

Cap. 8

Condizioni di equilibrio di corpi solidi e fluidi

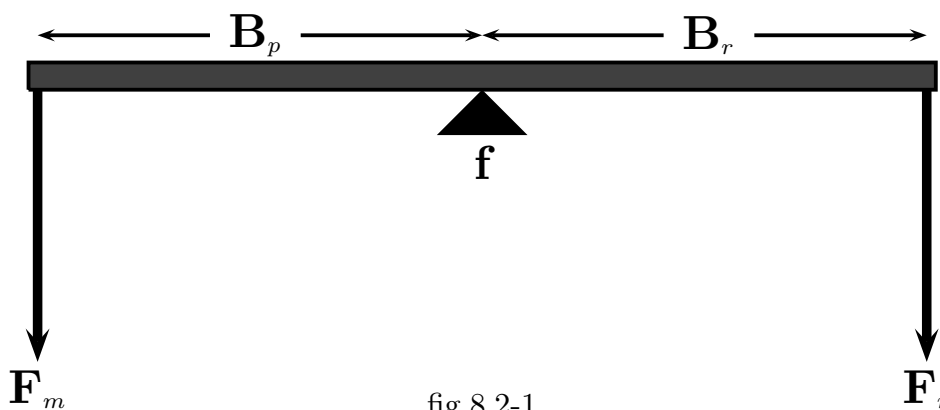
8.1 - Macchine semplici¹⁾

Le macchine semplici piú importanti nella Statica sono le leve, le carrucole ecc.

8.2 - Leve

Consideriamo un'asta rigida imperniata in un punto chiamato **Fulcro**; ad un estremo é applicata una forza (per esempio un peso) chiamata **Resistenza**, all'altro estremo viene applicata una forza chiamata **Potenza** con l'intento di sollevare la forza resistente. A seconda della posizione del fulcro rispetto alla potenza e resistenza, si hanno tre tipi di leve.

Si dicono leve di primo genere quelle *macchine semplici* in cui il fulcro occupa una posizione compresa fra la resistenza e la potenza, per esempio **le forbici**.



essendo:

f=fulcro F_r =Resistenza F_m =Potenza
 B_r =braccio resistenza B_p =braccio potenza

Per l'equilibrio deve essere: *I momenti delle due forze F_p e F_r rispetto al fulcro devono essere eguali in modulo ed opposti in verso. Ossia:*

$$B_p F_m = B_r F_r \tag{8.2.1}$$

da cui:

$$F_m = \frac{B_r}{B_p} F_r \tag{8.2-2}$$

¹⁾ Eligio Perucca: Fisica Sperimentale, Vol.1, pag.256 - Edizioni UTET,1963.

Ne segue che, se:

$$B_r < B_p \implies F_m < F_p \quad \text{La leva é vantaggiosa}$$

$$B_r > B_p \implies F_m > F_p \quad \text{La leva é svantaggiosa}$$

Una leva si dice di **secondo genere** quando la resistenza si trova fra il fulcro e la potenza. Un esempio é dato dalla **carriola** (vedi fig.8.2-2) e dallo **schiaccianoci** (vedi fig.8.2-3). Essa é sempre vantaggiosa in quanto B_r é sempre minore di B_p .

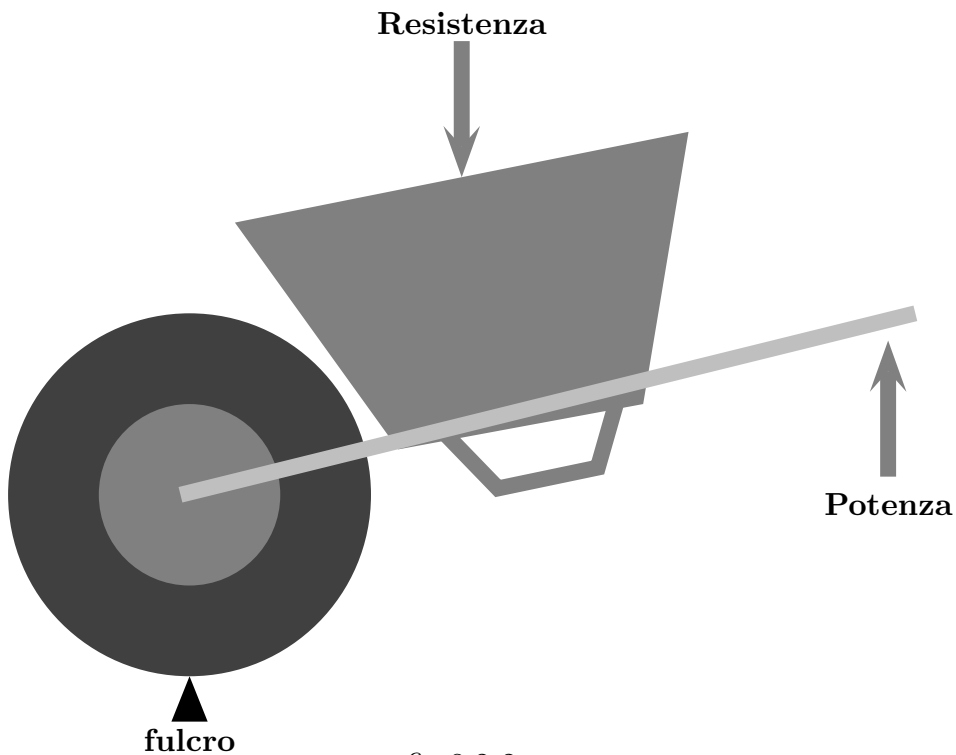


fig.8.2-2

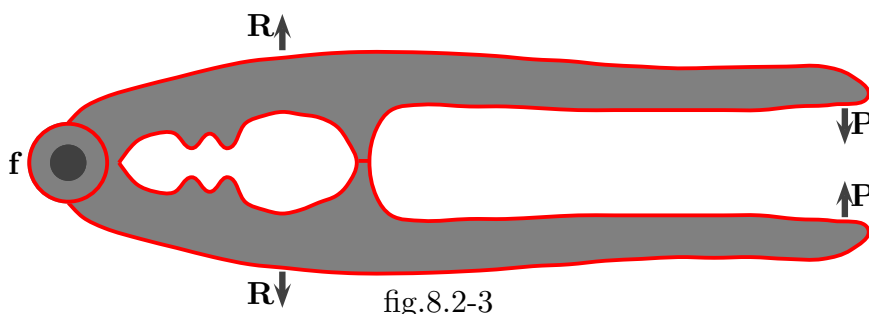


fig.8.2-3

Una leva si dice di **terzo genere** quando la potenza si trova fra il fulcro e la resistenza. Un esempio é dato dalla **pinza per il ghiaccio** o altro (vedi fig.8.2-4). Essa é

sempre svantaggiosa in quanto B_r é sempre maggiore di B_p .

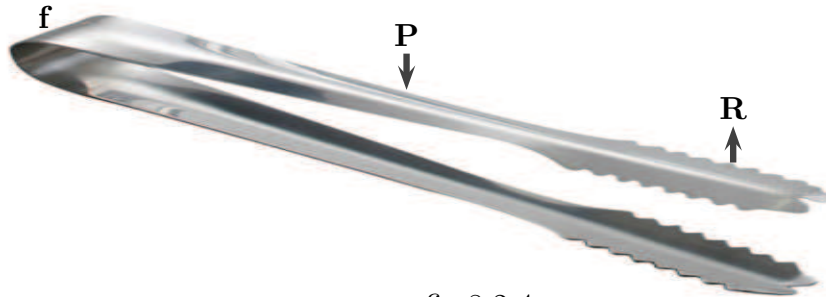


fig.8.2.4

8.3 - Carrucola semplice¹⁾

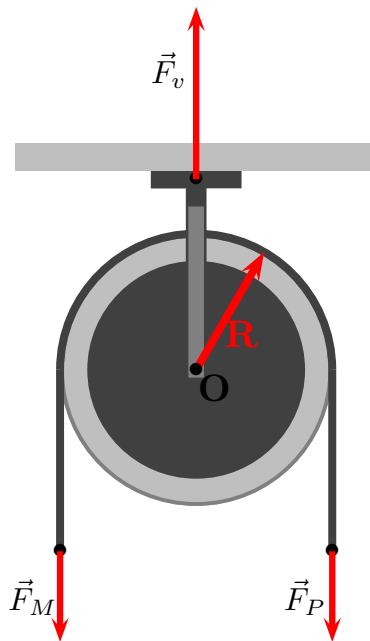


fig.8.3.1

Vogliamo studiare la condizione di equilibrio della carrucola quando é soggetta a rotazioni attorno al proprio asse. Consideriamo il momento \vec{M}_P della forza peso \vec{F}_P rispetto

¹⁾ Norbury John W.: Working with simple machines - American Journal of Physics, 12 December 2006.

al centro O della carrucola e il momento della forza motrice \vec{M}_P della forza peso \vec{F}_P rispetto al centro O della carrucola e il momento \vec{M}_M della forza motrice \vec{F}_M rispetto allo stesso punto. \vec{M}_P tende a far ruotare la carrucola in senso orario ed é diretto verso l'interno della pagina; \vec{M}_M tende a provocare una rotazione in senso antiorario ed ha verso uscente dalla pagina. Inoltre, come si vede dalla figura (8.3-1), i bracci B_P e B_M delle due forze \vec{F}_P e \vec{F}_M rispetto ad O sono uguali fra loro ed anche uguali al raggio R del disco della carrucola.

Affinché la carrucola si trovi in equilibrio sotto rotazione deve valere la condizione:

$$\vec{M}_P + \vec{M}_M = 0 \quad (8.3.1)$$

Visto che, come si é appena detto, i due momenti hanno la stessa direzione e versi opposti, perché sia vera la condizione (8.3.1) occorre che i moduli dei due momenti siano uguali fra loro. Ossia:

$$M_P = F_P B_P = F_P R = M_M = F_M B_M = F_M R, \quad (8.3.2)$$

da cui:

$$F_P = F_M \quad (8.3.3)$$

8.4 - Carrucola doppia^{1),2)}

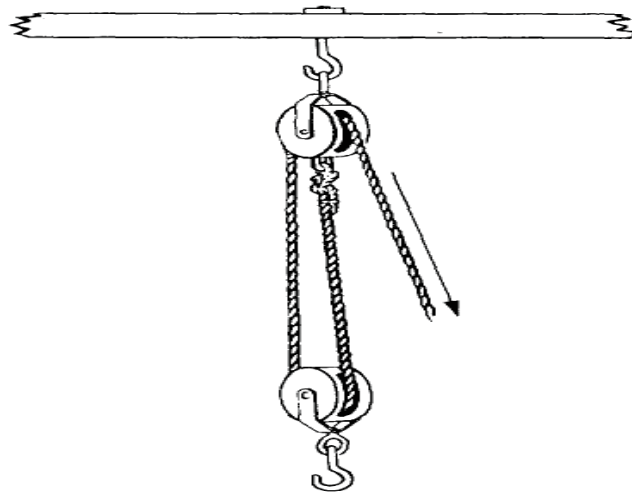
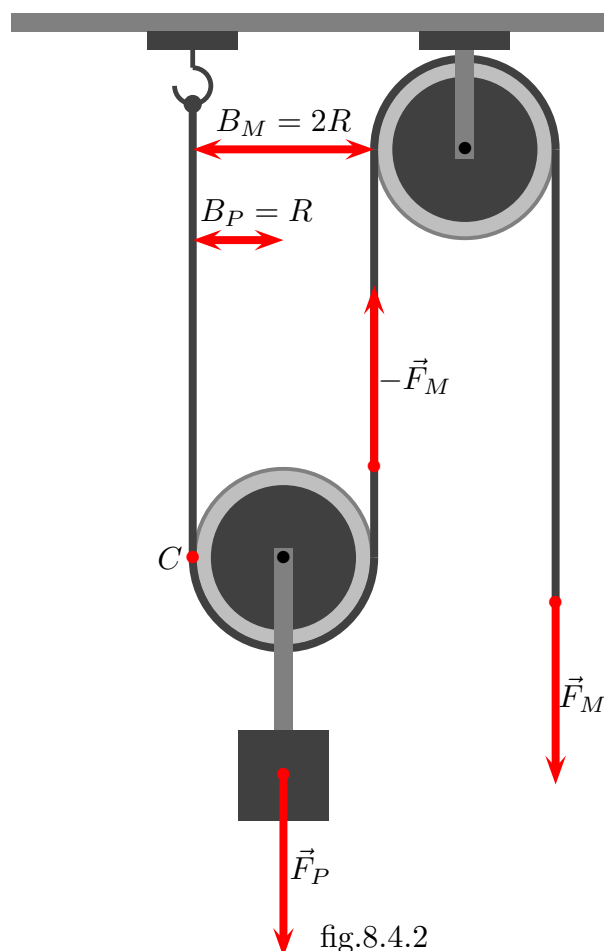


fig.8.4-1

¹⁾ L'Amaldi per i licei scientifici - Zanichelli Editori, Bologna, 2012.

²⁾ Eligio Perucca: Fisica Sperimentale, Vol.1, pag.256 - Edizioni UTET,1963.



La carrucola doppia illustrata in figura (8.4-1) e schematizzata in figura (8.4-2) é formata da una carrucola fissa come quella esaminata nel paragrafo precedente e da una carrucola mobile che analizzeremo.

La carrucola fissa trasmette la forza \vec{F}_M applicata alla fune lasciandone invariato il modulo. Quindi sulla carrucola mobile agisce una forza $-\vec{F}_M$ che tende a sollevare verso lalto la fune che si trova alla destra della carrucola mobile. Sulla stessa carrucola agisce anche la forza \vec{F}_P rivolta verso il basso. Per questa ragione conviene ora calcolare i momenti delle forze rispetto al punto C di contatto della fune con il bordo sinistro della carrucola. Cosí la forza vincolare del gancio, che ha direzione passante per C , rispetto a questo punto ha momento nullo e non é rilevante.

