Cap. 9

Dinamica dei fluidi

9.1 - Fluido ideale: Equazione di continuità[1)]

La fluidodinamica si occupa dello studio del moto dei fluidi (liquidi e gas).

Poichè i fenomeni trattati nella fluidodinamica sono macroscopici, un fluido è ritenuto un mezzo continuo.

La descrizione matematica dello stato di un fluido in moto viene effettuata per mezzo di funzioni che danno la distribuzione della velocità del fluido $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ e di due qualsiasi quantità termodinamiche relative al fluido per esempio la pressione $p(x, y, z, t)$ e la densità $\rho(x, y, z, t)$)

Deriviamo, ora, le equazioni fondamentali della fluidodinamica. Cominciamo con l'equazione che esprime la conservazione della materia.

Consideriamo un volume V_0 dello spazio. La massa di fluido contenuta in questo volume è:

$$m_0 = \int_{V_0} \rho d^3\vec{r}\,' \tag{9.1.1}$$

essendo ρ la densità del fluido. La massa del fluido che scorre nell'unità di tempo attraverso un elemento $d^2\vec{r}\,'$ della superficie che circonda il volume V_0 è quella contenuta in un volume pari a $\vec{v} \cdot \widehat{n} d^2\vec{r}\,'$, ossia al prodotto dell'elemento di superficie per il lato percorso dal fluido in un secondo ossia $\vec{v} \cdot \widehat{n}$. Quindi:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \rho \vec{v} \cdot \widehat{n} d^2\vec{r}\,' \tag{9.1.2}$$

essendo $\widehat{n}$ il vettore unitario normale alla superficie $d^2\vec{r}\,'$. Per convenzione il verso di $\widehat{n}$ è quello esterno alla superficie. Allora $\rho \vec{v} \cdot \widehat{n} d^2\vec{r}\,'$ è positivo se il fluido esce fuori dal volume negativo se entra. **La massa totale del fluido uscente (o entrante) dal volume V_0 nell'unità di tempo è quindi:**

$$M_0 = \oint_{S_0} \rho \vec{v} \cdot \widehat{n} d^2\vec{r}\,' \tag{9.1.3}$$

dove l'integrazione è estesa sull'intera superficie chiusa S_0 che circonda il volume V_0.

Per la (9.1.2) la diminuzione della quantità di fluido nell'unità di tempo nel volume V_0 può essere scritta come

$$M_0 = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho d^3\vec{r}\,'. \tag{9.1.4}$$

---

1) L.D. Landau and E.M. Lifshitz: Fluid Mechanics, Volume 6 of Course of Theoretical Physics, Second Edition - Pergamon Press,1987.

Eguagliando le equazione (9.1.4) e (9.1.3) si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_0} \rho d^3r' = -\oint_{S_0} \rho\vec{v}\cdot\widehat{n}d^2r'. \tag{9.1.5}$$

L'integrale di superficie può essere trasformato per mezzo della formula di Green in un integrale di volume. Ossia:

$$\oint_{S_0} \rho\vec{v}\cdot\widehat{n}d^2r' = \int_{V_0} \vec{\nabla}\cdot\rho\vec{v}d^3r'. \tag{9.1.6}$$

Sostituendo la (9.1.6) nell (9.1.5) si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_0} \rho d^3r' = -\int_{V_0} \vec{\nabla}\cdot\rho\vec{v}d^3r', \tag{9.1.7}$$

che si può scrivere:

$$\int_{V_0}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\rho\vec{v}\right]d^3r' = 0. \tag{9.1.8}$$

Poichè questa equazione deve valere qualunque sia il volume V_0, la funzione integranda deve essere identicamente nulla; ossia:

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0.} \tag{9.1.9}$$

Equazione di continuità

Questa è **l'equazione di continuità**.
il vettore $\vec{j} = \rho\vec{v}$ prende il nome di **densità di flusso di massa**.

9.2 - Equazione di Eulero

Consideriamo un certo volume, diciamo V_0, all'interno del fluido. La forza totale agente su questo volume è eguale all'integrale

$$-\oint_{S_0} p\widehat{n}d^2r' \tag{9.2.1}$$

della pressione, che agisce sulla superficie che circonda il volume. Trasformando l'integrale di superficie che compare nell'equazione (9.2.1) in un integrale di volume si ottiene:

$$-\oint_{S_0} p\widehat{n}d^2r' = \int_{V_0} \vec{\nabla}pd^3r' \tag{9.2.2}$$

Quindi, noi vediamo che il fluido che circonda qualsiasi elemento di volume d^3r' esercita su quell'elemento una forza $-d^3r'\vec{\nabla}p$. In altre parole, noi possiamo dire che un forza $-\vec{\nabla}p$ (gradiente della pressione p) agisce sull'unità di volume del fluido.

