10.7.2)$$

e

$$\mathcal{S}(\nu) = \int_0^\nu \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \quad (10.7.3)$$

sono i notissimi integrali di Fresnel tabulati in forma reale.

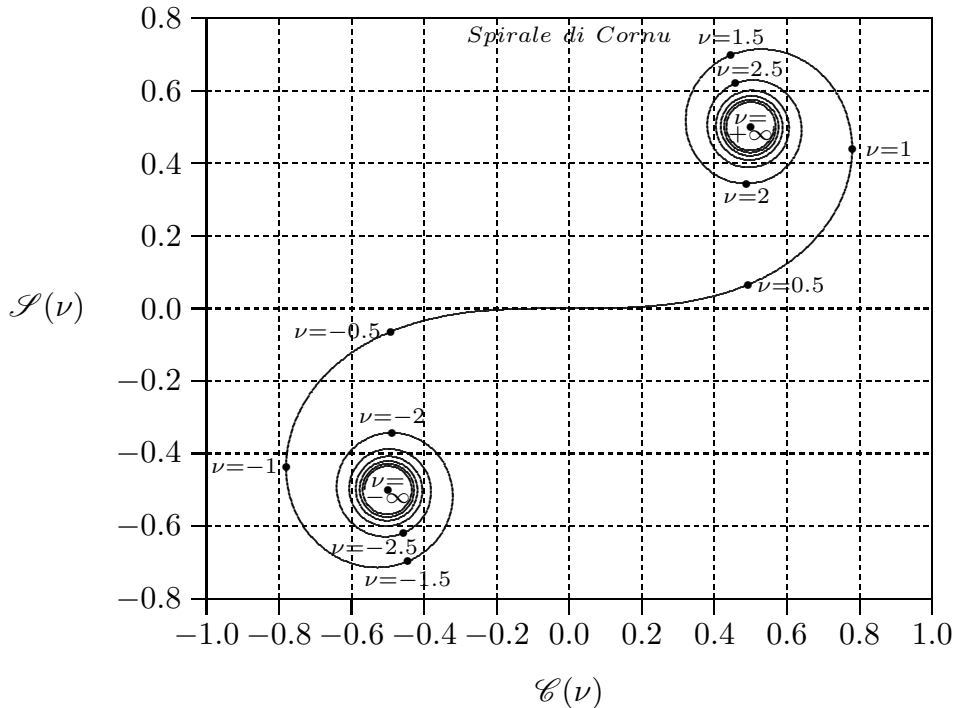
$\mathcal{F}(\nu)$ ha le seguenti proprietà:

$$\mathcal{F}(0) = 0; \quad \mathcal{F}(\nu) = -\mathcal{F}(-\nu); \quad \mathcal{F}(\infty) = -\mathcal{F}(-\infty) = \frac{1}{2}(1 - i)$$

e la sua forma asintotica è:

$$\mathcal{F}(\nu) \simeq \frac{1}{2}(1 - i) - \frac{1}{i\pi\nu} e^{-i\frac{\pi\nu^2}{2}} \quad (10.7.4)$$

Un grafico nel piano $\mathcal{C}(\nu)$ $\mathcal{S}(\nu)$ con parametro ν è mostrato in figura 10.7.1. Esso è conosciuto come "spirale di **Cornu**".



I valori degli integrali di Fresnel ripresi dall'Handbook of Mathematical functions edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, sono riportati nel paragrafo F7 del Formulario. Essi si possono calcolare con il programma Matlab mediante le istruzioni "mfun('FresnelC', x)" e "mfun('FresnelS', x)".

É importante graficare la (10.6.8) per visualizzare come il campo elettrico penetra nella zona d'ombra.

Cominciamo con la valutazione di $\mathcal{F}\left(x\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\right)$.

Poichè x è la coordinata che ci indica la penetrazione del campo mentre z rappresenta la distanza dal semipiano, si assume quest'ultima come parametro ed in particolare il prodotto λz .

Posto $x\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} = w$ e tenendo presente che $\mathcal{F}(w) = \mathcal{C}(w) - i\mathcal{S}(w)$ si ha la seguente tabella:

$$\boxed{\lambda z = 0.1}$$

x	w	$\mathcal{C}(w)$	$\mathcal{S}(w)$	$\left \frac{E_x(x, z)}{E_0}\right _{x>0}$	$\left \frac{E_x(x, z)}{E_0}\right _{x<0}$
0	0	0	0	0.5	0.5
0.1	0.44721	0.44282	0.046503	0.77058	0.32321
0.2	0.89443	0.76314	0.33446	1.0705	0.21983
0.3	1.3416	0.60026	0.70257	1.1525	0.15982
0.4	1.7889	0.32986	0.46142	0.89805	0.12336
0.5	2.2361	0.64081	0.49139	1.0687	0.099751
0.6	2.6833	0.38622	0.4684	0.92822	0.083497
0.7	3.1305	0.53442	0.5954	1.0653	0.071716
0.8	3.5777	0.58378	0.47047	1.0287	0.062816
0.9	4.0249	0.52294	0.42439	0.97491	0.055868
1	4.4721	0.49887	0.42888	0.96451	0.050298
1.1	4.9193	0.51918	0.43823	0.97954	0.045734
1.2	5.3666	0.55619	0.48106	1.0193	0.041928
1.3	5.8138	0.5174	0.5519	1.0348	0.038706
1.4	6.261	0.45153	0.48468	0.96825	0.035944
1.5	6.7082	0.54744	0.49966	1.0238	0.033549
1.6	7.1554	0.45761	0.48652	0.97217	0.031453
1.7	7.6026	0.51316	0.53974	1.0265	0.029603
1.8	8.0498	0.53754	0.4876	1.0129	0.027959
1.9	8.4971	0.51142	0.46432	0.98815	0.026488
2	8.9443	0.49986	0.46441	0.9823	0.025164
2.1	9.3915	0.51036	0.46773	0.98927	0.023966
2.2	9.8387	0.53074	0.4899	1.0105	0.022876
2.3	10.286	0.50965	0.5294	1.0196	0.021882
2.4	10.733	0.47177	0.49091	0.98139	0.02097
2.5	11.18	0.52847	0.49993	1.0143	0.020131

2.6	11.628	0.47394	0.4916	0.98281	0.019357
2.7	12.075	0.5082	0.52505	1.0167	0.01864
2.8	12.522	0.52416	0.4921	1.0083	0.017975
2.9	12.969	0.50754	0.47664	0.99221	0.017355
3	13.416	0.49996	0.47627	0.98819	0.016776
3.1	13.864	0.50706	0.47815	0.99271	0.016235
3.2	14.311	0.52114	0.49309	1.0072	0.015728
3.3	14.758	0.50669	0.5205	1.0136	0.015251
3.4	15.205	0.48008	0.49356	0.98684	0.014803
3.5	15.652	0.52034	0.49997	1.0102	0.01438
3.6	16.1	0.48119	0.49391	0.98757	0.01398
3.7	16.547	0.50597	0.51829	1.0121	0.013602
3.8	16.994	0.51781	0.49419	1.0061	0.013244
3.9	17.441	0.50562	0.48264	0.9942	0.012905
4	17.889	0.49998	0.48221	0.99113	0.012582
4.1	18.336	0.50535	0.48348	0.99448	0.012275
4.2	18.783	0.51611	0.49475	1.0055	0.011983
4.3	19.23	0.50513	0.51574	1.0104	0.011704
4.4	19.677	0.48461	0.49501	0.98983	0.011438
4.5	20.125	0.51582	0.49999	1.0079	0.011184
4.6	20.572	0.48528	0.49523	0.99027	0.010941
4.7	21.019	0.50469	0.5144	1.0096	0.010708
4.8	21.466	0.5141	0.49541	1.0048	0.010485
4.9	21.913	0.50448	0.48618	0.99537	0.010271
5	22.361	0.49999	0.48576	0.9929	0.010066

Il rapporto $\left| \frac{E_x(x, z)}{E_0} \right|$ si calcola facilmente dalla (10.6.8) e risulta:

$$\left| \frac{E_x(x, z)}{E_0} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{1}{2} + \mathcal{C} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \mathcal{S} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{per } x > 0$$

$$\left| \frac{E_x(x, z)}{E_0} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{1}{2} - \mathcal{C} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \mathcal{S} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{per } x < 0$$

dove, ovviamente \mathcal{C} e \mathcal{S} dell'ultima formula sono calcolati per $x > 0$.

I risultati sono riportati nel grafico di seguito dove si vede chiaramente la penetrazione del campo elettromagnetico nella zona d'ombra mentre nella zona illuminata si ha la classica figura di diffrazione che scompare per larghi valori di $\frac{x}{\sqrt{\frac{\lambda z}{2}}}$ dando luogo ad illuminazione uniforme.

È importante osservare che per $\lambda \rightarrow 0$ (come per esempio nel caso della luce) per le

formule suddette, come è immediato verificare, si ha:

$$\left| \frac{E_x(x, z)}{E_0} \right| = 1 \quad \text{per } x > 0$$

$$\left| \frac{E_x(x, z)}{E_0} \right| = 0 \quad \text{per } x < 0$$

Questo spiega la proposizione **“la luce viaggia in linea retta”** e lo scetticismo degli scienziati quando **Marconi** sperimentò che la radiazione elettromagnetica poteva osservarsi dietro colline.

Viceversa per λ molto grande l'onda penetra maggiormente.

Riportiamo il programma, in ambiente Matlab, per il grafico del modulo del campo elettrico in funzione di x .

Programma Matlab 'Semipiano.m'

```

delete(get(0,'children'));
LZ=0.1;
AA=sqrt(2./LZ);
x=(0:.1:5)';
u=x.*AA;
Cu=mfun('FresnelC',u);
Su=mfun('FresnelS',u);
MODEP=(1./sqrt(2)).*((0.5+Cu).^2+(0.5+Su).^2).^0.5;
[x MODEP];
plot(MODEP, x)
grid on
MODEM=(1./sqrt(2)).*((0.5-Cu).^2+(0.5-Su).^2).^0.5;
[x MODEM];
[x u Cu Su MODEP MODEM]
hold on
plot(MODEM, x)
grid on

```

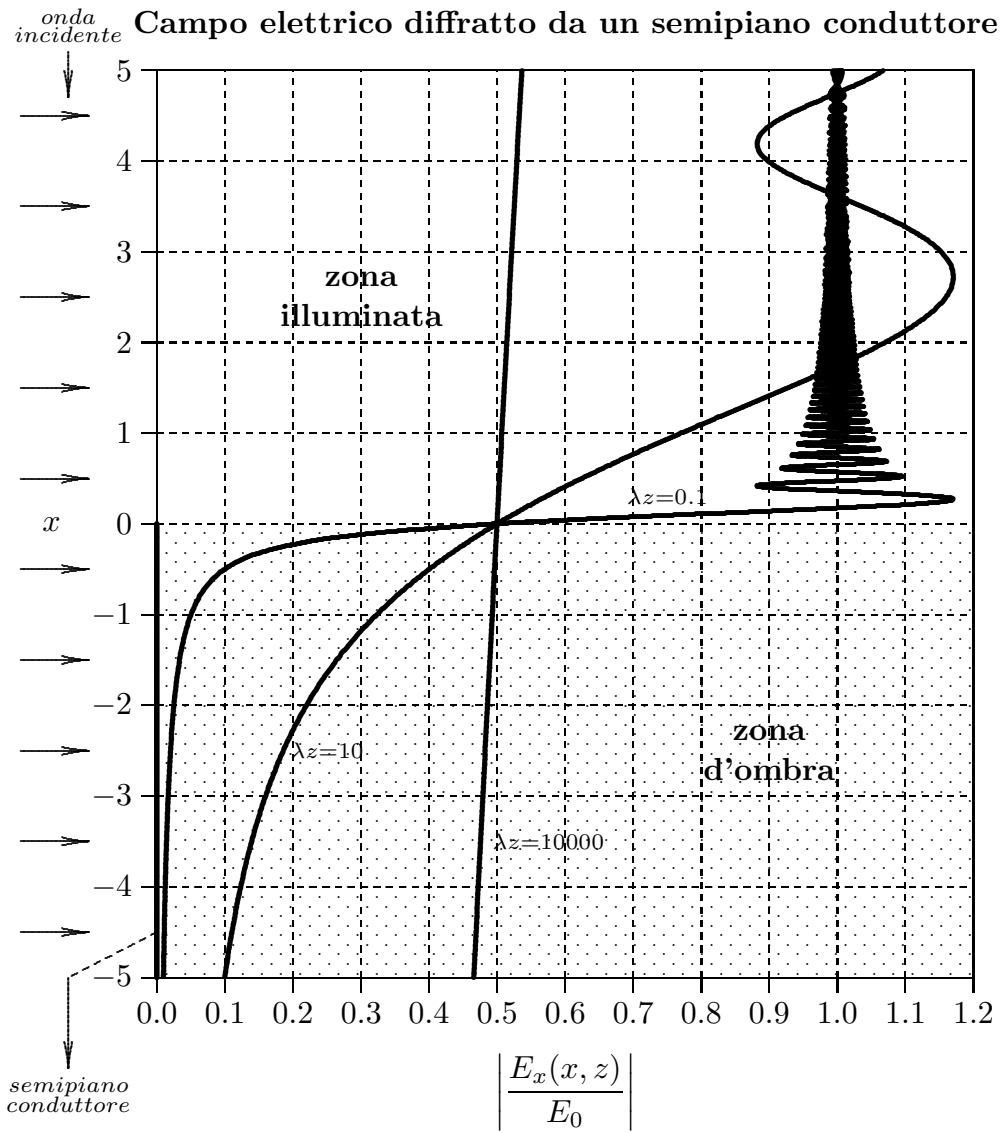
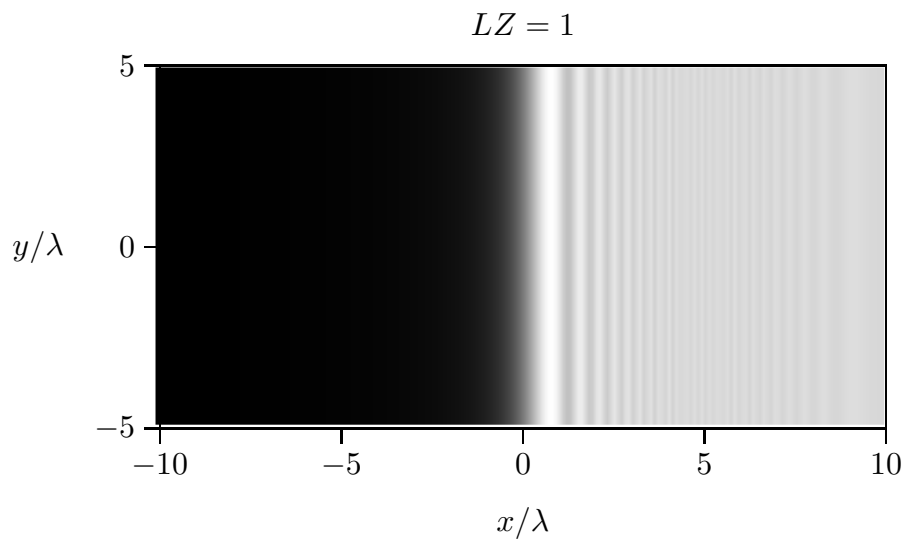
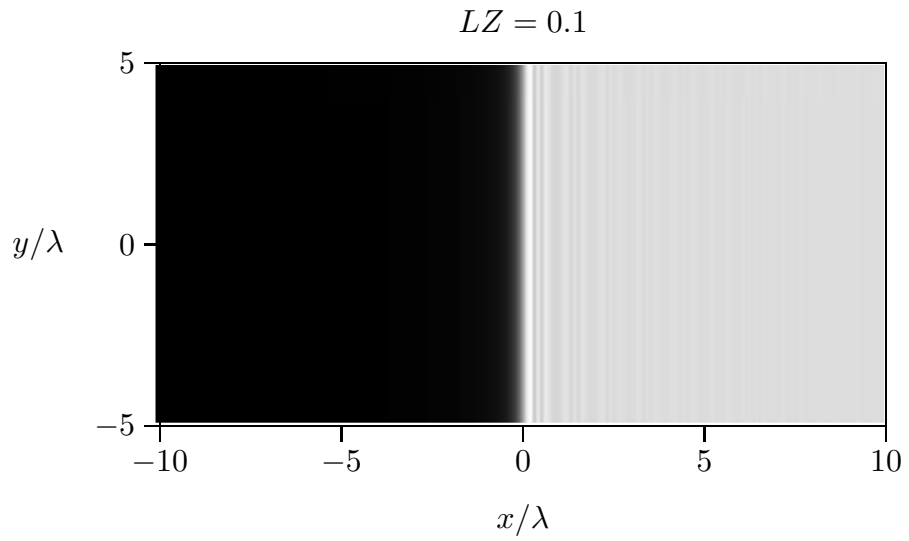
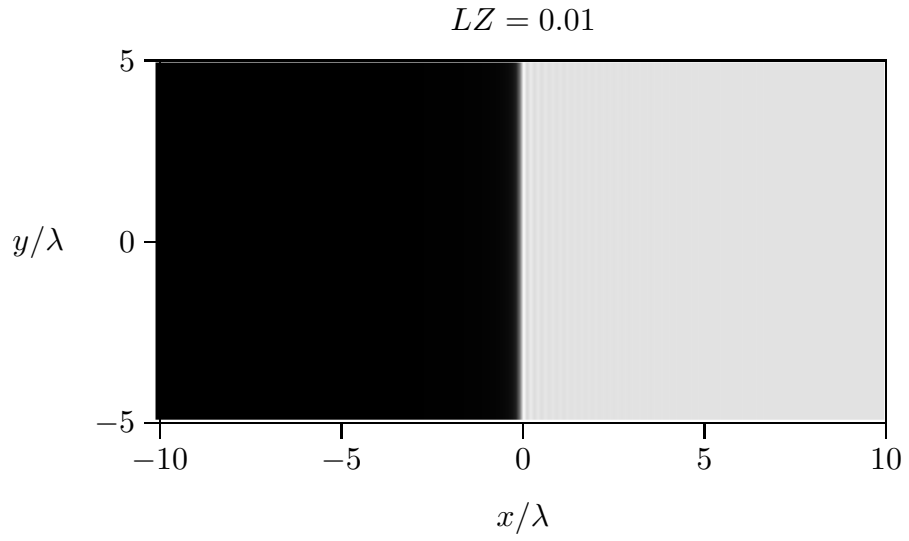
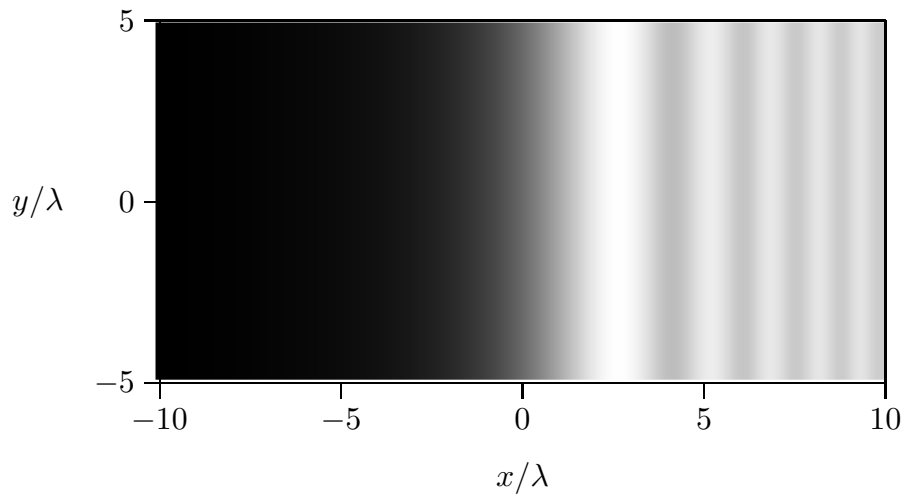