In analogia all'analisi fatta in precedenza consideriamo il momento \vec{M}_P della forza peso F_P rispetto a C e il momento \vec{M}_M della forza motrice $-\vec{F}_M$ rispetto allo stesso punto.

\vec{M}_P tende a fare ruotare la carrucola in senso orario ed é diretto verso l'interno della pagina; \vec{M}_M tende a provocare una rotazione in senso antiorario e ha verso uscente dalla pagina. Questa volta, però, il braccio di \vec{F}_P é $B_P = R$, mentre il braccio di \vec{F}_M é $B_M = 2R$

Quindi la condizione di equilibrio del sistema sotto rotazione, che corrisponde alla precedente equazione (8.3.3), diventa ora:

$$F_P R = F_M (2R) \tag{8.4.1}$$

ossia:

$$\boxed{F_M = \frac{1}{2}F_p} \quad (8.4.2)$$

In questo caso si ha un vero **guadagno** nella forza applicata, in quanto si può equilibrare la forza resistente con una forza motrice di modulo pari alla metà di quello della forza resistente.

8.5 - Condizione di equilibrio dei fili[†]

Nei paragrafi precedenti abbiamo studiato, in generale, sistemi di corpi rigidi; lasceremo ora questa ipotesi, **proponendoci di studiare le condizioni di equilibrio dei fili flessibili e inestensibili.**

Un filo sarà sempre da noi schematizzato mediante una curva: siccome poi supporremo il filo flessibile e inestensibile, ammetteremo che tale curva possa assumere qualunque configurazione (purché soddisfacente ad ovvie condizioni di continuità, derivabilità ecc.), **in modo però che la lunghezza del filo compreso fra due punti di essa resti sempre costante.**

Supporremo che le forze agenti sul filo¹⁾ (fig. 8.5-1) siano distribuite; ciò significa che su ogni elemento infinitesimo di lunghezza ds del nostro filo agisce una forza proporzionale allo elemento stesso, o, in altre parole, infinitesima dello stesso ordine di ds .

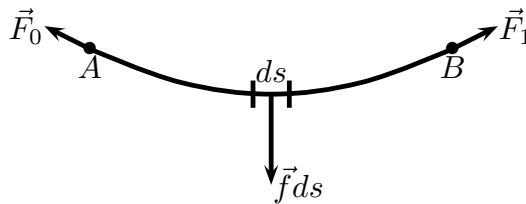


fig.8.5-1

Tali forze distribuite si potranno dunque rappresentare col simbolo $\vec{f}ds$ dove \vec{f} è un vettore finito.

Esempio di forze distribuite è dato dalle forze di gravità agenti sul filo, che su ogni elemento ds valgono $-\mu ds \hat{z}$ (essendo l'asse z , come al solito, verticale e orientato verso l'alto), dove μ è il peso specifico lineare del filo uguale al prodotto della densità lineare di massa ρ_l per g che è l'accelerazione di gravità.

Supporremo inoltre che gli estremi A, B del filo siano liberi e soggetti a forze finite \vec{F}_0 e \vec{F}_1 , o comunque vincolati e, in questo caso, \vec{F}_0 e \vec{F}_1 sono le reazioni dei vincoli.

Ciò posto, ci proponiamo di ricercare le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un filo. A questo scopo, stabilito sul filo come verso positivo di percorrenza quello che va da A a B , potremo far corrispondere ad ogni punto M generico del filo un valore di un certo parametro s che sarà la lunghezza del tratto di filo compreso fra A ed M , quindi $s^2)$ varierà fra 0 e l , se l è la lunghezza del filo; scriveremo perciò:

$$M = M(s), \quad s = (0, l). \quad (8.5.1)$$

Ora, per ricercare le condizioni necessarie per l'equilibrio, ammetteremo il seguente postulato.

Ad ogni punto $M = M(s)$ del filo (ossia ad ogni valore di s) corrisponde uno ed un solo vettore $\vec{\tau}(s)$ tale che, se il filo è in equilibrio e viene tagliato in M , applicando in M

[†] Graffi Dario: Elementi di Meccanica Razionale - Casa Editrice Prof. Riccardo Patron, Bologna, 1964.

¹⁾ Salvo gli estremi, come preciseremo fra poco.

²⁾ Detta anche ascissa curvilinea di M sul filo.

la forza $\vec{\tau}(s)$ il tratto AM del filo rimane in equilibrio. Questo vettore $\vec{\tau}(s)$ si chiama **tensione del filo** e rappresenta in certo modo l'azione del tratto MB del filo sul tratto AM (fig.8.5.2).

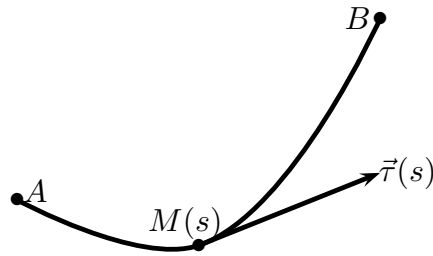


fig.8.5-2

Analogamente ammetteremo l'esistenza di un vettore $\vec{\tau}'(s)$ che mantiene in equilibrio il tratto MB di filo tagliato in M .

Allora, se il tratto AM é in equilibrio sotto l'azione delle forze \vec{F}_0 , $\vec{\tau}(s)$ e della $\vec{f}ds$ distribuita in tutti gli elementi del filo compresi fra 0 e s , il vettore risultante di queste forze deve essere nullo e si ha:³⁾

$$\vec{F}_0 + \int_0^s \vec{f}ds + \vec{\tau}(s) = 0; \tag{8.5.2}$$

Per l'equilibrio del tratto MB si ha ancora:

$$\vec{F}_1 + \int_s^l \vec{f}ds + \vec{\tau}'(s) = 0. \tag{8.5.3}$$

Sommando queste due equazioni si ottiene:

$$\vec{F}_0 + \vec{F}_1 + \int_0^l \vec{f}ds + \vec{\tau}(s) + \vec{\tau}'(s) = 0. \tag{8.5.4}$$

Ora la somma dei primi tre termini deve essere nulla, perché é il vettore risultante di tutte le forze e reazioni vincolari esterne applicate al filo; si ottiene quindi:

$$\boxed{\vec{\tau}(s) = -\vec{\tau}'_s}, \tag{8.5.5}$$

cioé l'azione del tratto MA su MB é uguale ma di verso opposto a quella di MB su MA , come si comprende subito pensando al principio di azione e reazione.

³⁾ Si osservi infatti che la somma dei vettori $\vec{f}ds$, che sono quantità infinitesime, vale il loro integrale da 0 a s .

Se ora facciamo nella (8.5.2) $s = 0$ e nella (8.5.3) $s = l$; abbiamo:

$$\vec{F}_0 + \vec{\tau}(0) = 0, \quad \vec{F}_1 + \vec{\tau}'(l) = \vec{F}_1 - \vec{\tau}(l) = 0 \quad (8.5.6)$$

e queste sono le cosiddette equazioni ai limiti per l'equilibrio dei fili, perché valide solo nei loro estremi.

Derivando la (8.5.2) rispetto ad s abbiamo subito:

$$\boxed{\vec{f} + \frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0,} \quad (8.5.7)$$

e questa é l'equazione indefinita dell'equilibrio, perché valida in ogni punto del filo.

8.6 - Date le forze che agiscono su un filo, determinare la configurazione di equilibrio

Scegliamo un sistema di riferimento O, x, y, z , indipendente dalla curva; la sua origine e il suo orientamento saranno scelti in modo opportuno in base alle proprietà delle forze che agiscono sul filo.

Siano:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad (8.6.1)$$

le equazioni parametriche **incognite** della curva e X, Y, Z le componenti di \vec{f} .

Il vettore tensione τ risulta sempre tangente alla curva e, quindi, può scriversi:

$$\vec{\tau} = \tau \hat{t} \quad (8.6.2)$$

essendo \hat{t} il versore tangente alla curva. Tale versore, essendo di modulo unitario, ha per componenti i coseni degli angoli α, β, γ che la tangente forma con gli assi, quindi:

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds} \quad (8.6.3)$$

Proiettando la (8.5.7) sugli assi, abbiamo:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dx}{ds} \right) + X = 0 \\ \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dy}{ds} \right) + Y = 0 \\ \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dz}{ds} \right) + Z = 0; \end{cases} \quad (8.6.4)$$

A queste equazioni si aggiunge l'altra, semplice conseguenza del fatto che \hat{t} é unitario:

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1; \quad (8.6.5)$$

Nelle equazioni (8.6.3) le forze si suppongono note, piú precisamente X, Y, Z sono funzioni note di x, y, z . Allora le (8.6.4) e (8.6.5) costituiscono quattro equazioni differenziali nelle quattro incognite $x(s), y(s), z(s)$ e $\tau(s)$.

L'integrale generale di questo sistema dipende da sei costanti arbitrarie $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$, cioè si potrà scrivere:

$$\begin{cases} x = x(s, C_1 \dots C_6) \\ y = y(s, C_1 \dots C_6) \\ z = z(s, C_1 \dots C_6). \end{cases} \quad (8.6.6)$$

Questo risultato si può provare, sommariamente, nel seguente modo. Posto:

$$x_1 = \frac{dx}{ds}, \quad y_1 = \frac{dy}{ds}, \quad z_1 = \frac{dz}{ds}, \quad (8.6.7)$$

le (8.6.4) si possono scrivere eseguendo le derivate rispetto ad s :

$$\begin{cases} \tau \frac{dx_1}{ds} + x_1 \frac{d\tau}{ds} + X = 0 \\ \tau \frac{dy_1}{ds} + y_1 \frac{d\tau}{ds} + Y = 0 \\ \tau \frac{dz_1}{ds} + z_1 \frac{d\tau}{ds} + Z = 0 \end{cases} \quad (8.6.8)$$

e derivando la (8.6.5):

$$x_1 \frac{dx_1}{ds} + y_1 \frac{dy_1}{ds} + z_1 \frac{dz_1}{ds} = 0; \quad (8.6.9)$$

le (8.6.7), (8.6.8), (8.6.9) costituiscono sette equazioni del primo ordine nelle sette incognite $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \tau$. Il loro integrale generale conterrà sette costanti arbitrarie, ma dovendo x_1, y_1, z_1 soddisfare la (8.6.5), risulta un'altra equazione fra queste sette costanti che vengono ridotte a sei indipendenti, conforme a quanto si era annunciato.

Se gli estremi AB del filo sono fissati, risultano note le loro coordinate, allora ponendo nelle (8.6.6) prima 0 poi l in luogo di s e ai primi membri di queste espressioni rispettivamente le coordinate di A e B , si determinano le sei costanti. Se invece sono note le forze \vec{F}_0 e \vec{F}_1 applicate agli estremi del filo, si otterranno, per le (8.5.6), altre sei equazioni uguagliando le componenti di queste due forze rispettivamente alle componenti di $\vec{\tau}(0)$, $\vec{\tau}(l)$.

In ogni caso, le costanti devono essere reali e fornire le x, y, z come funzioni reali e finite di s (per $0 < s < l$) e la τ reale e positiva. Altrimenti la posizione di equilibrio non esiste.

8.7 - Filo soggetto a forze parallele. Catenaria

Supponiamo parallele fra loro le forze distribuite agenti sul filo, come accade, per esempio, quando il filo é soggetto solo al suo peso. Allora dimostreremo che é piana la curva secondo cui si dispone il filo.

Scegliamo l'asse z parallelo alle forze: sar  allora $X = 0, Y = 0$; dalle due prime di (8.6.3) abbiamo:

$$\frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dx}{ds} \right) = 0, \quad \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dy}{ds} \right) = 0, \quad (8.7.1)$$

da cui, integrando,

$$\tau \frac{dx}{ds} = C, \quad \tau \frac{dy}{ds} = C_1 \quad (8.7.2)$$

dove C e C_1 sono costanti. Dividendo fra loro le (8.7.2), abbiamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{C}, \quad (8.7.3)$$

cio  il coefficiente angolare della proiezione sul piano xy della curva che rappresenta il filo   costante.¹⁾ e tale proiezione sar  una retta.

Quindi la curva sar  piana perch  tutta contenuta in un piano normale a xy . Ovviamente, su questo piano si dovranno trovare gli estremi AB della curva e le forze \vec{F}_0 e \vec{F}_1 . Ricordando (§Introduzione, n.30) che $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$ sono i coseni che la tangente al filo (ossia la tensione $\vec{\tau}$) forma con gli assi xy , dalle (8.7.2) si ha che, in un filo soggetto a forze parallele, la proiezione della tensione nelle direzioni normali alle forze   costante.

Passiamo ora alla ricerca della configurazione d'equilibrio di un filo omogeneo soggetto solo al suo peso. Posto l'asse z verticale, per quanto si   dimostrato nel numero precedente il filo giacer  in un piano verticale, che, scelto opportunamente l'asse x , si potr  fare coincidere con il piano xz . Riprendiamo allora la prima delle (8.7.2) (la seconda si riduce ad una identit  con $C_1 = 0$ perch  rimanendo il filo sul piano xz   sempre $\frac{dy}{ds} = 0$ cio 

$$\tau \frac{dx}{ds} = C. \quad (8.7.4)$$

La costante C si pu  sempre ritenere positiva scegliendo il verso dell'asse x in modo che $\frac{dx}{ds}$ (che ha lo stesso segno di C perch  $\tau > 0$) risulti positivo.

Ci  posto, riprendiamo la terza delle (8.6.3). Come abbiamo osservato al n. 102, se la forza distribuita si riduce al peso, \vec{f} vale $-\mu\vec{k}$, quindi $Z = -\mu$.

Si ha allora:

$$\frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dz}{ds} \right) = \mu, \quad (8.7.5)$$

¹⁾ Si ricordi che se

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s)$$

sono le equazioni di una curva, la sua proiezione sul piano xy ha per equazioni:

$$x = x(s), \quad y = y(s).$$

e ricavando τ dalla (8.7.4) e sostituendo nella (8.7.5) abbiamo:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dz}{dx} \right) = \frac{\mu}{C}. \quad (8.7.6)$$

Ora, dalla (8.6.4), essendo $\frac{dy}{ds} = C_1 = 0$, si ha, moltiplicando per ds^2 e estraendo la radice quadrata,

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2} = dx \sqrt{1 + z'^2}, \quad (8.7.7)$$

avendo posto $\frac{dz}{dx} = z'$.