Possiamo ora scrivere l'equazione del moto di un elemento di volume del fluido eguagliando la forza $-\vec{\nabla} p$ al prodotto della *massa per unità di volume* ρ per *l'accelerazione* $\frac{d\vec{v}}{dt}$:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p. \tag{9.2.3}$$

Poichè $\frac{d\vec{v}}{dt}$ è la derivata totale di $\vec{v}(x(t), y(t), z(t), t)$ si ha:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} \tag{9.2.4}$$

Sostituendo l'equazione (9.2.4) nell'equazione (9.2.3) si ottiene, infine:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p.} \tag{9.2.5}$$

Equazione di Eulero

Questa è l'equazione del moto del fluido. Essa fu ottenuta per primo da L. Euler[1] nel 1755. È chiamata equazione di Eulero ed è una delle equazioni fondamentali della fluidodinamica.

Se il fluido è in un campo gravitazionale, una forza aggiuntiva $\rho \vec{g}$, dove $\vec{g}$ è la accelerazione dovuta alla gravità, agisce su qualsiasi unità di volume. Questa forza deve essere aggiunta al secondo membro dell'equazione (9.2.3). L'equazione (9.2..5), allora, prende la forma seguente:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g}.} \tag{9.2.6}$$

Equazione di Eulero in presenza di Campo gravitazionale

Nel derivare le equazioni del moto non abbiamo tenuto conto dei processi di dissipazione di energia dovuti a frizione interna (viscosità) nel fluido e a scambi di calore fra le differenti parti di esso. L'intera discussione vale per i fluidi in cui la conduttività termica e la viscosità non sono importanti;**tali fluidi sono chiamati fluidi ideali**.

La formula (9.2.6) si può scrivere in maniera diversa applicando la quinta formula delle relazioni differenziali del paragrafo F2 nel Formulario, che qui riscriviamo:

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \tag{9.2.7}$$

---

[1] Leonhard Euler, noto in Italia come Eulero: Basilea, 15 aprile 1707 - San Pietroburgo, 18 settembre 1783.

Per $\vec{A} = \vec{B} = \vec{v}$, essa diventa:

$$\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \tag{9.2.8}$$

e, ancora:

$$\vec{\nabla}\left(v^2\right) = 2\left(\vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{v}\right) + 2(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \tag{9.2.9}$$

Dividendo per 2:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \left(\vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{v}\right) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}. \tag{9.2.10}$$

Dalla (9.2.10) si ha:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \left(\vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{v}\right). \tag{9.2.11}$$

Sostituendo la (9.2.11) nella (9.2.6) si ottiene:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \left(\vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{v}\right) = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g}.} \tag{9.2.12}$$

Seconda Forma Equazione di Eulero

9.3 - Derivazione delle leggi dell'idrostatica

Per un fluido a riposo in un campo gravitazionale uniforme, l'equazione di Eulero prende la forma:

$$\vec{\nabla}p = \rho\vec{g} \tag{9.3.1}$$

Questa equazione descrive l'equilibrio meccanico del fluido. (Se non vi è forza esterna, l'equazione di equilibrio è semplicemente $\vec{\nabla}p = 0$, cioè $p = costante$; la pressione è la stessa in ogni punto del fluido).

L'equazione (9.3.1) può essere integrata immediatamente se la densità del fluido può essere supposta costante per tutto il suo volume, cioè non vi è alcuna compressione significativa del fluido sotto l'azione della forza esterna. L'equazione (9.3.1) si esplicita nella seguente maniera:

$$\frac{\partial p}{\partial x}\widehat{x} + \frac{\partial p}{\partial y}\widehat{y} + \frac{\partial p}{\partial z}\widehat{z} = \rho\vec{g} \tag{9.3.2}$$

Assumendo l'asse z verticale verso l'alto si ha:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{9.3.3}$$

Ne segue che l'equazione (9.3.1) diventa:

$$\frac{\partial p}{\partial z}\widehat{z} = -\rho g\widehat{z} \tag{9.3.4}$$

ossia:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{9.3.5}$$

Integrando, risulta:

$$p = -\rho g z + costante \tag{9.3.6}$$

che è la legge di Stevin (8.11.5).