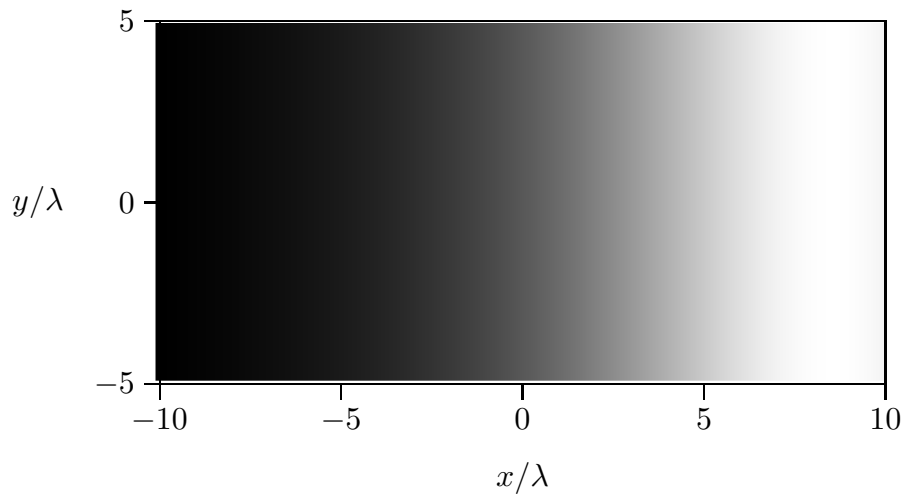
fig.10.7-2



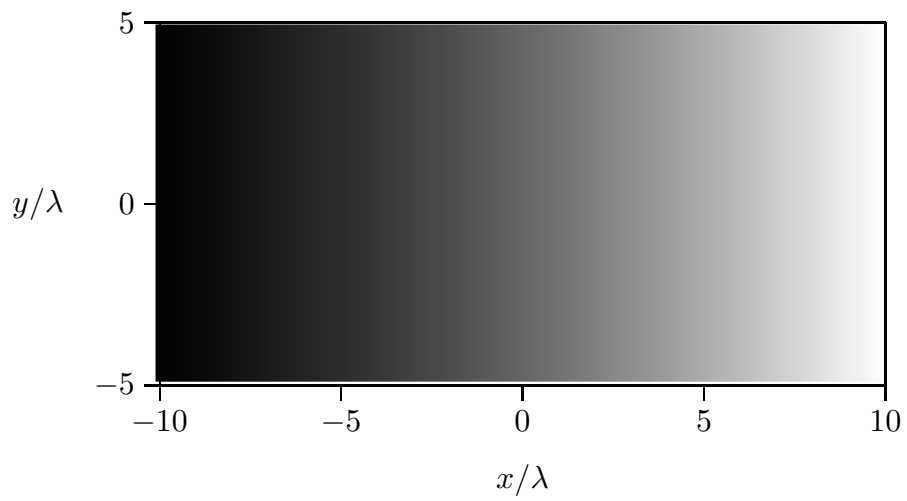
$LZ = 10$

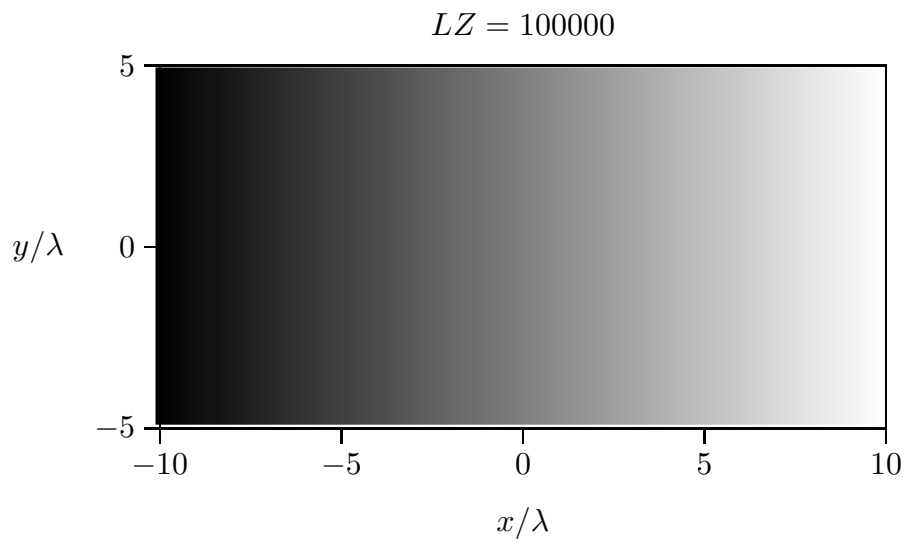
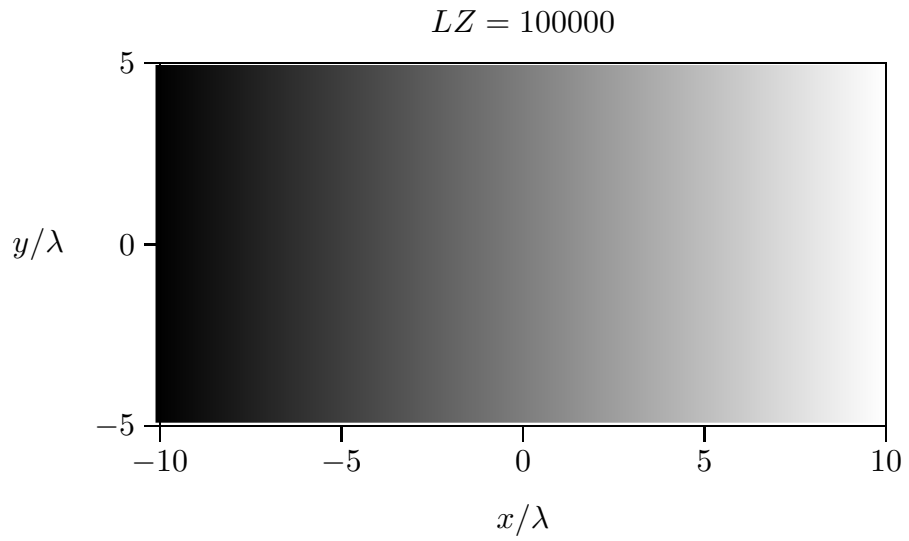
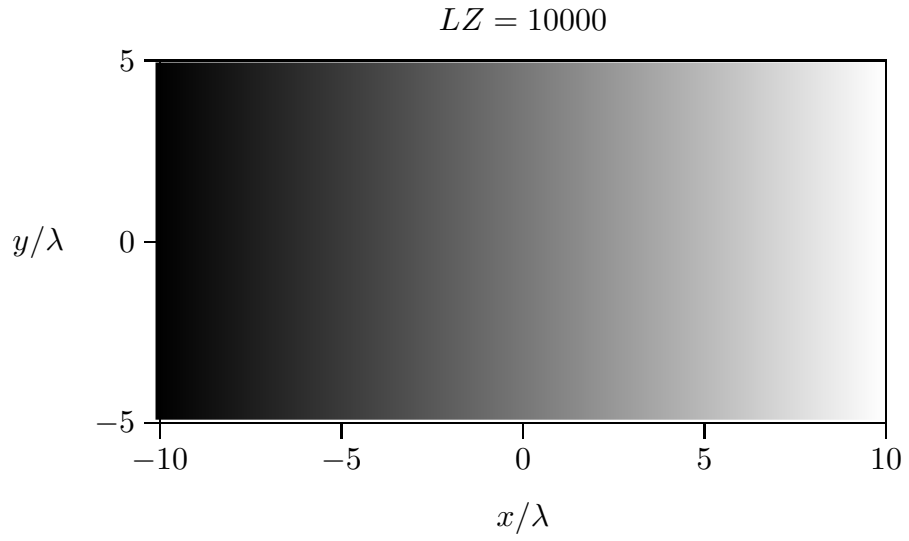


$LZ = 100$



$LZ = 1000$





Riportiamo il programma, in ambiente Matlab, per raffigurare le zone di luce e ombre proiettate su un piano parallelo al piano xy .

Programma Matlab 'diffrsemipiano.m'

```
01 - delete(get(0,'children')); clear all; LZ=100000000;
02 - AA=sqrt(2./LZ);
03 - Ris1=0.1;
04 - [X,Y] = meshgrid(-10:Ris1:10, -5:Ris1:+5);
05 - u=X.*AA;
06 - Cu=mfun('FresnelC',u); Su=mfun('FresnelS',u);
07 - MODEP=(1./sqrt(2)).*((0.5+Cu).^2+(0.5+Su).^2).^5;
08 - Z=MODEP;
09 - shading interp;
10 - axis('off')
11 - axis square
12 - colormap(gray(1000));
13 - Zmin = min(Z);
14 - ZZmin= min(Zmin);
15 - Zmax = max(Z);
16 - ZZmax = max(Zmax);
17 - pcolor(Z./ZZmax);
18 - shading interp;
19 - axis('off')
20 - axis square
21 - colormap(gray(1000));
22 - print('-depsec','diffsemipiano100000000')
```


10.8 - Formula della diffrazione di Fresnel nel caso generale di una fenditura bidimensionale

É utile in questo paragrafo (e nei prossimi) studiare la diffrazione di Fresnel di un'onda piana da parte di una fenditura bidimensionale e verificare che all'aumentare della distanza la figura di diffrazione si avvicina a quella di Fraunhofer. Cominciamo a studiare la formulazione del problema come estensione di quella già trattata, nel caso unidimensionale, al paragrafo 10.2 e 10.3.

Consideriamo la formula generale della diffrazione in un semispazio $z > 0$. Essa é data dalla (8.13.4) che riscriviamo:

$$\vec{E}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\hat{x} - \hat{z} \frac{\alpha}{\gamma} \right) F_x(\alpha, \beta) + \left(\hat{y} - \hat{z} \frac{\beta}{\gamma} \right) F_y(\alpha, \beta) \right] \exp[-ik(\alpha x + \beta y + \gamma z)] d\alpha d\beta \quad (10.8.1)$$

La (10.8.1) si può anche scrivere:

$$\vec{E}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\hat{x} F_x(\alpha, \beta) + \hat{y} F_y(\alpha, \beta) - \hat{z} \left(\frac{\alpha}{\gamma} F_x(\alpha, \beta) + \frac{\beta}{\gamma} F_y(\alpha, \beta) \right) \right] \cdot \exp[-ik(\alpha x + \beta y)] \exp(-ik\gamma z) d\alpha d\beta \quad (10.8.2)$$

Procediamo come nel paragrafo 10.3, ricordando che:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad \text{ossia} \quad \gamma = \sqrt{1 - (\alpha^2 + \beta^2)} \quad (10.8.3)$$

Nell'ipotesi che γ é prossimo a uno ossia che lo spettro angolare sia molto piccato nella direzione dell'asse z positivo, e quindi il campo praticamente uniforme sull'apertura, risulta necessariamente che:

$$\alpha^2 + \beta^2 \ll 1 \quad (10.8.4)$$

e quindi sviluppando in serie di Taylor la seconda equazione della (10.8.3), si può porre:

$$\gamma \simeq 1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \quad (10.8.5)$$

che prende il nome di **approssimazione di Fresnel**.