Il primo membro dell'equazione (8.7.6) si può scrivere:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dz}{dx} \right) = \frac{dz'}{ds} = \frac{dz'}{dx} \frac{dx}{ds} \quad (8.7.8)$$

Poiché dalla (8.7.7) risulta:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}} \quad (8.7.9)$$

la (8.7.8) si può scrivere:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dz}{dx} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}} \frac{dz'}{dx} \quad (8.7.10)$$

Ponendo ancora $\frac{\mu}{C} = \frac{1}{b}$ ($b > 0$), la (8.7.6) diventa:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}} \frac{dz'}{dx} = \frac{1}{b}} \quad (8.7.11)$$

Da questa equazione si ha intanto che $z'' = \frac{dz'}{dx}$ é sempre positiva, cioè la curva non ha massimi e può perciò presentare, al più, un solo minimo, come del resto é intuitivo.

Separando nella (8.7.11) le variabili z' e x si ha:

$$\frac{dz'}{\sqrt{1 + z'^2}} = \frac{1}{b} dx, \quad (8.7.12)$$

Per risolvere l'integrale del primo membro, poniamo:

$$\sqrt{1 + z'^2} = -z' + t \quad (8.7.13)$$

Elevando al quadrato si ottiene:

$$1 + z'^2 = z'^2 + t^2 - 2z't \quad \text{da cui} \quad z' = \frac{t^2 - 1}{2t} \quad \text{e, quindi} \quad dz' = \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt \quad (8.7.14)$$

Quindi:

$$\sqrt{1 + z'^2} = -z' + t = -\frac{t^2 - 1}{2t} + t = \frac{t^2 + 1}{2t} \quad (8.7.15)$$

Ne segue che:

$$\int \frac{dz'}{\sqrt{1 + z'^2}} = \int \frac{2t}{t^2 + 1} \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln t + c \quad (8.7.16)$$

Essendo $t = \sqrt{z'^2 + 1} + z'$, in definitiva, si ha:

$$\int \frac{dz'}{\sqrt{1 + z'^2}} = \ln \left(\sqrt{z'^2 + 1} + z' \right) + c \quad (8.7.17)$$

Integrando anche il secondo membro si ottiene infine:

$$\log \left(\sqrt{1 + z'^2} + z' \right) = \frac{x}{b} + \log k \quad (8.7.18)$$

dove k è una costante di integrazione.²⁾ Passando dai logaritmi ai numeri si ha:

$$\sqrt{1 + z'^2} + z' = ke^{+\frac{x}{b}}. \quad (8.7.19)$$

Per calcolare z' , isoliamo, nella (8.7.19) il radicale, e poi innalziamo al quadrato. Si trova:

$$1 + z'^2 = k^2 e^{+2\frac{x}{b}} - 2ke^{+\frac{x}{b}} z' + z'^2 \quad (8.7.20)$$

da cui, risolvendo rispetto a z' :

$$z' = -\frac{1 - k^2 e^{+2\frac{x}{b}}}{2ke^{+\frac{x}{b}}} = -\frac{e^{-\frac{x}{b}} - k^2 e^{+\frac{x}{b}}}{2k} = \frac{1}{2} \left(ke^{+\frac{x}{b}} - \frac{1}{k} e^{-\frac{x}{b}} \right). \quad (8.7.21)$$

Integrando questa equazione si potrebbe ottenere z in funzione di x ; conviene però, per semplificare le cose, porre l'origine degli assi nel punto in cui $z' = 0$ cioè nel punto di minimo della curva. Se per $x = 0$ deve essere $z' = 0$, si ha:

$$k - \frac{1}{k} = 0, \quad (8.7.22)$$

²⁾ vedi Giuseppe Zwirner: Esercizi e Complementi di Analisi Matematica, parte seconda - CEDAM, Padova, 1965, pag. 42, n. 2.

ossia:

$$k = \pm 1; \tag{8.7.23}$$

ma si vede subito che k deve assumere il valore $+1$, altrimenti z'' risulterebbe negativo.³⁾
Allora é:

$$z' = \frac{1}{2} \left(e^{+\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}} \right) = \sinh \left(\frac{x}{b} \right). \tag{8.7.24}$$

Integrando si ha:

$$z = \frac{b}{2} \left(e^{+\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}} \right) + k_1 = b \cosh \left(\frac{x}{b} \right) + k_1 \tag{8.7.25}$$

dove k_1 é una costante di integrazione che si determina osservando che, per $x = 0$, deve essere $z = 0$, poiché la curva passa per l'origine. Si ha allora $k_1 = -b$, quindi l'equazione della curva che rappresenta il filo é:

$$z = \frac{b}{2} \left(e^{+\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}} \right) - b = b \cosh \left(\frac{x}{b} \right) - b$$

Catenaria Omogenea (8.7.26)

In figura (8.7-1) riportiamo il grafico di una catenaria data dall'equazione (8.7.26) con $b = 5$. Riportiamo anche, solo per confronto, il grafico di una parabola passante per i punti

³⁾ Infatti:

$$z'' = \frac{1}{2b} \left(k e^{+\frac{x}{b}} + \frac{1}{k} e^{-\frac{x}{b}} \right)$$

sarebbe, per $k = -1$, negativa, mentre deve essere $z'' > 0$.

A, B e avente lo stesso minimo.

Catenaria Omogenea : $b = 5$

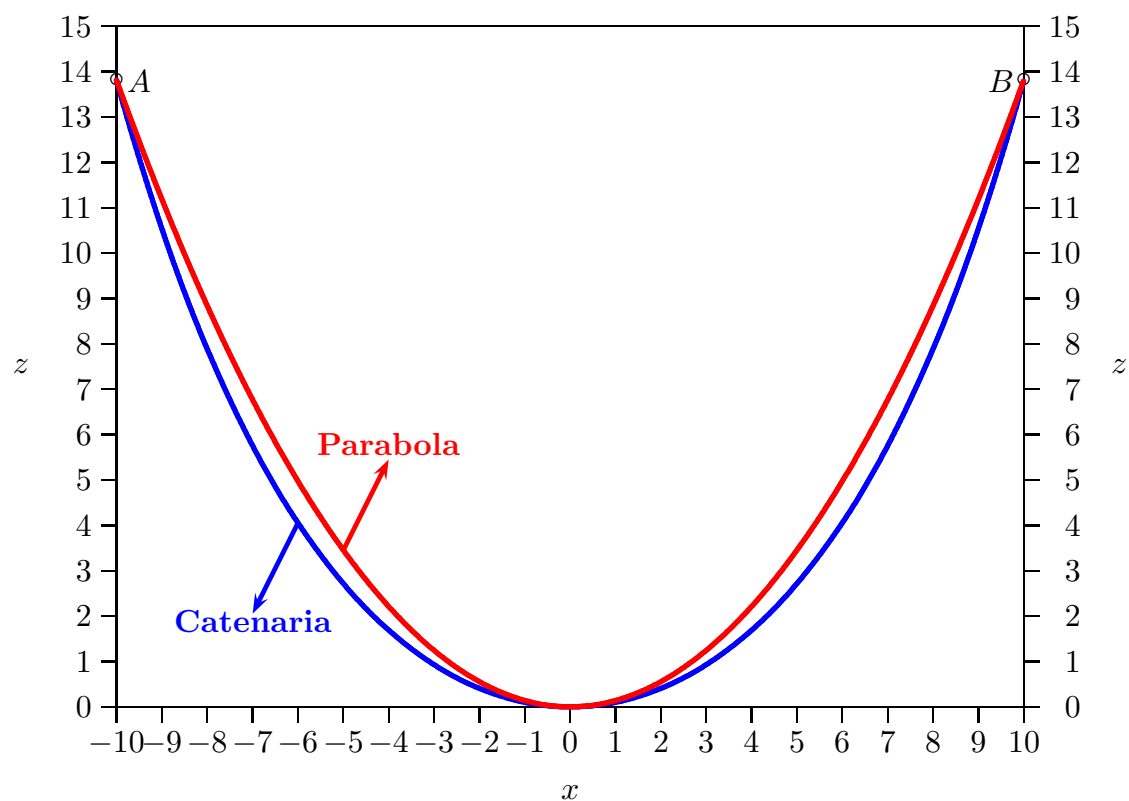


fig.8.7-1

Per comprendere le proprietà di questa curva, detta **catenaria omogenea**,⁴⁾ determinata per la prima volta da **Huyghens**,⁵⁾ osserviamo che per x abbastanza grande rispetto a b (e positivo) il termine $e^{-\frac{x}{b}}$ diventa trascurabile rispetto a $e^{+\frac{x}{b}}$ e allora la catenaria si confonde con una esponenziale crescente. Per x grande in valore assoluto, ma negativo, $e^{+\frac{x}{b}}$ diventa trascurabile rispetto a $e^{-\frac{x}{b}}$ e la z tende a un esponenziale decrescente. Per x piccolo rispetto a b , sviluppando l'esponenziale in serie e trascurando la potenza di $+\frac{x}{b}$ superiori alla terza, si ha:

$$z = \frac{b}{2} \left(1 + \frac{x}{b} + \frac{x^2}{2b^2} + \frac{x^3}{3!b^3} + 1 - \frac{x}{b} + \frac{x^2}{2b^2} - \frac{x^3}{3!b^3} \right) - b = \frac{x^2}{2b}, \quad (8.7.27)$$

cioè la catenaria per valori di x prossimi al minimo si confonde con una parabola. In altre parole la catenaria è, grosso modo, formata da due esponenziali: una crescente, l'altra decrescente raccordate da un arco di parabola (fig.8.7-1).

⁴⁾ Si noti che cambiando x in $-x$ l'equazione di questa curva non cambia. Perciò non è necessario per rappresentarla scegliere il verso di x in modo che la costante C risulti positiva. questa scelta si è fatta solo per facilitare l'esposizione.

⁵⁾ Cristiano Huyghens nato all'Aia nel 1629, morto ivi nel 1685.

Supponiamo ora il filo ancora soggetto al suo peso (e perciò si disporrà sul piano verticale xz), ma non omogeneo, anzi tale che la densità di un suo elemento, invece di essere proporzionale alla lunghezza ds dell'elemento stesso, sia proporzionale alla sua proiezione orizzontale dx . Se quindi p è una costante si avrà:

$$\vec{f}ds = -pdx\hat{z} \quad (8.7.28)$$

ossia:

$$Z = -p\frac{dx}{ds}, \quad (8.7.29)$$

e perciò la (8.7.5) diviene:

$$\frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dz}{ds} \right) = p \frac{dx}{ds} \quad (8.7.30)$$

e integrando ambo i membri:

$$\tau \frac{dz}{ds} = px + C_1 \quad (8.7.31)$$

dove C_1 è una costante arbitraria.

Ora dalla (8.7.2) ricaviamo τ che, sostituito in questa equazione, ci dá:

$$C \frac{ds}{dx} \frac{dz}{ds} = px + C_1 \quad (8.7.32)$$

e integrando ancora:

$z = \frac{p}{2C}x^2 + \frac{C_1}{C}x + C_2,$	}	Parabola o Catenaria dei Ponti Pensili (8.7.33)
---	---	--

dove C_2 è un'altra costante arbitraria, determinabile insieme a C_1 e a C_2 con le condizioni agli estremi.

La (8.7.33) rappresenta una parabola, detta catenaria dei ponti pensili, che rappresentiamo in figura (8.7-1).

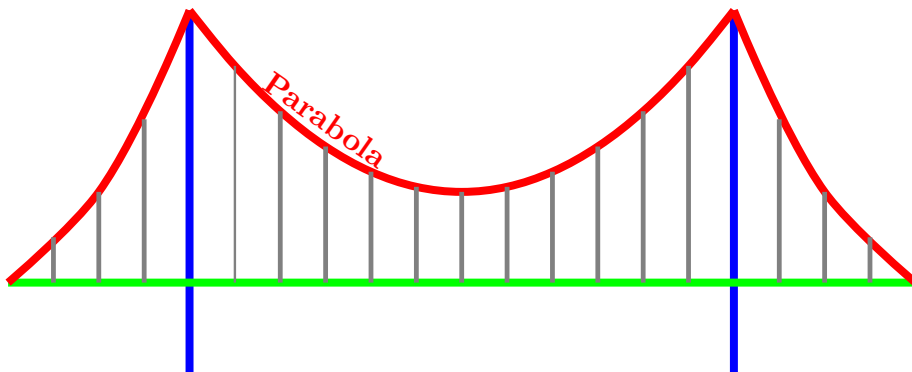


fig.8.7-1

8.8 - Equilibrio di un filo adagiato su una superficie

Determiniamo ora le condizioni di equilibrio per un filo appoggiato a una superficie di equazione nota $\phi(x, y, z) = 0$. Detta $w'ds$ la reazione vincolare dell'appoggio su un elemento generico di filo (ammetteremo, come intuitivo, che tale reazione sia dell'ordine di ds), per il postulato delle reazioni vincolari il filo potrà considerarsi libero purché alla forza distribuita \vec{f} si aggiunga \vec{w}' quindi l'equazione indefinita dell'equilibrio diventa:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} + \vec{f} + \vec{w}' = 0. \quad (8.8.1)$$

Sarà poi ancora valida la (8.5.11); le condizioni ai limiti restano le (8.5.6), perché le reazioni della superficie agli estremi del filo sono infinitesime rispetto a \vec{F}_0 e \vec{F}_1 . Mediante la (8.8.1) é possibile studiare i vari problemi che si presentano nella teoria dei fili appoggiati, noi però ci limiteremo a considerare il caso semplice ed interessante del filo non soggetto a forze distribuite, cioè supporremo nella (8.8.1) $\vec{f} = 0$. Però, poiché ammetteremo che la superficie sia dotata anche di attrito, \vec{w}' avrà due componenti, una w normale alla superficie di appoggio e orientata da questa verso il filo, l'altra w_t tangente anche al filo, in quanto escluderemo moti che portano i punti interni del filo fuori della linea su cui é adagiato. Anzi, supponendo l'eventuale moto del filo nel verso degli archi crescenti, w_t sarà in verso opposto a t ; inoltre per le leggi dell'attrito, supponendo $|w_t|$ massima, si avrà:

$$|w_t| = \epsilon w, \quad (8.8.2)$$

dove ϵ é il coefficiente di attrito.