Se il fluido a riposo ha una superficie libera ad una altezza h, sulla quale una pressione esterna p_0, la stessa in ogni punto, è applicata, questa superficie deve essere il piano orizzontale $z = h$. Imponendo allora la condizione che $p = p_0$ per $z = h$, l'equazione (9.3.6) si scrive:

$$p_0 = -\rho g h + costante \tag{9.3.7}$$

da cui:

$$costante = p_0 + \rho g h \tag{9.3.8}$$

In definitiva la legge di Stevin si scrive:

$$p = -\rho g z + p_o + \rho g h \tag{9.3.9}$$

In definitiva si ha:

$$\boxed{p = p_0 + \rho g (h - z).} \tag{9.3.10}$$

Legge di Stevin

9.4 - Equazione di Bernoulli[1]

Le equazioni della fluidodinamica sono molto semplificate nel caso di flusso stazionario. Per flusso stazionario si intende un flusso in cui la velocità è costante nel tempo in qualunque punto occupato dal fluido. In altre parole il vettore velocità $\vec{v}$ è funzione soltanto delle coordinate, ossia $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$. L'equazione di Eulero (9.2.12), in assenza di campo gravitazionale, diventa, allora:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \left(\vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{v}\right) = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p. \tag{9.4.1}$$

È utile, a questo punto, introdurre il concetto delle *linee di flusso* ossia la linea in cui il vettore velocità è ad essa tangente. L'equazione di questa linea è:

$$\vec{v} \times d\vec{s} = 0 \tag{9.4.2}$$

---

[1] Daniel Bernoulli: Groningen, Paesi Bassi, 8 febbraio 1700 - Basilea, Svizzera, 17 marzo 1782.

essendo $d\vec{s}$ l'elemento di linea.

Esplicitiamo l'equazione (9.4.2). Si ha:

$$\vec{v} \times d\vec{s} = \begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ & & \\ v_x & v_y & v_z \\ & & \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0 \tag{9.4.3}$$

ossia:

$$\vec{v} \times d\vec{s} = \widehat{x}\,(v_y dz - v_z dy) + \widehat{y}\,(v_z dx - v_x dz) + \widehat{z}\,(v_x dy - v_y dx) = 0 \tag{9.4.4}$$

quindi:

$$\begin{cases} v_y dz - v_z dy = 0 \\ \\ v_z dx - v_x dz = 0 \\ \\ v_x dy - v_y dx = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{v_z} = \dfrac{dy}{v_y} \\ \dfrac{dx}{v_x} = \dfrac{dz}{v_z} \\ \dfrac{dy}{v_y} = \dfrac{dx}{v_x} \end{cases} \tag{9.4.5}$$

e, ancora:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \tag{9.4.6}$$

Se $\widehat{s}$ é il vettore unitario indicante la direzione della velocità, moltiplichiamo scalarmente per esso i termini dell'equazione (9.4.1). Diciamo subito che, poichè il secondo termine è ortogonale al vettore velocità, il prodotto scalare di esso con $\widehat{s}$ è zero. Ne segue, quindi:

$$\widehat{s} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2\right) + \widehat{s} \cdot \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = 0 \tag{9.4.7}$$

Il prodotto scalare di $\widehat{s}$ per l'operatore gradiente $\vec{\nabla}$ è la derivata rispetto alla direzione s, $\dfrac{\partial}{\partial s}$, ossia della linea di flusso.

Quindi la (9.4.7) si può scrivere, tenendo conto che ρ è costante **(fluido incompressibile)**, nella seguente maniera:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho}\right) = 0 \tag{9.4.8}$$

ossia:

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = costante.} \qquad \textbf{Equazione di Bernoulli} \tag{9.4.9}$$

lungo una qualsiasi linea di flusso. In generale la costante assume valori diversi per diverse linee di flusso. L'equazione (9.4.9) prende il nome di *equazione di Bernoulli* da Lui derivata, per fluidi incompressibili, nel 1738.