In tale approssimazione possiamo scrivere:

$$\exp(-ik\gamma z) \simeq \exp(-ikz) \cdot \exp\left(ikz \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right) \quad (10.8.6)$$

e la formula (10.8.2) diventa:

$$\vec{E}(x, y, z) \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\hat{x} F_x(\alpha, \beta) + \hat{y} F_y(\alpha, \beta) - \hat{z} \left(\frac{\alpha}{\gamma} F_x(\alpha, \beta) + \frac{\beta}{\gamma} F_y(\alpha, \beta) \right) \right] \cdot \exp[-ik(\alpha x + \beta y)] \cdot \exp\left(ikz \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right) \exp(-ikz) d\alpha d\beta \quad (10.8.7)$$

ossia:

$$\vec{E}(x, y, z) = \exp(-ikz) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\hat{x}F_x(\alpha, \beta) + \hat{y}F_y(\alpha, \beta) - \hat{z} \left(\frac{\alpha}{\gamma}F_x(\alpha, \beta) + \frac{\beta}{\gamma}F_y(\alpha, \beta) \right) \right] \cdot \exp \left(ikz \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right) \right\} \exp[-ik(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \quad (10.8.8)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) = & \exp(-ikz) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}F_x(\alpha, \beta) \cdot \exp \left(ikz \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right) \cdot \exp[-ik(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta + \\ & + \exp(-ikz) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}F_y(\alpha, \beta) \cdot \exp \left(ikz \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right) \cdot \exp[-ik(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta + \\ & + \exp(-ikz) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} -\hat{z}F_x(\alpha, \beta) \cdot \frac{\alpha}{\gamma} \exp \left(ikz \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right) \cdot \exp[-ik(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta + \\ & + \exp(-ikz) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} -\hat{z}F_y(\alpha, \beta) \cdot \frac{\beta}{\gamma} \exp \left(ikz \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right) \cdot \exp[-ik(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (10.8.9)$$

Questa é la trasformata di Fourier del prodotto di due funzioni di α e β , ciascuna delle quali ha come trasformata:

$$\begin{aligned} F_x(\alpha, \beta) & \longleftrightarrow E_{ax}(x, y) \quad \text{componente lungo } x \text{ del campo sulla apertura} \\ F_y(\alpha, \beta) & \longleftrightarrow E_{ay}(x, y) \quad \text{componente lungo } y \text{ del campo sulla apertura} \\ \exp \left(ikz \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right) & \longleftrightarrow i \frac{\lambda}{z} \exp \left(-ik \frac{x^2 + y^2}{2z} \right) \\ \frac{\alpha}{\gamma} \exp \left(ikz \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right) & \simeq \alpha \exp \left(ikz \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right) \longleftrightarrow i \frac{\lambda}{z} \frac{x}{z} \exp \left(-ik \frac{x^2 + y^2}{2z} \right) \\ \frac{\beta}{\gamma} \exp \left(ikz \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right) & \simeq \beta \exp \left(ikz \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right) \longleftrightarrow i \frac{\lambda}{z} \frac{y}{z} \exp \left(-ik \frac{x^2 + y^2}{2z} \right) \end{aligned} \quad (10.8.10)$$

Segue dal teorema di convoluzione delle trasformate di Fourier che:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) = & \frac{i}{\lambda z} \exp(-ikz) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \hat{x}E_{ax}(\xi, \eta) + \hat{y}E_{ay}(\xi, \eta) - \right. \\ & \left. - \hat{z} \left[E_{ax}(\xi, \eta) \cdot \frac{x - \xi}{z} + E_{ay}(\xi, \eta) \cdot \frac{y - \eta}{z} \right] \right\} \cdot \exp \left[-ik \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z} \right] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (10.8.11)$$

La (10.8.11) è la **formula di diffrazione di Fresnel** per aperture bidimensionali.

10.9 - Diffrazione di Fresnel da un'apertura rettangolare

Sia $\vec{E}_i(x, y, z)$ il campo elettrico incidente sull'apertura. Esso si può scrivere:

$$\vec{E}_i(x, y, z) = (\hat{x}E_{0x} + \hat{y}E_{0y}) e^{-ikz + i\omega t} \quad \text{per } z < 0 \quad (10.9.1)$$

essendo E_{0x} ed E_{0y} le componenti del campo elettrico sull'apertura ossia per $z = 0$.

Sostituendo nella formula di diffrazione di Fresnel, si ha:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) = & \frac{i}{\lambda z} \exp(-ikz) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \hat{x}E_{0x}(\xi, \eta) + \hat{y}E_{0y}(\xi, \eta) - \right. \\ & \left. - \hat{z} \left[E_{0x}(\xi, \eta) \cdot \frac{x - \xi}{z} + E_{0y}(\xi, \eta) \cdot \frac{y - \eta}{z} \right] \right\} \cdot \exp \left[-ik \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z} \right] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (10.9.2)$$

ossia:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) = & \frac{i}{\lambda z} \exp(-ikz) \left\{ \hat{x}E_{0x} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-ik \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z} \right] d\xi d\eta + \right. \\ & + \hat{y}E_{0y} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-ik \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z} \right] d\xi d\eta - \\ & - \hat{z} \left[E_{0x} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x - \xi}{z} \exp \left[-ik \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z} \right] d\xi d\eta + \right. \\ & \left. \left. + E_{0y} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y - \eta}{z} \exp \left[-ik \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z} \right] d\xi d\eta \right] \right\} \end{aligned} \quad (10.9.3)$$

e, ancora:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) = & \frac{i}{\lambda z} \exp(-ikz) \left\{ \hat{x}E_{0x} \int_{-a/2}^{+a/2} \exp \left[-ik \frac{(x - \xi)^2}{2z} \right] d\xi \int_{-b/2}^{+b/2} \exp \left[-ik \frac{(y - \eta)^2}{2z} \right] d\eta + \right. \\ & + \hat{y}E_{0y} \int_{-a/2}^{+a/2} \exp \left[-ik \frac{(x - \xi)^2}{2z} \right] d\xi \int_{-b/2}^{+b/2} \exp \left[-ik \frac{(y - \eta)^2}{2z} \right] d\eta - \\ & - \hat{z} \left[E_{0x} \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{x - \xi}{z} \exp \left[-ik \frac{(x - \xi)^2}{2z} \right] d\xi \int_{-b/2}^{+b/2} \exp \left[-ik \frac{(y - \eta)^2}{2z} \right] d\eta + \right. \\ & \left. \left. + E_{0y} \int_{-a/2}^{+a/2} \exp \left[-ik \frac{(x - \xi)^2}{2z} \right] d\xi \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{y - \eta}{z} \exp \left[-ik \frac{(y - \eta)^2}{2z} \right] d\eta \right] \right\} \end{aligned} \quad (10.9.4)$$

Ora, si ha:

$$\int_{-a/2}^{+a/2} \frac{x - \xi}{z} \exp \left[-ik \frac{(x - \xi)^2}{2z} \right] d\xi = \frac{1}{ik} \left\{ \exp \left[-ik \frac{(x - a/2)^2}{2z} \right] - \exp \left[-ik \frac{(x + a/2)^2}{2z} \right] \right\} \quad (10.9.5)$$

$$\int_{-b/2}^{+b/2} \frac{y - \eta}{z} \exp \left[-ik \frac{(y - \eta)^2}{2z} \right] d\eta = \frac{1}{ik} \left\{ \exp \left[-ik \frac{(y - b/2)^2}{2z} \right] - \exp \left[-ik \frac{(y + b/2)^2}{2z} \right] \right\} \quad (10.9.6)$$

$$\int_{-a/2}^{+a/2} \exp \left[-ik \frac{(x - \xi)^2}{2z} \right] d\xi = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \left\{ \mathcal{F} \left[\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (x + a/2) \right] - i \mathcal{F} \left[\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (x - a/2) \right] \right\} \quad (10.9.7)$$

$$\int_{-b/2}^{+b/2} \exp \left[-ik \frac{(y - \eta)^2}{2z} \right] d\eta = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \left\{ \mathcal{F} \left[\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (y + b/2) \right] - i \mathcal{F} \left[\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (y - b/2) \right] \right\} \quad (10.9.8)$$

Quindi il campo elettrico diffratto risulta:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) = & e^{-ikz + i\omega t} \left\{ \frac{i}{2} (\hat{x}E_{0x} + \hat{y}E_{0y}) \cdot \right. \\ & \cdot \left[\mathcal{F} \left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (x + a/2) \right) - \mathcal{F} \left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (x - a/2) \right) \right] \cdot \\ & \cdot \left[\mathcal{F} \left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (y + b/2) \right) - \mathcal{F} \left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (y - b/2) \right) \right] - \\ & - \hat{z} \sqrt{\frac{\lambda}{2z}} \frac{1}{2\pi} \left\{ E_{0x} \left[\mathcal{F} \left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (y + b/2) \right) - \mathcal{F} \left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (y - b/2) \right) \right] \cdot \right. \quad (10.9.9) \\ & \cdot \left(\exp \left[-ik \frac{(x - a/2)^2}{2z} \right] - \exp \left[-ik \frac{(x + a/2)^2}{2z} \right] \right) + \\ & + E_{0y} \left[\mathcal{F} \left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (y + b/2) \right) - \mathcal{F} \left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (y - b/2) \right) \right] \cdot \\ & \left. \left. \cdot \left(\exp \left[-ik \frac{(y - b/2)^2}{2z} \right] - \exp \left[-ik \frac{(y + b/2)^2}{2z} \right] \right) \right\} \right\} \end{aligned}$$

La componente del vettore di Poynting lungo l'asse z é:

$$\begin{aligned} S_z = & \frac{1}{8Z} (E_{0x}^2 + E_{0y}^2) \left| \mathcal{F} \left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (x + a/2) \right) - \mathcal{F} \left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (x - a/2) \right) \right|^2 \cdot \\ & \cdot \left| \mathcal{F} \left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (y + b/2) \right) - \mathcal{F} \left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (y - b/2) \right) \right|^2 \quad (10.9.10) \end{aligned}$$

Figure di diffrazione di Fresnel da fenditura rettangolare ($y = 0$)

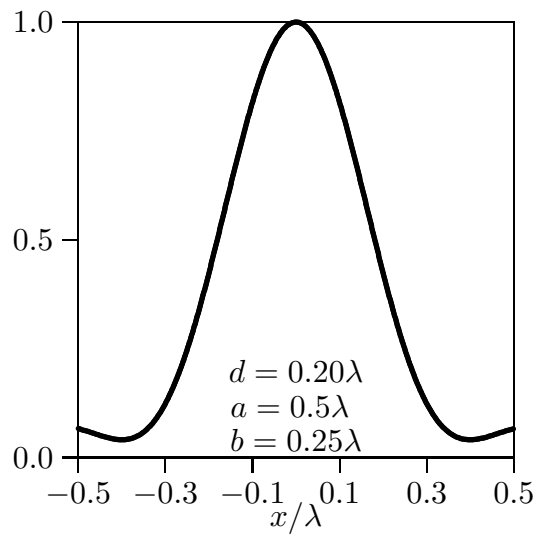
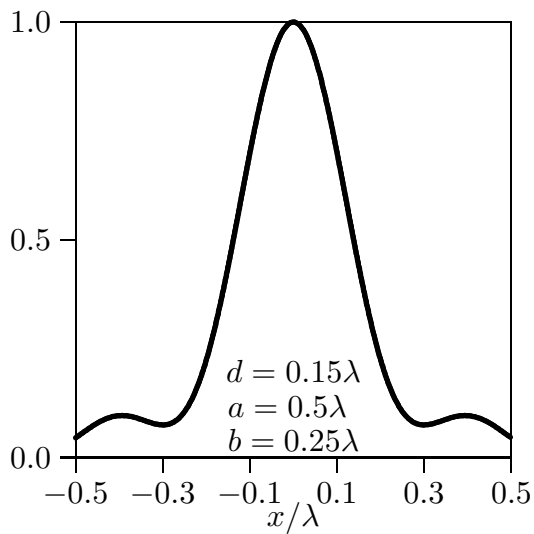
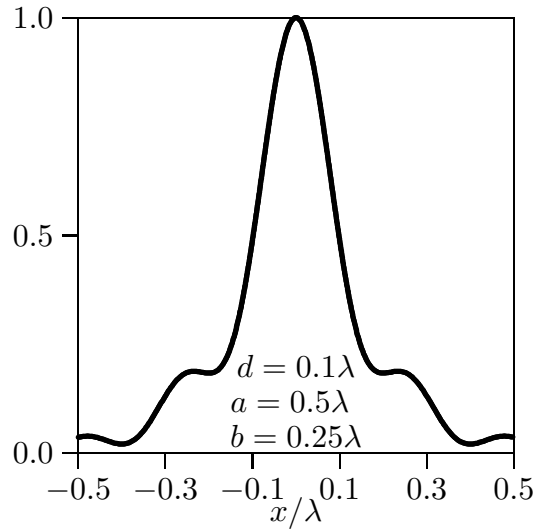
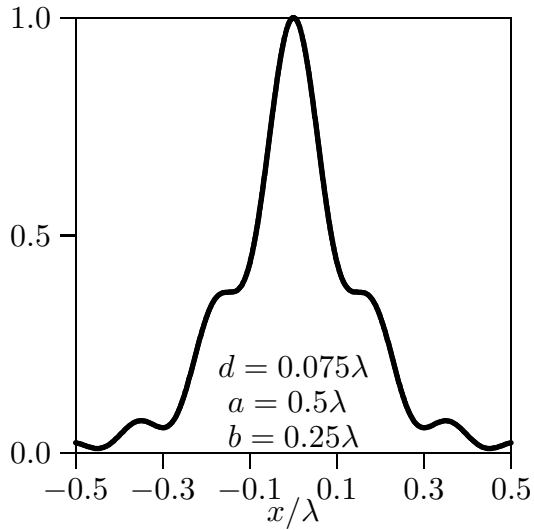
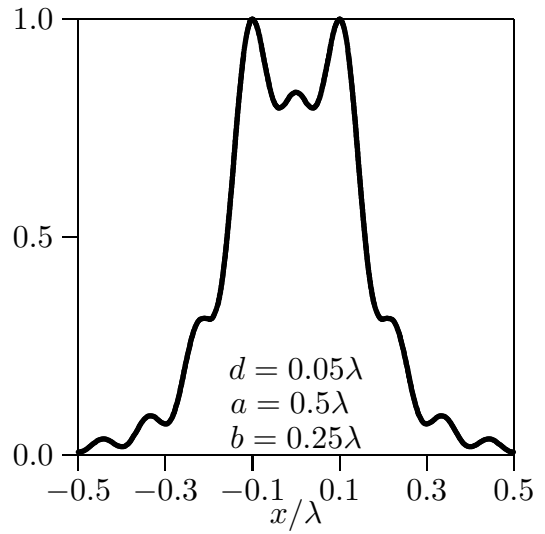
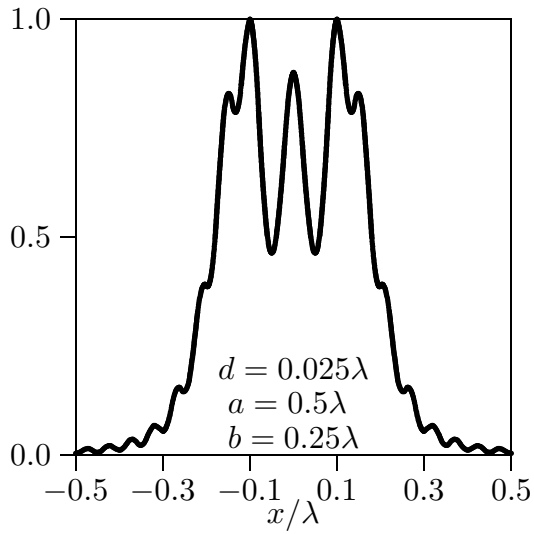


Figure di diffrazione di Fresnel da fenditura rettangolare ($y = 0$)