Ora, detti α, β, γ gli angoli fra la normale \vec{v} alla superficie (orientata verso il filo) e $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ e tenendo presente che é $\cos \alpha = 0$, si ha, scrivendo le componenti della (8.8.1) con $\vec{f} = 0$ lungo la tangente, la normale e la binormale al filo,

$$\frac{d\tau}{ds} - \epsilon w = 0, \quad \frac{\tau}{\rho} + w \cos \beta = 0, \quad w \cos \gamma = 0. \quad (8.8.3)$$

Ora, se $w \neq 0$, la terza equazione é soddisfatta solo se $\cos \gamma = 0$ cioè se $\gamma = \frac{\pi}{2}$, ossia se la binormale \vec{b} é normale a \vec{v} , in altre parole se \vec{b} é tangente alla superficie. Ciò significa che il piano osculatore al filo (normale a \vec{b}) é normale alla superficie; questa proprietà é soddisfatta da quelle linee della superficie dette geodetiche, perché rappresentano il cammino piú breve fra due punti, abbastanza vicini, della superficie.¹⁾

Se fosse invece $w = 0$, dovrebbe essere $\frac{1}{\rho}$, altrimenti dalla seconda di (8.8.3) risulterebbe $\tau = 0$ contrariamente all'ipotesi che agli estremi agiscano le forze \vec{F}_0 e \vec{F}_1 . Il filo si dispone allora secondo una retta (superficie rigata) che é ancora una geodetica della superficie²⁾

¹⁾ Ad esempio le geodetiche della sfera sono cerchi massimi (essi giacciono infatti in piani normali alla superficie), le geodetiche del cilindro sono le eliche, ecc..

²⁾ É ovvio che questa proprietà vale anche se la componente dell'attrito non é la massima possibile, purché sia diretta secondo la tangente al filo.

Se la superficie non ha attrito ($\epsilon = 0$), si ha, dalle (8.8.3), che τ é costante su tutto il filo. Quindi $\tau(0) = \tau(l)$, e, dalle condizioni ai limiti, $\vec{F}_0 = \vec{F}_1$, cioè **un filo non soggetto a forze distribuiti e adagiato su una superficie liscia é tenuto in equilibrio da due forze agli estremi uguali in modulo, ma di direzione, in generale, diversa.** É quanto avviene nella carrucola qualora si trascuri l'attrito e il peso proprio del filo.

Supposta la superficie con attrito, limitiamoci a considerare il caso semplice, ma interessante, di un cilindro, su cui é avvolto un filo, secondo un'elica, geodetica del cilindro. In questo caso l'angolo β fra \vec{v} ed \vec{n} (\vec{n} diretto verso l'interno della superficie, \vec{v} verso il suo esterno) vale π sicché dalla seconda di (8.8.3) si ricava:

$$w = \frac{\tau}{\rho}, \tag{8.8.4}$$

che sostituita nella prima di (8.8.3) dá:

$$\frac{d\tau}{ds} = \epsilon \frac{\tau}{\rho} \tag{8.8.5}$$

Ora, se $d\theta$ é l'angolo fra due tangenti infinitamente vicine, sappiamo che, per la definizione del raggio di curvatura é:

$$\rho = \frac{ds}{d\theta}, \tag{8.8.6}$$

quindi si ha:

$$\frac{d\tau}{ds} - \epsilon \tau \frac{d\theta}{ds} = 0, \tag{8.8.7}$$

da cui, separando le variabili e integrando, si ricava:

$$\log \tau = \epsilon \theta + \log c \tag{8.8.8}$$

dove c é una costante arbitraria. Passando infine dai logaritmi ai numeri possiamo scrivere:

$$\tau = ce^{\epsilon\theta}. \tag{8.8.9}$$

L'angolo θ si supponga contato a partire dalla tangente nell'estremo A del filo. Per determinare c , si noti che per $\theta = 0$ si ha $s = 0$ e τ si riduce a $\tau(0)$, che vale il modulo \vec{F}_0 della forza \vec{F}_0 applicata in A , sicché c vale F_0 .

Se poi α é l'angolo di cui deve ruotare la tangente in A per raggiungere quella in B , ponendo α in luogo di θ , τ assumerá il valore $\tau(l)$, ossia F_1 . Quindi sará:

$$F_1 = F_0 e^{\epsilon\alpha}. \tag{8.8.10}$$

Questa formula ci dice che F_1 non é uguale a F_0 come avevamo trovato nel paragrafo precedente nell'ipotesi di superficie liscia. Non solo, ma essendo $e^{\epsilon\alpha} > 1$, sará $F_1 > F_0$.

Anzi, un calcolo molto semplice permette di apprezzare il rapporto fra F_0 e F_1 . Se la corda é avvolta in n spire sul cilindro, si ha $\alpha = 2\pi n$ e quindi la (8.8.10) diviene:

$$F_1 = F_0 e^{2\pi n \epsilon}. \quad (8.8.11)$$

D'altra parte per corda su legno ϵ vale circa 0.3; se quindi le spire sono 10 si ha, approssimativamente,

$$\frac{F_1}{F_0} = e^3 \cdot 6.28 = 1.4 \cdot 10^9. \quad (8.8.12)$$

Ciò spiega come, mediante una corda avvolta su un cilindro, si possono equilibrare sforzi relevantissimi, e, in particolare, per citare un esempio a tutti noto, come pochi uomini possano frenare una nave, anche delle maggiori, con tutta facilitá.

8.9 - Fluidi

É utile in meccanica distinguere fra corpi solidi e corpi fluidi. Un **fluido** é una sostanza che puó fluire. Pertanto con il termine di fluidi si intendono sia i liquidi sia i gas. Poiché un corpo solido ha un volume ed una forma ben definiti, la meccanica dei solidi é la meccanica del corpo rigido, modificata e corretta dalle leggi dell'elasticitá nel caso di quei corpi che non possono essere considerati perfettamente rigidi.

I fluidi invece mutano facilmente di forma e il loro comportamento meccanico non puó essere quindi descritto per questa via.

Naturalmente vi sono poi cospicue differenze fra liquidi e gas; per esempio mentre i gas sono facilmente compressibili, i liquidi sono praticamente incompressibili; inoltre i liquidi hanno un volume definito, mentre invece i gas si espandono sino ad occupare tutto il volume del recipiente chiuso che li contiene.

8.10 - Pressione e densitá

Quando un fluido é in equilibrio statico, una forza applicata sul fluido é sempre normale alla superficie. Un fluido infatti non puó conservare il suo stato di quiete sotto l'azione di una forza tangenziale; straterelli di fluido inizierebbero a scivolare gli uni sugli altri non appena soggetti a una tale forza.

É quindi conveniente descrivere la forza che agisce su di un fluido specificando la **pressione** p , definita dal valore della **componente normale della forza che agisce sulla unitá di superficie**. La pressione é quindi una grandezza scalare. e si misura in *Newton/m²*, ossia se F_n é la componente normale della forza che agisce sulla superficie S di un fluido, la pressione é:

$$p = \frac{F_n}{S} \quad (8.10.1)$$

la **densitá** ρ di un fluido omogeneo é la sua massa divisa per il suo volume e si misura in *Kg/m³*:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (8.10.2)$$

La densità può dipendere da molti fattori, quali la temperatura e la pressione del fluido stesso. Nel caso dei liquidi la densità varia molto poco con la pressione e la temperatura cosicché anche per ampie variazioni di queste ultime noi la possiamo considerare costante. Al contrario la densità di un gas é molto sensibile a variazioni di temperatura e pressione.

Densità (in Kg/m^3) a 0^0 0C e 1 atm. di pressione

Gas

<i>Aria</i>	1.293
<i>Anidride Carbonica (CO_2)</i>	1.977
<i>Elio (He)</i>	0.1785
<i>Idrogeno (H_2)</i>	0.0899
<i>Ossigeno (O_2)</i>	1.429
<i>Azoto (N_2)</i>	1.251

Liquidi

<i>Etere</i>	$0.73 \cdot 10^3$
<i>Alcol Etilico</i>	$0.81 \cdot 10^3$
<i>Mercurio</i>	$13.6 \cdot 10^3$
<i>Olio d'oliva</i>	$0.92 \cdot 10^3$
<i>Acqua di mare</i>	$1.03 \cdot 10^3$
<i>Acqua</i>	$1.00 \cdot 10^3$

Solidi

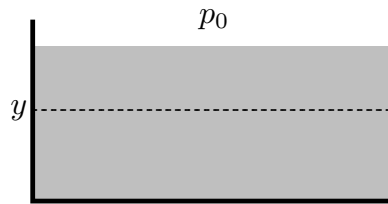
<i>Alluminio</i>	$2.70 \cdot 10^3$
<i>Ottone (approssimato)</i>	$8.5 \cdot 10^3$
<i>Rame</i>	$8.9 \cdot 10^3$
<i>Sughero (approssimato)</i>	$0.24 \cdot 10^3$
<i>Oro</i>	$19.3 \cdot 10^3$
<i>Ghiaccio</i>	$0.92 \cdot 10^3$
<i>Ferro (approssimato)</i>	$7.6 \cdot 10^3$
<i>Piombo</i>	$11.3 \cdot 10^3$
<i>Platino</i>	$21.4 \cdot 10^3$
<i>Argento</i>	$10.5 \cdot 10^3$
<i>Legno (Olmo) (approssimato)</i>	$0.57 \cdot 10^3$
<i>Legno (Pino bianco)</i>	$0.42 \cdot 10^3$
<i>Zinco</i>	$7.1 \cdot 10^3$

8.11 - La variazione di pressione in un fluido a riposo - Legge di Stevin¹⁾

L'esperienza dimostra che man mano che ci si immerge in mare la pressione che agisce sulla superficie di un corpo immerso aumenta con la profondità. Questo é dovuta al peso dell'acqua al di sopra della superficie. Consideriamo, allora, un recipiente pieno di liquido

¹⁾ Simone Stevino, italianizzato da Simon Stevin, latinizzato Stevinus, noto anche come Simone di Bruges (Bruges (Belgio), 1548 - L'Aia (Paesi Bassi), 1620).

generico, come in figura:



Sia p_0 la pressione atmosferica che agisce sulla superficie del liquido esposta all'aria. La pressione che agisce sulla superficie profonda y é data dalla somma della pressione atmosferica e del peso del liquido al di sopra della superficie y diviso l'estensione della superficie stessa. Il peso di una colonna di liquido di estensione A e di altezza y é:

$$Peso = m_{liquido}g \quad (8.11.1)$$

essendo g l'accelerazione di gravità in prossimità della superficie terrestre.

Ma:

$$m = \rho_{liquido}V_{liquido} = \rho_{liquido}Ay \quad (8.11.2)$$

Quindi:

$$Peso = \rho Ayg \quad (8.11.3)$$

Dividendo per A (estensione della superficie del liquido), otteniamo la pressione esercitata da una colonna di liquido alta y , ossia:

$$p = \frac{Peso}{A} = \rho gy \quad (8.11.4)$$

Ne segue che la pressione totale che si esercita su una superficie profonda y al di sotto della superficie esterna del liquido é data:

$$p = p_0 + \rho gy$$

Legge di Stevino (8.11.5)

che é la cosiddetta legge di **Stevin**.

Per i gas la densità ρ é relativamente piccola e quindi la differenza di pressione fra due punti é di solito trascurabile. Conseguentemente, la pressione esistente in un recipiente contenente gas puó essere supposta costante ovunque.

8.12 - Legge di Archimede¹⁾

Un corpo immerso in un fluido subisce una forza dal basso verso l'alto pari al peso del volume del fluido spostato.

¹⁾ Archimede di Siracusa, 287 a.C. circa - Siracusa, 212 a.C.

Sul come Archimede sia arrivato alla formulazione di tale legge esiste il racconto di Vitruvio²⁾ nel De Architectura:³⁾

"Archimede ha fatto una quantità di scoperte straordinarie ed eccezionalmente geniali. Fra esse voglio parlare soprattutto di una che porta i segni di una grande intelligenza. Quando Gerone regnava a Siracusa, per le sue fortunate imprese volle offrire ad un certo santuario una corona d'oro che aveva ammirato. Decise il prezzo dell'opera con un artista, e gli consegnò la quantità di oro necessaria. A suo tempo la corona finita fu consegnata, con piena soddisfazione del re, e anche il peso della corona risultò coincidente con quello dell'oro. Più tardi, però, Gerone ebbe motivo di sospettare che l'artista avesse sottratto una parte dell'oro e l'avesse sostituita con egual peso di argento. Indignato per l'inganno, ma non riuscendo a trovare il modo di dimostrarlo, pregò Archimede di studiare la questione. Un giorno che, tutto preso da questo pensiero, Archimede era entrato in un bagno, si accorse che mano a mano che il suo corpo si immergeva, l'acqua traboccava. Questa osservazione gli diede la soluzione del problema. Si slanciò fuori dal bagno e tutto emozionato si precipitò nudo verso casa, gridando con tutte le forze che aveva trovato quel che cercava: Eureka!, Eureka!"

Si dice che Egli abbia preparato due blocchi di peso uguale a quello della corona, uno d'oro e l'altro d'argento. Ciò fatto riempì un grande vaso d'acqua fino all'orlo e vi immerse il blocco d'argento. Dal vaso traboccò una quantità d'acqua pari al volume immerso. Estratto poi il blocco, riversò, misurandola, tanta acqua quanta ne era traboccata, finché il livello raggiunse di nuovo il bordo. Trovò così quale quantità d'acqua a corrispondeva a un dato peso d'argento.