Se il fluido è in presenza di un campo gravitazionale, bisogna aggiungere al secondo membro della (9.4.1) l'accelerazione di gravità $\vec{g}$, come dalla formula (9.2.12). Assumiamo la direzione di $\vec{g}$ l'asse z, con z crescente verso l'alto. Allora il prodotto $\widehat{s} \cdot \vec{g}\widehat{z}$ è eguale a $g \cos \alpha$ ossia al prodotto di g per il coseno dell'angolo formato fra la direzione di g e quella di s. Risulta:

$$\cos \alpha = -\frac{dz}{ds} \tag{9.4.10}$$

Ne segue, quindi, che l'equazione (9.4.7) si scrive:

$$\widehat{s} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \widehat{s} \cdot \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \widehat{s} \cdot \vec{g} = 0 \tag{9.4.11}$$

ossia:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 \tag{9.4.12}$$

In definitiva:

$$\boxed{\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = costante.} \qquad \textbf{Equazione di Bernoulli in presenza di } \vec{g} \tag{9.4.13}$$

9.5 - Diversa formulazione dell'equazione di continuità - Portata di un fluido

Consideriamo un condotto a sezione variabile, all'interno del quale scorre un liquido incompressibile e stazionario. Consideriamo due sezioni S_1 e S_2 e siano $\widehat{n}_1$ e $\widehat{n}_2$ i vettori unitari ortogonali a tali superfici, rivolte come in figura (9.5-1).

Indichiamo con $\vec{v}_1$ il vettore velocità del fluido nei punti della superficie S_1 e con $\vec{v}_2$ il vettore velocità del fluido nei punti della superficie S_2.

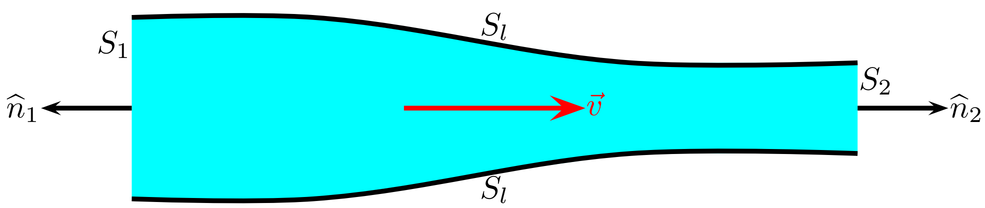

fig.9.5-1

In condizioni stazionarie, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, l'equazione (9.1.5) si scrive:

$$\oint_{S_0} \rho \vec{v} \cdot \widehat{n} d^2 r' = 0. \tag{9.5.2}$$

Se S_0 è la superficie totale del condotto di figura (9.5-1), l'equazione (9.5.2) diventa:

$$\int_{S_1} \rho\vec{v}\cdot\widehat{n}d^2r' + \int_{S_2} \rho\vec{v}\cdot\widehat{n}d^2r' + \int_{S_l} \rho\vec{v}\cdot\widehat{n}d^2r' = 0. \tag{9.5.3}$$

L'ultimo integrale è nullo in quanto sul contorno del condotto il vettore velocità è ortogonale al vettore unitario normale alla detta superficie. Quindi l'equazione (9.5.3) si scrive:

$$\int_{S_1} \rho\vec{v}\cdot\widehat{n}d^2r' + \int_{S_2} \rho\vec{v}\cdot\widehat{n}d^2r' = 0. \tag{9.5.4}$$

Nell'ipotesi che la velocità si mantenga costante sui punti della superficie S_1 e S_2, l'equazione (9.5.4) diventa:

$$\boxed{v_1S_1 = v_2S_2.} \tag{9.5.5}$$

Il prodotto vS prende il nome di **Portata**; se la sezione è maggiore la velocità è più bassa e viceversa.

9.6 - Applicazione del teorema di Bernoulli:[1] Teorema di Torricelli[2]

Consideriamo, ora, alcuni esempi semplici di applicazione del teorema di Bernoulli. Supponiamo di avere un serbatoio pieno d'acqua, con un foro in una parete vicino al fondo, come in figura (9.6-1). Supponiamo inoltre che la velocità v_{out} di flusso dal foro sia molto più grande della velocità del flusso vicino alla cima del serbatoio; in altre parole, immaginiamo che il diametro del serbatoio sia così grande che si possa trascurare l'abbassamento di livello del liquido. (Volendo si potrebbe anche fare un calcolo più preciso). In cima al serbatoio la pressione è la pressione atmosferica p_0 la pressione sui fianchi del getto è pure p_0.