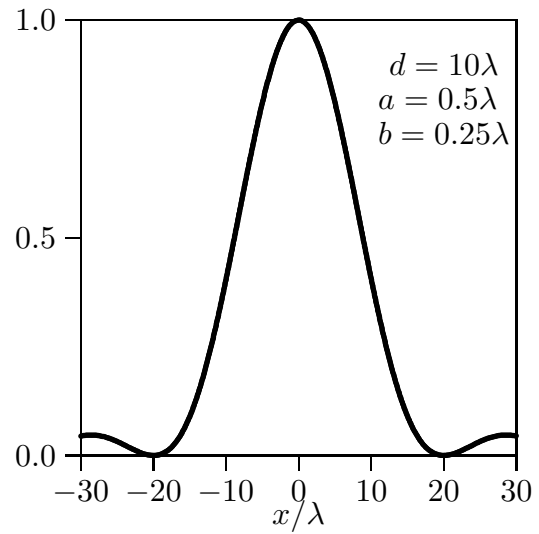
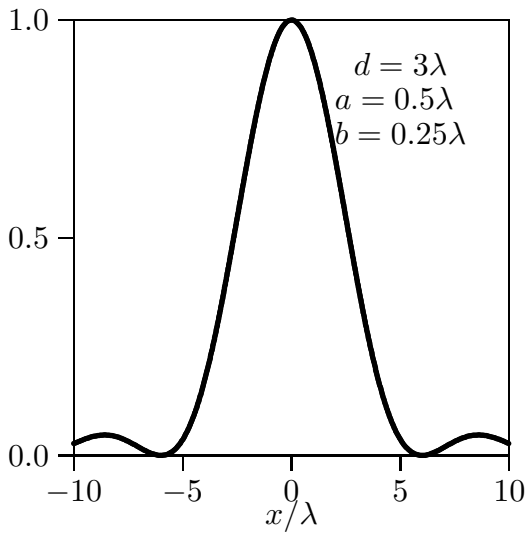
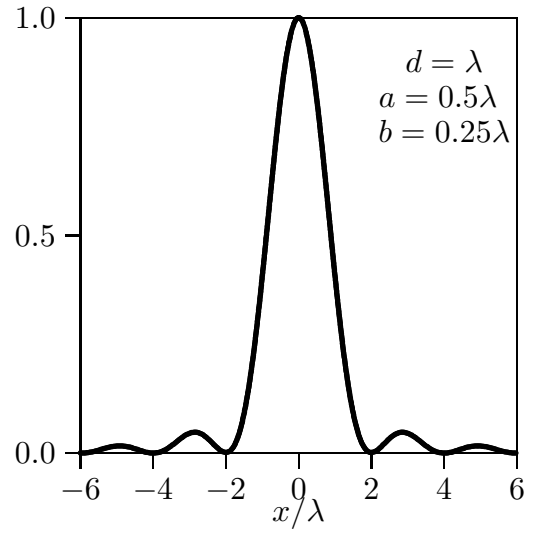
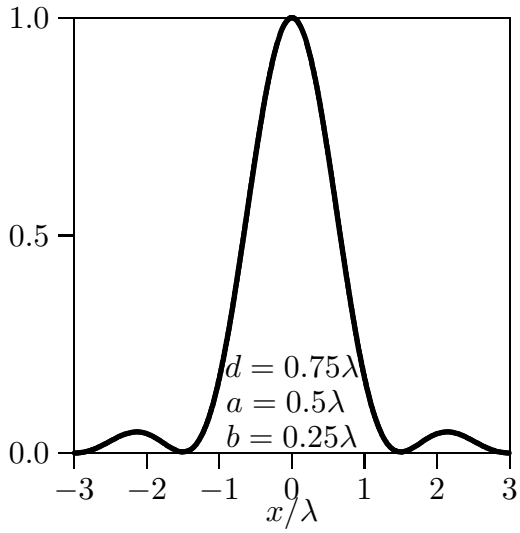
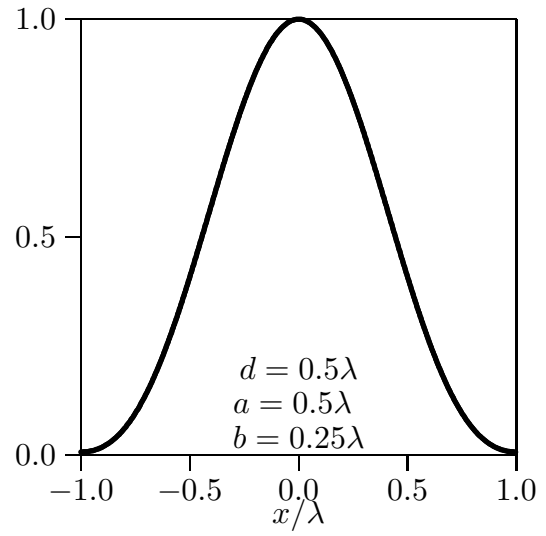
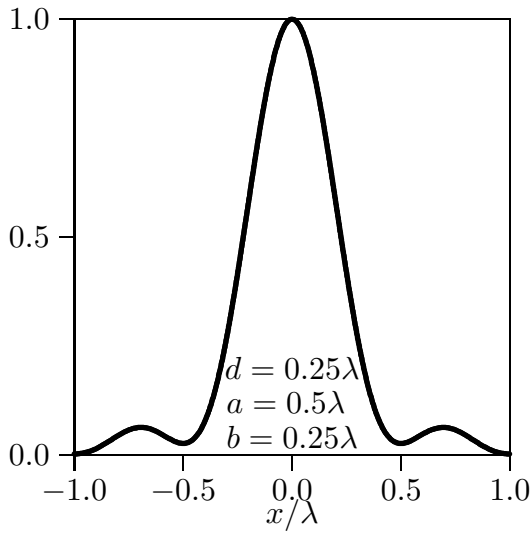


Figure di diffrazione di Fresnel da fenditura rettangolare ($x = 0$)

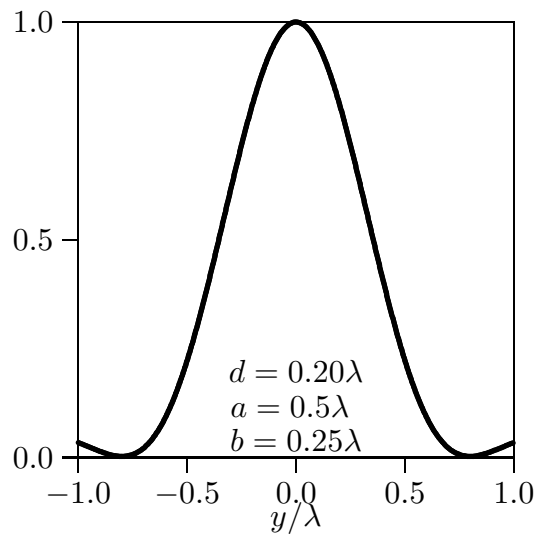
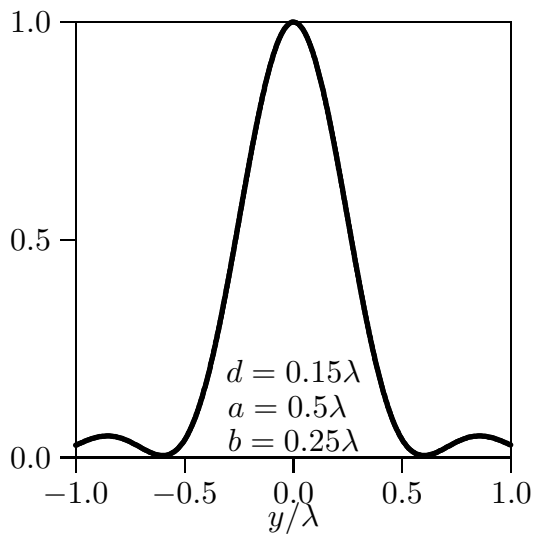
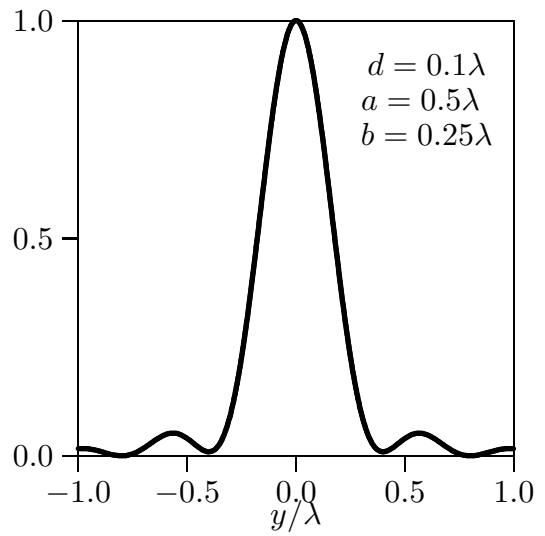
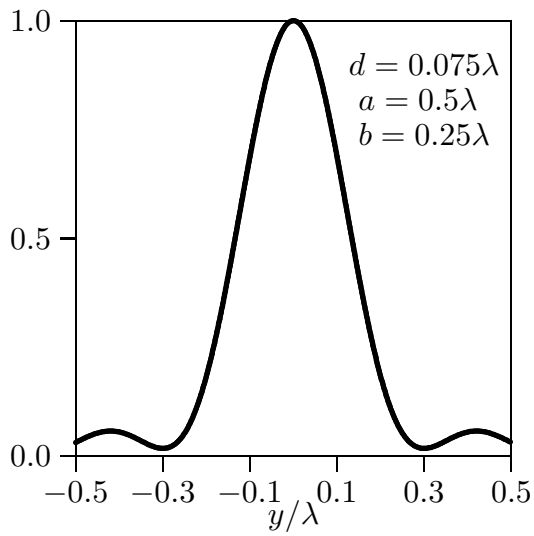
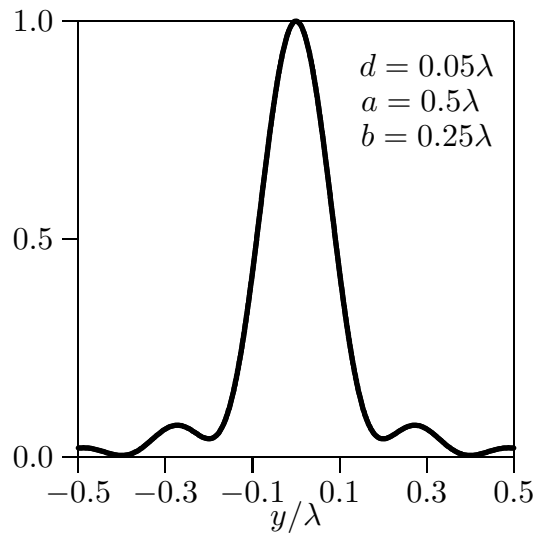
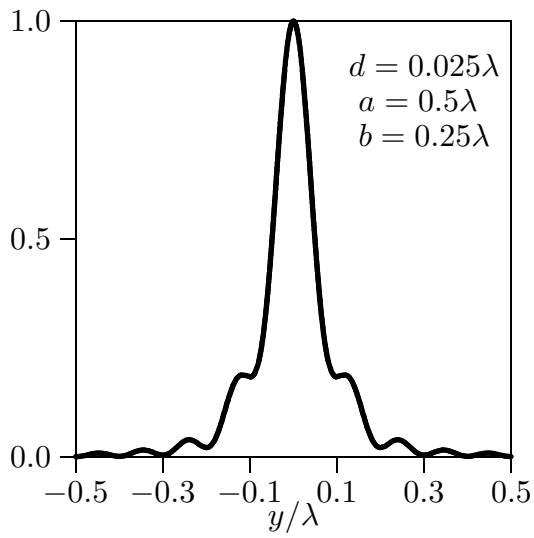
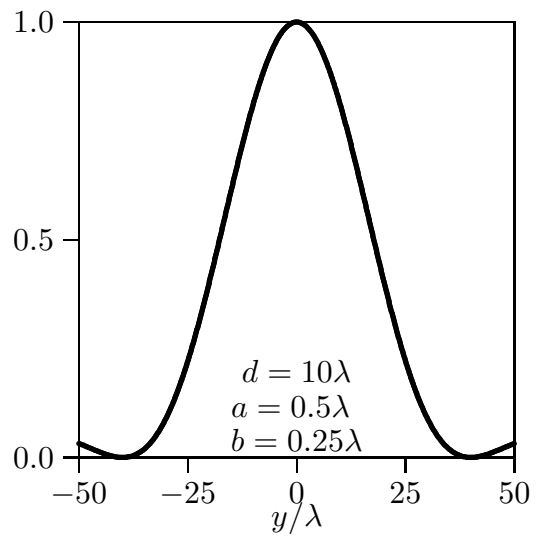
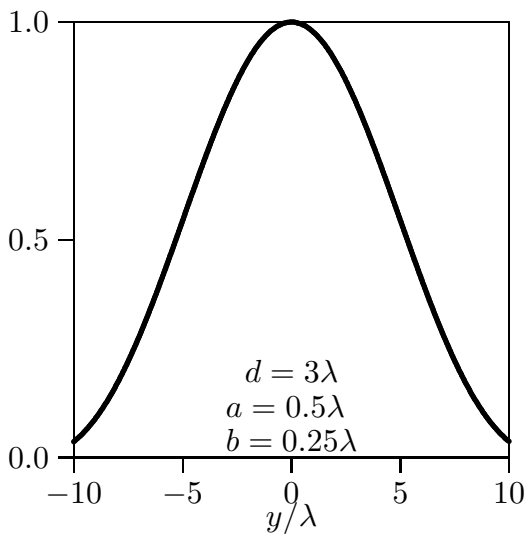
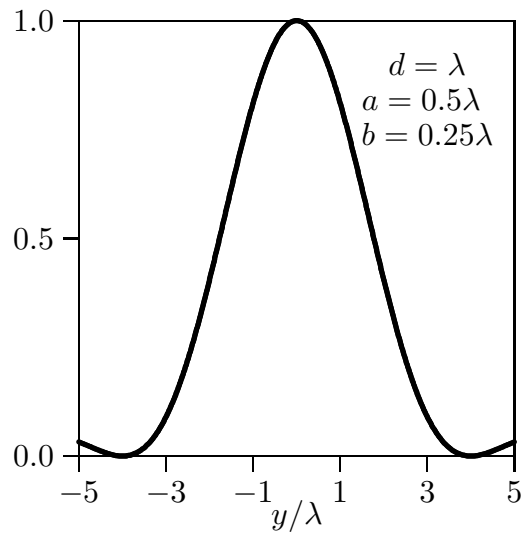
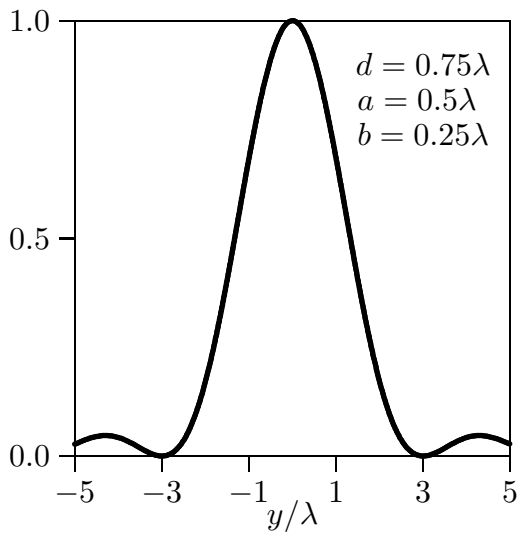
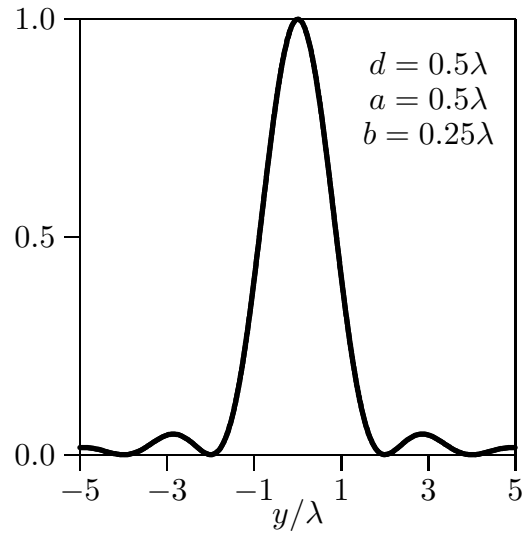
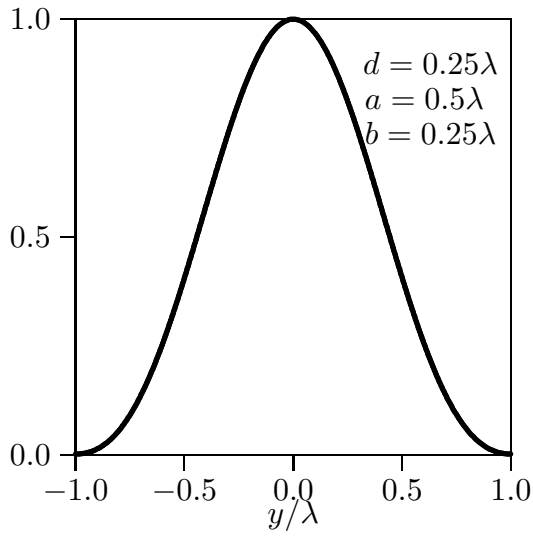
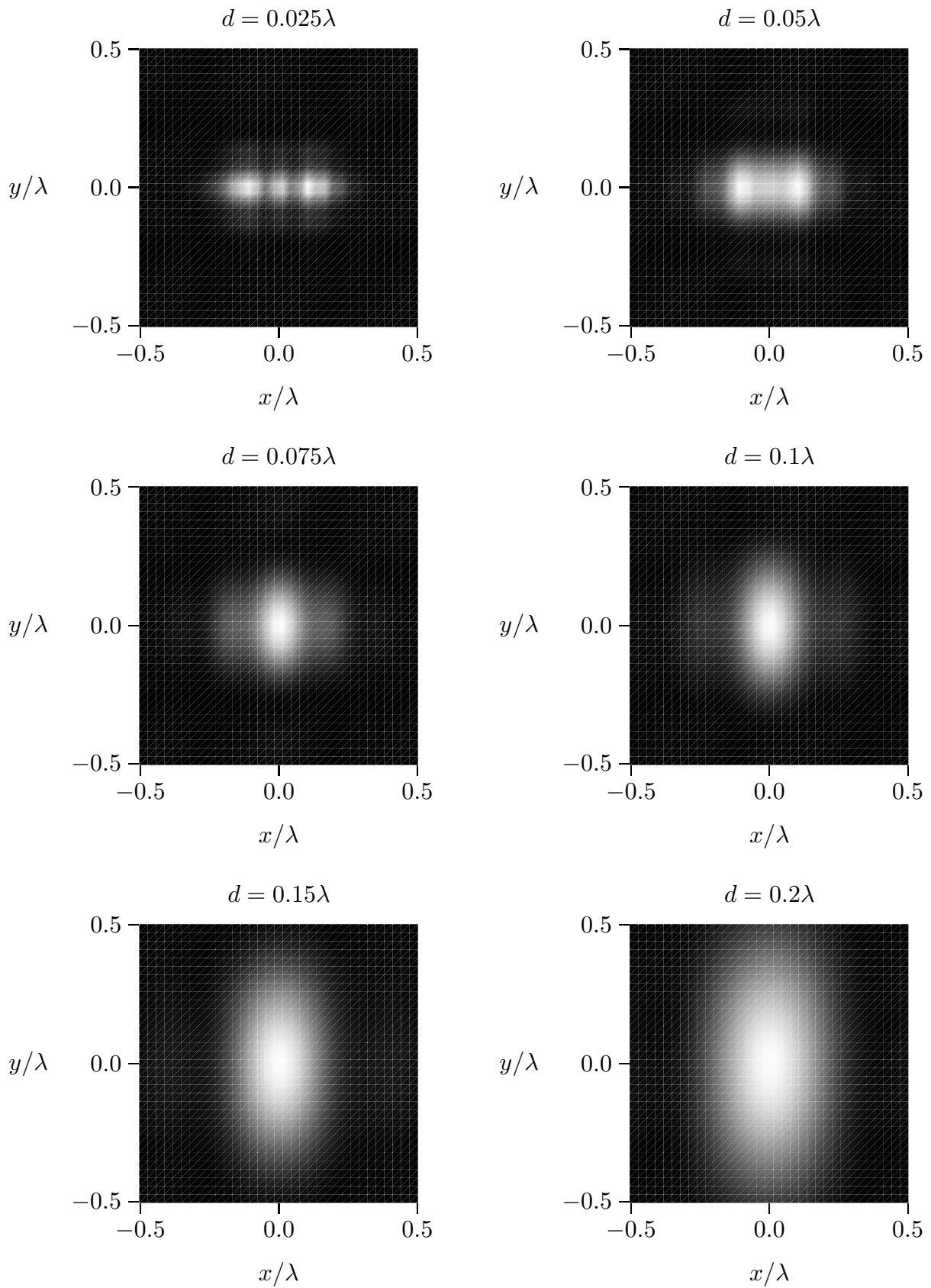
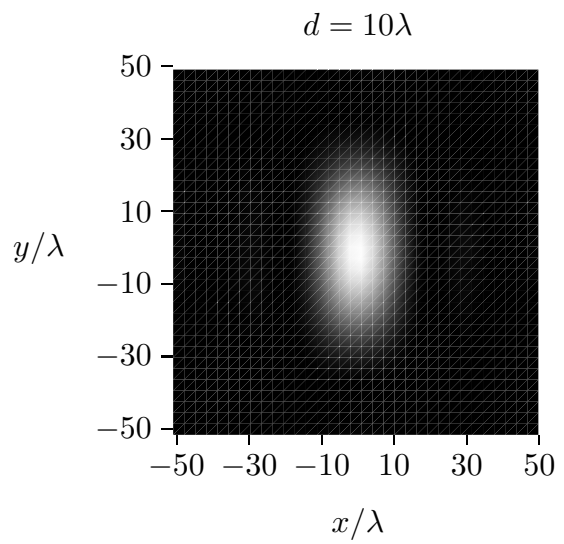
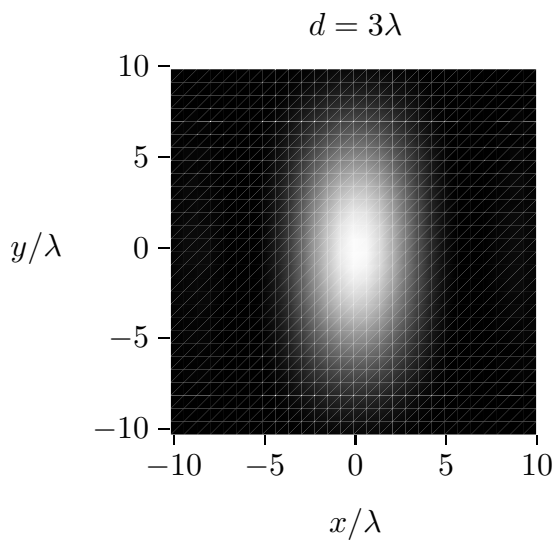
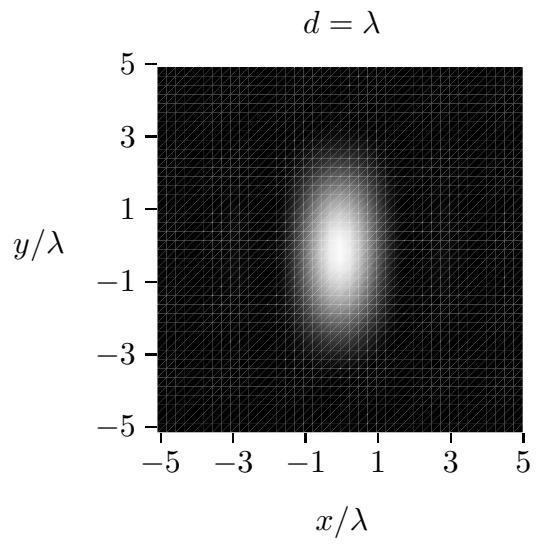
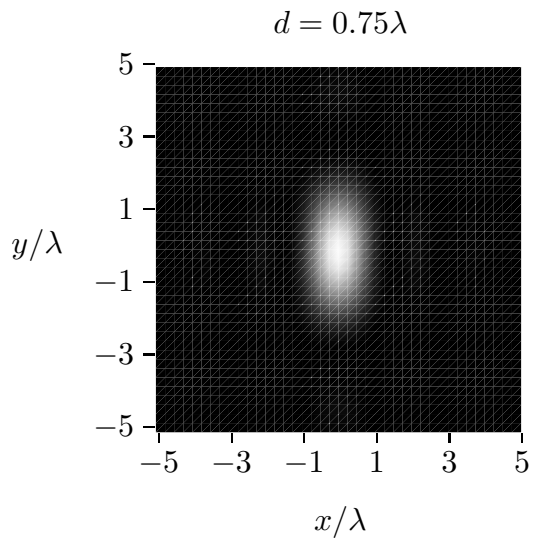
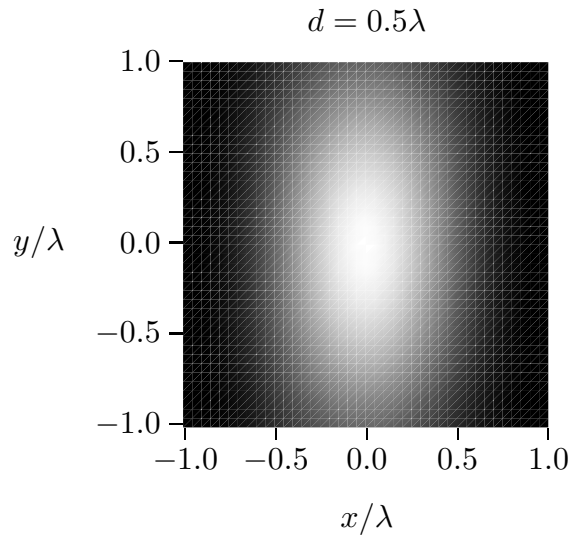
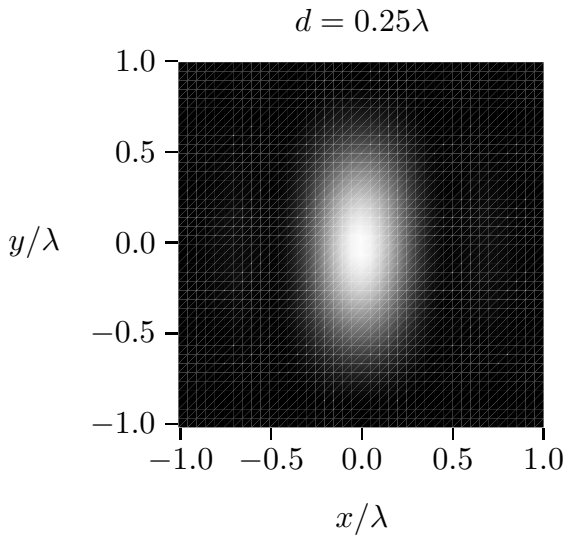