Dopo aver fatto questo esperimento, allo stesso modo immerse nel vaso pieno il blocco d'oro e dopo averlo estratto, aggiungendo acqua con lo stesso procedimento, trovò che non ne occorreva la stessa quantità, ma una quantità tanto minore quanto il volume dello stesso peso d'oro era minore di quello d'argento. Infine dopo aver riempito il vaso e avere immerso nella stessa acqua la corona trovò che ne traboccava più acqua che nel caso del blocco d'oro e così, da quanta acqua in più era defluita, determinò la proporzione dell'argento nell'oro e ottenne la prova del furto dell'aggiudicatario.⁴⁾

È troppo grossolana questa leggenda per potersi accettare; poichè Archimede, che abitava sia nella Reggia (Archimede era parente e amico del Re), sia nella propria casa, queste, come tutte le case degli antichi magnati, erano provviste di bagni, e quindi non era necessario ch'egli frequentasse i pubblici stabilimenti; né per la sua posizione sociale, a sua serietà e compostezza, sarebbe ammissibile corresse per le strade nudo e gridando la sua scoperta al pubblico, egli così modesto e riserbato!

²⁾ Marco Vitruvio Pollione (in latino Marcus Vitruvius Pollio; Formia, 80 a.C. circa dopo il 15 a.C. circa) è stato un architetto e scrittore romano, attivo nella seconda metà del I secolo a.C., considerato il più famoso teorico dell'architettura di tutti i tempi. Il suo trattato De Architectura è stato il fondamento dell'architettura occidentale fino alla fine del XIX secolo.

³⁾ Ernst Mach: La Meccanica nel suo sviluppo storico-critico - Paolo Boringhieri, Torino, 1968, pag.115.

⁴⁾ Lucio Russo: Archimede Un grande scienziato antico - Carocci Editori, 2019, pag. 52÷54.

Questa leggenda dovrebbe sparire dalla biografia di Archimede; poichè furono tutti quelli che ignoravano i principi dell'Idrostatica, che levarono su le meraviglie, e trasportando in Archimede il proprio stupore, inventarono il bagno, la nudità, le grida.⁵⁾

Si è conservata una fonte che riporta la soluzione di Archimede del problema in modo più attendibile di Vitruvio. Essa è il *Carmen de ponderibus et mensuris*, scritto intorno al 400 d.C. e attribuito a Remmio Flavino. Riportiamo, in traduzione, la parte del Carmen che interessa:⁶⁾

"Se qualcuno mescola argento al biondo oro, quanto sia e in qual modo tu lo possa scoprire, lo svelò per prima l'alta mente del maestro di Siracusa. Si racconta infatti che il re di Siracusa avesse dedicato al re degli dei una corona d'oro che aveva promesso in voto. Informato del furto - l'artefice infatti, trattenuta una parte dell'oro, vi aveva aggiunto altrettanto argento - chiese aiuto all'ingegno del concittadino, che con mente sagace scoprì quanto argento si nascondeva nel biondo oro, lasciandolo intatto com'era prima che fosse dedicato agli dei. Ti spiegherò in breve il metodo: sta' attento. Equilibra i piatti di una bilancia precisa, ponivi una libbra d'argento e una d'oro, purificati dal fuoco vorace, in modo che nessuno dei due prevalga. Immergili poi in acqua: appena il puro liquido li avrà ricevuti subito si abbassa il piatto che sostiene l'oro, perchè è più denso e anche l'acqua lo è dell'aria. Ma tu equilibra il giogo e annota la distanza dal perno centrale, quanto si sarà allontanato da lì e quante tacche dista il punto di sospensione dal peso. Supponi che disti tre dracme.⁷⁾ Sappiamo allora la differenza tra argento e oro; una libbra [d'oro] supera una libbra [d'argento] di tre dracme quando è immersa nell'acqua. Prendi poi l'oro a cui è stata mescolata una parte d'argento e un uguale peso d'argento puro e ancora sott'acqua, postili sulla bilancia, osservali: l'oro nell'acqua diverrà più pesante e ti rivelerà il furto. Se infatti la differenza sarà sei volte tre dracme, diremo che vi sono solo sei libbre d'oro, e che il resto è argento, poichè non differisce in peso l'argento dall'argento, quando è immerso nell'acqua."

Questo racconto dell'episodio (sul quale evidentemente intorno al 400 d.C. esistevano ancora buone fonti) è molto più attendibile di quello di Vitruvio, sia perchè è basato sull'idrostatica archimedeica, sia perchè come Archimede certamente sapeva, le misure di peso potevano essere effettuate con una precisione di gran lunga maggiore delle misure di volume.

Gli episodi della vita di Archimede sui quali le fonti insistono di più sono la sua partecipazione alla difesa di Siracusa assediata dai Romani, alla quale aveva contribuito con il perfezionamento di varie armi, e l'uccisione dello scienziato durante il saccheggio seguito alla presa della città.⁸⁾

8.13 - Parte sommersa di un iceberg

L'applicazione di questa legge, unitamente alla tabella del paragrafo 8.10, ci permette

⁵⁾ Pasquale Midolo: ARCHIMEDE e il suo tempo - Arnaldo Lombardo Editore, 1989, pag. 29.

⁶⁾ Ref.4, pag. 42.

⁷⁾ La dracma, prima che una moneta, era una unità di peso.

⁸⁾ Ref.4, pag. 23.

di capire perché un iceberg galleggia e soprattutto di calcolare la frazione del volume totale dell'iceberg che emerge dall'acqua.

Il peso dell'iceberg é:

$$P_i = \rho_i V_i g \quad (8.13.1)$$

Il peso del volume dell'acqua spostata che dá la forza di spinta di Archimede é:

$$P_a = \rho_a V_a g \quad (8.13.2)$$

Perché l'iceberg sia in equilibrio occorre che le due forze siano eguali, ossia:

$$\rho_a V_a g = \rho_i V_i g \quad (8.13.3)$$

che comporta:

$$\frac{V_a}{V_i} = \frac{\rho_i}{\rho_a} = \frac{0.92}{1.03} = 0.89 = 89\% \quad (8.13.4)$$

Il volume dell'acqua spostata é il volume della parte immersa dell'iceberg. Quindi l'11% in volume dell'iceberg emerge. **É chiaro che questo accade perché la densità del ghiaccio é minore della densità dell'acqua.**

8.14 - Calcolo della massa totale di una nave (Dislocamento della nave)

Un'altra applicazione importante della legge di Archimede è quella di calcolare la massa di una nave che, nella Tecnica Navale, prende il nome di *Dislocamento della nave*.

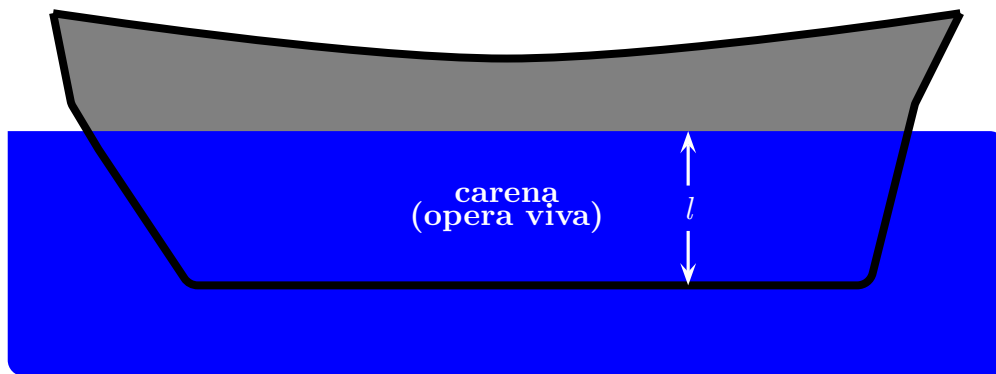


fig.8.14-1

Infatti, per la legge di Archimede, per qualunque corpo galleggiante si deve avere che il peso del corpo sia eguale al peso del volume dell'acqua spostata.

Il volume dell'acqua spostata dalla nave altro non è che il volume della parte della nave immersa che prende il nome di *carena o opera viva*. Sia V_c tale volume che si può calcolare dai piani di costruzione della nave. Indicando con ρ_{am} la densità dell'acqua di mare, risulta quindi:

$$M_{nave} \cdot g = \rho_{am} V_c \cdot g \quad (8.14.1)$$

ossia:

$$\boxed{M_{nave} = \rho_{am} \cdot V_c} \quad (8.14.2)$$

Un valore medio della densità dell'acqua di mare (vedi Tabella nel paragrafo 8.10) è $\rho_{am} = 1.03 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$.

Se la nave è immersa in acqua dolce (per esempio di fiume), il volume della carena immersa risulta maggiore, infatti indicando con V'_c tale volume, si ha:

$$\rho_{am} \cdot V_c = \rho_{ad} \cdot V'_c \quad (8.14.3)$$

essendo $\rho_{ad} = 1 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$ la densità dell'acqua dolce.

Ne segue:

$$V'_c = \frac{\rho_{am}}{\rho_{ad}} \cdot V_c = 1.03 \cdot V_c \quad (8.14.4)$$

Quindi, in acqua dolce, la nave affonda un po' di più.

Nell'ipotesi che la lunghezza e la larghezza della nave non variano di molto si può affermare che la nave affondi per una lunghezza l' data da:

$$l' = 1.03 \cdot l \quad (8.14.5)$$

Se l in acqua di mare fosse, per esempio 10 metri, la nuova profondità in acqua dolce sarà $l' = 10.3 \text{ m}$ ossia la nave affonda per ancora 30 cm.

8.15 - Forze di coesione e forze di adesione fra molecole: Forze di Van der Waals¹⁾

Le molecole che costituiscono un corpo, agiscono le une sulle altre con **forze dette di coesione** che sono forze di natura elettrica studiate in elettromagnetismo.

Il primo ad introdurre questo tipo di forze nel 1873 fu il fisico olandese Van der Waals.²⁾

Le forze di Van der Waals sono forze di natura elettrostatica relativamente deboli che attraggono le molecole neutre tra loro nei gas, nei gas liquefatti e solidificati e in quasi tutti i liquidi e solidi organici. Egli per primo postulò queste forze intermolecolari nello sviluppo di una teoria per spiegare le proprietà dei gas reali.

¹⁾ Nello Carrara: Fisica - Regia Accademia Nvale, Livorno, 1940, pag. 275÷279.

²⁾ Johannes Diderik van der Waals (Leida, Olanda, 23 novembre 1837 - Amsterdam, Olanda, 8 marzo 1923), Premio Nobel per la fisica nel 1910 "per le sue ricerche sugli stati liquido e gassoso della materia". In tali ricerche Egli considerò il volume delle molecole e le forze intermolecolari ("forze di van der Waals", come vengono generalmente chiamate oggi).

Ogni molecola ha un baricentro: le distanze fra i baricentri delle molecole contigue, che costituiscono un corpo, sono naturalmente molto esigue; nel caso dei corpi solidi e liquidi, l'ordine di grandezza di tali distanze è di 10^{-10} metri; nel caso di gas in condizioni normali di temperatura e pressione sono circa 10^{-8} metri. **Le forze di coesione dipendono dalla distanza r fra i baricentri delle molecole contigue; esse sono attrattive (e allora si considerano negative), se la distanza è maggiore di un certo limite r_0 , ma diventano repulsive (positive) al disotto di questo limite.** Lo studio di tali forze è proseguito da parte di altri importanti scienziati. In particolare il fisico inglese **Lennard-Jones**³⁾ ha presentato un modello che descrive l'andamento di tali forze. Esse sono rappresentate dalle equazioni (8.15.1) per il potenziale intermolecolare e (8.15.2) per la forza intermolecolare. L'andamento delle loro grandezze in funzione della distanza r fra i baricentri di due molecole contigue è rappresentato schematicamente in figura 8.15-1 e 8.15-2.

Il potenziale di Lennard-Jones è il risultato di due termini:⁴⁾ la parte che va con la sesta potenza è il contributo attrattivo delle forze di Van der Waals (forze dipolo-dipolo e forze dipolo-dipolo indotto) e prevale a distanze grandi; la parte che va con la potenza di dodici descrive le forze repulsive che si instaurano a corto raggio fra i nuclei, che a distanze piccole non sono più ben schermati dagli elettroni. Le forze di Van der Waals hanno un range compreso fra qualche Å e un centinaio di Å, mentre le forze repulsive sopra citate entrano in gioco a distanze minori di qualche Å. **L'entità delle forze a lungo raggio è conoscibile a partire dalla teoria di Van der Waals, mentre le forze a corto raggio sono determinate per via empirica.**

$$V(r) = V_0 \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^6 \right] \quad \text{Potenziale di Lennard-Jones} \quad (8.15.1)$$

La forza intermolecolare si ottiene dalla (8.15.1) derivando rispetto a r e cambiando di segno, ossia:

$$F(r) = -\frac{d}{dr}(V(r)) \quad (8.15.2)$$

Ne segue:

$$F(r) = 12 \frac{r_0}{r^2} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^{11} - \left(\frac{r}{r_0} \right)^5 \right] \quad \text{Forza intermolecolare} \quad (8.15.3)$$

³⁾ Sir John Lennard-Jones (Leigh, Regno Unito, 27 ottobre 1894 - Stoke-on-Trent, Regno Unito, 1 novembre 1954) matematico, fisico e chimico britannico.

⁴⁾ J. E. Lennard-Jones, Proc. Phys. Soc., 1931, 43, pag. 461-482.