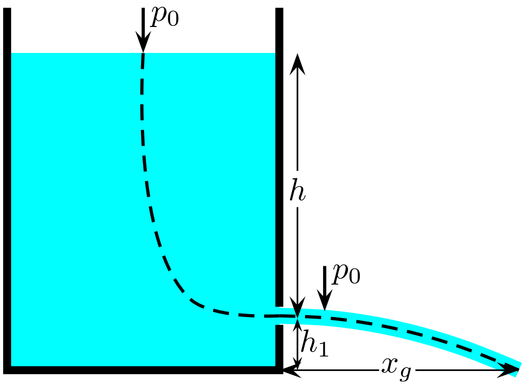

fig.9.6-1

[1] La Fisica di Feynman, Volume 2, Cap.40 - Zanichelli Editore, 2001.

[2] Evangelista Torricelli: Roma, 15 ottobre 1608 - Firenze, 25 ottobre 1647 - De Motu gravium naturaliter accelerato, Firenze, 1643.

Scriviamo, ora, l'equazione di Bernoulli per una linea di corrente come quella indicata, con tratteggio, in figura. In cima al serbatoio prendiamo $v = 0$ e $z = 0$. Si ha, allora per la (9.4.13):

$$\cancel{\frac{p_0}{\rho}} = \frac{1}{2}v_{out}^2 + \cancel{\frac{p_0}{\rho}} - gh \tag{9.6.1}$$

ossia:

$$\boxed{v_{out} = \sqrt{2gh}.} \quad \textbf{Teorema di Torricelli} \tag{9.6.2}$$

La formula (9.6.2) è conosciuta come il **Teorema di Torricelli**.[2)] Questa velocità è proprio quella che si otterrebbe per qualunque oggetto che cade, nel vuoto, dall'altezza h. Ciò non è molto sorprendente perchè l'acqua all'uscita acquista energia cinetica a spese dell'energia potenziale dell'acqua in cima al serbatoio.

Vogliamo calcolare la traiettoria del getto d'uscita dal piccolo foro. Il moto è parabolico. L'equazione del moto della singola particella d'acqua uscente dal piccolo foro è data nel capitolo 2, paragrafo 2.5:

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}g\frac{(x-x_0)^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + (x-x_0)\tan\alpha + y_0} \tag{2.5.19}$$

Sia $x_0 = 0$ l'ascissa del foro d'uscita. Poichè in questo punto il getto è orizzontale risulta $\alpha = 0$. Sia $y_0 = h_1$, e $v_{out} = \sqrt{2gh}$. Si ha allora:

$$y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{2gh} + h_1 = -\frac{1}{4}\frac{x^2}{h} + h_1 \quad \textbf{(traiettoria del getto d'uscita)} \tag{9.6.3}$$

La distanza del getto d'acqua dal foro di uscita x_g si ottiene ponendo $y = 0$ nella equazione (9.6.3). Risulta, allora:

$$\frac{1}{4}\frac{x_g^2}{h} = h_1 \tag{9.6.4}$$

ossia:

$$\boxed{x_g = \sqrt{4hh_1}\left\{\begin{array}{l}\textbf{distanza del getto}\\ \textbf{dal foro d'uscita}\end{array}\right.} \tag{9.6.5}$$

Se, per esempio, come in figura (9.6-1), $h = 2.9\ m$ **e** $h_1 = 0.6\ m$ **risulta** $x_g \simeq 2.64\ m$.

Vogliamo trovare la posizione del foro affinchè la gittata sia massima. Per questo indichiamo con δ l'aumento di h_1 e quindi la diminuzione di h. La distanza del getto si può scrivere:

$$x_g = \sqrt{4(h-\delta)(h_1+\delta)} \tag{9.6.6}$$

La figura (9.6-2) illustra la funzione $f(\delta) = (h - \delta)(h_1 + \delta)$ in funzione di δ nel caso di $h = 2.9\ m$ e $h_1 = 0.6\ m$. Essa presenta un massimo.

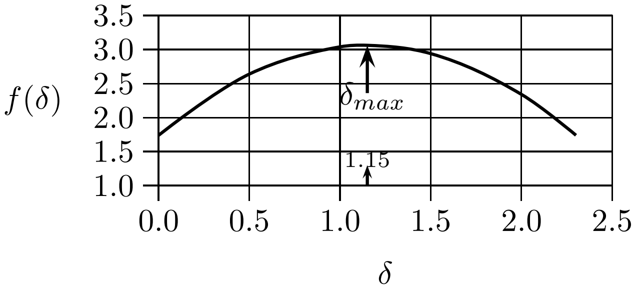

fig.9.6-2

Per trovare la precisa posizione del foro, per ottenere la massima gittata, deriviamo la funzione all'interno della radice quadrata rispetto a δ e ponendola eguale a zero si ha:

$$\frac{d}{d\delta}\left(hh_1 + h\delta - h_1\delta - \delta^2\right) = h - h_1 - 2\delta = 0 \tag{9.6.7}$$

ossia:

$$\delta_{max} = \frac{h - h_1}{2} \tag{9.6.8}$$

e, quindi le nuove dimensioni sono:

$$h_{1n} = h_1 + \delta = h_1 + \frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} = \frac{h_1}{2} + \frac{h}{2} \tag{9.6.9}$$

$$h_n = h - \delta = h - \frac{h}{2} + \frac{h_1}{2} = \frac{h}{2} + \frac{h_1}{2} \tag{9.6.10}$$

Ne segue, quindi, che:

$$h_{1n} = h_n \tag{9.6.11}$$

ossia la distanza del foro dal fondo deve essere eguale alla distanza fra il livello iniziale di acqua ed il foro stesso. **In tal caso la gittata è massima in quanto la derivata seconda della (9.6.7) è -2 ossia negativa**. Dalla formula (9.6.5) risulta che $x_g = \sqrt{4h^2} = 2h$ ossia **la gittata massima è esattamente eguale al livello dell'acqua nel serbatoio**.

Infatti, nell'esempio di figura (9.6-1), ponendo $h_1 = h = 1.75\ m$, si ottiene $x_g = 2h = 3.5\ m$, che è l'altezza del livello dell'acqua, come illustrato in figura (9.6-3).

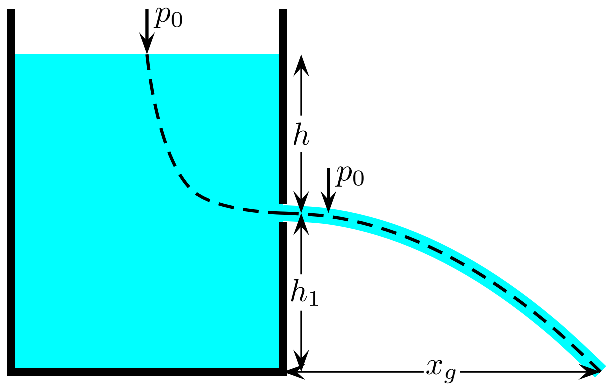

fig.9.6-3

9.7 - Liquidi ruotanti:[1),2)] - Il secchio di Newton[3)]

È interessante cominciare questo paragrafo descrivendo l'esperimento del secchio ruotante eseguito da Newton. Si legge, a pagina 112:

"....Si sospenda un recipiente ad un filo abbastanza lungo, e si agisca con moto circolare continuo fino a che il filo a causa della torsione, si indurisce completamente. Si riempia il recipiente di acqua e lo si faccia riposare insieme con l'acqua; lo si muova, poi, con forza subitanea, in senso contrario, in cerchio; allora, allentandosi il filo, continuerà a lungo in questo moto. All'inizio la superficie dell'acqua sarà piana, come prima del moto del vaso; e poichè il vaso, comunicata gradualmente la forza all'acqua, fa in modo che anche essa inizi più sensibilmente a ruotare, l'acqua comincerà a ritirarsi a poco a poco dal centro e salirà verso i lati del vaso formando una figura concava (come io stesso ho sperimentato) e, a causa del moto sempre più accelerato, salirà via via di più finchè compiendo le sue rivoluzioni insieme al vaso in tempi uguali, giacerà nel medesimo in quiete relativa. Tale ascesa indica lo sforzo di allontanamento dall'asse del moto[4)]...."

Consideriamo il caso di una massa liquida, contenuta in un contenitore cilindrico, in rotazione, con velocità angolare ω uniforme e costante, attorno all'asse z supposto disposto verticalmente e orientato verso l'alto. La massa è sottoposta soltanto alla forza gravitazionale. Il liquido in contatto con le pareti del contenitore, a causa della frizione, ruoterà, in modo tale che tutte le particelle del liquido ruoteranno attorno all'asse. Quando il moto raggiunge la stabilità, ogni particella ha la stessa velocità angolare e la superficie del liquido presenta la forma di un imbuto. Ci proponiamo di studiare la curva della nuova superficie.