Figure di diffrazione di Fresnel da fenditura rettangolare ($x = 0$)



Diffrazione da fenditura rettangolare ($a = 0.5\lambda$ $b = 0.25\lambda$)

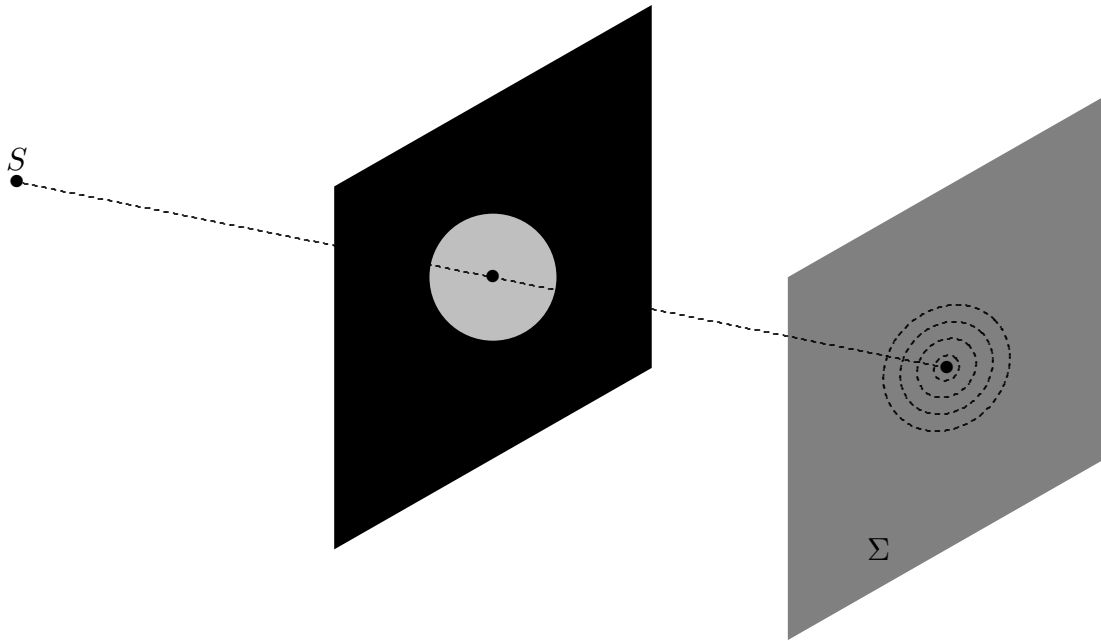




Programma in ambiente Matlab 'diff_aper_rett.m'

```
%%% Diffrazione da apertura rettangolare %%%
delete(get(0,'children'));
lambda=1;
%%% Dimensioni della fenditura %%%
a=0.5.*lambda;
b=0.25.*lambda;
%%%%%%%% Parametro da modificare %%%%%%%%%
%%% distanza dallo schermo tagliato %%%
d=0.20.*lambda;
%%%%%%%%
LZ=d.*lambda; AA=sqrt(2./LZ);
Ris1=0.03; %% parametro di nitidezza%%
[X,Y] = meshgrid([-0.5:Ris1:0.5]);
uap=(X+a./2).*AA; ubp=(Y+b./2).*AA; uam=(X-a./2).*AA;
ubm=(Y-b./2).*AA;
Cuap=mfun('FresnelC',uap); Suap=mfun('FresnelS',uap);
Cuam=mfun('FresnelC',uam); Suam=mfun('FresnelS',uam);
Cubp=mfun('FresnelC',ubp); Subp=mfun('FresnelS',ubp);
Cubm=mfun('FresnelC',ubm); Subm=mfun('FresnelS',ubm);
Z = (((Cuap - Cuam).^2)+((Suap-Suam).^2))...
.*(((Cubp-Cubm).^2)+((Subp-Subm).^2));
pcolor(Z); %per ottenere graf 3D usare surf o surfl
shading interp;
axis off
colormap(gray(1000));
axis square axis equal axis('off')
%set(gca,'fontsize',24);
print('-depsc','diffaperturarett020')
```

10.10 - Diffrazione di Fresnel da un'apertura circolare



Sia $\vec{E}_i(x, y, z)$ il campo elettrico incidente sull'apertura. Esso si può scrivere:

$$\vec{E}_i(x, y, z) = (\hat{x}E_{0x} + \hat{y}E_{0y}) e^{-ikz + i\omega t} \quad \text{per } z < 0 \quad (10.10.1)$$

essendo E_{0x} ed E_{0y} le componenti del campo elettrico sull'apertura ossia per $z = 0$.

Sostituendo nella formula di diffrazione di Fresnel, si ha:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) = & \frac{i}{\lambda z} \exp(-ikz) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \hat{x}E_{0x}(\xi, \eta) + \hat{y}E_{0y}(\xi, \eta) - \right. \\ & \left. - \hat{z} \left[E_{0x}(\xi, \eta) \cdot \frac{x - \xi}{z} + E_{0y}(\xi, \eta) \cdot \frac{y - \eta}{z} \right] \right\} \cdot \exp \left[-ik \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z} \right] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (10.10.2)$$

In coordinate polari si ha:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) = & \frac{i}{\lambda z} \exp(-ikz) \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ \hat{x}E_{0x} + \hat{y}E_{0y} - \right. \\ & \left. - \hat{z} \left[E_{0x} \frac{x - \rho \cos \psi}{z} + E_{0y} \frac{y - \rho \sin \psi}{z} \right] \right\} \cdot \exp \left[-ik \frac{(x - \rho \cos \psi)^2 + (y - \rho \sin \psi)^2}{2z} \right] \rho d\psi d\rho \end{aligned} \quad (10.10.3)$$

essendo E_{0x} ed E_{0y} funzioni di ρ e di ψ .