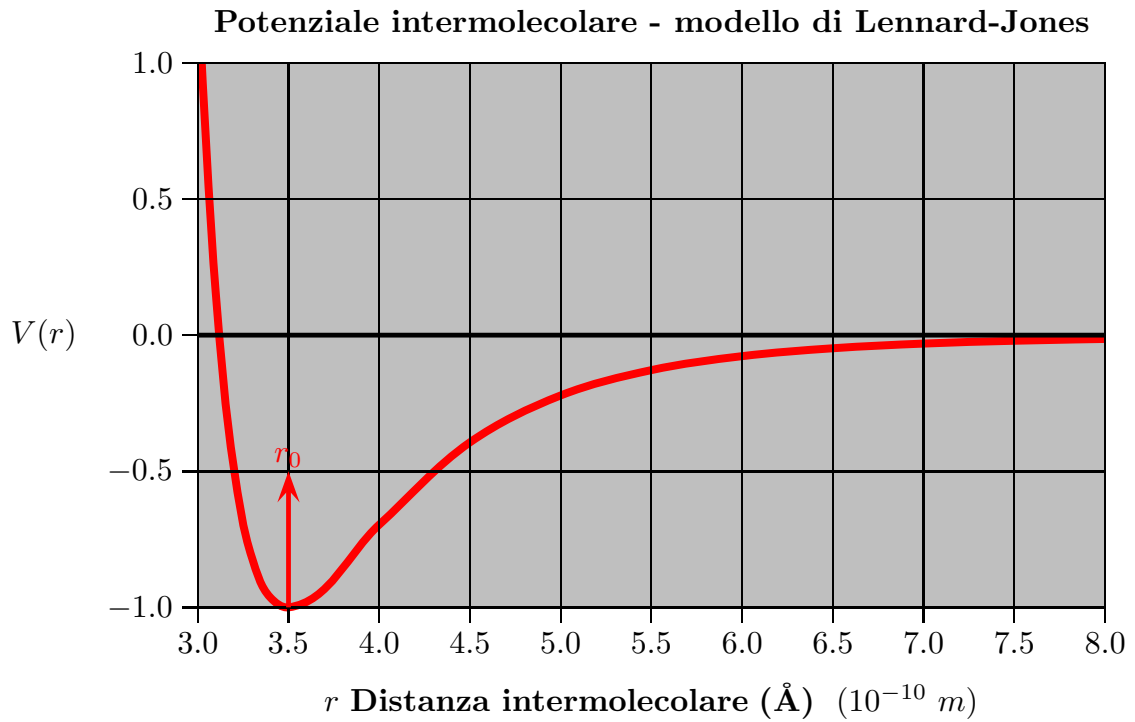


fig.8.15-1

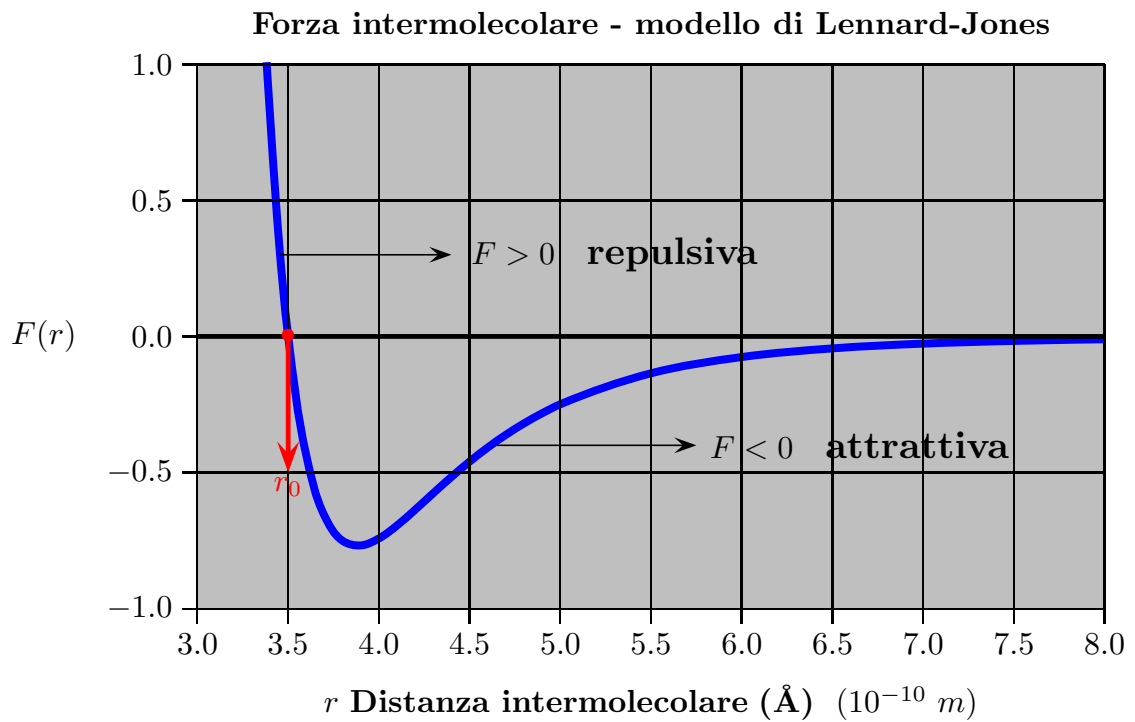


fig.8.15-2

Programma in ambiente Matlab "VanderWaals.m" per il grafico del Potenziale intermolecolare

```
01) - delete(get(0,'children'));
02) - clear all
03) - %GRAFICO POTENZIALE INTERMOLECOLARE
04) - x=3:0.001:+8;
05) - x0=+3.5;
06) - y0=1;
07) - y=y0.*((x0./x).^ (12)-2.*((x0./x).^ 6));%espressione del potenziale
08) - plot(x,y,'red')
09) - grid on
10) - B=[x;y];
11) %Istruzioni per inserire i risultati in un file TEX
12) fid=fopen('pippo.tex','w');
13) fprintf(fid,'\n');
14) fprintf(fid,'%5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f \n',B);
15) fclose(fid);
```

Programma in ambiente Matlab "LennardJones.m" per il grafico della Forza intermolecolare

```
01) - delete(get(0,'children'));
02) - clear all
03) - %GRAFICO FORZA INTERMOLECOLARE
04) - x=3.382:0.001:+8;
05) - x0=+3.5;
06) - y0=1;
07) - y=12.*y0.*x0./x^ 2.*((x0./x)^ (11)-(x0./x)^ 5); %espressione della forza
08) - plot(x,y,'blue')
09) - grid on
10) - B=[x;y];
11) %Istruzioni per inserire i risultati in un file TEX
12) fid=fopen('pippo.tex','w');
13) fprintf(fid,'\n');
14) fprintf(fid,'%5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f %5.4f \n',B);
15) fclose(fid);
```

Dalla figura 8.15-2 si rileva che, per $r > r_0$ la forza attrattiva aumenta in valore assoluto e poi diminuisce gradatamente fino a diventare praticamente insensibile per distanze superiori a circa 10^{-6} cm. Si chiama *raggio della sfera di azione molecolare* la distanza massima a cui le azioni molecolari sono ancora sensibili. Viceversa la forza repulsiva aumenta sempre al diminuire di r , al disotto di r_0 .

La coesione rende conto della resistenza, che i corpi solidi oppongono tanto alle forze tendenti a diminuirne il volume, quanto a quelle che tendono ad aumentarlo. Quanto queste forze diventano eccessivamente grandi, il corpo si spezza.

La coesione esiste anche fra le molecole dei liquidi per i quali si possono mantenere le considerazioni precedenti. Nel caso dei gas, costituiti da molecole, che sono a distanza molto maggiore di r_0 , cioè al raggio di azione molecolare, la coesione è pressochè trascurabile: **i gas perfetti sono gas senza coesione.**

Le forze di coesione agiscono fra molecole della stessa specie. Molecole di specie diversa agiscono fra di loro con forze dette di adesione.

Se si prendono due oggetti diversi, supponiamo due solidi, e si applicano fortemente uno contro l'altro, essi *aderiscono*; occorre cioè un certo sforzo per separarli. Le molecole dell'uno e dell'altro si sono dunque portate a distanza inferiore ai loro raggi d'azione. Per poter osservare queste forze di adesione, è bene che i due corpi vengano posti a contatto secondo due superfici piane ben levigate.

L'adesione si manifesta anche fra solidi e liquidi e può essere messa in evidenza con l'esperienza seguente.

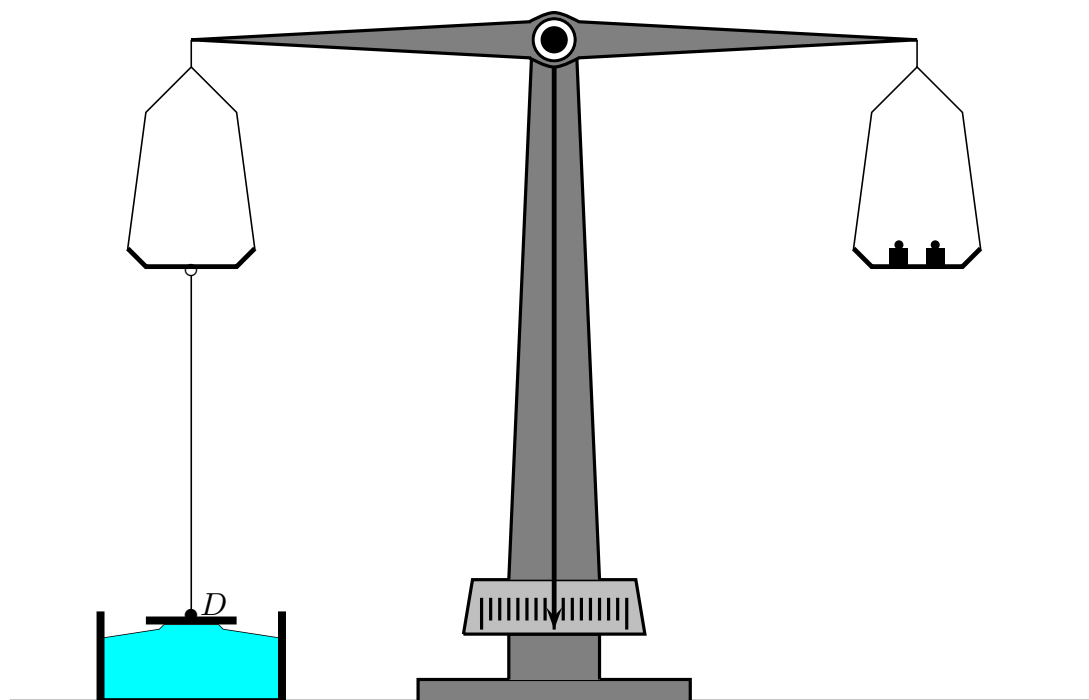


fig.8.15-3

Una vaschetta è situata sotto uno dei piatti della bilancia idrostatica (fig.8.15-3) e contiene un liquido, per esempio acqua. Al medesimo piatto è attaccato un disco metallico

D, ben digrassato, che poggia sulla superficie del liquido. Si può caricare l'altro piatto della bilancia con peso tanto da sollevare il disco, senza riuscire a distanziarlo dall'acqua; l'*adesione* fra l'acqua e il metallo impedisce il distacco. Se i pesi vengono convenientemente aumentati, il distacco avviene, ma il metallo resta bagnato: ciò prova che la adesione fra l'acqua e il metallo supera la coesione dell'acqua.

Usando un disco di cera, che non è bagnato dall'acqua (ovvero un disco di ferro e, come liquido, il mercurio) l'adesione si manifesta sempre, ma è inferiore alla coesione.

I due oggetti, disco e liquido, quando sono distaccati, risultano elettrizzati, a riprova che le forze molecolari sono intimamente dipendenti da fenomeni di natura elettrica.

L'adesione fra i gas e i solidi, ovvero fra i gas e i liquidi, è molto notevole. **Un solido immerso in un gas, viene ricoperto da una specie di pellicola superficiale di molecole gassose.** Se, per esempio, si scrive con un oggetto qualunque solido su una lastra di vetro, poi vi si alita sopra, il vapore d'acqua si condensa su tutta la superficie del vetro, ma non dove è passato l'oggetto; così lo scritto appare leggibile. Si pensa che il fenomeno sia dovuto all'alterazione della pellicola gassosa superficiale provocata dal passaggio dell'oggetto. Neppure nel vuoto più spinto, si riesce ad eliminare codesto strato superficiale gassoso; occorre per questo riscaldar fortemente nel vuoto gli oggetti che ne sono rivestiti. I solidi che hanno una grande superficie di contorno, come i corpi porosi, possono assorbire grandi quantità di gas. Per perfezionare il vuoto ottenibile con le pompe, si tiene appunto nell'ambiente da vuotare del carbone raffreddato energicamente, per esempio, con aria liquida.

8.16 - Tensione superficiale¹⁾

Le molecole dei corpi solidi e liquidi sono, per così dire, legate reciprocamente dalla coesione; invece i gas si comportano praticamente come se le loro molecole fossero completamente svincolate le une dalle altre.

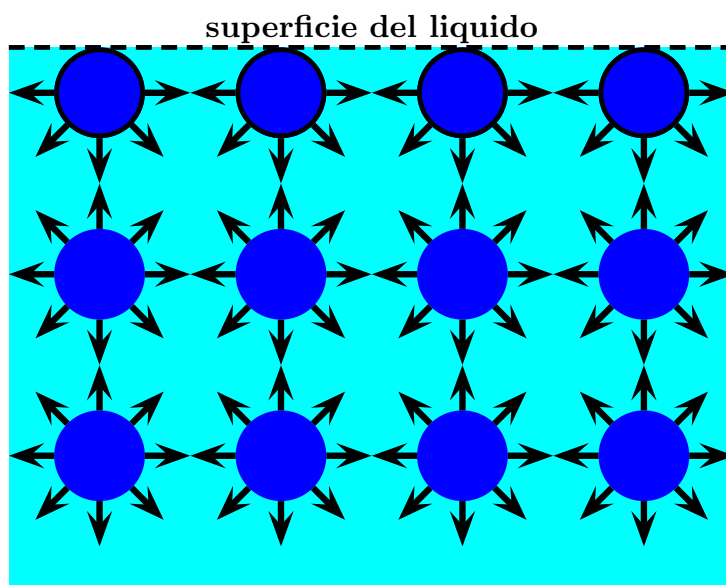


fig.8.16-1

¹⁾ Nello Carrara: Fisica - Regia Accademia Nvale, Livorno, 1940, pag.312.