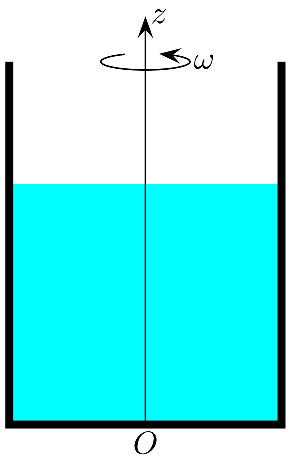

fig.9.7-1

[1)] Sir Horace Lamb: Hydrodynamics - Dover Publications, 1945, pag.28.

[2)] L.D. Landau and E.M. Lifshitz: Fluid Mechanics, Volume 6 of Course of Theoretical Physics, Second Edition - Pergamon Press,1987, pag.21.

[3)] Isaac Newton: *Principi Matematici della Filosofia Naturale* - Edizione italiana: Classici della Scienza, Collezione diretta da Ludovico Geymonat, UTET, 1989, Definizioni, Scolio IV, pag.112 e segg.

[4)] Con sforzo di allontanamento o forza di allontanamento si intende la forza centrifuga.

Ogni particella di liquido in rotazione avrà una velocità data da (vedi Capitolo 2, formula (2.4.10):

$$\vec{v} = \omega\widehat{z} \times \vec{r} = \omega\widehat{z} \times (x\widehat{x} + y\widehat{y}) \tag{9.7.1}$$

Poichè:

$$\widehat{z} \times \widehat{x} = \begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \widehat{y} \qquad e \qquad \widehat{z} \times \widehat{y} = \begin{vmatrix} \widehat{x} & \widehat{y} & \widehat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\widehat{x} \tag{9.7.2}$$

risulta:

$$\vec{v} = -\omega y\widehat{x} + \omega x\widehat{y} \tag{9.7.3}$$

L'equazione di Eulero (9.2.6) in presenza di campo gravitazionale è:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g}.$$

$$\begin{aligned} \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{v} &= \left[(-\omega y\widehat{x} + \omega x\widehat{y}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\widehat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\widehat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\widehat{z}\right)\right](-\omega y\widehat{x} + \omega x\widehat{y}) = \\ &= \left[-\omega y\frac{\partial}{\partial x} + \omega x\frac{\partial}{\partial y}\right](-\omega y\widehat{x} + \omega x\widehat{y}) = -\omega^2 x\widehat{x} - \omega^2 y\widehat{y} \end{aligned} \tag{9.7.4}$$

Poichè nel caso di moto stazionario risulta $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, l'equazione di Eulero si scrive:

$$-\omega^2 x\widehat{x} - \omega^2 y\widehat{y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\widehat{x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\widehat{y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\widehat{z} - g\widehat{z}. \tag{9.7.5}$$

ossia:

$$\begin{cases} \omega^2 x = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} & \Longrightarrow \dfrac{p}{\rho} = \dfrac{1}{2}\omega^2 x^2 + c \\ \omega^2 y = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} & \Longrightarrow \dfrac{p}{\rho} = \dfrac{1}{2}\omega^2 y^2 + c \\ -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} - g = 0 & \Longrightarrow \dfrac{p}{\rho} = -gz + c \end{cases} \tag{9.7.6}$$

L'integrale generale dell'equazione di Eulero é dunque:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) - gz + costante \tag{9.7.7}$$

Poichè sulla libera superficie la pressione deve essere costante la (9.7.7) diventa:

$$\boxed{z = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}(x^2 + y^2)} \tag{9.7.8}$$

che è l'equazione di un paraboloide di rivoluzione attorno all'asse z, avente la concavità verso l'alto, l'origine essendo presa nel punto più basso della superficie.

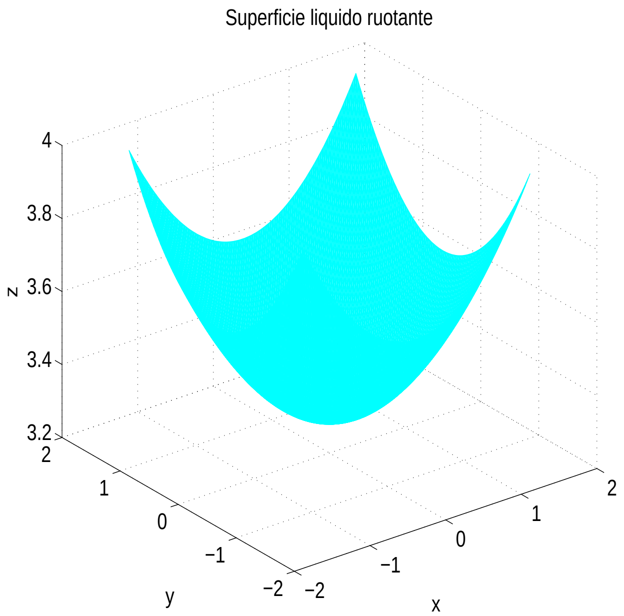

fig.9.7-2

Programma Matlab "Paraboloide"