La (10.10.3) si può anche scrivere:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) = & \frac{i}{\lambda z} \exp(-ikz) \left\{ (\hat{x}E_{0x} + \hat{y}E_{0y}) \cdot \right. \\ & \cdot \int_0^a \int_0^{2\pi} \exp \left[-ik \frac{(x - \rho \cos \psi)^2 + (y - \rho \sin \psi)^2}{2z} \right] \rho d\psi d\rho - \\ & - \hat{z} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[\left(E_{0x} \frac{x - \rho \cos \psi}{z} + E_{0y} \frac{y - \rho \sin \psi}{z} \right) \cdot \right. \\ & \cdot \exp \left[-ik \frac{(x - \rho \cos \psi)^2 + (y - \rho \sin \psi)^2}{2z} \right] \rho d\psi d\rho \left. \right\} \end{aligned} \quad (10.10.4)$$

Si ha:

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^{2\pi} \exp \left[-ik \frac{(x - \rho \cos \psi)^2 + (y - \rho \sin \psi)^2}{2z} \right] \rho d\psi d\rho = \\ & = \int_0^a \int_0^{2\pi} \exp \left[-ik \frac{(r \sin \theta \cos \phi - \rho \cos \psi)^2 + (r \sin \theta \sin \phi - \rho \sin \psi)^2}{2z} \right] \rho d\psi d\rho = \\ & = \int_0^a \int_0^{2\pi} \exp \left[-ik \frac{r^2 \sin^2 \theta + \rho^2 - 2r\rho \sin \theta \cos(\phi - \psi)}{2z} \right] \rho d\psi d\rho = \\ & = \exp \left[-ik \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2z} \right] \int_0^a \int_0^{2\pi} \exp \left[-ik \frac{\rho^2 - 2r\rho \sin \theta \cos(\phi - \psi)}{2z} \right] \rho d\psi d\rho = \\ & = \exp \left[-ik \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2z} \right] \int_0^a d\rho \int_0^{2\pi} \rho \exp \left[-ik \frac{\rho^2}{2z} \right] \exp \left[ik \frac{r\rho \sin \theta \cos(\phi - \psi)}{z} \right] d\psi \end{aligned} \quad (10.10.5)$$

Si ha:

$$\int_0^{2\pi} \rho \exp \left[-ik \frac{\rho^2}{2z} \right] \exp \left[ik \frac{r\rho \sin \theta \cos(\phi - \psi)}{z} \right] d\psi = \rho \exp \left[-ik \frac{\rho^2}{2z} \right] 2\pi J_0 \left(k\rho \frac{r}{z} \sin \theta \right) \quad (10.10.6)$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^{2\pi} \exp \left[-ik \frac{(x - \rho \cos \psi)^2 + (y - \rho \sin \psi)^2}{2z} \right] \rho d\psi d\rho = \\ & = \exp \left[-ik \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2z} \right] \int_0^a \rho \exp \left[-ik \frac{\rho^2}{2z} \right] 2\pi J_0 \left(k\rho \frac{r}{z} \sin \theta \right) d\rho \end{aligned} \quad (10.10.7)$$

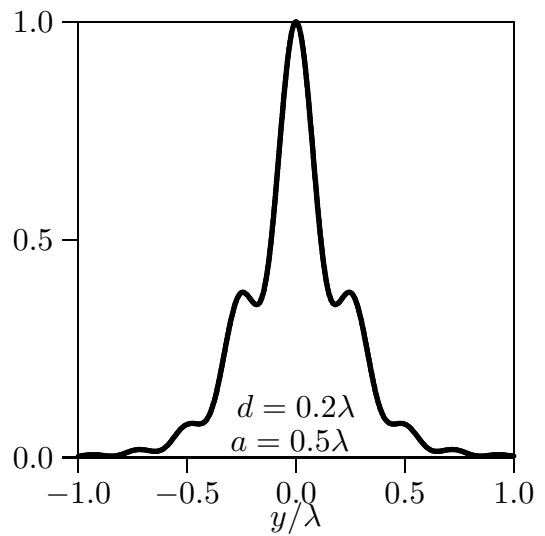
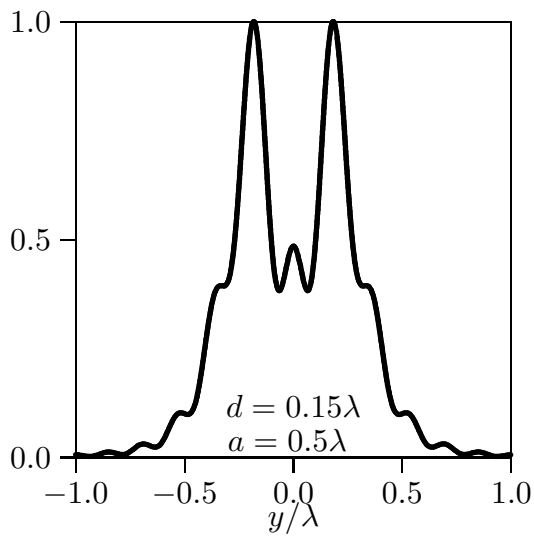
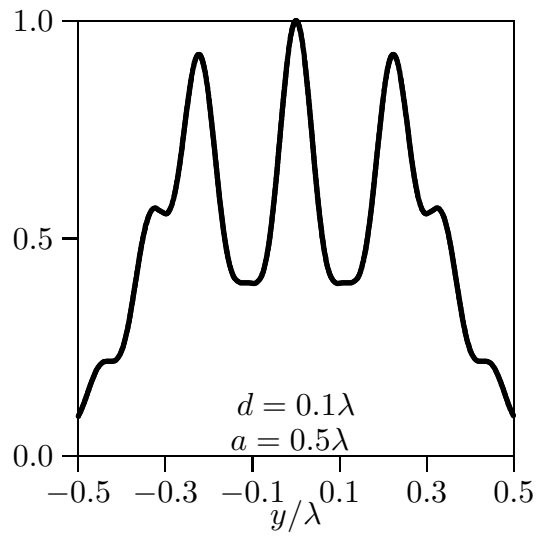
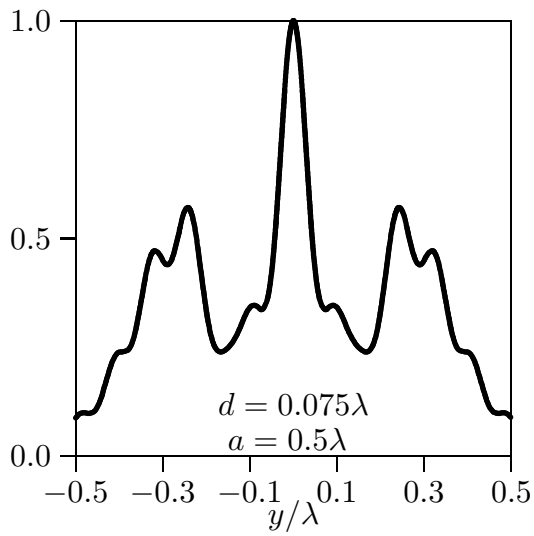
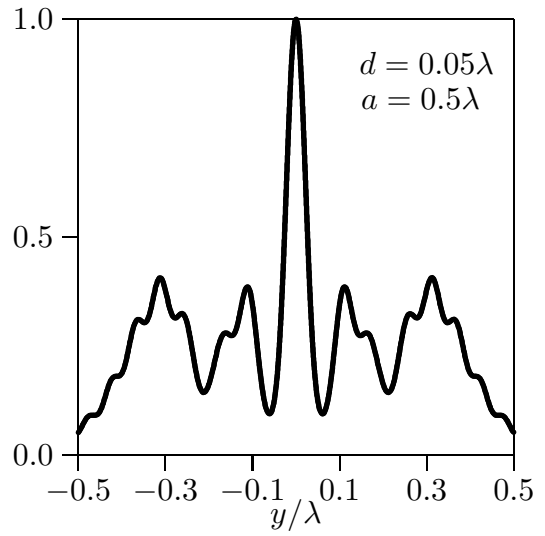
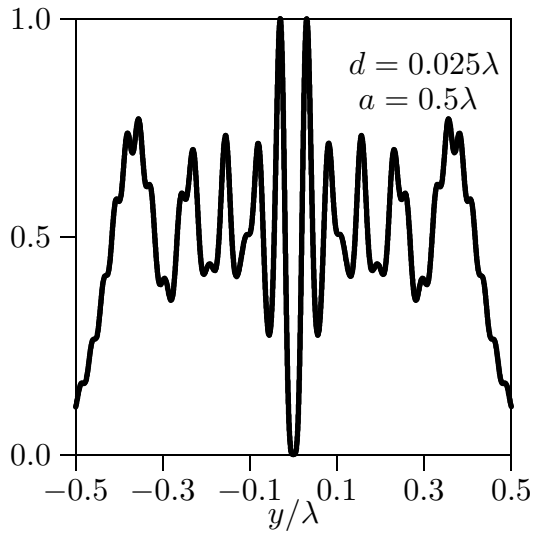
Allora il campo trasversale alla direzione di propagazione é:

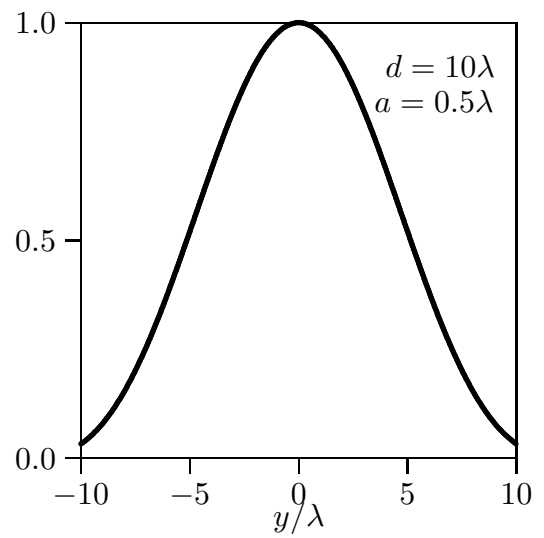
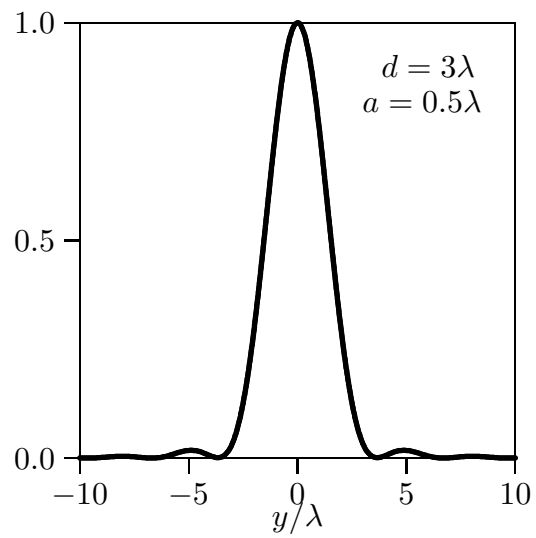
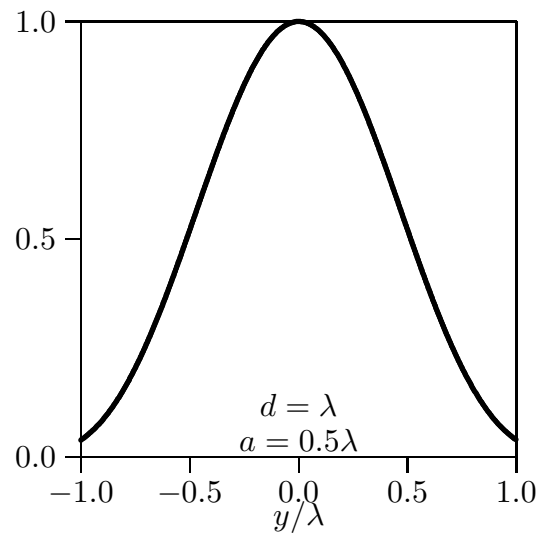
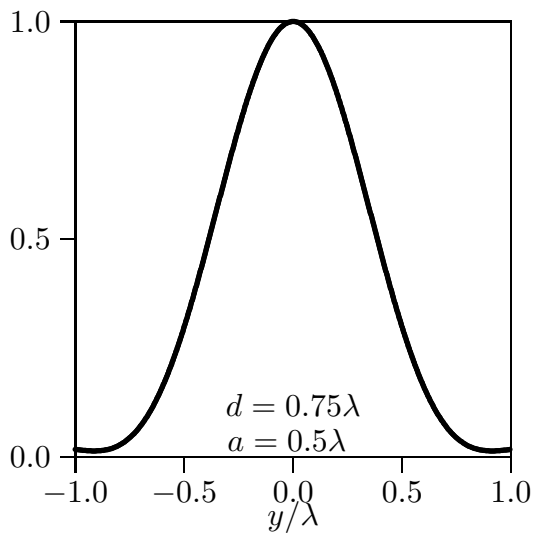
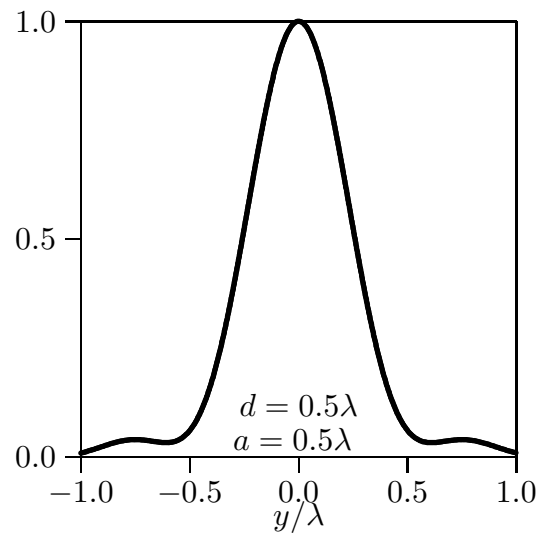
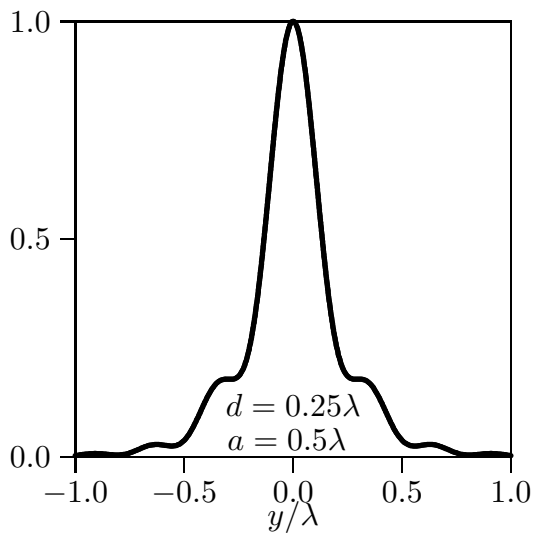
$$\begin{aligned} \vec{E}_t(x, y, z) = & \frac{i}{\lambda z} (\hat{x}E_{0x} + \hat{y}E_{0y}) e^{-ikz + i\omega t} \exp \left[-ik \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2z} \right] \cdot \\ & \cdot \int_0^a \rho \exp \left[-ik \frac{\rho^2}{2z} \right] 2\pi J_0 \left(k\rho \frac{r}{z} \sin \theta \right) d\rho \end{aligned} \quad (10.10.8)$$

La componente del vettore di Poynting lungo l'asse z é:

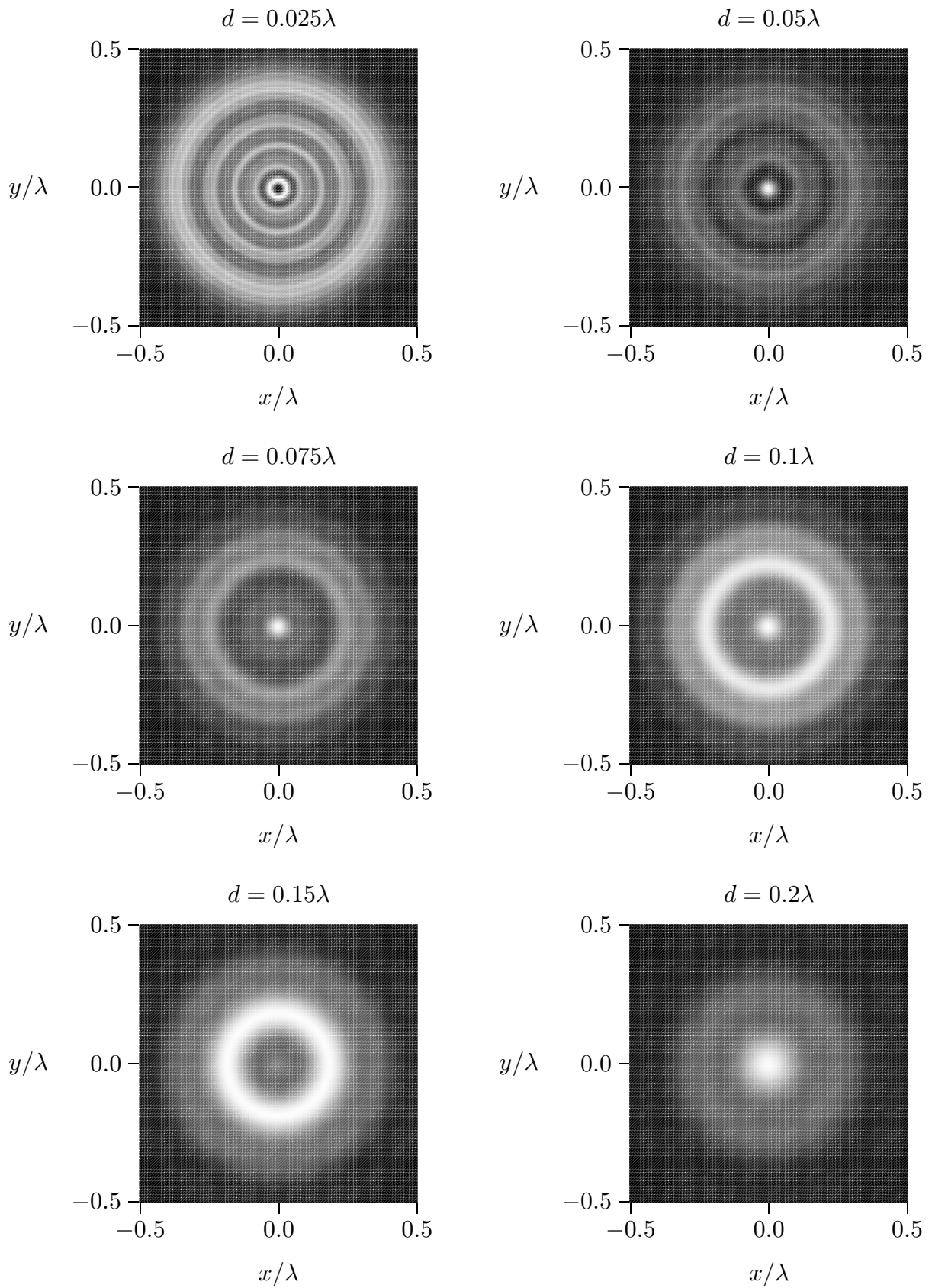
$$S_z = \frac{1}{2Z} (E_{0x}^2 + E_{0y}^2) \frac{1}{z^2 \lambda^2} \left| \int_0^a \rho \exp \left[-ik \frac{\rho^2}{2z} \right] 2\pi J_0 \left(k\rho \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) d\rho \right|^2 \quad (10.10.9)$$

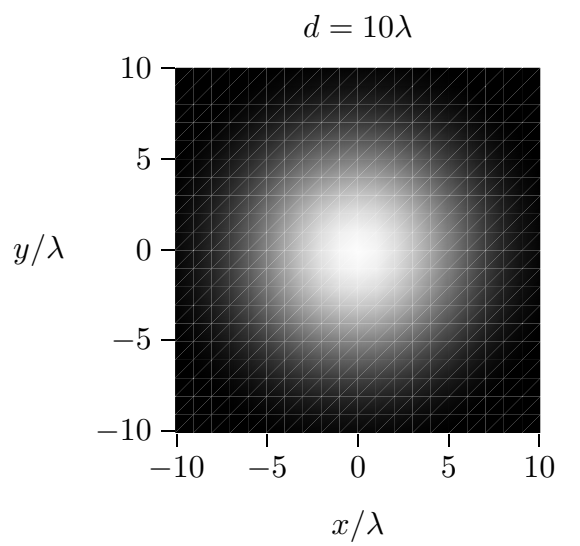
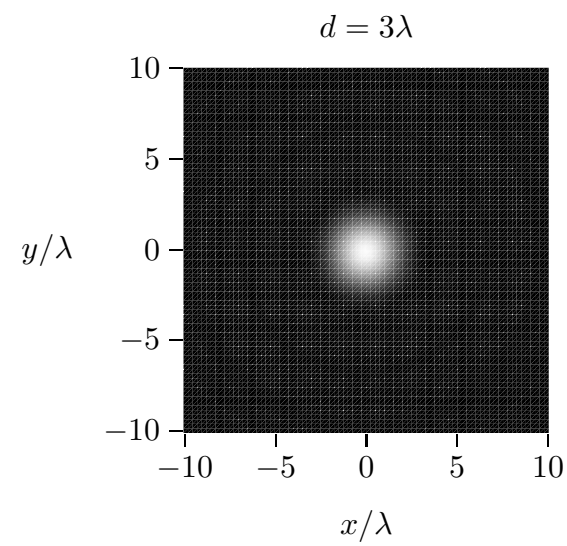
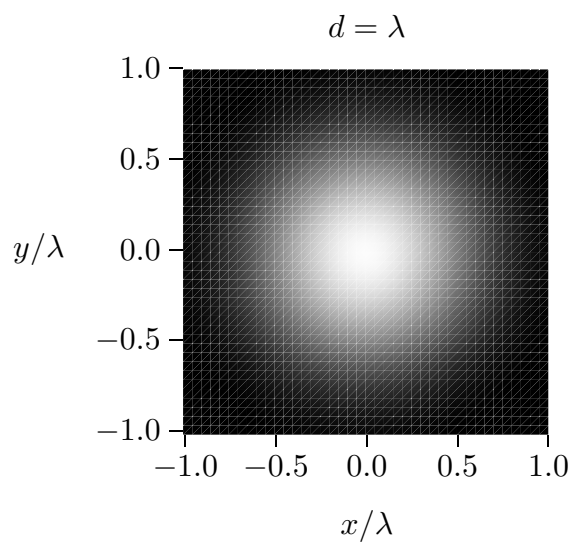
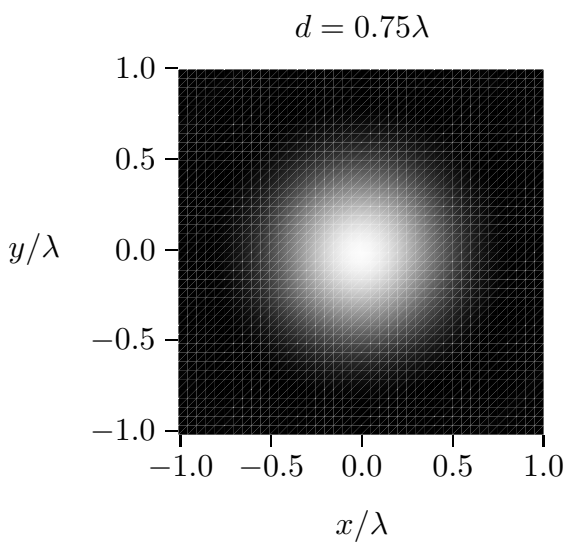
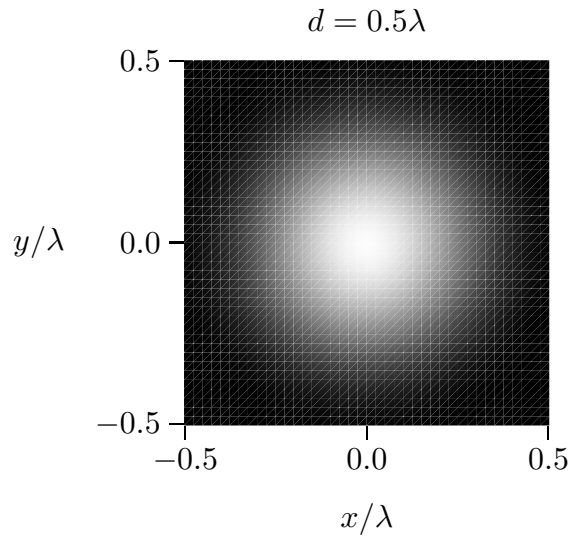
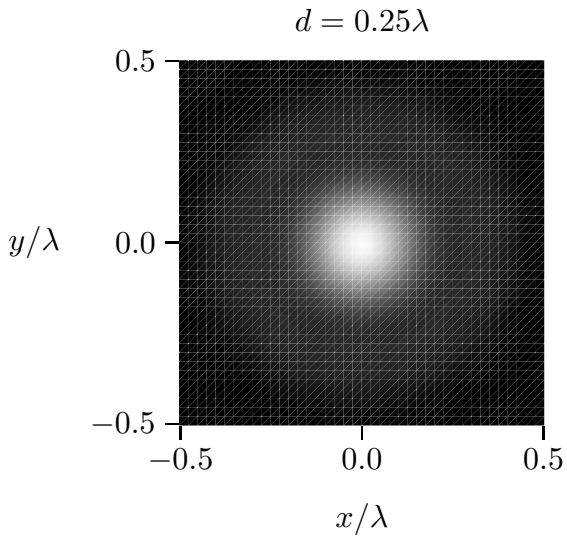
Figure di diffrazione di Fresnel da fenditura circolare ($x = 0$)





Diffrazione di Fresnel da fenditura circolare ($a = 0.5\lambda$)



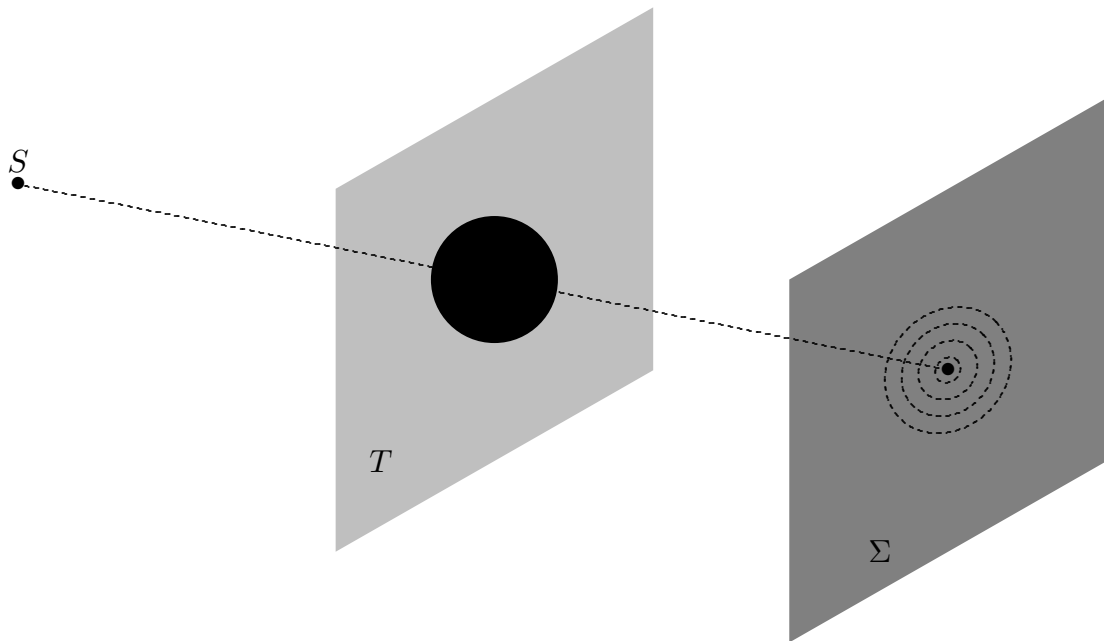


Programma in ambiente Matlab 'diff_aper_circ.m'

```
01 - %%%%%Diffrazione da apertura circolare %%%%%
02 - delete(get(0,'children'));
03 - lambda=1;
04 - %Dimensioni della fenditura%
05 - a=0.5.*lambda;
06 - %%%Parametro da modificare%%
07 - %%%distanza dallo schermo tagliato%%
08 - d=0.5.*lambda;
09 - %%% costanti %%%
10 - LZ=d.*lambda;
11 - %AA=sqrt(2./LZ)
12 - k4=(2.*pi)./LZ;
13 - k2=k4.^2;
14 - k3=pi./LZ;
15 - Zo=377;
16 - k1=1./(2.*Zo);
17 - Eox=1;
18 - Ris1=0.007; %%% parametro di nitidezza%%
19 - [X,Y] = meshgrid([-0.5:Ris1:0.5]);
20 - %%% Integrazione %%%
21 - Ris=1000; %precisione di integrazione
22 - for k=1:Ris+1
23 - r(k)=0+(k-1).*((a-0)./Ris);
24 - end
25 - ReI=0;
26 - ImI=0;
27 - for j = 2:Ris+1
28 - ReI=ReI+(r(j).*(cos(k3.*(r(j).^2)).*...
29 - bessell(0,k4.*r(j).*sqrt(X.^2+Y.^2))).*...
30 - (r(j)-r(j-1)));
31 - ImI=ImI+(r(j).*(sin(k3.*(r(j).^2)).*
32 - bessell(0,k4.*r(j).*sqrt(X.^2+Y.^2))).*...
33 - (r(j)-r(j-1)));
34 - end
35 - Z=k1.*(Eox.^2).*k2.*(ReI.^2+ImI.^2);
36 - %pcolor(Z); %per ottenere graf 3D usare surf o surfl
37 - pcolor(X,Y,Z);
38 - %surfl(Z);
39 - shading interp ; %flat , interp
40 - colormap(gray(1000))
41 - Zmin = min(Z);
42 - ZZmin = min(Zmin);
```

```
43 - Zmax = max(Z);
44 - ZZmax = max(Zmax);
45 - %set(gca,'fontsize',24);
46 - %axis square
47 - axis equal axis('off')
48 - %set(gca,'fontsize',24);
49 -
50 -
51 -
52 - print('-depsec','diffaperturacirc050')
```

10.11 - Diffrazione di Fresnel da un disco circolare



Sia $\vec{E}_i(x, y, z)$ il campo elettrico incidente sull'apertura. Esso si può scrivere:

$$\vec{E}_i(x, y, z) = (\hat{x}E_{0x} + \hat{y}E_{0y}) e^{-ikz + i\omega t} \quad \text{per } z < 0 \quad (10.11.1)$$

essendo E_{0x} ed E_{0y} le componenti del campo elettrico sull'apertura ossia per $z = 0$.

Facendo considerazioni analoghe al caso di diffrazione da apertura circolare, si ha:

$$\begin{aligned} \vec{E}_t(x, y, z) = & \frac{i}{\lambda z} 2\pi (\hat{x}E_{0x} + \hat{y}E_{0y}) e^{-ikz + i\omega t} \exp \left[-ik \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2z} \right] \cdot \\ & \cdot \int_a^{+\infty} \rho \exp \left[-ik \frac{\rho^2}{2z} \right] 2\pi J_0 \left(k\rho \frac{r}{z} \sin \theta \right) d\rho \end{aligned} \quad (10.11.2)$$

La componente del vettore di Poynting lungo l'asse z é:

$$\begin{aligned} S_z = & \frac{1}{8Z} (E_{0x}^2 + E_{0y}^2) \frac{4\pi}{z^2 \lambda^2} \left| \int_0^{+\infty} \rho \exp \left[-ik \frac{\rho^2}{2z} \right] 2\pi J_0 \left(k\rho \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) d\rho - \right. \\ & \left. - \int_0^a \rho \exp \left[-ik \frac{\rho^2}{2z} \right] 2\pi J_0 \left(k\rho \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) d\rho \right|^2 \end{aligned} \quad (10.11.3)$$

L'integrale

$$\int_0^{+\infty} \rho \exp \left[-ik \frac{\rho^2}{2z} \right] 2\pi J_0 \left(k\rho \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) d\rho \quad (10.11.4)$$

é tabulato. Infatti, posto $\rho = t$, $a = k \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$, $p^2 = ik \frac{1}{2z}$, l'integrale (10.11.4) si scrive (a meno di 2π)¹⁾:

$$\int_0^\infty J_0(at) \exp(-p^2 t^2) \cdot t dt = \frac{1}{2p^2} \exp\left(-\frac{a^2}{4p^2}\right) \quad (10.11.5)$$

L'integrale (10.11.5) é sempre convergente se:

$$|\arg(p)| < \frac{\pi}{4} \quad (10.11.6)$$

qualunque sia a .

Per verificare se nel nostro caso l'integrale converge, poniamo:

$$p = f + ig \quad \text{ossia} \quad p^2 = f^2 - g^2 + 2ifg = \frac{ik}{2z} \quad \arg(p) = \arctan\left(\frac{g}{f}\right) \quad (10.11.7)$$

Dalla (10.11.7) si deduce che se k é un numero reale ne segue che $f = g$ e quindi $\arg(p) = \frac{\pi}{4}$. L'integrale (10.11.5) non converge.