Ogni molecola, appartenente ad un corpo solido o liquido, il cui baricentro dista dalla superficie di contorno più del raggio di azione, è circondata da tutte le parti da altre molecole, e quindi si può logicamente ammettere che venga sollecitata da esse simmetricamente ed egualmente in tutte le direzioni. Questa simmetria ed eguaglianza viene a mancare per quelle molecole i cui baricentri sono situati in uno strato superficiale di spessore inferiore al raggio di azione (vedi figura 8.16-1).

Le molecole stesse, per effetto della coesione con le molecole sottostanti, non completamente compensata dalla coesione con le molecole sovrastanti, vengono sollecitate da forze dirette verso l'interno del corpo. **In conseguenza lo strato superficiale deve premere contro il corpo, come se fosse una membrana elastica, con una pressione uniforme, detta pressione di coesione** (vedi figura 8.16-2).

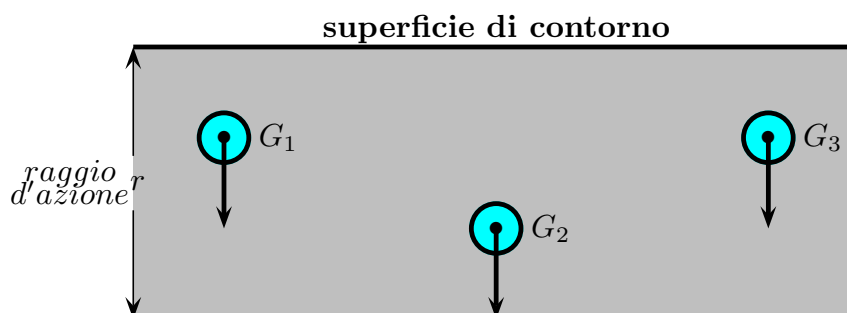


fig.8.16-2

Se la superficie di contorno separa il corpo considerato da un altro (si tratta per esempio della **superficie di separazione fra acqua e olio, fra vetro e olio, fra mercurio e aria** e così via), la pressione, con cui lo strato superficiale comprime il corpo, dipende anche dalla adesione che si manifesta fra le molecole dei due corpi a contatto e dalla eventuale diffusione delle molecole di un corpo fra quelle dell'altro. **In ogni punto della superficie del corpo, la pressione di coesione è dunque un vettore normale alla superficie stessa e diretta verso l'interno.**

La reale esistenza di una simile membrana superficiale può essere provata difficilmente, in modo diretto, nel caso dei solidi, che sono praticamente indeformabili; tuttavia se ne possono dare molte testimonianze indirette specialmente con i fenomeni di capillarità, di cui parleremo nei prossimi paragrafi. Invece la cosa è assai facile nel caso dei liquidi; basta ricordare fra i tanti, i seguenti fatti:

a) **I liquidi si raccolgono in gocce; versando del mercurio su di un tavolo si ottengono facilmente delle gocce, che, se sono di piccolo diametro appaiono perfettamente sferiche; se invece sono grandi, appaiono schiacciate per effetto del proprio peso, come se il mercurio fosse contenuto in una membrana elastica;**

b) **un ago, adagiato con cautela sulla superficie dell'acqua, non affonda, nonostante il suo elevato peso specifico, e quando affonda, va giù per la punta, come se avesse dovuto "bucare" la membrana; molti insetti (idrometre: per esempio i gerridi e le zanzare) di peso specifico maggiore dell'acqua, riescono a sostenersi sulla sua superficie nello stesso modo dell'ago;**

c) in un bicchiere si può versare un volume di acqua maggiore della capacità geometrica; l'acqua che ricolma il bicchiere, non si versa, perchè è trattenuta dalla membrana elastica superficiale, che si gonfia restando attaccata al bordo del bichiere.

Il paragone fra lo strato superficiale e una membrana elastica può anche andare oltre: non solo la membrana preme contro l'interno del corpo uniformemente con la *pressione di coesione*, ma **tende anche a contrarsi, a ridursi**; ciò è appunto dimostrato dalla sfericità delle gocce (la sfera è un solido che, a parità di volume, ha la minima superficie). Si deve dunque ammettere l'esistenza di una **tensione superficiale**.

Se si immagina di asportare dalla superficie del liquido una porzione della membrana, avente un contorno chiuso qualunque (figura 8.16-3), per impedire al contorno stesso di deformarsi, bisognerebbe applicare ad ogni elemento lineare Δl una forza \vec{F} normale all'elemento stesso, come in figura, tangente lla superficie e proporzionale a Δl :

$$\vec{F} = \vec{\tau} \Delta l. \tag{8.16.1}$$

Il rapporto $\vec{\tau} = \vec{F}/\Delta l$ da misurare in Newton/m, si chiama **coefficiente di tensione superficiale**. Esso è un vettore che ha la medesima grandezza in ogni punto della superficie, ed è tangente alla superficie nel punto che si considera.

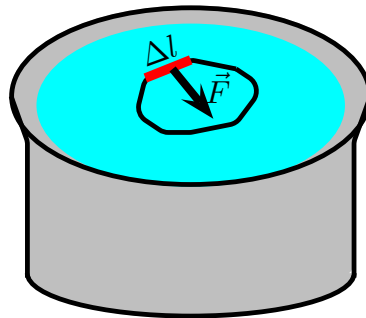


fig.8.16-3

8.17 - Contatto di tre corpi¹⁾

Finora ci siamo limitati a considerare la superficie di contorno di un solido o di un liquido che spesso è superficie di separazione di due corpi; acqua e aria, acqua e vetro, acqua e olio e così via.

Lasciamo cadere ora una goccia di olio sulla superficie libera che supporremo piana, di un distesa d'acqua. In figura 8.17-1 è rappresentata una sezione ottenuta su un piano verticale, passando per il centro della goccia.

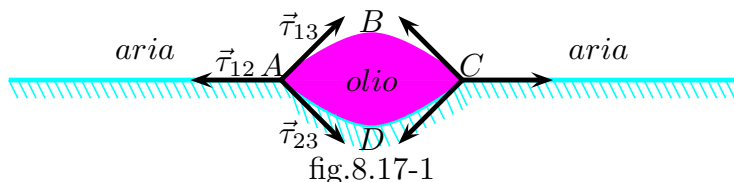


fig.8.17-1

¹⁾ Nello Carrara: Fisica - Regia Accademia Nvale, Livorno, 1940, pag.314.

Prendiamo in considerazione un punto qualunque per esempio il punto A , della linea di contatto dei tre corpi, aria, acqua e olio. Quel punto è sottoposto a tre tensioni superficiali, di grandezza: τ_{12} aria-acqua; τ_{13} aria-olio; τ_{23} acqua-olio.

All'equilibrio la somma vettoriale delle tre tensioni deve essere zero:

$$\tau_{12} + \tau_{13} + \tau_{23} = 0 \quad (8.17.1)$$

Ognuno delle tre tensioni deve avere la stessa grandezza in ogni punto della linea considerata; perciò questa linea, all'equilibrio, deve per simmetria essere una circonferenza; il diametro di tale circonferenza è determinato dalla precedente relazione.

Nel caso in cui τ_{12} fosse (in grandezza) maggiore della somma aritmetica di τ_{12} , τ_{23} , come accade appunto per l'olio e per l'acqua pura, il raggio della circonferenza dovrebbe teoricamente aumentare all'infinito, ma in realtà la goccia, al più, può distendersi in uno strato di spessore monomolecolare. Nel fatto, le gocce di olio si distendono sull'acqua fino a ridursi a spessori dell'ordine del millesimo di micron.

È possibile, per questa via, misurare il numero di Avogadro. Infatti, se si conosce il volume della goccia d'olio, che si è distesa sull'acqua in uno strato monomolecolare, e si misura l'estensione superficiale dello strato, se ne ricava subito lo spessore. Ammettendo che lo spessore, così valutato, sia eguale al diametro di una molecola e che le molecole siano a contatto, si ha modo di calcolare il numero delle molecole contenute nella goccia; inoltre il rapporto fra la massa della goccia e il numero delle molecole in essa contenuto, misura la massa di una sola molecola. Basta allora dividere in kg-molecola della sostanza di cui la goccia è costituita per la massa della molecola, per ottenere il numero di Avogadro. Sono stati trovati per questa via, valori in eccellente accordo con quello riportato $6.80 \cdot 10^{26}$.

In modo perfettamente identico a quello seguito per il caso di tre fluidi, si può studiare l'equilibrio lungo la linea di contatto di due fluidi e di un solido. Supponiamo, ad esempio, che dell'acqua sia contenuta in un recipiente di vetro: si sa che l'acqua bagna il vetro.

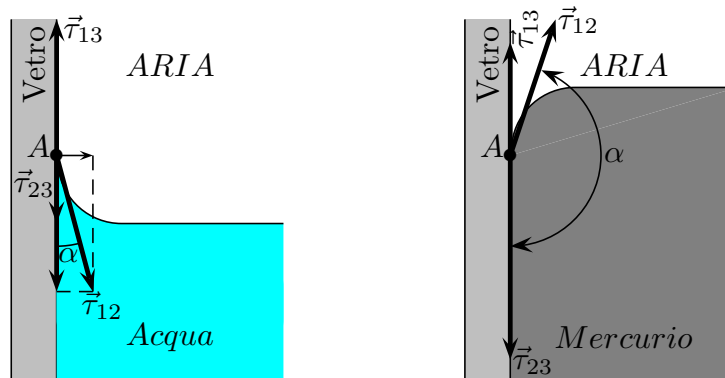


fig.8.17-2

Siano $\vec{\tau}_{12}$ la tensione superficiale aria-acqua (figura 8.17-2), $\vec{\tau}_{13}$ la tensione aria-vetro, $\vec{\tau}_{23}$ la tensione acqua-vetro. Per l'equilibrio nel punto A della linea di contatto, la risultante, somma vettoriale, delle tre tensioni deve essere normale al solido e diretta verso i fluidi. Codesta risultante, che tende a staccare il punto A dal vetro,, è equilibrata dalla adesione.

Nel caso considerato (liquido che bagna) $\vec{\tau}_{13}$ è la grandezza maggiore di $\vec{\tau}_{23}$, e quindi la configurazione della superficie libera del liquido deve essere come in figura.

Scriviamo quanto abbiamo affermato:

$$\vec{\tau}_{13} + \vec{\tau}_{23} + \vec{\tau}_{12} = \vec{R}. \quad (8.17.2)$$

Affinchè \vec{R} sia normale alla parete, occorre che la somma algebrica delle componenti delle tensioni, parallele alla parete, sia nulla:

$$\tau_{13} = \tau_{23} + \tau_{12} \cos \alpha; \quad (8.17.3)$$

quindi la superficie libera del liquido deve disporsi in modo che $\vec{\tau}_{12}$ formi, con il piano tangente alla parete nel punto A , un angolo α tale da soddisfare alla precedente relazione.

Se il liquido bagna si ha: $\alpha < 90^0$ (figura 8.17-2 a sinistra); quando $\alpha = 0$ si dice che il liquido bagna perfettamente. Se il liquido non bagna si ha $\alpha > 90^0$ (figura 8.17-2 a destra).

8.18 - Legge di Laplace - Capillarità - Legge di Jurin¹⁾

Nel caso in cui la superficie di contorno del corpo non sia piana, le tensioni superficiali danno luogo ad una pressione normale alla superficie stessa che chiameremo **pressione di curvatura** (da non confondere con la pressione di coesione), tanto maggiore, quanto più la superficie è curva.

Ci limiteremo a considerare il caso in cui la superficie sia sferica.

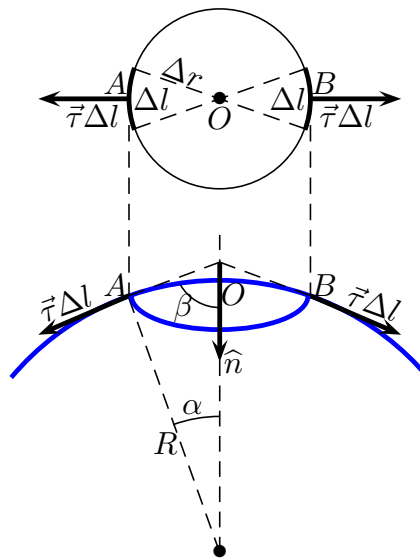


fig.8.18-1

Se O (fig.8.18-1) è un punto qualunque della superficie, isoliamo sulla superficie stessa una calotta sferica di centro O e raggio piccolissimo Δr . L'area della calotta, in prima approssimazione, è $\pi(\Delta r)^2$.

¹⁾ Nello Carrara: Fisica - Regia Accademia Nvale, Livorno, 1940, pag.316.

Un elemento lineare Δl della circonferenza che contorna la calotta è sollecitato da una forza $\tau \Delta l$ che tende a spianare la calotta, cioè a ridurne la superficie (perchè $\vec{\tau}$ si considera diretta verso l'esterno). La risultante di questa forza con quella cui è sottoposto l'elemento lineare diametralmente opposto, è diretta secondo la normale \hat{n} alla superficie in O , passa per O ed ha l'intensità:

$$2\tau \Delta l \cos \beta = 2\tau \Delta l \sin \alpha, \quad (8.18.1)$$

dove β è l'angolo fra $\vec{\tau}$ e \hat{n} , ed α l'angolo fra il raggio della calotta passante per A e il raggio passante per O .

Eseguendo la stessa composizione per tutte le coppie di elementi lineari Δl che si possono staccare sulla circonferenza che contorna la calotta e sommando le risultanti, si ottiene:

$$\sum 2\tau \Delta l \sin \alpha = 2\tau \sin \alpha \sum \Delta l = 2\pi\tau \sin \alpha \Delta r \quad (8.18.2)$$

(la somma è stata estesa a mezza circonferenza).