01 - delete(get(0,'children'));

02 - [x,y] = meshgrid([-1.5:0.03:+1.5]);

03 - z=0.155.*(x.ˆ2+y.ˆ2)+3.30;

04 - surf(x,y,z,'FaceColor','cyan','EdgeColor','cyan');

05 - set(gca,'fontsize',15);

06 - xlabel('x')

07 - ylabel('y')

08 - zlabel('z')

09 - title('Superficie liquido ruotante')

10 - print('-depsc2','paraboloide')

La figura (9.7-3) rappresenta lo schema dei livelli dell'acqua prima e durante la rotazione.

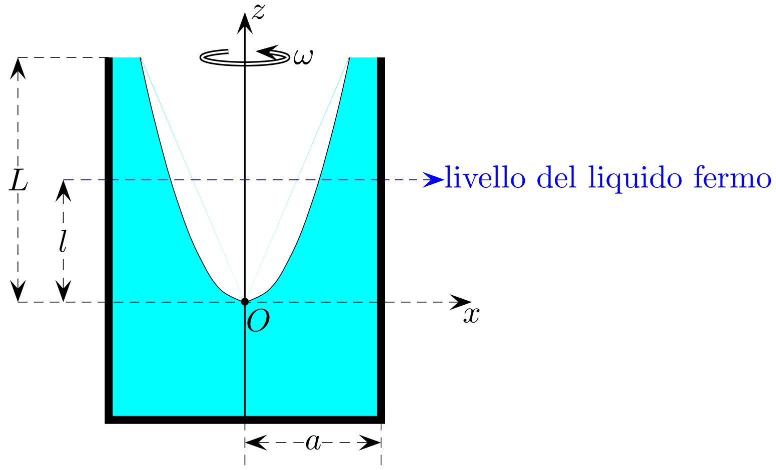

fig.9.7-3

Calcoliamo il volume del paraboloide:

$$V_p = \int_0^L \pi(x^2+y^2)dz = \int_0^L \pi \frac{2g}{\omega^2} z dz = \left[\pi \frac{g}{\omega^2} z^2\right]_0^L = \pi \frac{g}{\omega^2} L^2 \tag{9.7.9}$$

Ma dalla (9.7.8) si ha:

$$L = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g} a^2 \tag{9.7.10}$$

essendo a il raggio del contenitore cilindrico. Ne segue che la (9.7.9) si può scrivere:

$$V_p = \pi \frac{g}{\omega^2} L \cdot \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g} a^2 = \frac{1}{2}\pi a^2 L \quad \left\{ \begin{array}{l} \textbf{Volume} \\ \textbf{del} \\ \textbf{Paraboloide} \end{array} \right. \tag{9.7.11}$$

Indicando con $V_L = \pi a^2 L$ il volume totale del contenitore a partire dal vertice del paraboloide e con $V_l = \pi a^2 l^2$ il volume dell'acqua prima della rotazione, sempre a partire dal vertice del paraboloide e tenendo conto che la quantità di acqua rimane la stessa, deve essere:

$$V_L - V_p = V_l \quad ossia \quad \pi a^2 L - \frac{1}{2}\pi a^2 L = \pi a^2 l \tag{9.7.12}$$

Ne segue, dividendo per πa^2:

$$L - \frac{L}{2} = l \tag{9.7.13}$$

ossia:

$$\boxed{l = \frac{L}{2}} \tag{9.7.14}$$

Il significato fisico della equazione (9.7.14) è che la distanza dal punto più basso al punto più alto del livello del liquido limitato dalla parabola ruotante fra le pareti diritte del cilindro è il doppio della distanza dal punto più basso al livello iniziale del liquido fermo o che l'aumento in altezza e la profondità di caduta del livello del liquido è sempre uguale.

Sostituendo la (9.7.10) nella (9.7.14) si ha:

$$\boxed{l = \frac{1}{4}\frac{\omega^2}{g}a^2} \tag{9.7.15}$$

ossia la profondità della parabola dipende dal quadrato della frequenza angolare di rotazione.

Fine del Cap.9