Poniamo allora $k = \beta + i\alpha$; si ha:

$$p^2 = f^2 - g^2 + 2ifg = \frac{i\beta - \alpha}{2z} \quad (10.11.8)$$

ossia:

$$\begin{cases} f^2 - g^2 = -\frac{\alpha}{2z} \\ fg = \frac{\beta}{4z} \end{cases} \quad (10.11.9)$$

Dividendo membro a membro:

$$\frac{f}{g} - \frac{g}{f} = -2\frac{\alpha}{\beta} \quad (10.11.10)$$

Moltiplicando ambo i membri per $\frac{f}{g}$, si ottiene:

$$\frac{f^2}{g^2} + 2\frac{\alpha}{\beta} \frac{f}{g} - 1 = 0 \quad (10.11.11)$$

da cui:

$$\frac{f}{g} = -\frac{\alpha}{\beta} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1} \quad (10.11.12)$$

¹⁾ G. N. Watson: A Treatise on the Theory of Bessel Functions - Cambridge University Press, 1966 - Second Edition, pag 393, n. 13.3.

Moltiplicando entrambi i membri per la seconda equazione della (10.11.9), si ottiene:

$$f^2 = -\frac{\alpha}{4z} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{16z^2} + \frac{\beta^2}{16z^2}} \quad (10.11.13)$$

$$g^2 = \frac{\alpha}{4z} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{16z^2} + \frac{\beta^2}{16z^2}} \quad (10.11.14)$$

Poiché f e g sono numeri reali le (10.11.13) e (10.11.14) devono prendersi con il segno +:

$$f^2 = -\frac{\alpha}{4z} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{16z^2} + \frac{\beta^2}{16z^2}} \quad (10.11.15)$$

$$g^2 = \frac{\alpha}{4z} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{16z^2} + \frac{\beta^2}{16z^2}} \quad (10.11.16)$$

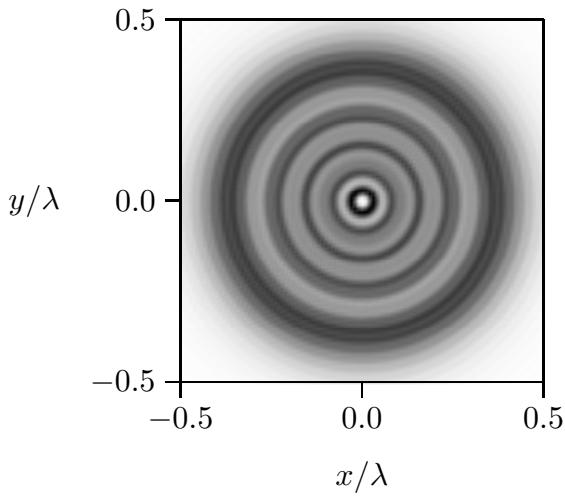
É immediato osservare che g é sempre maggiore di f , quindi $\arctan\left(\frac{g}{f}\right)$ é sempre maggiore di $\frac{\pi}{4}$ (o minore di $-\frac{\pi}{4}$), quindi l'integrale (10.11.5) non converge. Tuttavia, poiché siamo nella regione di Fresnel la formula puó essere usata.

Pertanto il risultato dell'integrale (10.11.4) é:

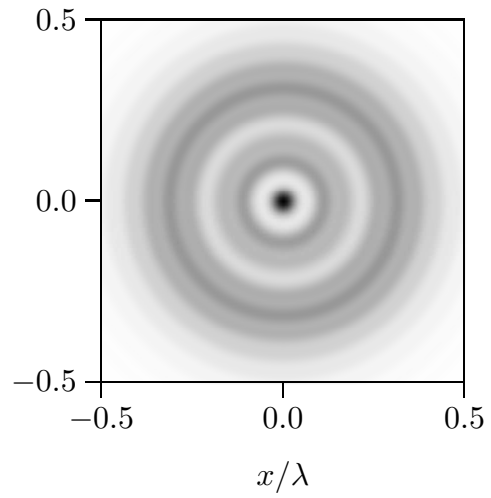
$$\int_0^{+\infty} \rho \exp\left[-ik\frac{\rho^2}{2z}\right] 2\pi J_0\left(k\rho\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) d\rho = \frac{2\pi z}{ik} \exp\left[+ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}\right] \quad (10.11.17)$$

Diffrazione di Fresnel da un disco circolare ($a = 0.5\lambda$)

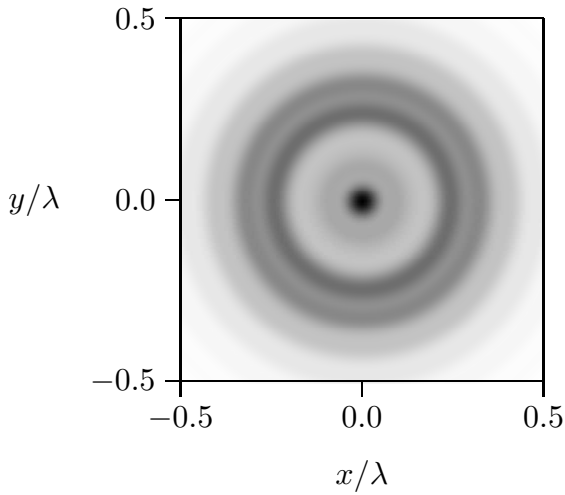
$d = 0.025\lambda$



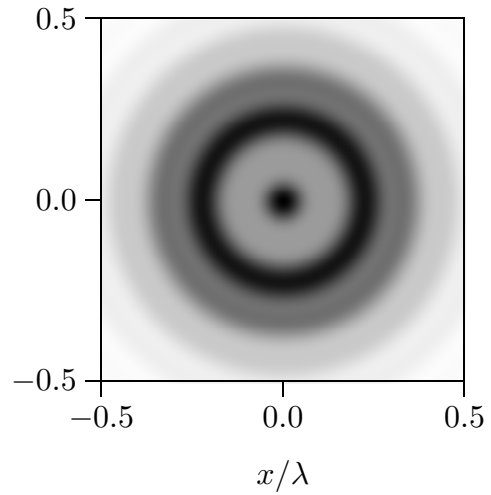
$d = 0.05\lambda$



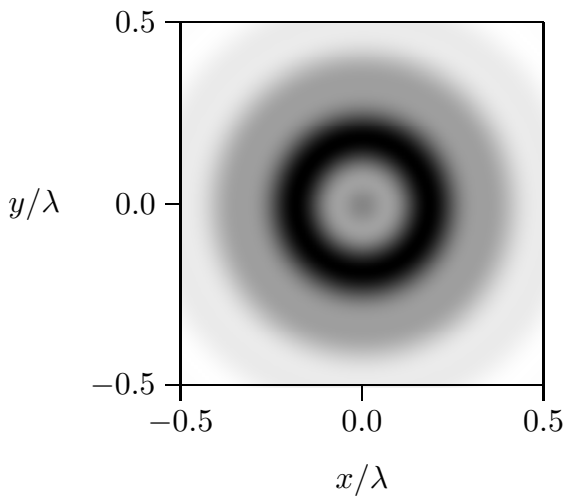
$d = 0.075\lambda$



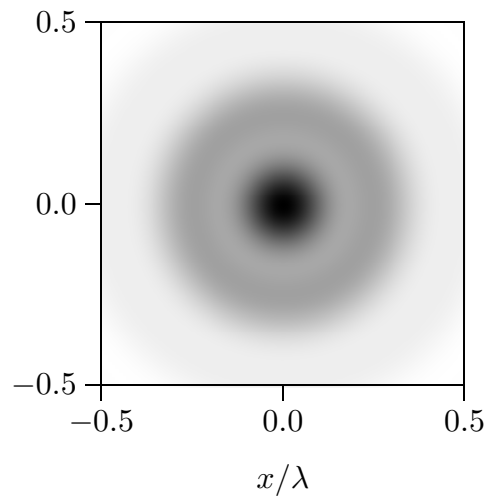
$d = 0.1\lambda$

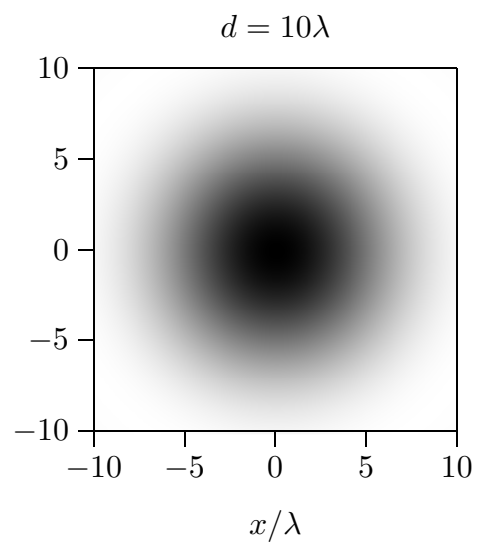
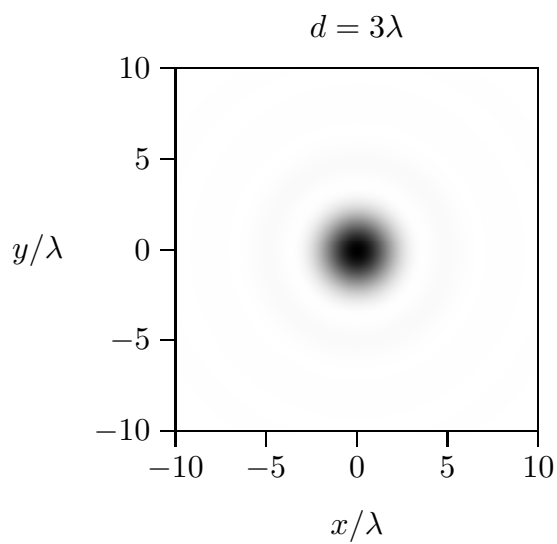
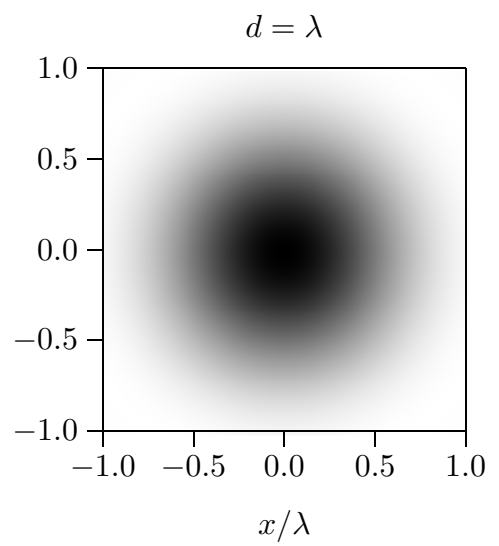
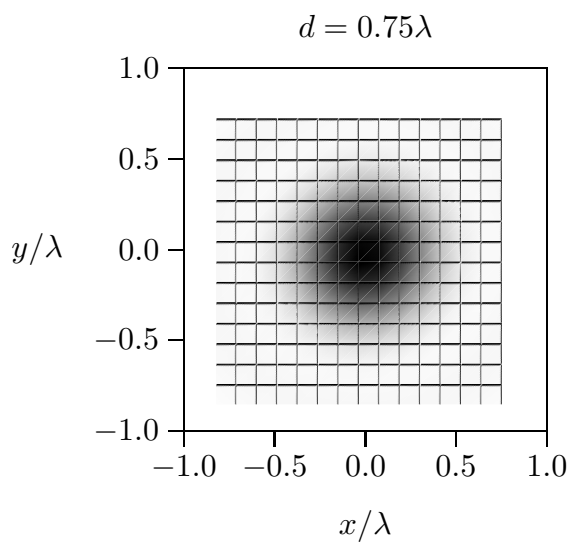
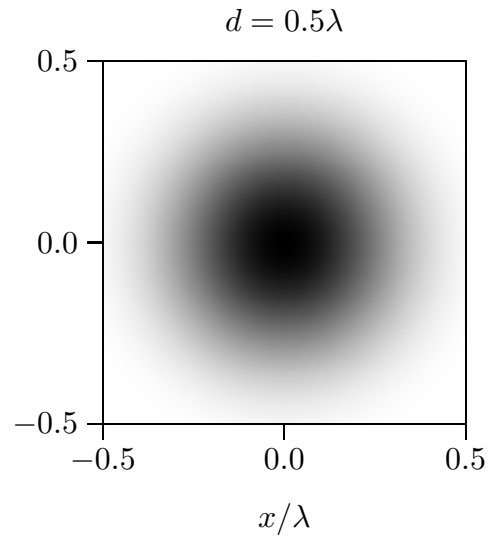
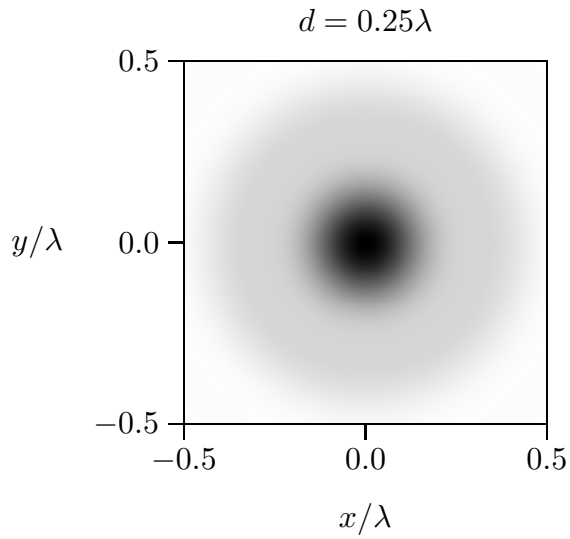


$d = 0.15\lambda$



$d = 0.2\lambda$





Programma in ambiente Matlab 'diff_disco_circ.m'

```
01 - %%%%%Diffrazione da disco circolare %%%%%
02 - delete(get(0,'children'));
03 - lambda=1;
04 - %Dimensioni della fenditura%
05 - a=0.5.*lambda;
06 - %%%Parametro da modificare%%
07 - %%%distanza dallo schermo tagliato%%
08 - d=0.5.*lambda;
09 - %%% costanti %%%
10 - LZ=d.*lambda;
11 - %AA=sqrt(2./LZ)
12 - k4=(2.*pi)./LZ;
13 - k2=k4.^2;
14 - k3=pi./LZ;
15 - Zo=377;
16 - k1=1./(2.*Zo);
17 - Eox=1;
18 - Ris1=0.007; %%% parametro di nitidezza%%
19 - [X,Y] = meshgrid([-0.5:Ris1:0.5]);
20 - %%% Integrazione %%%
21 - Ris=1000; %precisione di integrazione
22 - for k=1:Ris+1
23 - r(k)=0+(k-1).*((a-0)./Ris);
24 - end
25 - ReI=0;
26 - ImI=0;
27 - for j = 2:Ris+1
28 - ReI=ReI+(r(j).*(cos(k3.*(r(j).^2)).*...
29 -  -bessel(0,k4.*r(j).*sqrt(X.^2+Y.^2)))).*...
30 -  -(r(j)-r(j-1)));
31 - ImI=ImI+(r(j).*(sin(k3.*(r(j).^2)).*...
32 -  -bessel(0,k4.*r(j).*sqrt(X.^2+Y.^2)))).*...
33 -  -(r(j)-r(j-1)));
34 - end
35 - Z=k1.*(Eox.^2).*(1.-k2.*(ReI.^2+ImI.^2));
36 - %pcolor(Z); %per ottenere graf 3D usare surf o surfl
37 - pcolor(X,Y,Z);
38 - %surfl(Z);
39 - shading interp ; %flat , interp
40 - colormap(gray(1000))
41 - Zmin = min(Z);
42 - ZZmin = min(Zmin);
```

```
43 - Zmax = max(Z);  
44 - ZZmax = max(Zmax);  
45 - %set(gca,'fontsize',24);  
46 - %axis square  
47 - axis equal  
48 - axis('off')  
49 -  
50 -  
51 -  
52 - print('-depsec','diffdisco050')
```

Fine del Cap.10