Dividendo il risultato ottenuto per l'area della calotta $\pi(\Delta r)^2$, si ottiene la pressione:

$$p = \frac{2\tau \sin \alpha}{\Delta r} \quad (8.18.3)$$

Se si indica con R il raggio della calotta, si ha anche, con approssimazione tanto migliore, quanto più Δr e quindi α , sono piccoli:

$$R = \frac{\Delta r}{\alpha} = \frac{\Delta r}{\sin \alpha}; \quad (8.18.4)$$

quindi, sostituendo nella formula precedente il valore ora trovato, si ottiene per la pressione l'espressione semplice:

$p = \frac{2\tau}{R}$	Formula di Laplace	(8.18.5)
-----------------------	---------------------------	----------

La formula di Laplace ora trovata e le considerazioni svolte nel paragrafo precedente sul contatto dei tre corpi, consentono di dar ragione del **fenomeno di capillarità** molto facilmente.

Immergendo un cannello di vetro lungo e sottile nell'acqua di una vaschetta, si osserva che, all'equilibrio, il livello dell'acqua nel cannello è superiore al livello dell'acqua nella vaschetta (fig.8.18-2), e che la superficie dell'acqua nel cannello è concava e presenta la concavità verso l'alto; se il cannello è sottile, si tratta abbastanza approssimativamente di una calotte sferica. Indicando con α l'angolo fra la direzione di τ e la parete, all'equilibrio, il raggio di curvatura della calotta è

$$R = \frac{r}{\cos \alpha} \quad (8.18.6)$$

essendo r il raggio del cannello. Quindi la pressione di curvatura è:

$$p = \frac{2\tau \cos \alpha}{r}. \quad \text{Pressione di Curvatura} \quad (8.18.7)$$

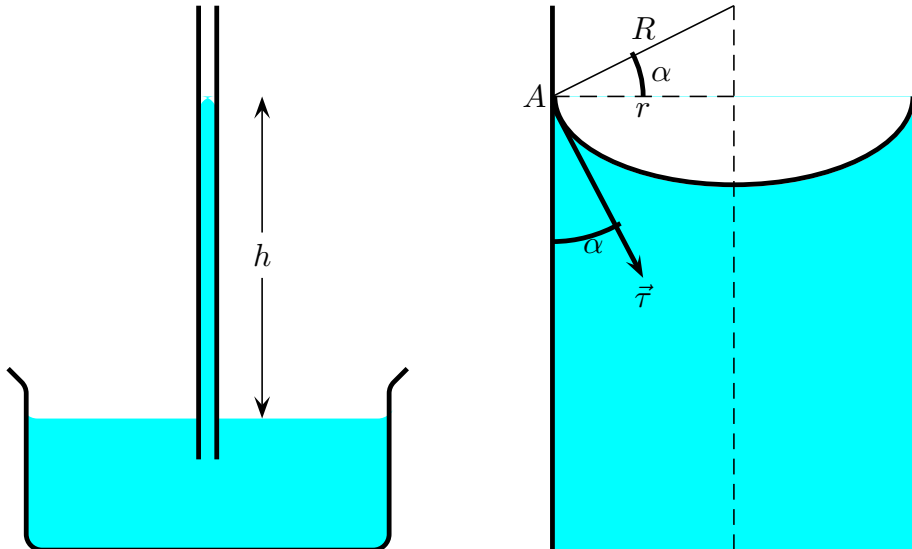


fig.8.18-2

La pressione, data dall'espressione (8.18.7), cui è dovuto il sollevamento del liquido, deve fare appunto equilibrio alla pressione di gravità della colonna di liquido sollevata di altezza h ; quindi ricordando che la pressione dovuta alla gravità è ρgh essendo ρ la densità del liquido, si ottiene **la legge di Jurin**²⁾

$$\frac{2\tau \cos \alpha}{r} = \rho gh. \quad \text{Legge di Jurin} \quad (8.18.8)$$

Poichè né τ , né α dipendono dal raggio del cannello, si conclude che l'altezza h è tanto maggiore, quanto minore è il raggio del cannello, ciò che è ottimamente confermato dall'esperienza.

Alle stesse conclusioni si arriva nel caso di un liquido come il mercurio, che non bagna il cannello; soltanto che allora, invece di un sollevamento si ha una depressione.

²⁾ James Jurin (London, 1684 - 1750) - fisico britannico.

Alcuni valori della Tensione Superficiale

Liquido	τ (N/m)	Temperatura $^{\circ}C$
Alcol etilico	0.0223	20
Acqua	0.0756	0
Acqua	0.0728	20
Acqua	0.0589	100
Acqua saponata	0.0370	20
Glicerina	0.0631	20
Mercurio	0.465	20
Olio di oliva	0.0320	20
Sangue intero	0.058	37
Oro (fuso)	1.000	1070

Grafichiamo la legge di Jurin nel caso dell'acqua; I dati sono:

$$\rho_{acqua} = 998.2 \text{ kg/m}^3 \quad (T = 20 \text{ }^{\circ}C); \quad g = 9.80 \text{ m/s}^2; \quad \tau = 0.0728 \text{ N/m}; \quad \alpha = 0. \quad (8.18.9)$$

Dalla (8.18.8) si ha:

$$h = \frac{2\tau \cos \alpha}{\rho g r} = \frac{2 \cdot 0.0728}{998.2 \cdot 9.80 \cdot r} = \frac{1.4884 \cdot 10^{-5}}{r}$$

Legge di Jurin (8.18.10)

Grafico della legge di Jurin $h=f(r)$

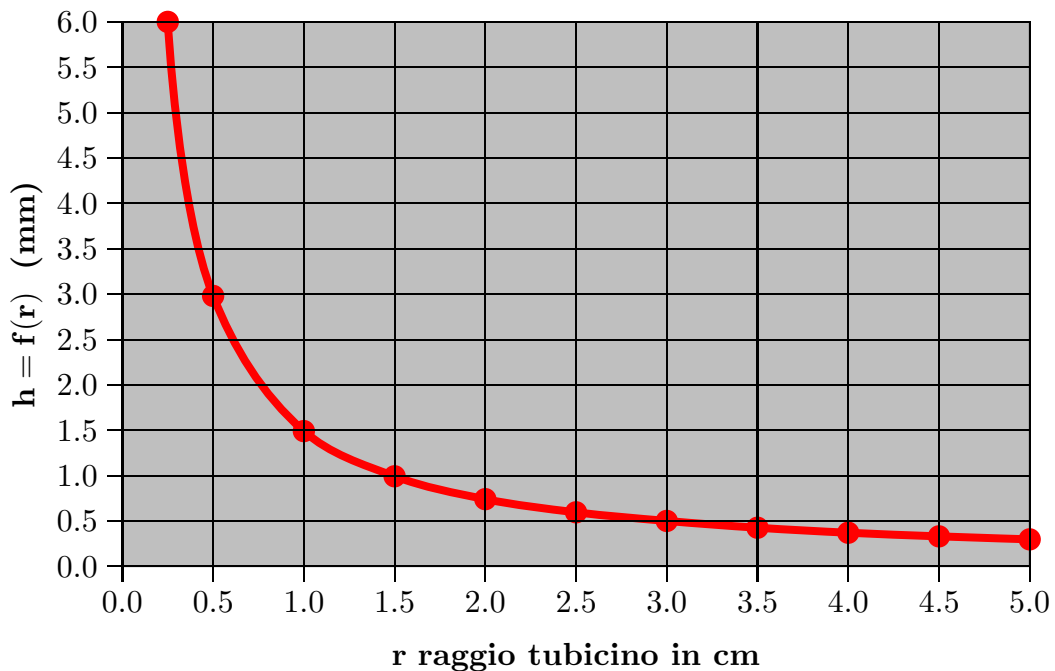


fig.8.18-3

8.19 - Lamine liquide¹⁾

I fenomeni di tensione superficiale si prestano ad esperienze molto interessanti, eseguibili con lamine liquide, quali le comuni bolle di sapone.

Immergendo in acqua saponata un anello circolare di ferro e ritraendolo si osserva che si è distesa nel suo interno una lamina liquida sottilissima. Un filo di cotone a può muoversi in seno alla lamina, assumendo le configurazioni più irregolari; ma se si rompe la lamina in una delle due regioni, il filo viene tirato dalla tensione della parte rimanente e si dispone perfettamente ad arco di cerchio b , perchè in ogni punto la tensione superficiale deve essere eguale e normale al filo (vedi figura 8.19-1).

Se si immergono in acqua saponata due anelli di eguale diametro sovrapposti, e poi, dopo averli estratti si separano, si osserva che una lamina li unisce e tende a riportarli a contatto. È relativamente facile misurare la grandezza della forza F con cui codesta lamina agisce sui due anelli; basta sospenderne uno al piatto di una bilancia ed equilibrare. Indicando con τ' la intensità della forza di richiamo che agisce sulla unità di lunghezza dell'anello sospeso, si ha, evidentemente:

$$F = 2\pi r \tau' \quad (8.19.1)$$

La lamina liquida ha però due pagine e su ciascuna agisce la tensione superficiale τ ; onde $\tau' = 2\tau$ e:

$$F = 4\pi r \tau \quad (8.19.2)$$

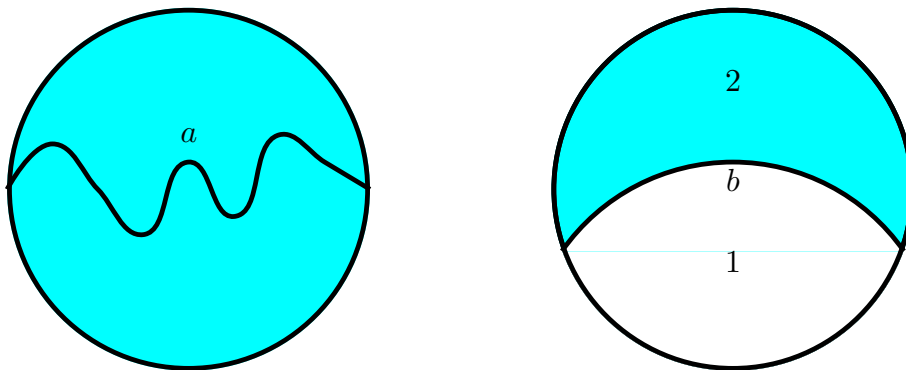


fig.8.19-1

¹⁾ Nello Carrara: Fisica - Regia Accademia Nvale, Livorno, 1940, pag.319.

Appendice al Capitolo 8

8A.1 - Biografia di Archimede^{1),2),3)}

Nato nel 287 a.C. a Siracusa (che nel III secolo a.C. era una delle più grandi città del Mediterraneo), Archimede era parente ed amico di Gerone II, di pochi anni più anziano di lui, che nel 271 era diventato tiranno di Siracusa. Il padre di Archimede, Fidia (da non confondere con il famoso scultore), fu uno studioso di astronomia: a lui egli stesso attribuisce una precisa determinazione del rapporto fra il diametro del Sole e quello della Luna. Fidia gli insegnò i primi elementi di matematica, che Archimede perfezionò in seguito ad Alessandria d'Egitto, la capitale intellettuale del mondo di allora. Qui egli si recò verso il 232 a.C., poco meno di trent'anni dopo che vi si era trasferito Teocrito (Siracusa, 315 a.C. - 260 a.C. circa), il più grande poeta di Siracusa, fondatore del genere bucolico. Da parte sua Archimede rifiutò di stabilirsi in Egitto, ma ad Alessandria divenne amico degli scienziati della generazione immediatamente successiva al matematico Euclide, in particolare del geografo Eratostene di Cirene, al quale dedicò il *Metodo*,⁴⁾ dell'astronomo Conone di Samo, per cui dimostrò sempre grandissima stima, e di Dositteo, al quale dedicò il trattato *Sulla sfera e il cilindro* e pure *Spirali e Conoidi e sferoifi*. Con questi colleghi Archimede scambiò lettere dalla Sicilia, sottoponendo loro i propri lavori prima di stenderne la redazione definitiva, perchè li discutessero e gli suggerissero eventuali modificazioni e perfezionamenti.

Il genio di Archimede si rivelò in scoperte importantissime, alcune delle quali, pur risalenti in parte a prima di lui, gli furono interamente assegnate dalla leggenda. Hanno fondamenti storici sicuri la costruzione di alcune moderne macchine da guerra, la scoperta del principio della leva e della legge relativa ai corpi immersi in un liquido.

Le opere di Archimede erano scritte in dialetto dorico, allora parlato a Siracusa (mentre ad Alessandria si usava l'attico letterario), ma la lingua venne rimaneggiata da chi le ha trasmesse nei secoli successivi.

Le opere di Archimede abbracciano vari campi della scienza, a partire dall'aritmetica, alla quale è dedicato il curioso libretto *Arenario*. In esso Egli dimostra la possibilità di calcolare e di scrivere numeri enormi, come quello dei granelli di sabbia necessari per riempire l'intero globo celeste, alle più diverse figure di geometria, come le *Spirali*, chiamate tutt'oggi di "Archimede". Quanto alla quadratura del cerchio e della parabola, lo scienziato stabilì per primo con buona approssimazione il valore di π (pi greco).

Il trattato più importante giunto a noi sono i due libri *Sulla sfera e il cilindro*, dedicati al confronto fra il volume della sfera e quello del cilindro circoscritto.

L'opera *Sui galleggianti* pone le basi scientifiche dell'intera idrostatica.

Archimede mise la propria perizia tecnica a disposizione della sua città, sia in pace che in guerra. Non istituì mai una scuola, e coltivò la scienza piuttosto con l'animo da

¹⁾ Mario Geymonat: Il grande Archimede - Sandro Teti Editore, 2012.

²⁾ Lucio Russo: Archimede un grande scienziato antico - Carocci Editore, 2019.

³⁾ Pasquale Midolo: Archimede il suo tempo - Arnaldo Lombardi Editore, 1989.

⁴⁾ Quest'opera straordinaria è il testamento scientifico di Archimede, il luogo nel quale il genio spiega il suo sistema per indagare la natura, che oggi appare di una modernità strabiliante.

ingegnere che con quello del professore. È nota in particolare la sua attiva collaborazione alla difesa di Siracusa dall'assedio posto dal generale romano Marco Claudio Marcello fra il 213 e il 212 a.C. Alla sua conclusione, nell'inverno del 212, Archimede venne ucciso da un soldato nemico.

Fine del Cap. 8